PELABELAN *L(2,1)* PADA GRAF BUKU SEGITIGA, GRAF KERUCUT, GRAF TADPOLE DAN GRAF DUMBBELL SERTA GRAF HASIL IDENTIFIKASI TITIK DARI GRAF BUKU SEGITIGA DAN GRAF LINTASAN

SKRIPSI

Oleh

Hafif Komarullah

NIM 161810101067

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS JEMBER

2020

PELABELAN *L(2,1)* PADA GRAF BUKU SEGITIGA, GRAF KERUCUT, GRAF TADPOLE DAN GRAF DUMBBELL SERTA GRAF HASIL IDENTIFIKASI TITIK DARI GRAF BUKU SEGITIGA DAN GRAF LINTASAN

SKRIPSI

diajukan guna memenuhi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan studi pada Program Studi Matematika (S1) dan mencapai gelar Sarjana Sains

Oleh

Hafif Komarullah
NIM 161810101067

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER
2020

PERSEMBAHAN

Dengan menyebut nama Allah yang Maha Pengasih dan Maha Penyayang serta sholawat dan salam selalu tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW, penulis persembahkan skripsi ini sebagai ungkapan kebahagiaan dan rasa terima kasih kepada:

1. Kedua orang tuaku Ayahanda Sumarwi dan Ibunda Ami yang telah mendukung dan memberikan doa, kasih sayang, motivasi, dan senyuman yang selalu menguatkan disetiap perjalanan hidup saya;
2. Almagfurlah KH. Yusuf Muhammad yang telah memberikan motivasi dari catatan-catatan nasehatnya;
3. Ikhsanul Halikin, S.Pd., M.Si. selaku Dosen Pembimbing Utama dan Dr. Kiswara Agung, S.Si., M.Kom. selaku Dosen Pembimbing Anggota;
4. Seluruh guru dan dosen yang telah memberikan banyak ilmu dan membimbing dengan penuh kesabaran;
5. Almamater Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember, SMAU BPPT Darus Sholah Jember, SMP Negeri 1 Jenggawah, dan SD Negeri 06 Jenggawah.

MOTTO

"Bila kau tak tahan lelahnya belajar, maka kau harus tahan menanggung perihnya kebodohan"[1]

"Wama Al-lladzdzatu Illa Ba'da At-Ta'abi, tidak ada kenikmatan kecuali setelah bersusah payah"

"Dadi opo wae ojo sampek lali mulang, mulang keluargane, lingkungane, lan masyarakat sekitare"[2]

[1] Imam Syafi'i
[2] KH. Yusuf Muhammad

PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Hafif Komarullah

NIM : 161810101067

menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang berjudul "Pelabelan L(2,1) pada Graf Buku Segitiga, Graf Kerucut, Graf Tadpole dan Graf Dumbbell serta Graf Hasil Identifikasi Titik dari Graf Buku Segitiga dan Graf Lintasan" adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali kutipan yang sudah saya sebutkan sumbernya, belum pernah diajukan pada institusi mana pun, dan isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa ada tekanan dan paksaan dari pihak mana pun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, Januari 2020

Yang menyatakan,

Hafif Komarullah

NIM 161810101067

SKRIPSI

PELABELAN *L(2,1)* PADA GRAF BUKU SEGITIGA, GRAF KERUCUT, GRAF TADPOLE DAN GRAF DUMBBELL SERTA GRAF HASIL IDENTIFIKASI TITIK DARI GRAF BUKU SEGITIGA DAN GRAF LINTASAN

Oleh

Hafif Komarullah
NIM 161810101067

Pembimbing

Dosen Pembimbing Utama	:	Ikhsanul Halikin, S.Pd., M.Si.
Dosen Pembimbing Anggota	:	Dr. Kiswara Agung, S.Si., M.Kom.

PENGESAHAN

Skripsi berjudul ”Pelabelan *L(2,1)* pada Graf Buku Segitiga, Graf Kerucut, Graf Tadpole dan Graf Dumbbell serta Graf Hasil Identifikasi Titik dari Graf Buku Segitiga dan Graf Lintasan” telah diuji dan disahkan pada:

hari, tanggal :

tempat : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Tim Penguji:

Ketua,	Anggota I,
Ikhsanul Halikin, S.Pd., M.Si. NIP. 19861014 201404 1 001	Dr. Kiswara Agung, S.Si., M.Kom. NIP. 19720907 199803 1 003
Anggota II,	Anggota III,
Dr. Kristiana Wijaya, S.Si., M.Si. NIP. 19740813 200003 2 004	Dr. Mohamat Fatekurohman, S.Si., M.Si. NIP. 19690606 199803 1 001

Mengesahkan

Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Universitas Jember,

Drs. Achmad Sjaifullah, M.Sc, Ph.D.
NIP. 19591009 198602 1 001

RINGKASAN

Pelabelan L(2,1) pada Graf Buku Segitiga, Graf Kerucut, Graf Tadpole dan Graf Dumbbell serta Graf Hasil Identifikasi Titik dari Graf Buku Segitiga dan Graf Lintasan; Hafif Komarullah, 161810101067; 2020: 66 halaman; Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Pelabelan suatu graf adalah pemetaan anggota-anggota graf yaitu titik, sisi ataupun keduanya ke bilangan bulat non negatif dengan kondisi tertentu. Pelabelan graf berdasarkan domain pemetaannya dibedakan menjadi pelabelan titik, pelabelan sisi, dan pelabelan total.

Griggs dan Roberts pada tahun 1992 memperkenalkan konsep baru dari pelabelan titik yang evaluasinya berdasarkan jarak titik pada suatu graf G. Pelabelan tersebut diberi nama pelabelan $L(2,1)$ yang didefinisikan sebagai pemetaan himpunan titik di G ke bilangan bulat tak negatif sedemikian sehingga mutlak dari selisih label dari dua titik adalah minimal dua untuk titik yang berjarak satu dan minimal satu untuk titik yang berjarak dua. Jika f adalah fungsi pelabelan $L(2,1)$ $f : V \rightarrow \{0, 1, 2, ...k\}$, maka k adalah *span* dari pelabelan $L(2,1)$. *Span* adalah nilai label terbesar dari pelabelan $L(2,1)$. Nilai minimal *span* pada graf G dinotasikan dengan $\lambda_{(2,1)}(G)$.

Pada penelitian ini akan, akan dicari nilai minimal *span* atau $\lambda_{(2,1)}$ pada graf buku segitiga ($K_{1,1,t}$), graf kerucut ($C_{m,o}$), graf *tadpole* ($T_{m,n}$), graf *dumbbell* ($D_{m,l,n}$) serta graf hasil identifikasi titik dari graf buku segitiga dan graf lintasan $K_{1,1,t} \bigodot P_n$. Pada graf buku segitiga ($K_{1,1,t}$) untuk $t \geq 1$ diperoleh $\lambda_{(2,1)}(K_{1,1,t}) = t + 3$, sedangkan pada graf kerucut ($C_{m,o}$) untuk $m \geq 3$ diperoleh $\lambda_{(2,1)}(C_{m,o}) = o + 5$. Selanjutnya untuk graf *tadpole*$(T_{m,n})$ untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 1$ diperoleh $\lambda_{(2,1)}(T_{m,n}) = 4$, sedangkan untuk graf dumbbell diperoleh $\lambda_{(2,1)}(D_{m,l,n}) = 4$. Kemudian untuk graf $K_{1,1,t} \bigodot P_n$ diperoleh $\lambda_{(2,1)}(K_{1,1,t} \bigodot P_n) = t + 3$.

