



**SOLUSI LENGKAP PARTIKEL DALAM KOTAK TIGA  
DIMENSI DENGAN VARIASI BILANGAN  
KUANTUM UTAMA**

**SKRIPSI**

Oleh:

**Ade Shahnaz Ruhil Maulani  
NIM 160210102065**

**PROGRAM STUDI PENDIDIKAN FISIKA  
JURUSAN PENDIDIKAN MIPA  
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN  
UNIVERSITAS JEMBER  
2020**



**SOLUSI LENGKAP PARTIKEL DALAM KOTAK TIGA  
DIMENSI DENGAN VARIASI BILANGAN  
KUANTUM UTAMA**

**SKRIPSI**

diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat  
untuk menyelesaikan Program Studi Pendidikan Fisika (S1)  
dan mencapai gelar Sarjana Pendidikan

Oleh:

**Ade Shahnaz Ruhil Maulani**

**NIM 160210102065**

**PROGRAM STUDI PENDIDIKAN FISIKA  
JURUSAN PENDIDIKAN MIPA  
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN  
UNIVERSITAS JEMBER  
2020**

## PERSEMBAHAN

Skripsi ini saya persembahkan untuk:

1. Kedua orang tua saya Bapak Adi Purwanto dan Ibu Siti Halimah yang tak pernah lelah berjuang dalam hal apapun, selalu memberikan semangat dan terutama doa dalam setiap langkah hidup saya
2. Guru-guru saya sejak TK hingga perguruan tinggi yang telah banyak berjasa dalam memberikan ilmunya kepada saya
3. Keluarga besar Program Studi Pendidikan Fisika dan almamater tercinta Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember

**MOTO**

Karena sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan. Sesungguhnya  
sesudah kesulitan itu ada kemudahan<sup>1</sup>  
(Terjemahan QS. Al Insyirah:5-6)



---

<sup>1</sup> Departemen Agama Republik Indonesia. 2010. *Al-Quran dan Terjemahannya*. Bandung:JABAL.

**PERNYATAAN**

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Ade Shahnaz Ruhil Maulani

NIM : 160210102065

menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi berjudul “*Solusi Lengkap Partikel dalam Kotak Tiga Dimensi dengan Variasi Bilangan Kuantum Utama*” adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali kutipan yang sudah saya sebutkan sumbernya, belum pernah diajukan pada institusi mana pun, dan bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa ada tekanan dan paksaan dari pihak mana pun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, 08 Januari 2020

Yang menyatakan,

Ade Shahnaz Ruhil Maulani

NIM 160210102065

**SKRIPSI**

**SOLUSI LENGKAP PARTKEL DALAM KOTAK TIGA DIMENSI  
DENGAN VARIASI BILANGAN KUANTUM UTAMA**

Oleh:

Ade Shahnaz Ruhil Maulani  
NIM 160210102065

Pembimbing

Dosen Pembimbing Utama : Drs. Bambang Supriadi, M.Sc.

Dosen Pembimbing Anggota : Lailatul Nuraini, S.Pd., M.Pd.

**PENGESAHAN**

Skripsi berjudul “Solusi Lengkap Partikel dalam Kotak Tiga Dimensi dengan Variasi Bilangan Kuantum Utama” telah diuji dan disahkan pada:

Hari, tanggal : Rabu, 08 Januari 2020

Tempat : Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan

**Tim Penguji:**

Ketua,

Sekretaris,

Drs. Bambang Supriadi, M.Sc

NIP. 19680710 199302 1 001

Lailatul Nuraini, S.Pd., M.Pd

NRP. 760016812

Anggota I

Anggota II

Drs. Albertus Djoko Lesmono, M.Si

NIP. 19641230199302 1 001

Dr. Drs. Agus Abdul Ghani, M.Si

NIP. 19570801 198403 1 004

Mengesahkan,

Dekan Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan

Universitas Jember,

Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D

NIP. 19680802 199303 1 004

## RINGKASAN

**Solusi Lengkap Partikel dalam Kotak Tiga Dimensi dengan Variasi Bilangan Kuantum Utama;** Ade Shahnaz Ruhil Maulani, 160210102065; 2020; 49 halaman; Program Studi Pendidikan Fisika, Jurusan Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Jember.

Partikel dalam kotak tiga dimensi merupakan salah satu pokok bahasan mendasar dalam fisika kuantum. Permasalahan partikel dalam kotak dapat diselesaikan menggunakan persamaan Schrodinger. Penelitian ini bertujuan untuk menentukan solusi lengkap partikel dalam kotak tiga dimensi dengan variasi bilangan kuantum utama. Penelitian ini dikatakan menentukan solusi lengkap dikarenakan semua hal yang dapat dikaji dari permasalahan partikel dalam kotak diteliti dalam penelitian ini. Hal-hal yang dapat dikaji dari partikel dalam kotak yaitu probabilitas, nilai ekspektasi, dan tingkat energinya. Teori yang dikembangkan dalam penelitian ini yaitu bilangan kuantum utama yang digunakan dibuat bervariasi di setiap sumbu koordinatnya dengan keadaan yang digunakan mulai dari keadaan dasar hingga keadaan tereksitasi kedua ( $n = 3$ ). Pendekatan yang digunakan dalam penelitian ini yaitu pendekatan persamaan Schrodinger tunak (bebas waktu). Metode yang digunakan dalam penelitian ini antara lain normalisasi fungsi gelombang dan metode separasi variabel.

Persamaan Schrodinger merupakan persamaan differensial parsial orde dua yang dapat digunakan untuk menyelesaikan berbagai permasalahan dalam fisika kuantum. Salah satu jenis persamaan Schrodinger yaitu persamaan Schrodinger tunak (bebas waktu). Persamaan Schrodinger tunak (bebas waktu) lebih sering digunakan karena fungsi gelombangnya hanya bergantung pada posisi partikel ( $r$ ). Fungsi gelombang merupakan solusi dari persamaan Schrodinger yang mampu memberikan informasi tertentu terkait dengan partikel. Salah satu informasi yang dapat diberikan misalnya terkait posisi partikel dalam kotak atau besarnya kemungkinan untuk menemukan partikel dalam kotak.

Sebelum melakukan pengembangan teori maka perlu dilakukan validasi terlebih dahulu terhadap data probabilitas, nilai ekspektasi, dan tingkat energi partikel dalam kotak tiga dimensi ketika bilangan kuantum utamanya bernilai sama di setiap sumbu koordinatnya. Selain data-data tersebut, grafik probabilitas partikel dalam kotak tiga dimensi dengan bilangan kuantum utama yang sama di setiap sumbu koordinatnya juga dijadikan sebagai validator. Apabila data-data yang dikerjakan telah sesuai dengan data validasi yang tersedia maka tahap pengembangan teori dapat dilakukan. Langkah yang dilakukan selanjutnya yaitu menentukan solusi lengkap partikel dalam kotak tiga dimensi dengan variasi bilangan kuantum utama dan keadaan yang digunakan yaitu mulai keadaan dasar hingga keadaan tereksitasi kedua ( $n = 3$ ). Selain itu, data probabilitas yang telah diperoleh selanjutnya divisualisasikan dalam bentuk grafik tiga dimensi dengan menggunakan aplikasi Matlab 2013.