Selain itu, pada penelitian ini juga akan membuat program untuk mendapatkan nilai minimal span dari pelabelan $L(2,1)$ pada graf buku segitiga ($K_{1,1,t}$), graf kerucut ($C_{m,o}$), graf *tadpole* ($T_{m,n}$), graf *dumbbell* ($D_{m,l,n}$) serta graf hasil identifikasi titik dari graf buku segitiga dan graf lintasan $K_{1,1,t} \bigodot P_n$. Pada penelitian ini didapatkan program. Program tersebut dapat digunakan dengan cara menginputkan jumlah titik pada kelas graf yang akan dicari nilai minimal *span*.

PRAKATA

Puji syukur kehadirat Allah SWT atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul ”Pelabelan *L(2,1)* pada Graf Buku Segitiga, Graf Kerucut, Graf Tadpole dan Graf Dumbbell serta Graf Hasil Identifikasi Titik dari Graf Buku Segitiga dan Graf Lintasan”. Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan pendidikan strata satu (S1) pada Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Penetahuan Alam Universitas Jember.

Penyusunan skripsi ini tidak lepas dari bantuan berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan terima kasih kepada:

1. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
2. Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
3. Ikhsanul Halikin, S.Pd., M.Si. selaku Dosen Pembimbing Utama dan Dr. Kiswara Agung, S.Si., M.Kom. selaku Dosen Pembimbing Anggota yang telah meluangkan waktu, pikiran, dan perhatian dalam penulisan skripsi ini;
4. Dr. Kristiana Wijaya, S.Si., M.Si. selaku Dosen Penguji I dan Dr. Mohamad Fatekurohman, S.Si., M.Si. selaku Dosen Penguji II yang telah memberikan kritik dan saran yang membangun dalam penyempurnaan skripsi ini;
5. Dosen dan karyawan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
6. Ayahanda tercinta Sumarwi dan Ibunda Ami yang selalu memberikan cinta kasihnya, doa tiada henti, semangat dan motivasi untuk tetap berjuang dalam penyelesaian skripsi ini;
7. Almagfurlah KH. Yusuf Muhammad yang telah memberikan motivasi dari catatan-catatan nasehatnya;
8. Kyai Ahmad Nafi’ yang senantiasa memberikan semangat;
9. Teman-teman di Pondok Pesantren Raden Rahmat Sunan Ampel;
10. Semua pihak yang telah membantu terselesaikannya skripsi ini.

Semoga bantuan, bimbingan, dan dorongan yang telah diberikan dicatat sebagai amal baik oleh Allah SWT dan mendapat balasan yang sesuai dari-Nya. Penulis juga menerima segala kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan skripsi ini. Akhirnya penulis berharap, semoga skripsi ini dapat bermanfaat.

Jember, Januari 2020

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

BAB 1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori graf adalah bagian ilmu matematika yang mempunyai banyak terapan dalam kehidupan sehari-hari. Dalam aplikasinya, suatu objek direpresentasikan sebagai titik, dan kaitan antar objek direpresentasikan sebagai garis. Teori graf diperkenalkan pertama kali oleh Leonhard Euler pada tahun 1736 untuk memecahkan permasalahan Jembatan Konisberg. Permasalahan tersebut adalah bagaimana membuktikan bahwa setiap orang yang melewati jembatan tersebut dan ingin kembali ke tempat awal keberangkatan tidak mungkin melewati setiap jembatan hanya satu kali. Euler menyelesaikan permasalahan tersebut dengan merepresentasikan daratan sebagai titik dan jembatan sebagai garis. Setelah terpecahkannya permasalahan Jembatan Konisgberg, teori graf semakin berkembang hingga saat ini.

Salah satu topik teori graf yang berhasil dikembangkan adalah pelabelan graf. Pelabelan graf adalah pemetaan anggota-anggota graf ke bilangan bulat non negatif dengan kondisi tertentu. Pelabelan graf pertama kali diperkenalkan oleh Sadlacek pada tahun 1963. Pelabelan graf terdiri dari tiga macam yaitu pelabelan titik, pelabelan sisi, dan pelabelan total. Penggunaan konsep pelabelan graf mempunyai peranan yang sangat penting, terutama pada penentuan frekuensi pada pemancar radio.

Permasalahan penentuan frekuensi pada pemancar radio adalah pemberian frekuensi dengan selisih tertentu pada pemancar radio yang saling berdekatan. Fred Roberts dan Jerrold Griggs adalah orang pertama yang berencana menggunakan bilangan non negatif untuk mewakili saluran radio. Griggs dan Yeh kemudian mempublikasikan pelabelan $L(2,1)$ yang mengharuskan titik-titik yang memiliki panjang lintasan satu harus mempunyai selisih label minimal dua, dan titik yang memiliki panjang lintasan dua harus mempunyai selisih label minimal satu. Label terbesar dari pelabelan $L(2,1)$ disebut *span*.

Peneliti sebelumnya telah melakukan penelitian mengenai pelabelan $L(2, 1)$. Andrew Lum pada tahun 2007 meneliti tentang nilai minimal *span* pada graf *cycle* dan graf lintasan. Lina Nikmatul Karimah pada tahun 2016 meneliti tentang nilai minimal *span* pada graf *super cycle* $SC_{(n,r)}$. Fatimah, Sudarsana, dan Musdalifah pada tahun 2016 meneliti tentang pelabelan $L(2, 1)$ pada graf kipas, graf roda, graf teratai, dan operasi beberapa kelas graf. Yuri Sagala dan Susiana pada tahun 2018 meneliti tentang nilai minimal *span* pada graf *sierpinski*. Berdasarkan penelitian sebelumnya maka peneliti akan melakukan penelitian yang sama yaitu pelabelan $L(2, 1)$ pada graf yang berbeda. Graf tersebut adalah buku segitiga ($K_{1,1,t}$), graf kerucut ($C_{m,o}$), graf *tadpole* ($T_{m,n}$), graf *dumbbell*($D_{m,l,n}$) serta graf hasil identifikasi titik dari graf buku segitiga dan graf lintasan $K_{1,1,t} \odot P_n$. Peneliti juga akan membuat program yang dapat digunakan untuk mencari nilai minimal *span* dan nilai label pada setiap titik dari graf buku segitiga ($K_{1,1,t}$), graf kerucut ($C_{m,o}$), graf *tadpole* ($T_{m,n}$), graf *dumbbell*($D_{m,l,n}$) serta graf hasil identifikasi titik dari graf buku segitiga dan graf lintasan $K_{1,1,t} \odot P_n$.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang dapat dirumuskan masalah sebagai berikut.

a. Berapa nilai minimal *span* dari pelabelan $L(2, 1)$ pada graf buku segitiga ($K_{1,1,t}$), graf kerucut ($C_{m,o}$), graf *tadpole* ($T_{m,n}$), graf *dumbbell* ($D_{m,l,n}$) serta graf hasil identifikasi titik dari graf buku segitiga dan graf lintasan $K_{1,1,t} \odot P_n$?

b. Bagaimana membuat program untuk menentukan nilai minimal *span* dan pola pelabelan titik dari pelabelan $L(2, 1)$ pada graf buku segitiga ($K_{1,1,t}$), graf kerucut ($C_{m,o}$), graf *tadpole* ($T_{m,n}$), graf *dumbbell* ($D_{m,l,n}$) serta graf hasil identifikasi titik dari graf buku segitiga dan graf lintasan $K_{1,1,t} \odot P_n$?