Pengembangan teori yang dilakukan memberikan solusi lengkap partikel dalam kotak tiga dimensi dengan variasi bilangan kuantum utama. Solusi lengkap yang dimaksud dalam penelitian ini terkait dengan data probabilitas, nilai ekspektasi, dan tingkat energi partikel. Hasil penelitian menunjukkan bahwa variasi bilangan kuantum mempengaruhi besarnya probabilitas partikel dalam kotak tiga dimensi untuk lebar kotak  $\frac{L}{4}$  dan  $\frac{3L}{4}$ . Variasi bilangan kuantum utama juga mempengaruhi besarnya nilai ekspektasi partikel dalam kotak tiga dimensi untuk lebar kotak  $\frac{L}{4}$ ,  $\frac{L}{2}$ , dan  $\frac{3L}{4}$ . Selain itu, variasi bilangan kuantum utama pun turut mempengaruhi besarnya tingkat energi partikel dalam kotak tiga dimensi. Semakin besar bilangan kuantum utama yang divariasikan maka semakin besar pula tingkat energi partikel. Terkait grafik probabilitas partikel, nilai ekspektasi partikel, dan tingkat energi partikel dalam kotak tiga dimensi maka semakin tinggi diagram batang yang dihasilkan maka semakin besar nilai probabilitas partikel, nilai ekspektasi partikel, dan tingkat energi partikel, begitupun sebaliknya. Apabila pada kondisi tertentu tinggi diagram batang yang dihasilkan sama, berarti probabilitas, nilai ekspektasi, atau tingkat energi partikel pada kondisi tersebut juga bernilai sama.

## PRAKATA

Puji syukur ke hadirat Allah SWT. Atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul “Solusi Lengkap Partikel dalam Kotak Tiga Dimensi dengan Variasi Bilangan Kuantum Utama”. Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat menyelesaikan pendidikan strata satu (S1) pada Program Studi Pendidikan Fisika Jurusan Pendidikan MIPA Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember.

Penyusunan skripsi ini tidak lepas dari bantuan berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan terima kasih kepada:

1. Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D., selaku Dekan Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember yang telah menyediakan berbagai fasilitas demi terselesaikannya skripsi ini;
2. Dr. Dwi Wahyuni, M.Kes., selaku Ketua Jurusan Pendidikan MIPA yang telah menyediakan berbagai fasilitas pendukung yang dapat membantu penulis dalam menyelesaikan skripsi ini;
3. Drs. Bambang Supriadi, M.Sc., selaku Ketua Program Studi Pendidikan Fisika yang telah membantu memfasilitasi mahasiswa agar dapat menyelesaikan skripsi dan lulus dengan segera;
4. Drs. Alex Harijanto, M.Si., selaku Kepala Laboratorium Pendidikan Fisika yang telah menyediakan berbagai fasilitas laboratorium demi terselesaikannya skripsi ini serta selaku Dosen Pembimbing Akademik yang telah membimbing selama penulis menjadi mahasiswa;
5. Drs. Bambang Supriadi, M.Sc. dan Lailatul Nuraini, S.Pd., M.Pd, selaku Dosen Pembimbing Utama serta Dosen Pembimbing Anggota yang telah meluangkan waktu, pikiran, dan perhatian, serta membantu dalam berbagai aspek demi terselesaikannya skripsi ini;
6. Drs. Albertus Djoko Lesmono, M.Si. dan Dr. Agus Abdul Ghani, M.Si., selaku Dosen Penguji Utama serta Dosen Penguji Anggota yang telah meluangkan waktu untuk memberikan kritik dan saran yang membangun demi kesempurnaan skripsi ini;

7. Adik saya Salma Olivia Khoirunnisa yang membuat saya selalu bersemangat untuk bisa menjadi orang yang sukses karena bagaimanapun kakak adalah panutan bagi adik-adiknya
8. Arum, Nur Fadilah, Dewi, Puji, Indah, Dewi Sinta, Izza, Fiska, dan Dika selaku teman-teman yang selalu menemani di kala susah dan senang, selalu memberi aura positif dan memotivasi agar skripsi ini dapat terselesaikan dengan segera;
9. Serta pihak-pihak yang tidak dapat disebutkan satu-persatu yang telah memberikan kontribusi dan bantuannya demi kelancaran pengerjaan skripsi ini.

Kritik dan saran yang membangun dari para pembaca tetap penulis harapkan demi kesempurnaan skripsi ini. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi setiap orang yang membacanya.