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut.

a. Mendapatkan nilai minimal *span* dari pelabelan $L(2,1)$ pada graf buku segitiga ($K_{1,1,t}$), graf kerucut ($C_{m,o}$), graf *tadpole* ($T_{m,n}$), graf *dumbbell* ($D_{m,l,n}$) serta graf hasil identifikasi titik dari graf buku segitiga dan graf lintasan $K_{1,1,t} \bigodot P_n$.

b. Membuat program dengan bantuan matlab untuk menentukan nilai minimal *span* dan pola pelabelan titik dari pelabelan *L(2,1)* pada graf buku segitiga ($K_{1,1,t}$), graf kerucut ($C_{m,o}$), graf *tadpole* ($T_{m,n}$), graf *dumbbell* ($D_{m,l,n}$) serta graf hasil identifikasi titik dari graf buku segitiga dan graf lintasan $K_{1,1,t} \bigodot P_n$.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari hasil penelitian ini adalah sebagai berikut.

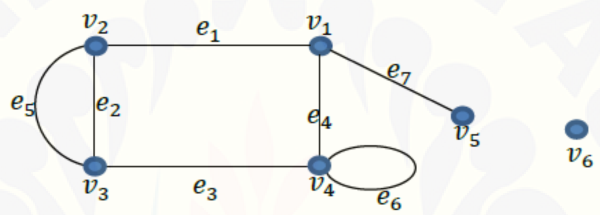
a. Memberikan referensi tambahan mengenai nilai minimal *span* dari pelabelan $L(2,1)$ pada graf buku segitiga ($K_{1,1,t}$), graf kerucut ($C_{m,o}$), graf *tadpole* ($T_{m,n}$), graf *dumbbell* ($D_{m,l,n}$) serta graf hasil identifikasi titik dari graf buku segitiga dan graf lintasan $K_{1,1,t} \bigodot P_n$.

b. Adanya program dapat mempermudah dan mempercepat pencarian nilai minimal *span* dan pola pelabelan titik dari pelabelan $L(2,1)$ pada graf buku segitiga ($K_{1,1,t}$), graf kerucut ($C_{m,o}$), graf *tadpole* ($T_{m,n}$), graf *dumbbell* ($D_{m,l,n}$) serta graf hasil identifikasi titik dari graf buku segitiga dan graf lintasan $K_{1,1,t} \bigodot P_n$.

BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Konsep Dasar Graf

Graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E) dengan V adalah himpunan berhingga tak kosong dari titik-titik dan E adalah himpunan yang boleh kosong dari pasangan tak terurut (u, v) untuk $u, v \in V(G)$, yang disebut sebagai sisi. Banyaknya titik yang berada di V disebut *order* G dan banyaknya sisi di E disebut *size* G (Chartrand dan Lesniak, 1996). Gambar 2.1 merupakan contoh graf G dengan 6 titik dan 7 sisi.



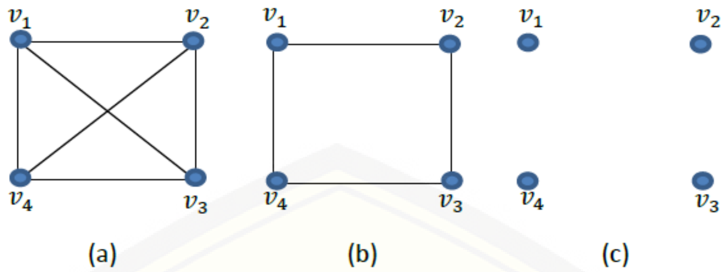
Gambar 2.1 Graf G dengan 6 titik dan 7 sisi

Titik u dan v dikatakan terhubung jika terdapat sisi yang menghubungkan kedua titik tesebut. Titik yang tidak terhubung dengan titik-titik yang lainnya disebut titik terisolasi *(isolated vertex)*. Titik u dan v dikatakan bertetangga (*adjacent*) jika u dan v dihubungkan oleh sisi $e = (u, v)$. Titik u dikatakan bersisian (*incident*) dengan sisi e jika titik u adalah titik ujung dari sisi e. Himpunan tetangga dari suatu titik u dinotasikan dengan $N_{G(u)}$ atau N_u. Sebuah sisi e pada graf G disebut *loop* jika sisi e menghubungkan titik u pada graf G dengan dirinya sendiri. Dalam suatu graf, apabila terdapat lebih dari satu sisi yang menghubungkan dua titik yang sama, maka sisi-sisi tersebut dinamakan sisi rangkap (Harsfield dan Ringel, 1994). Derajat dari suatu titik u pada graf G yang dinotasikan dengan $d(u)$ adalah banyaknya sisi yang bersisian dengan titik u. Jika suatu titik mempunyai derajat satu, maka titik tersebut disebut daun atau anting (Budayasa, 2007). Graf pada Gambar 2.1 menunjukkan bahwa titik v_1 bertetangga dengan titik v_2, v_4 dan v_5, titik v_2 bertetangga dengan titik v_3 dan v_1, titik v_3 bertetangga dengan titik v_2 dan v_4, titik v_4 bertetangga dengan titik v_1 dan v_3, dan titik v_5 bertetangga dengan titik v_1. Sisi e_1 bersisian dengan titik v_1 dan titik v_2, sisi e_2 bersisian dengan titik v_2 dan titik v_3, sisi e_3 bersisian dengan titik v_3 dan titik v_4, sisi e_4 bersisian dengan titik v_1 dan titik v_4, sisi e_5 bersisian dengan titik v_2 dan titik v_3, dan sisi e_7 bersisian dengan titik v_1 dan titik v_5, sisi e_6 merupakan loop, sisi e_5, sisi e_2 merupakan sisi rangkap, titik v_6 merupakan titik terisolasi, $d(v_1) = 3, d(v_2) = 2, d(v_3) = 2, d(v_4) = 4, d(v_5) = 1$, dan $d(v_6) = 0$.

Sebuah jalan *walk* merupakan sebuah barisan titik dan sisi secara bergantian berbentuk $u_0, e_1, u_1, e_2, ..., e_k, u_k$, untuk setiap sisi $e_i = u_{i-1}ui$ dengan $i \in [0, k]$. Suatu jalan dikatakan sebagai jalan tertutup jika titik awal sama dengan titik akhir $(u_0 = u_k)$. Jika pada suatu jalan semua sisinya berbeda satu sama lainnya, maka jalan tersebut disebut jejak (*trail*). Jika pada suatu jalan semua titiknya berbeda, maka jalan tersebut disebut lintasan (*path*). Sirkuit (*circuit*) adalah jejak tertutup yang tidak memiliki sisi berulang tetapi mungkin memiliki titik berulang. Jumlah sisi yang ada pada sebuah jalan disebut dengan panjang. Jarak (*distance*) dari titik u ke titik v di G adalah panjang lintasan terpendek dari titik u ke titik v yang dinotasikan dengan $d(u, v)$.

Graf G dikatakan graf terhubung *(connected)* apabila untuk setiap dua titiknya terdapat lintasan (Chartrand dan Oelerman, 1993). Graf sederhana adalah graf yang tidak memuat sisi rangkap dan *loop*. Graf kosong atau graf $null$ adalah graf yang himpunan sisinya merupakan himpunan kosong (Rinaldi, 2016). Komplemen graf G yang dinotasikan dengan $\bar{G}$ adalah graf dengan $V(\bar{G}) = V(G)$ dan uv merupakan sisi dari $\bar{G}$ jika dan hanya jika sisi tersebut bukan sisi dari G (Chartrand dan Oellerman, 1993). Graf H dikatakan $subgraf$ dari graf G jika himpunan titik di H adalah subset dari himpunan titik di G, dan himpunan sisi di H adalah $subset$ dari himpunan sisi di G. Graf pada Gambar 2.2 (a) dan Gambar 2.2 (b) merupakan contoh graf terhubung. Gambar 2.2 merupakan graf sederhana karena tidak memuat sisi rangkap dan *loop*. Gambar 2.2 (c) merupakan graf kosong karena himpunan sisinya merupakan himpunan kosong. Graf pada Gambar 2.2 (c) merupakan komplemen dari graf pada Gambar 2.2 (a) karena sisi graf pada Gambar 2.2 (a) tidak dimiliki oleh graf pada Gambar 2.2 (c). Graf pada Gambar

2.2 (b) merupakan $subgraf$ dari graf pada Gambar 2.2 (a).



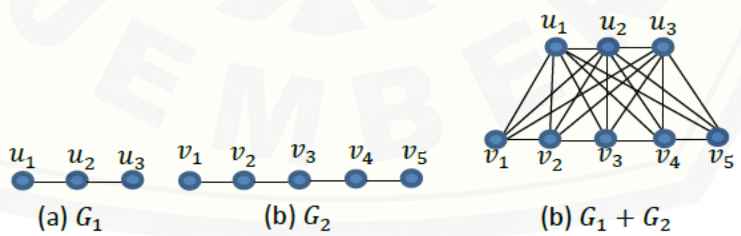
Gambar 2.2 Graf Terhubung dan Graf Kosong

2.2 Operasi pada Graf

Suatu graf dapat dibentuk dengan cara menggunakan operasi-operasi tertentu dalam graf. Pada subbab ini akan dijelaskan beberapa operasi pada graf, yaitu:

2.2.1 Operasi Join

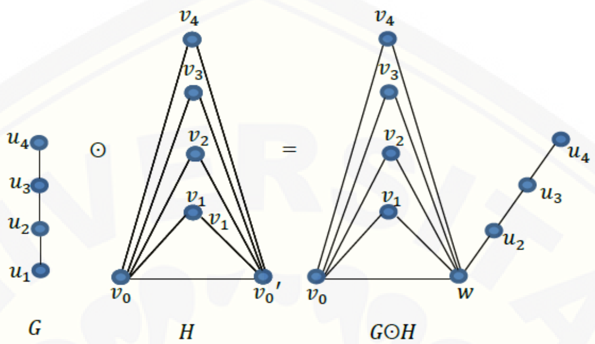
Join dua buah graf G_1 dan G_2, dinotasikan dengan $G \cong G_1 + G_2$ mempunyai himpunan titik $V(G) = V(G_1) \bigcup V(G_2)$ dan himpunan sisi $E(G) = E(G_1) \bigcup E(G_2) \bigcup \{uv | u \in V(G_1)$ dan $v \in V(G_2)\}$. Dengan kata lain, graf $G \cong G_1 + G_2$ diperoleh dengan menambahkan pada $G_1 \bigcup G_2$ sisi-sisi yang mempunyai satu titik ujung di G_1 dan titik ujung lainnya di G_2. Gambar 2.3 adalah contoh graf dari hasil join dari G_1 dan G_2.



Gambar 2.3 Graf Join $(G_1 + G_2)$

2.2.2 Identifikasi Titik Graf

Identifikasi titik dari sepasang graf G dan H pada titik $u \in V(G)$ dan $v \in V(H)$ dinotasikan dengan $(G \bigodot H)$ menghasilkan graf K yang didapat dengan menempelkan titik u dan v, penempelan titik u dan v menjadi sebuah titik baru yaitu w dengan $w \in V(G \bigodot H)$. Dengan demikian graf $(G \bigodot H)$ mempunyai $(|G| + |H| - 1)$ titik dan $(|E(G)| + |V(G)|)$ sisi. Gambar 2.4 adalah contoh graf dari hasil identifikasi titik graf G dan graf H.



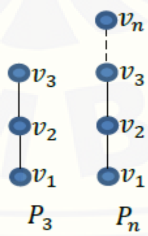
Gambar 2.4 Graf Identifikasi Titik G dan H

2.3 Kelas-kelas Graf

Pada subbab ini akan dijelaskan beberapa kelas graf, yaitu:

a. Graf Lintasan

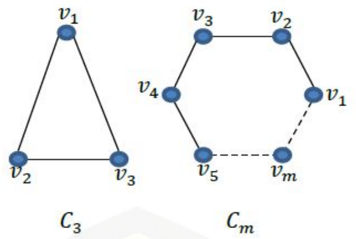
Graf lintasan dinotasikan dengan P_n adalah graf terhubung sederhana yang dibangun oleh n titik dalam satu lintasan dengan panjang $n - 1$ (Harsfield dan Ringel, 1994). Gambar 2.5 merupakan contoh dari graf lintasan P_3 dan P_n.



Gambar 2.5 Graf lintasan P_3 dan P_n

b. Graf *Cycle*

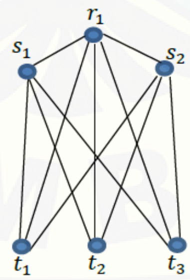
Graf *cycle* yang dinotasikan dengan C_m adalah graf lintasan P_n yang ujung-ujungnya dihubungkan oleh sebuah sisi. Graf C_n untuk $m \geq 3$ memiliki m titik dan m sisi Gambar 2.6 merupakan contoh dari graf *cycle* C_3 dan C_m.