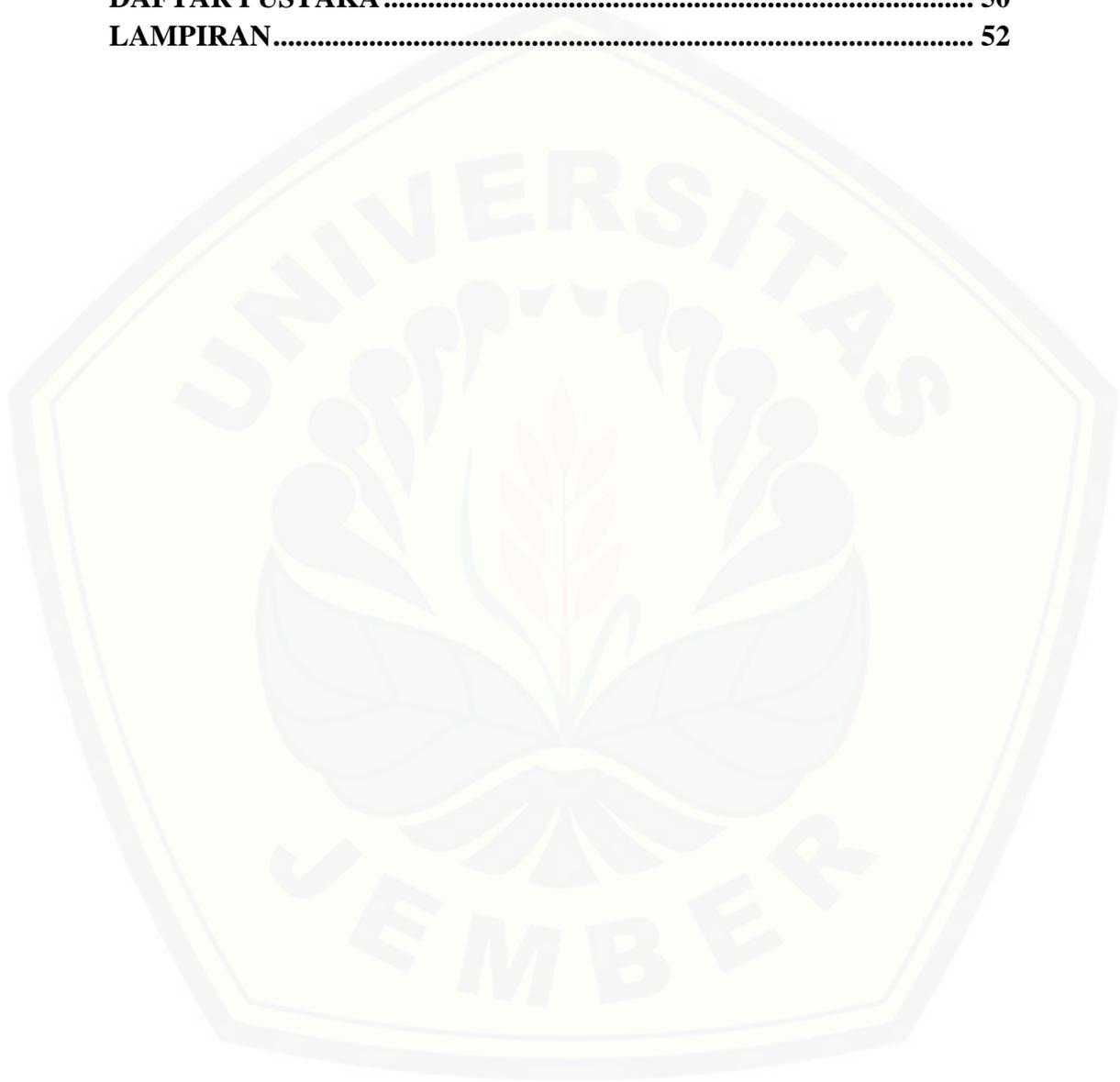
Jember, Januari 2020

Penulis

DAFTAR ISI

	Halaman
<b>HALAMAN SKRIPSI</b> .....	<b>i</b>
<b>HALAMAN PERSEMBAHAN</b> .....	<b>ii</b>
<b>HALAMAN MOTO</b> .....	<b>iii</b>
<b>HALAMAN PERNYATAAN</b> .....	<b>iv</b>
<b>HALAMAN PEMBIMBING</b> .....	<b>v</b>
<b>HALAMAN PENGESAHAN</b> .....	<b>vi</b>
<b>RINGKASAN</b> .....	<b>vii</b>
<b>PRAKATA</b> .....	<b>ix</b>
<b>DAFTAR ISI</b> .....	<b>xi</b>
<b>DAFTAR TABEL</b> .....	<b>xiii</b>
<b>DAFTAR GAMBAR</b> .....	<b>xiv</b>
<b>DAFTAR LAMPIRAN</b> .....	<b>xv</b>
<b>BAB 1. PENDAHULUAN</b> .....	<b>1</b>
<b>1.1 Latar Belakang</b> .....	<b>1</b>
<b>1.2 Rumusan Masalah</b> .....	<b>5</b>
<b>1.3 Batasan Masalah</b> .....	<b>6</b>
<b>1.4 Tujuan Penelitian</b> .....	<b>6</b>
<b>1.5 Manfaat Penelitian</b> .....	<b>6</b>
<b>BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA</b> .....	<b>8</b>
<b>2.1 Dualisme Gelombang Partikel</b> .....	<b>8</b>
<b>2.2 Persamaan Schrodinger</b> .....	<b>9</b>
<b>2.3 Partikel dalam Kotak</b> .....	<b>11</b>
2.3.1 Partikel dalam Kotak Satu Dimensi .....	<b>11</b>
2.3.2 Partikel dalam Kotak Dua Dimensi.....	<b>15</b>
2.3.3 Partikel dalam Kotak Tiga Dimensi .....	<b>17</b>
<b>2.5 Normalisasi</b> .....	<b>19</b>
<b>2.4 Probabilitas</b> .....	<b>20</b>
<b>2.5 Nilai Ekspektasi</b> .....	<b>21</b>
<b>BAB 3. METODE PENELITIAN</b> .....	<b>23</b>
<b>3.1 Jenis, Waktu, dan Tempat Penelitian</b> .....	<b>23</b>
<b>3.2 Definisi Operasional Variabel</b> .....	<b>23</b>
<b>3.3 Langkah Penelitian</b> .....	<b>24</b>
<b>BAB 4. HASIL DAN PEMBAHASAN</b> .....	<b>31</b>
<b>4.1 Hasil Penelitian</b> .....	<b>31</b>
4.1.1 Probabilitas Partikel dalam Kotak Tiga Dimensi dengan Variasi Bilangan Kuantum Utama .....	<b>31</b>
4.1.2 Nilai Ekspektasi Partikel dalam Kotak Tiga Dimensi dengan Variasi Bilangan Kuantum Utama.....	<b>32</b>
4.1.3 Tingkat Energi Partikel dalam Kotak Tiga Dimensi dengan Variasi Bilangan Kuantum Utama .....	<b>33</b>
4.1.4 Grafik Probabilitas Partikel dalam Kotak Tiga Dimensi dengan	

Variasi Bilangan Kuantum Utama .....	34
4.2 Pembahasan .....	42
<b>BAB 5. PENUTUP</b> .....	<b>48</b>
5.1 Kesimpulan .....	48
5.2 Saran.....	48
<b>DAFTAR PUSTAKA</b> .....	<b>50</b>
<b>LAMPIRAN</b> .....	<b>52</b>



**DAFTAR TABEL**

	Halaman
3.1 Validasi Tingkat Energi Partikel dalam Kotak Tiga Dimensi .....	26
3.2 Validasi Probabilitas Partikel dalam Kotak Tiga Dimensi .....	26
3.3 Validasi Nilai Ekspektasi Partikel dalam Kotak Tiga Dimensi .....	27
3.4 Tingkat Energi Partikel dalam Kotak Tiga Dimensi dengan Variasi Bilangan Kuantum Utama .....	29
4.1a Data Probabilitas Partikel dalam Kotak Tiga Dimensi dengan Variasi Bilangan Kuantum Utama (1 1 2), (1 2 1), (2 1 1), (2 2 1), (2 1 2), (1 2 2)	31
4.1b Data Probabilitas Partikel dalam Kotak Tiga Dimensi dengan Variasi Bilangan Kuantum Utama(1 1 3), (1 3 1), (3 1 1), (3 3 1), (3 1 3), (1 3 3)	31
4.1c Data Probabilitas Partikel dalam Kotak Tiga Dimensi dengan Variasi Bilangan Kuantum Utama(2 2 3), (2 3 2), (3 2 2), (3 3 2), (3 2 3), (2 3 3)	32
4.2a Data Nilai Ekspektasi Partikel dalam Kotak Tiga Dimensi dengan Variasi Bilangan Kuantum Utama(1 1 2), (1 2 1), (2 1 1), (2 2 1), (2 1 2), (1 2 2).....	32
4.2b Data Nilai Ekspektasi Partikel dalam Kotak Tiga Dimensi dengan Variasi Bilangan Kuantum Utama1 1 3), (1 3 1), (3 1 1), (3 3 1), (3 1 3), (1 3 3).....	33
4.2c Data Nilai Ekspektasi Partikel dalam Kotak Tiga Dimensi dengan Variasi Bilangan Kuantum Utama(2 2 3), (2 3 2), (3 2 2), (3 3 2), (3 2 3), (2 3 3).....	33
4.3 Data Tingkat Energi Partikel dalam Kotak Tiga Dimensi dengan Variasi Bilangan Kuantum Utama .....	34

DAFTAR GAMBAR

	Halaman
2.1 Kotak Potensial Satu Dimensi .....	12
3.1 Langkah-langkah Penelitian.....	24
3.2 Grafik Probabilitas Partikel dalam Kotak Tiga Dimensi pada Keadaan ( $n_x=n_y=n_z=1$ ) dengan lebar kotak (a) $\frac{L}{4}$ (b) $\frac{L}{2}$ (c) $\frac{3L}{4}$ (d) L .....	27
3.3 Grafik Probabilitas Partikel dalam Kotak Tiga Dimensi pada Keadaan ( $n_x=n_y=n_z=2$ ) dengan lebar kotak (a) $\frac{L}{4}$ (b) $\frac{L}{2}$ (c) $\frac{3L}{4}$ (d) L .....	28
3.4 Grafik Probabilitas Partikel dalam Kotak Tiga Dimensi pada Keadaan ( $n_x=n_y=n_z=3$ ) dengan lebar kotak (a) $\frac{L}{4}$ (b) $\frac{L}{2}$ (c) $\frac{3L}{4}$ (d) L .....	28
4.1 Probabilitas Partikel ketika $n_x$ divariasi serta $n_y = n_z = 1$ pada Lebar Kotak (a) $\frac{L}{4}$ (b) $\frac{L}{2}$ (c) $\frac{3L}{4}$ (d) L.....	35
4.2 Probabilitas Partikel ketika $n_x$ divariasi serta $n_y = n_z = 2$ pada Lebar Kotak (a) $\frac{L}{4}$ (b) $\frac{L}{2}$ (c) $\frac{3L}{4}$ (d) L.....	36
4.3 Probabilitas Partikel ketika $n_x$ divariasi serta $n_y = n_z = 3$ pada Lebar Kotak (a) $\frac{L}{4}$ (b) $\frac{L}{2}$ (c) $\frac{3L}{4}$ (d) L.....	37
4.4 Nilai Ekspektasi Partikel ketika $n_y$ divariasi serta $n_x = n_z = 1$ pada Lebar Kotak (a) $\frac{L}{4}$ (b) $\frac{L}{2}$ (c) $\frac{3L}{4}$ (d) L.....	38
4.5 Nilai Ekspektasi Partikel ketika $n_y$ divariasi serta $n_x = n_z = 2$ pada Lebar kotak (a) $\frac{L}{4}$ (b) $\frac{L}{2}$ (c) $\frac{3L}{4}$ (d) L .....	39
4.6 Nilai Ekspektasi Partikel ketika $n_y$ divariasi serta $n_x = n_z = 3$ pada Lebar kotak (a) $\frac{L}{4}$ (b) $\frac{L}{2}$ (c) $\frac{3L}{4}$ (d) L .....	40
4.7 Tingkat Energi Partikel Ketika $n_z$ divariasi dengan Kondisi (a) $n_x = n_y = 1$ (b) $n_x = n_y = 2$ (c) $n_x = n_y = 3$ .....	41

**DAFTAR LAMPIRAN**

	Halaman
Lampiran 1. Matriks Penelitian.....	52
Lampiran 2. Tabel Hasil Probabilitas Partikel .....	53
Lampiran 3. Tabel Hasil Nilai Ekspektasi Partikel .....	54
Lampiran 4. Penentuan Fungsi Gelombang Partikel dalam Kotak Tiga Dimensi .....	55
Lampiran 5. Penentuan Tingkat Energi Partikel dalam Kotak Tiga Dimensi .....	59
Lampiran 6. Perhitungan Probabilitas Partikel dalam Kotak Tiga Dimensi dengan Variasi Bilangan Kuantum Utama.....	60
Lampiran 7. Perhitungan Nilai Ekspektasi Partikel dalam Kotak Tiga Dimensi dengan Variasi Bilangan Kuantum Utama .....	64
Lampiran 8. Perhitungan Tingkat Energi Partikel dalam Kotak Tiga Dimensi dengan Variasi Bilangan Kuantum Utama.....	72

## BAB 1. PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Fisika kuantum dapat digunakan untuk menjelaskan masalah mikroskopik seperti permasalahan atom maupun partikel serta menjelaskan masalah-masalah makroskopik seperti bintang dan jagat raya (Supriadi *et al.*, 2018). Permasalahan fisika kuantum secara umum ditandai dengan adanya suatu potensial di mana permasalahan tersebut dapat diselesaikan dengan menggunakan persamaan Schrodinger. Persamaan Schrodinger sendiri berbentuk persamaan differensial parsial orde dua. Secara umum persamaan Schrodinger terdiri atas persamaan Schrodinger tunak (bebas waktu) dan bergantung waktu. Persamaan Schrodinger yang sering digunakan yaitu persamaan Schrodinger bebas waktu dikarenakan fungsi gelombangnya hanya akan bergantung pada posisi ( $r$ ). Posisi ( $r$ ) yang dimaksud yaitu posisi partikel ketika berada di dalam kotak. Solusi dari persamaan Schrodinger disebut sebagai fungsi gelombang yang dapat memberikan informasi mengenai suatu partikel (Krane, 1992).

Persamaan Schrodinger dapat diterapkan pada beberapa kasus diantaranya kasus partikel bebas, partikel dalam kotak (baik kotak satu dimensi, dua dimensi, maupun tiga dimensi), partikel dengan potensial halang (efek terobosan) dan lain sebagainya. Hanafi (2016) melakukan penelitian menggunakan persamaan Schrodinger untuk menentukan tingkat energi atom Helium dengan pendekatan model partikel bebas. Saleem (2015) melakukan penelitian menggunakan persamaan Schrodinger untuk menjelaskan partikel dalam kotak satu dimensi. Kharismawati *et al* (2012) melakukan penelitian menggunakan persamaan Schrodinger untuk menentukan probabilitas partikel dalam kotak tiga dimensi dengan teori perturbasi pada  $n \leq 5$ . Supriadi *et al* (2018) melakukan penelitian dengan salah satu langkahnya menggunakan persamaan Schrodinger untuk menentukan efek terobosan pada tiga penghalang GaN, SiC, dan GaAs. Salah satu penerapan persamaan Schrodinger tersebut yang cukup menarik untuk diteliti yaitu kasus partikel dalam kotak.