Gambar 2.6 Graf *cycle* C_3 dan C_n

c. Graf $k - partit$

Graf G adalah graf $k - partit$ dengan $k \geq 1$, apabila titik $V(G)$ dapat dipartisi menjadi k himpunan titik $V_1, V_2, ..., V_k$ sedemikian sehingga setiap anggota dari $E(G)$ menghubungkan sebuah titik dari V_i ke sebuah titik di V_j dengan $i \neq j$. Titik u dan v di G yang berada pada partisi yang sama tidak ada sisi yang menghubungkan titik u ke titik v. Jika graf G dapat dipartisi menjadi 3 buah himpunan partisi yang berbeda dan setiap titik dari suatu partisi terhubung dengan semua titik pada dua partisi yang lain, maka graf G adalah graf tripartit lengkap. Graf tripartit lengkap dinotasikan dengan $K_{r,s,t}$ (Chartrand dan Lesniak, 1996). Gambar 2.7 merupakan contoh dari graf tripartit lengkap $K_{1,2,3}$.

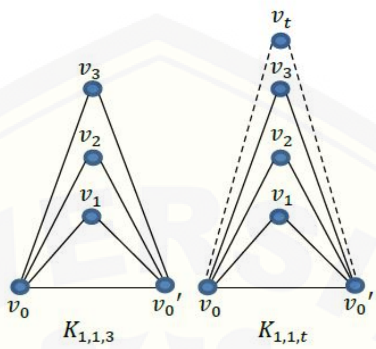


Gambar 2.7 Graf Tripartit $K_{1,2,3}$

d. Graf Buku Segitiga

Graf buku segitiga dinotasikan $K_{1.1.t}$ adalah graf tripartit lengkap $K_{r,s,t}$ dengan titik pada r dan s masing-masing adalah satu dan jumlah titik pada t sebanyak t. Graf buku segitiga $K_{1,1,t}$ merupakan graf yang terdiri dari t buah segitiga

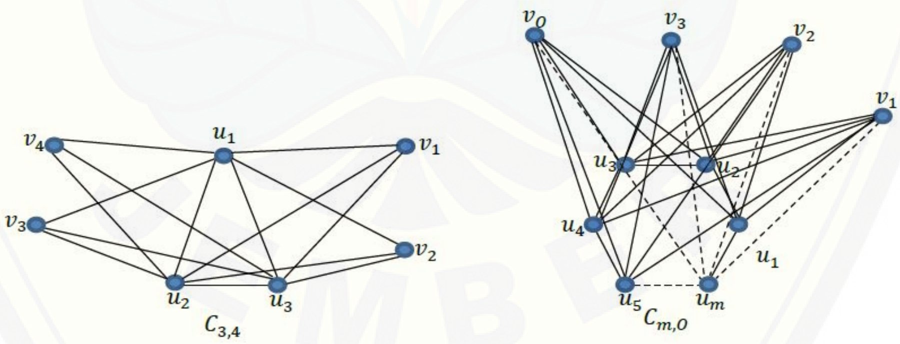
($t \geq 1$) dengan setiap segitiga memiliki sebuah sisi yang digunakan bersama atau dengan kata lain setiap segitiga memiliki 2 titik yang sama. Gambar 2.8 merupakan contoh dari graf buku segitiga $K_{1,1,3}$ dan $K_{1,1,t}$.



Gambar 2.8 Graf buku segitiga $K_{1,1,3}$ dan $K_{1,1,t}$

d. Graf Kerucut

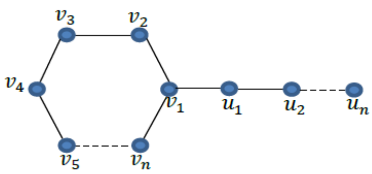
Graf kerucut dinotasikan dengan $C_{m,o}$ adalah graf hasil operasi join $C_m + \bar{K}_o$, dimana C_m adalah graf *cycle* dengan m titik dan $\bar{K}_o$ adalah graf kosong dengan o titik. Gambar 2.9 merupakan contoh dari graf kerucut $C_{3,4}$ dan $C_{m,o}$.



Gambar 2.9 Graf kerucut $C_{3,4}$ dan $C_{m,o}$

e. Graf *Tadpole*

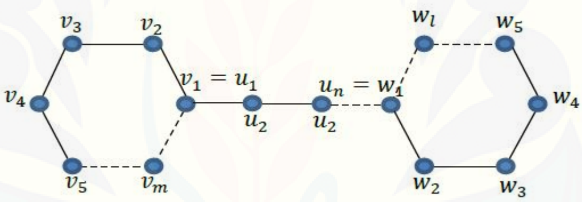
Graf *tadpole* adalah graf yang diperoleh dengan menghubungkan sebuah titik graf *cycle* C_m dengan sebuah graf lintasan P_n dengan sebuah sisi. Graf *tadpole* dinotasikan $T_{m,n}$ dengan $m \geq 3$ dan $n \geq 1$ (DeMaio, 2014). Gambar 2.10 adalah contoh graf *tadpole* $T_{m,n}$.



Gambar 2.10 Graf *tadpole* $T_{m,n}$

f. Graf *Dumbbell*

Graf *dumbbell* adalah graf yang dibentuk dari 2 graf *cycle* C_m dan C_l yang dihubungkan dengan sebuah graf lintasan P_n, dengan kedua titik ujung graf lintasan P_n adalah salah satu titik dari masing-masing graf *cycle*. Graf *dumbbell* dinotasikan dengan $D_{m,l,q}$, dengan $m, l \geq 3$ menyatakan banyaknya titik pada kedua graf *cycle* dan $n \geq 2$ menyatakan banyaknya titik pada graf lintasan (Wang dkk, 2010). Gambar 2.11 adalah contoh graf *dumbbell* $D_{m,l,n}$.



Gambar 2.11 Graf *dumbbell* $D_{m,l,n}$

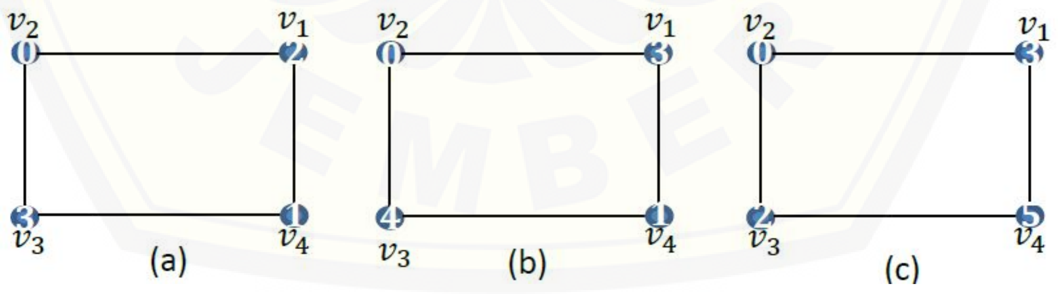
2.4 Pelabelan Graf

Pelabelan graf adalah pemetaan anggota-anggota graf dengan bilangan bulat non negatif dengan kondisi tertentu. Pelabelan graf terdiri dari tiga macam yaitu pelabelan titik, pelabalan sisi, dan pelabelan total. Pelabelan titik adalah pelabelan dengan domain himpunan titik, Pelabelan sisi adalah pelabelan dengan domain himpunan sisi. Pelabelan total adalah pelabelan dengan domain gabungan dari himpunan titik dan sisi. Penjumlahan dari label yang dikenakan pada titik atau sisi dari suatu graf disebut bobot. (Wallis, 2013). Terdapat beberapa pelabelan graf yaitu: pelabelan ajaib, pelabelan konsekutif, pelabelan *graceful*, pelabelan $L(2, 1)$, dan lain-lain.