Partikel dalam kotak berarti terdapat suatu partikel yang benar-benar terperangkap dalam kotak dengan lebar tertentu (misalnya  $L$ ). Kotak dapat diartikan sebagai suatu daerah dengan bentuk tertentu yang pada daerah luarnya terdapat potensial. Kotak potensial terdiri atas kotak potensial statis dan kotak potensial dinamis. Kotak potensial statis merupakan suatu kotak potensial dengan daerah dalamnya memiliki potensial bernilai nol dan daerah luarnya memiliki potensial bernilai tak hingga. Kotak potensial dinamis hampir sama halnya dengan kotak potensial statis, perbedaannya yaitu pada kotak potensial dinamis salah satu kotaknya bergerak atau berpindah dengan kecepatan konstan (Supriadi *et al*, 2019).

Pembahasan mengenai partikel dalam kotak seringkali digunakan untuk memperkenalkan tingkat energi yang terkuantisasi. Maka, model partikel dalam kotak juga dapat digunakan untuk menentukan tingkat energi pada sumur potensial semikonduktor (Ebbens, 2018). Partikel dalam kotak dapat mengalami transisi dari satu tingkat energi ke tingkat energi yang lain. Probabilitas transisi menunjukkan perilaku osilasi (Dahiya, *et al.*, 2010). Perilaku osilasi yang dimaksud yaitu perilaku partikel bergerak bolak balik di dalam kotak dalam lintasan yang sama secara periodik. Apabila partikel berada dalam keadaan yang semakin kompleks maka jumlah perilaku osilasinya juga akan ikut terpengaruhi. Contoh keadaan kompleks yaitu bervariasinya bilangan kuantum yang digunakan (Anugraha, 2018).

Peristiwa radiasi benda hitam dapat menjadi salah satu contoh penerapan kasus partikel dalam kotak. Benda hitam dapat diartikan sebagai benda yang dapat menyerap seluruh radiasi yang diterimanya. Benda hitam dapat memancarkan radiasi elektromagnetik di mana radiasi tersebut disebut juga sebagai radiasi benda hitam. Benda hitam dapat diumpamakan layaknya suatu rongga berwarna hitam disertai dengan lubang kecil. Rongga hitam dengan lubang kecil tersebut dapat dimasuki suatu berkas cahaya dan berkas cahaya yang masuk tersebut akan dipantulkan berkali-kali tanpa bisa keluar kembali. Berdasarkan penjelasan tersebut maka kaitannya dengan partikel dalam kotak yaitu rongga dengan lubang

kecil tersebut diibaratkan sebagai kotak potensialnya sedangkan berkas cahaya yang masuk diibaratkan sebagai partikelnya (Sutarno *et al.*, 2017).

Partikel yang sering digunakan pada kasus partikel dalam kotak ialah elektron. Pembahasan mengenai partikel dalam kotak merupakan pembahasan yang cukup dasar pada fisika kuantum. Pembahasan partikel dalam kotak dapat digunakan untuk mengetahui kemungkinan keberadaan elektron (peluang menemukan elektron) dan mengetahui tingkat energi elektron dengan menggunakan pendekatan persamaan Schrodinger. Penelitian ini baru dapat dikaitkan dengan kasus dalam kehidupan sehari-hari apabila ditinjau lebih dalam lagi hingga kasus potensial penghalang. Penerapan kasus potensial penghalang salah satunya adalah pada dioda. Prinsip kerja dioda yaitu adanya bias maju dan bias mundur. Ketika potensial penghalang lebih besar dari energi elektron, hal tersebut mengindikasikan terjadinya bias mundur dan dioda pun akan menghambat aliran arus atau tidak ada arus yang mengalir. Energi elektron tersebut dapat diketahui dengan meninjau kasus partikel dalam kotak (Surjono, 2007).

Fisika kuantum erat kaitannya dengan suatu ketidakpastian. Ketidakpastian dari suatu pengukuran akan berujung pada sulitnya memperoleh keakuratan suatu pengukuran. Agar dapat meminimalisir ketidakpastian tersebut, maka harus dilakukan pengukuran secara berulang hingga diperoleh suatu nilai rata – rata. Istilah rata-rata seringkali digunakan dalam fisika klasik, sedangkan pada fisika kuantum istilah tersebut disebut sebagai harga atau nilai ekspektasi. Apabila probabilitas dari suatu sistem telah diketahui dan terdapat observabel X dalam pengukuran maka harga atau nilai ekspektasi dapat ditentukan dengan mengintegrasikan hasil kali antara probabilitas dan observabel X tersebut (Singh & Marshman, 2017).

Penelitian selama ini umumnya meninjau fungsi gelombang dan energi partikel dalam kotak satu dimensi. Seiring berkembangnya ilmu pengetahuan, fungsi gelombang partikel dalam kotak dua dimensi dan kotak tiga dimensi pun juga mulai diteliti atau ditentukan. Fungsi gelombang partikel yang berada dalam kotak dua dimensi atau tiga dimensi berbeda dengan fungsi gelombang partikel

dalam kotak satu dimensi. Hal ini tentu disebabkan karena perbedaan sumbu koordinat yang digunakan. Partikel dalam kotak satu dimensi hanya menggunakan sumbu x, partikel dalam kotak dua dimensi menggunakan sumbu x dan y, serta partikel dalam kotak tiga dimensi menggunakan tiga buah sumbu yaitu sumbu x, y dan z.

Suatu partikel yang terletak dalam daerah berdimensi tiga (daerah yang terdiri atas sumbu x, y, dan z) akan memiliki tingkatan energi atau spektrum yang berbeda antara satu dengan yang lain dan bersifat diskrit. Hal tersebut disebabkan karena perbedaan bilangan kuantum utama yang digunakan (Kharismawati *et al.*, 2012). Selain dipengaruhi oleh bilangan kuantum utama (n), tingkatan energi suatu partikel juga dipengaruhi oleh nilai  $\frac{h}{2\pi}$  ( $\hbar$ ), nilai phi ( $\pi$ ), massa elektron dan panjang, tinggi, serta lebar kotak yang disimbolkan dengan L.

Penelitian mengenai partikel dalam kotak tiga dimensi telah dilakukan oleh beberapa peneliti. Alberto *et al* (2011) melakukan penelitian tentang partikel relativistik dalam kotak tiga dimensi. Penelitian tersebut menggunakan persamaan Dirac untuk memecahkan masalah spin  $-\frac{1}{2}$  partikel relativistik dalam kotak tiga dimensi. Penelitian tersebut mampu memecahkan tiga persamaan yang digabungkan yang memberikan nilai eigen dari partikel Dirac dalam kotak tiga dimensi dengan menggunakan bilangan kuantum non relativistik untuk mengklasifikasi hal terkait.

Kharismawati *et al* (2012) melakukan penelitian tentang penentuan probabilitas partikel dalam kotak tiga dimensi dengan menggunakan teori perturbasi pada bilangan kuantum  $n \leq 5$  dan lebar kotak potensial yang digunakan yaitu  $\frac{L}{4}$ . Teori perturbasi yaitu teori gangguan yang gangguannya dapat berupa medan magnet maupun medan listrik. Hasil penelitian tersebut menunjukkan bahwa probabilitas partikel dalam kotak tiga dimensi dipengaruhi oleh lebar kotak potensial dan bilangan kuantum yang digunakan. Probabilitas terendah diperoleh ketika partikel berada dalam keadaan dasar dan probabilitas terbesar diperoleh ketika partikel berada dalam keadaan terkesitasi kedua.

Penelitian selanjutnya oleh Supriadi *et al* (2019) dalam hal menentukan probabilitas, nilai ekspektasi, dan tingkat energi partikel dalam kotak tiga dimensi pada bilangan kuantum  $n \leq 5$  dengan bilangan kuantum pada masing-masing koordinat bernilai sama, yaitu  $n_x = n_y = n_z$ . Hasil penelitian tersebut menunjukkan bahwa probabilitas partikel dalam kotak tiga dimensi dipengaruhi oleh lebar kotak potensial serta bilangan kuantum utama pada masing-masing koordinat. Selain itu, penelitian tersebut menunjukkan bahwa nilai ekspektasi terbesar diperoleh ketika lebar kotak potensial yang digunakan sebesar  $\frac{L}{4}$  dan  $L$ . Berdasarkan hal tersebut, maka penelitian ini merupakan pengembangan dari penelitian-penelitian yang telah dilakukan sebelumnya. Pengembangan yang akan dilakukan pada penelitian ini terletak pada variasi bilangan kuantum utama yang digunakan. Bilangan kuantum utama yang digunakan yaitu  $n \leq 3$  untuk fungsi gelombang dalam keadaan dasar sampai fungsi gelombang tereksitasi kedua dengan variasi bilangan kuantum utama pada masing-masing koordinat, yaitu  $n_x = n_y \neq n_z$ ,  $n_x = n_z \neq n_y$  dan  $n_x \neq n_y = n_z$ .

## 1.2 Rumusan Masalah

Adapun rumusan masalah dari penelitian ini berdasarkan latar belakang yang ada yaitu sebagai berikut:

- Bagaimanakah probabilitas partikel dalam kotak 3 dimensi dengan nilai  $n_x$ ,  $n_y$ , dan  $n_z$  yang bervariasi pada  $n \leq 3$  pada fungsi gelombang dasar sampai tereksitasi kedua ?
- Bagaimanakah nilai ekspektasi partikel dalam kotak 3 dimensi dengan nilai  $n_x$ ,  $n_y$ , dan  $n_z$  yang bervariasi pada  $n \leq 3$  pada fungsi gelombang dasar sampai tereksitasi kedua?
- Bagaimanakah tingkat energi partikel dalam kotak 3 dimensi dengan nilai  $n_x$ ,  $n_y$ , dan  $n_z$  yang bervariasi pada  $n \leq 3$ ?

### 1.3 Batasan Masalah

Agar penelitian dapat lebih terfokus maka penelitian ini memiliki beberapa batasan masalah sebagai berikut:

- a. Pada penelitian ini dianggap hanya terdapat satu partikel dalam kotak
- b. Persamaan schrodinger yang digunakan adalah persamaan schrodinger bebas waktu
- c. Panjang kotak potensial yang digunakan yaitu  $L_x$ ,  $L_y$ , dan  $L_z$  dianggap bernilai sama yaitu sebesar  $L$
- d. Keadaan yang digunakan mulai keadaan dasar ( $n=1$ ) hingga keadaan terkesitasi kedua ( $n=3$ )
- e. Variasi bilangan kuantum utama yang digunakan yaitu dengan menetapkan bahwa dua sumbu dibuat bernilai sama dan hanya satu sumbu saja yang diubah-ubah nilainya yaitu  $(n_x = n_y) \neq n_z$ ,  $(n_x = n_z) \neq n_y$ , dan  $(n_y = n_z) \neq n_x$

### 1.4 Tujuan Penelitian

Penelitian ini memiliki beberapa tujuan sebagai berikut:

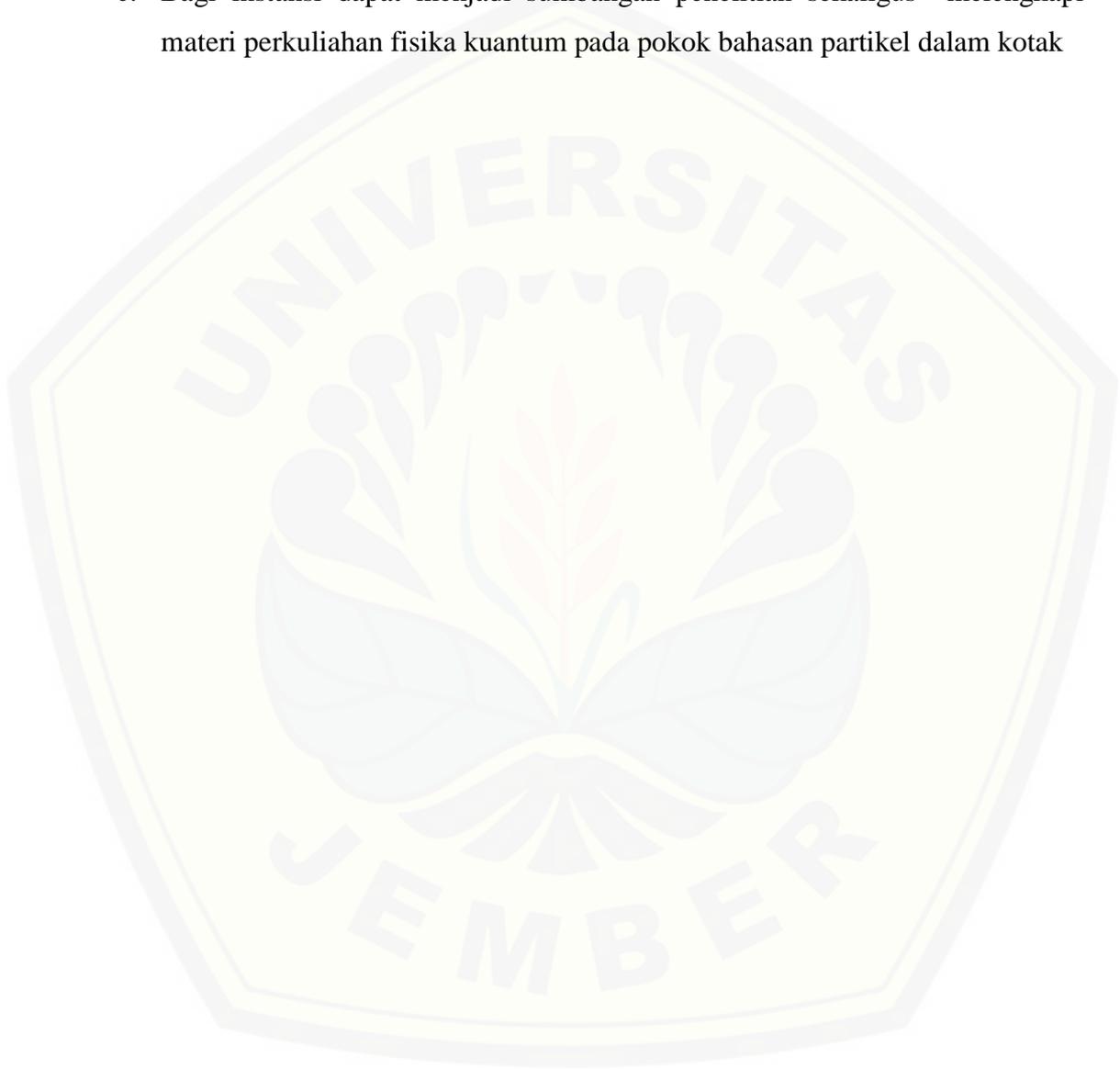
- a. Menganalisis besarnya probabilitas partikel dalam kotak 3 dimensi dengan nilai  $n_x$ ,  $n_y$ , dan  $n_z$  yang bervariasi pada  $n \leq 3$  pada fungsi gelombang dasar sampai tereksitasi kedua
- b. Menganalisis besarnya nilai ekspektasi partikel dalam kotak 3 dimensi dengan nilai  $n_x$ ,  $n_y$ , dan  $n_z$  yang bervariasi pada  $n \leq 3$  pada fungsi gelombang dasar sampai tereksitasi kedua
- c. Menganalisis besarnya tingkat energi partikel dalam kotak 3 dimensi dengan nilai  $n_x$ ,  $n_y$ , dan  $n_z$  yang bervariasi pada  $n \leq 3$