2.4.1 Pelabelan L(2,1)

Griggs dan Roberts pada tahun 1992 mempresentasikan konsep pelabelan titik dengan syarat berjarak dua, konsep ini timbul dari modifikasi kasus penentuan frekuensi yang dipresentasikan oleh Hale pada tahun 1980. Pada sejumlah transmitter, masing-masing harus ditetapkan frekuensi untuk menghindari tumpukan frekuensi. Untuk mengatasi tumpukan frekuensi, maka dua buah transmitter yang dekat harus diberi saluran yang berbeda, sedangkan dua transmitter yang sangat dekat harus diberi saluran dengan selisih minimal dua. Permasalahan ini direpresentasikan dalam graf, dimana transmitter-transmitter tersebut menjadi titik dan termuat suatu sisi yang menghubungkan dua transmitter (Agnarson dan Halldorsson, 2003).

Pelabelan $L(2,1)$ didefinisikan sebagai pemetaan himpunan titik di G ke bilangan bulat tak negatif sehingga mutlak dari selisih label dari dua titik adalah minimal dua untuk titik yang berjarak satu dan minimal satu untuk titik yang berjarak dua. Jika f adalah fungsi pelabelan $L(2,1)$ $f : V \rightarrow \{0, 1, 2, ...k\}$, maka k adalah *span* dari pelabelan $L(2,1)$. *Span* adalah nilai label terbesar dari pelabelan $L(2,1)$. *Span* dari suatu graf G bisa lebih dari satu, nilai minimal span dari suatu graf G dinotasikan sengan $\lambda_{2,1}(G)$ (Shao, 2008). Gambar 2.12 adalah contoh mencari nilai minimal span pada graf *cycle* C_4.



Gambar 2.12 Pelabelan pada graf *cycle* C_4

Gambar 2.12 (a) adalah graf *cycle* dengan himpunan titik $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. Misalkan titik v_2 dilabeli dengan label 0, maka titik v_1 dan v_3 hanya bisa dilabeli dengan label minimal dua karena titik v_1 dan v_3 terhubung langsung dengan titik v_2. Dalam hal ini, v_1 dilabeli dengan label 2 dan v_3 dilabeli dengan label 3.

Berdasarkan kaidah pelabelan $L(2,1)$, mutlak selisih label titik v_4 dengan v_1 harus minimal dua karena jarak kedua titik tersebut adalah satu. Dalam hal ini titik v_4 dilabeli dengan label 1, sehingga mutlak selisih label titik v_4 dengan titik v_1 sama dengan satu. Hal ini bertentangan dengan kaidah pelabelan $L(2,1)$. Gambar 2.12 (b) menunjukan pelabelan $L(2,1)$ pada graf *cycle* C_4 dengan nilai span sama dengan 4. Gambar 2.12 (c) menunjukan pelabelan $L(2,1)$ pada graf *cycle* C_4 dengan nilai span sama dengan 5. Berdasarkan tiga pernyataan tersebut, nilai minimal span dari pelabelan $L(2,1)$ pada graf *cycle* C_4 adalah 4.

◊ **Teorema 2.1.** *(Lum, 2007) Jika H adalah subgraf dari G, maka* $\lambda_{2,1}(H) \leq \lambda_{2,1}(G)$.

◊ **Teorema 2.2.** *(Lum, 2007)* $\lambda_{2,1}(C_m) = 4, \forall m \geq 3$.

2.4.2 Hasil-hasil Pelabelan L(2,1)

Pada penelitian sebelumnya didapatkan beberapa teorema tentang nilai minimal *span* $L(2,1)$ pada beberapa kelas graf. Adapun beberapa hasil penelitian tersebut telah diringkas dan dapat dilihat pada Tabel 2.1.

Tabel 2.1 Hasil Pelabelan $L(2,1)$ Penelitian Terdahulu

Graf	Nilai Minimal Span	Peneliti
Graf Bintang $K_{(1,n)}$	$\lambda_{(2,1)}(S_{(1,n)}) = n+1$	Griggs dan Yeh (1992)
Graf Lintasan $P_{(n)}$	$\lambda_{(2,1)}(P_{(n)}) = 4, \forall n \geq 5$	Andrew Lum (2007)
Graf Komplit $K_{(n)}$	$\lambda_{(2,1)}(K_{(n)}) = 2n-2$	Andrew Lum (2007)
Graf *Cycle* $C_{(n)}$	$\lambda_{(2,1)}(C_{(n)}) = 4, \forall n \geq 3$	Andrew Lum (2007)
Graf Kipas $F_{(n)}$	$\lambda_{(2,1)}(F_{(n)}) = n+1$	S. Fatimah, dkk (2016)
Graf Roda $W_{(n)}$	$\lambda_{(2,1)}(W_{(n)}) = n+1$	S. Fatimah, dkk (2016)

Graf	Nilai Minimal Span	Peneliti
Graf Teratai $T_{(n)}$	$\lambda_{(2,1)}(T_{(n)}) = 2n + 2$	S. Fatimah, dkk (2016)
Graf $K_1 \bigodot (P_n \bigcup F_n)$	$\lambda_{(2,1)}(K_1 \bigodot (P_n \bigcup F_n)) = 2n + 2$	S. Fatimah, dkk (2016)
Graf Sierpinski $S_{(n,2)}$	$\lambda_{(2,1)}(S_{(n,2)}) = 4, \forall n \geq 3$	Yuri C dan Susiana (2018)
Graf Sierpinski $S_{(n,3)}$	$\lambda_{(2,1)}(S_{(n,3)}) = 4, \forall n \geq 3$	Yuri C dan Susiana (2018)

2.5 Prinsip Sarang Burung Merpati

Pigeonhole principle atau prinsip sarang merpati pertama kali dinyatakan oleh ahli matematika dari Jerman yang bernama Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet pada tahun 1834, sehingga prinsip ini juga dikenal dengan istilah prinsip kotak Dirichlet (*Dirichlet drawer principle*). Prinsip ini menegaskan jika banyak sarang kurang dari banyak merpati, maka harus ada paling sedikit satu sarang memuat dua merpati. Pada masalah sarang burung merpati, prinsip ini tidak memberitahukan di sarang merpati mana yang berisi lebih dari dua ekor merpati. Terdapat beberapa teorema pada prinsip sarang burung merpati. Teorema tersebut adalah.