### 1.5 Manfaat Penelitian

Penelitian ini dapat memberikan beberapa manfaat sebagai berikut:

- a. Bagi peneliti dapat meningkatkan wawasan mengenai penerapan persamaan Schrodinger khususnya pada kasus partikel dalam kotak tiga dimensi dengan variasi bilangan kuantum utama

- b. Bagi pembaca dapat digunakan sebagai acuan dalam mempelajari penerapan persamaan Schrodinger khususnya pada kasus partikel dalam kotak tiga dimensi dengan variasi bilangan kuantum utama serta referensi untuk melakukan penelitian selanjutnya
- c. Bagi instansi dapat menjadi sumbangan penelitian sekaligus melengkapi materi perkuliahan fisika kuantum pada pokok bahasan partikel dalam kotak



**BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA**

**2.1 Dualisme Gelombang Partikel**

Louis de Broglie mengemukakan suatu hipotesis yang dikenal sebagai hipotesis de Broglie pada tahun 1924. Hipotesis de Broglie berkaitan dengan dualisme gelombang partikel. Keterkaitan antara partikel dan gelombang yaitu menurut Max Planck secara eksperimen gelombang berperilaku sebagai partikel dan Louis de Broglie menghipotesiskan bahwa partikel juga dapat berperilaku sebagai gelombang. Hal ini menunjukkan bahwa terjadi dualisme gelombang partikel (Purwanto, 2016). Sebuah partikel yang memiliki frekuensi  $f$  memiliki momentum  $p$  seperti persamaan (2.1) berikut:

$$p = \frac{hf}{c} = \frac{h}{\lambda} \dots\dots\dots (2.1)$$

Berdasarkan persamaan (2.1) maka  $h$  merupakan konstanta Planck,  $c$  merupakan kecepatan cahaya, dan  $\lambda$  merupakan panjang gelombang. Persamaan (2.1) menunjukkan bahwa panjang gelombang partikel dipengaruhi oleh momentumnya, sehingga menghasilkan relasi seperti persamaan (2.2) berikut:

$$\lambda = \frac{h}{p} \dots\dots\dots (2.2)$$

Menurut Louis de Broglie, persamaan (2.2) merupakan persamaan umum yang berlaku untuk semua partikel maupun foton. Sebuah partikel yang memiliki massa  $m$  dan kecepatan  $v$  secara relativistik memiliki persamaan momentum  $p = \gamma mv$ , sehingga panjang gelombang de Broglie nya seperti persamaan (2.3) berikut:

$$\lambda = \frac{h}{\gamma mv} \dots\dots\dots(2.3)$$

Persamaan (2.3) tersebut menunjukkan bahwa semakin besar momentum partikelnya maka panjang gelombangnya akan semakin kecil. Persamaan (2.3) mengandung unsur  $\gamma$ , di mana  $\gamma$  adalah faktor relativistik yang besarnya seperti persamaan (2.4) berikut:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \dots\dots\dots(2.4)$$

(Beiser, 2003).

## 2.2 Persamaan Schrodinger

Fisika klasik memiliki persamaan pokok berupa hukum gerak kedua Newton. Seperti halnya fisika klasik, fisika kuantum pun memiliki persamaan pokok yang disebut juga sebagai persamaan Schrodinger. Persamaan Schrodinger berupa persamaan differensial parsial orde dua. Persamaan schrodinger dapat digunakan pada kerangka relativistik maupun non relativistik. Persamaan schrodinger relativistik digunakan ketika kecepatan partikel yang ditinjau mendekati kecepatan cahaya. Namun, secara umum persamaan Schrodinger seringkali digunakan pada kasus non relativistik. Pada kasus ini, persamaan Schrodinger dibagi menjadi dua yaitu persamaan Schrodinger bergantung waktu dan persamaan Schrodinger tunak (bebas waktu). Persamaan Schrodinger tunak (bebas waktu) lebih sering digunakan karena persamaannya hanya bergantung pada posisi (Humaidi, *et al.*, 2016).

Persamaan Schrodinger dapat menjelaskan interaksi antara elektron dan inti atom. Interaksi antara elektron dan inti atom ini dapat menjelaskan sifat fisika dan kimia dari suatu atom atau molekul. Agar dapat memahami secara mendalam mengenai sifat-sifat tersebut maka diperlukan solusi dari persamaan Schrodinger. Solusi dari persamaan Schrodinger disebut sebagai fungsi gelombang yang dapat memberikan informasi mengenai suatu partikel (Ruggenthaler, *et al.*, 2015). Ketika menggunakan persamaan Schrodinger maka terdapat beberapa persyaratan yang harus dipenuhi. Persyaratan – persyaratan tersebut antara lain:

- a. Mematuhi hukum kekekalan energi

Ketika menggunakan persamaan Schrodinger maka prinsip kekekalan energi pada fisika klasik harus tetap digunakan. Hukum kekekalan energi dirumuskan seperti persamaan (2.5) berikut:

$$K + V = E \dots\dots\dots (2.5)$$

Berdasarkan persamaan (2.5) tersebut maka K merupakan energi kinetik, V merupakan energi potensial, dan E merupakan energi total. Pada bahasan kali ini menggunakan kerangka tak relativistik di mana  $K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}$ . Maka, E merupakan total dari energi kinetik dan energi potensial (Krane, 1992).

b. Taat pada Hipotesa de Broglie

Dualisme gelombang partikel yang diungkapkan oleh de Broglie menunjukkan bahwa partikel dapat memiliki beberapa sifat seperti halnya gelombang. Partikel memiliki panjang gelombang, di mana panjang gelombang menurut de Broglie yaitu  $\lambda = \frac{h}{p}$ . Sehingga partikel tersebut akan memiliki energi seperti persamaan (2.6) berikut:

$$K = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \dots\dots\dots(2.6)$$

Berdasarkan persamaan (2.6) maka  $K$  merupakan energi kinetik,  $p$  merupakan momentum,  $m$  merupakan massa, dan  $k$  merupakan bilangan gelombang.

c. Berperilaku baik

Berperilaku baik di sini maksudnya adalah persamaan yang digunakan harus bernilai tunggal dan linear. Bernilai tunggal berarti tidak ada dua probabilitas atau lebih untuk menemukan partikel pada suatu titik yang sama. Linear dimaksudkan agar gelombang yang diperoleh memiliki sifat superposisi (Krane, 1992).