♢ **Teorema 2.3.** *Jika n merpati ditempatkan pada m rumah merpati, dengan $n \geq m$, maka terdapat rumah merpati yang memuat paling sedikit dua merpati.*

♢ **Teorema 2.4.** *Jika f merupakan sebuah fungsi dari suatu himpunan terhingga X ke suatu himpunan terhingga Y dan $|X| \geq |Y|$, maka $f(x_1) = f(x_2)$ untuk beberapa $x_1, x_2 \in X$, dimana $x_1 \neq x_2$.*

♢ **Teorema 2.5.** *Jika f merupakan sebuah fungsi dari suatu himpunan terhingga X ke suatu himpunan terhingga Y, dimana $|X| = n$, $|Y| = m$ dan $\lceil nm \rceil = k$, maka terdapat paling sedikit k anggota $x_1, x_2, ..., x_k \in X$ sedemikian hingga $f(x_1) = f(x_2) = ... = f(x_k)$.*

BAB 3. METODE PENELITIAN

Pada bab ini dibahas tentang prosedur penelitian untuk memperoleh nilai minimal *span* dari pelabelan $L(2,1)$ pada graf buku segitiga ($K_{1,1,t}$), graf kerucut ($C_{m,o}$), graf *tadpole* ($T_{m,n}$), graf *dumbbell* ($D_{m,l,n}$) serta graf hasil identifikasi titik dari graf buku segitiga dan graf lintasan $K_{1,1,t} \odot P_n$. Penelitian ini tergolong dalam penelitian eksploratif yang bermaksud untuk menambah wawasan dan memunculkan gagasan-gagasan baru serta hasil dari penelitian ini dapat digunakan menjadi tambahan rujukan.

3.1 Metode Penelitian

Metode yang digunakan pada penelitian ini dalam menentukan nilai minimal *span* dari pelabelan $L(2,1)$ pada graf buku segitiga ($K_{1,1,t}$), graf kerucut ($C_{m,o}$), graf *tadpole* ($T_{m,n}$), graf *dumbbell* ($D_{m,l,n}$) serta graf hasil identifikasi titik dari graf buku segitiga dan graf lintasan $K_{1,1,t} \odot P_n$ adalah.

1. Studi literatur yang disajikan dalam bentuk buku, skripsi maupun artikel yang terkait dengan tema pembahasan untuk dikembangkan menjadi acuan menentukan nilai minimal *span* dari pelabelan $L(2,1)$ pada graf buku segitiga ($K_{1,1,t}$), graf kerucut ($C_{m,o}$), graf *tadpole* ($T_{m,n}$), graf *dumbbell* ($D_{m,l,n}$) serta graf hasil identifikasi titik dari graf buku segitiga dan graf lintasan $K_{1,1,t} \odot P_n$.
2. Menentukan rumus dalam mencari nilai minimal *span* dari pelabelan $L(2,1)$ pada graf buku segitiga ($K_{1,1,t}$), graf kerucut ($C_{m,o}$), graf *tadpole* ($T_{m,n}$), graf *dumbbell* ($D_{m,l,n}$) serta graf hasil identifikasi titik dari graf buku segitiga dan graf lintasan $K_{1,1,t} \odot P_n$ dengan menggunakan metode-metode sebagai berikut:
   a. Metode Deskriptif Aksiomatik

      Dalam metode ini akan diuraikan beberapa definisi, aksioma, atau teorema sebelumnya yang digunakan untuk menyelidiki apakah graf buku segitiga ($K_{1,1,t}$), graf kerucut ($C_{m,o}$), graf *tadpole* ($T_{m,n}$), graf *dumbbell* ($D_{m,l,n}$) serta graf hasil identifikasi titik dari graf buku segitiga dan graf lintasan $K_{1,1,t} \odot P_n$.

b. Metode Pendeteksian Pola

Setelah dilakukan pelabelan pada graf buku segitiga ($K_{1,1,t}$), graf kerucut ($C_{m,o}$), graf *tadpole* ($T_{m,n}$), graf *dumbbell* ($D_{m,l,n}$) serta graf hasil identifikasi titik dari graf buku segitiga dan graf lintasan $K_{1,1,t} \bigodot P_n$ dengan kaidah pelabelan $L(2,1)$, kemudian akan diteruskan ke metode pendeteksian pola. Pada metode pendeteksian pola akan dinyatakan pola pelabelan $L(2,1)$ pada graf buku segitiga ($K_{1,1,t}$), graf kerucut ($C_{m,o}$), graf *tadpole* ($T_{m,n}$), graf *dumbbell* ($D_{m,l,n}$) serta graf hasil identifikasi titik dari graf buku segitiga dan graf lintasan $K_{1,1,t} \bigodot P_n$.

3. Membuat program untuk menentukan nilai minimal *span* dan pola pelabelan titik dari pelabelan $L(2,1)$ pada graf buku segitiga ($K_{1,1,t}$), graf kerucut ($C_{m,o}$), graf *tadpole* ($T_{m,n}$), graf *dumbbell* ($D_{m,l,n}$) serta graf hasil identifikasi titik dari graf buku segitiga dan graf lintasan $K_{1,1,t} \bigodot P_n$.

3.2 Langkah-langkah Penelitian

Langkah-langkah penelitian yang akan dilakukan untuk mendapatkan nilai minimal *span* dari pelabelan $L(2,1)$ pada graf buku segitiga ($K_{1,1,t}$), graf kerucut ($C_{m,o}$), graf *tadpole* ($T_{m,n}$), graf *dumbbell* ($D_{m,l,n}$) serta graf hasil identifikasi titik dari graf buku segitiga dan graf lintasan $K_{1,1,t} \bigodot P_n$ adalah.

a. Menentukan kelas graf yang akan diteliti.

b. Penotasian titik pada graf buku segitiga ($K_{1,1,t}$), graf kerucut ($C_{m,o}$), graf *tadpole* ($T_{m,n}$), graf *dumbbell* ($D_{m,l,n}$) serta graf hasil identifikasi titik dari graf buku segitiga dan graf lintasan $K_{1,1,t} \bigodot P_n$.

c. Melakukan pelabelan $L(2,1)$ pada graf buku segitiga ($K_{1,1,t}$), graf kerucut ($C_{m,o}$), graf *tadpole* ($T_{m,n}$), graf *dumbbell* ($D_{m,l,n}$) serta graf hasil identifikasi titik dari graf buku segitiga dan graf lintasan $K_{1,1,t} \bigodot P_n$ dengan cara melabeli setiap titiknya dengan kaidah pelabelan $L(2,1)$.

d. Memanfaatkan hasil pelabelan sebagai acuan untuk mendapatkan batas atas dari pelabelan $L(2,1)$.

e. Menyusun teorema berlandaskan pola yang telah diperoleh dan membuktikannya.

f. Membuat program untuk menentukan nilai minimal *span* dan pola pelabelan titik dari pelabelan $L(2,1)$ pada graf buku segitiga ($K_{1,1,t}$), graf kerucut ($C_{m,o}$), graf *tadpole* ($T_{m,n}$), graf *dumbbell* ($D_{m,l,n}$) serta graf hasil identifikasi titik dari graf buku segitiga dan graf lintasan $K_{1,1,t} \odot P_n$.

Secara umum, setelah melakukan pelabelan $L(2,1)$ akan diperoleh sebuah hipotesis $\lambda_{2,1} = k$. Untuk membuktikan $\lambda_{2,1} = k$ dilakukan langkah-langkah sebagai berikut.

a. Pembuktian $\lambda_{2,1}(G) \geq k$

   Untuk menentukan batas bawah nilai minimal *span* graf *tadpole*, graf *dumbbell*, dan graf hasil identifikasi titik dari graf buku segitiga dan graf lintasan dilakukan dengan menggunakan metode deskriptif aksiomatik. Teorema yang digunakan yaitu Teorema 2.1, dan 2.2. Penentukan batas bawah nilai minimal *span* graf buku segitiga dan graf kerucut yaitu menggunakan prinsip sarang merpati.

b. Pembuktian $\lambda_{2,1}(G) \leq k$

   Untuk menentukan batas atas nilai minimal *span* graf G yaitu dengan melakukan pelabelan $L(2,1)$ pada graf G sehingga menemukan nilai minimal *span*.

BAB 5. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan, untuk mendapatkan nilai minimal *span* dari pelabelan $L(2,1)$ pada graf buku segitiga ($K_{1,1,t}$), graf kerucut ($C_{m,o}$), graf *tadpole* ($T_{m,n}$), graf *dumbbell* ($D_{m,l,n}$) serta graf hasil identifikasi titik dari graf buku segitiga dan graf lintasan $K_{1,1,t} \bigodot P_n$ adalah dengan melakukan pelabelan $L(2,1)$ pada graf tersebut. Kemudian mendeteksi pola label pada graf buku segitiga ($K_{1,1,t}$), graf kerucut ($C_{m,o}$), graf *tadpole* ($T_{m,n}$), graf *dumbbell* ($D_{m,l,n}$) serta graf hasil identifikasi titik dari graf buku segitiga dan graf lintasan $K_{1,1,t} \bigodot P_n$. Sehingga diperoleh kesimpulan bahwa nilai minimal *span* dari pelabelan $L(2,1)$ pada graf buku segitiga ($K_{1,1,t}$), graf kerucut ($C_{m,o}$), graf *tadpole* ($T_{m,n}$), graf *dumbbell* ($D_{m,l,n}$) serta graf hasil identifikasi titik dari graf buku segitiga dan graf lintasan $K_{1,1,t} \bigodot P_n$ adalah.

a. Nilai minimal *span* dari pelabelan $L(2,1)$ pada graf buku segitiga ($K_{1,1,t}$) adalah $t+3$ dengan $t \geq 1$.

b. Nilai minimal *span* dari pelabelan $L(2,1)$ pada graf kerucut ($C_{m,o}$) adalah $o+5$ dengan $m \geq 3$.

c. Nilai minimal *span* dari pelabelan $L(2,1)$ pada graf tadpole ($T_{m,n}$) adalah 4 dengan $m \geq 3$.

d. Nilai minimal *span* dari pelabelan $L(2,1)$ pada graf dumbbell ($D_{m,l,n}$) adalah 4 dengan $m = l = 4$ dan $n \equiv 1 mod 3$.

e. Nilai minimal *span* dari pelabelan $L(2,1)$ pada graf dumbbell ($D_{m,l,n}$) adalah 4 dengan m dan $l \equiv 0 mod 3$ serta $n \equiv 2 mod 4$.

f. Nilai minimal *span* dari pelabelan $L(2,1)$ pada graf dumbbell ($D_{m,l,n}$) adalah 4 dengan m dan $l \equiv 1 mod 3$ serta $n \equiv 2 mod 4$.

g. Nilai minimal *span* dari pelabelan $L(2,1)$ pada graf dumbbell ($D_{m,l,n}$) adalah 4 dengan m dan $l \equiv 2 mod 3$ serta $n \equiv 0 mod 3$.

h. Nilai minimal *span* dari pelabelan $L(2,1)$ pada graf $K_{1,1,t} \bigodot P_n$ adalah $t+3$ dengan $t \geq 1$.

Berdasarkan pembahasan juga didapatkan program untuk mencari nilai minimal *span* dan label setiap titik dari pelabelan $L(2,1)$ pada graf buku segitiga ($K_{1,1,t}$), graf kerucut ($C_{m,o}$), graf *tadpole* ($T_{m,n}$), graf *dumbbell* ($D_{m,l,n}$) serta graf hasil identifikasi titik dari graf buku segitiga dan graf lintasan $K_{1,1,t} \bigodot P_n$. Program tersebut dapat digunakan dengan cara menginputkan jumlah titik pada kelas graf yang akan dicari nilai minimal spannya.

5.2 Saran

Berdasarkan hasil penelitian, peneliti memberikan saran kepada peneliti lain untuk mengembangkan pelabelan $L(2,1)$ pada kelas-kelas graf atau pada operasi graf lainnya. Peneliti juga menyarankan agar peneliti selanjutnya dapat menerapkan pelabelan $L(2,1)$ dalam permasalahan di kehidupan sehari-hari.

DAFTAR PUSTAKA

Agnarsson, G. dan Halldorsson, M.M. 2003. Coloring Powers of Planar Graphs. *SIAM J. Discrete Math*, 16(4): 651-662.

Budayasa, K. 2007. *Teori Graph dan Aplikasinya*. Surabaya: Unesa University Press.

Chartrand, G. dan L. Lesniak. 1996. *Graphs and Digraphs. Thrid Edition*. California: Chapman and Hall.

Chartrand, G., dan Oellerman, O. R. 1993. *Applied and Algorithmic Graph Theory.*. New York : McGraw-Hill, Inc.

DeMaio, Joe. dan Jacobson, John. 2014. Fibonasi Nymber of the tadpole Graph. *Electric Journal of Graph Theory and Aplications*, 2(2):129-138.

Hartsfield, N. dan G. Ringel. 1994. *Pearls in Graph Theory*. USA: Academic Press, Inc.

J. Wang, F. Belardo, Q. Huang dan E.M.L. Marzi. 2010. *Spectral Characterizations of Dumbbell Graphs*. Electron. J. Combin

Lum. A, 2007. *Upper Bound on L(2,1)-labelling Number of Graphs with Maximum Degree* Δ.

Rinaldi. 2016. . *Matematika Diskrit*. Bandung : Informatika.

Shao, Z., Yeh, R. K., Zhang, D. 2008. The (2, 1)-Labeling on Graphs and Frequency Assigment Problem. *Applied Mathematics Letters*, 21: 37-41.

Wallis, W. D. dan A. M. Marr. 2013. *Magic Graphs Second Edition*. Boston: Birkhauser.