Erwin Schrodinger menggunakan sifat dualisme gelombang partikel yang dikemukakan oleh Louis de Broglie dalam merumuskan suatu persamaan pada tahun 1926. Apabila momentum suatu partikel adalah  $p$ , panjang gelombangnya menurut hipotesis de Broglie adalah  $\lambda = h/p$ , serta kecepatan dirumuskan dengan  $v = f\lambda$ , maka menghasilkan persamaan (2.7) berikut:

$$v = \frac{fh}{p} \dots\dots\dots(2.7)$$

Berdasarkan persamaan (2.7) maka  $v$  merupakan kecepatan,  $f$  merupakan frekuensi,  $h$  merupakan konstanta Planck, dan  $p$  merupakan momentum. Apabila kecepatan sudut  $\omega = 2\pi f$  dan  $\hbar = h/2\pi$ , maka persamaan (2.7) menjadi persamaan (2.8) berikut:

$$v = \frac{\hbar\omega}{p} \dots\dots\dots(2.8)$$

Penggunaan hukum kekekalan energi, hipotesa de Broglie dan persamaan (2.8), menghasilkan persamaan gelombang seperti persamaan (2.9) berikut:

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V)\psi(x) = 0 \dots\dots\dots(2.9)$$

Berdasarkan persamaan (2.9) maka  $\psi(x)$  merupakan fungsi gelombang,  $m$  merupakan massa,  $E$  merupakan energi dan  $V$  merupakan potensial. Persamaan (2.9) hanya mengandung unsur posisi dan tidak mengandung waktu. Maka, persamaan tersebutlah yang disebut sebagai persamaan Schrodinger tunak (bebas waktu) untuk satu dimensi. Apabila diterapkan pada tiga dimensi, maka persamaan (2.9) tersebut menjadi seperti persamaan (2.10) berikut:

$$\nabla^2\psi(x, y, z) + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V)\psi(x, y, z) = 0 \dots\dots\dots(2.10)$$

Persamaan (2.10) mengandung unsur  $\nabla^2$ , di mana  $\nabla^2$  dirumuskan seperti (2.11)

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \dots\dots\dots(2.11)$$

Berdasarkan persamaan (2.9), maka diketahui bahwa persamaan Schrodinger telah memberikan suatu solusi di mana solusinya berupa energi ( $E$ ) dan fungsi gelombang  $\psi(x)$ . Apabila kedua ruas pada persamaan Schrodinger (2.9) dikalikan dengan  $\frac{\hbar^2}{2m}$ , maka akan dihasilkan persamaan Schrodinger tunak satu dimensi seperti persamaan (2.12) berikut:

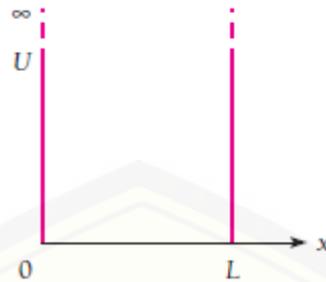
$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right] \psi(x) = E\psi(x) \dots\dots\dots(2.12)$$

(Siregar, 2018)

## 2.3 Partikel dalam kotak

### 2.3.1 Partikel dalam kotak satu dimensi

Partikel dalam kotak satu dimensi dapat diibaratkan sebagai suatu partikel yang benar-benar terperangkap dalam kotak satu dimensi dengan lebar kotak sebesar  $L$ . Kotak potensial satu dimensi dengan lebar  $L$  dapat digambarkan seperti Gambar 2.1 berikut:



Gambar 2.1 Kotak Potensial Satu Dimensi

Kotak ini merupakan suatu kotak potensial yang memiliki batas-batas potensial tertentu seperti berikut ini

$$V(x) = 0 \quad 0 \leq x \leq L$$

$$= \infty \quad x < 0, x > L$$

L menunjukkan panjang kotak. Potensial – potensial tersebut seringkali dikenal sebagai potensial sumur persegi tak hingga. Apabila batas-batas potensial telah ditentukan, maka hal yang harus dilakukan yaitu membedakan antara daerah di luar kotak dan daerah di dalam kotak. Pada batas-batas tersebut, daerah di luar kotak yaitu  $x < 0$  dan  $x > L$  serta daerah di dalam kotak yaitu  $0 \leq x \leq L$ .

Daerah di luar kotak yaitu  $x < 0$  dan  $x > L$  memiliki potensial sebesar  $V = \infty$ . Ketika  $V = \infty$  maka fungsi gelombangnya yaitu  $\psi = 0$ . Namun, di sisi lain saat meninjau daerah di dalam kotak yaitu  $0 \leq x \leq L$  maka potensialnya sebesar  $V(x) = 0$ . Sehingga, pemecahannya seperti persamaan (2.13) berikut:

$$\psi(x) = A \sin kx + B \cos kx \dots \dots \dots (2.13)$$

Berdasarkan persamaan (2.13) maka  $\psi(x)$  merupakan fungsi gelombang, A dan B merupakan konstanta, serta k merupakan bilangan gelombang. Besarnya k pada persamaan (2.13) dirumuskan seperti persamaan (2.14) berikut:

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \dots \dots \dots (2.14)$$

E pada persamaan (2.14) menunjukkan energi partikel dan m menunjukkan massa partikel. Persamaan (2.13) menunjukkan bahwa nilai A dan B belum diketahui. Agar nilai A dan B diketahui maka dapat diterapkan syarat kontinuitas.

Pada syarat kontinuitas disyaratkan bahwa  $\psi(x)$  akan kontinu pada setiap batas dua bagian ruang. Dalam hal ini untuk  $x < 0$  dan  $x > 0$  bernilai sama di  $x = 0$  serta untuk  $x < L$  dan  $x > L$  juga akan bernilai sama di  $x = L$ .

Ketika  $x = 0$  maka persamaan (2.13) menjadi seperti persamaan (2.15) berikut:

$$\psi(0) = A \sin 0 + B \cos 0 = 0 \dots \dots \dots (2.15)$$

Jadi, diperoleh nilai  $B = 0$

Ketika  $x = L$  maka persamaan (2.13) menjadi seperti persamaan (2.16) berikut:

$$\psi(L) = A \sin kL + B \cos kL = 0 \dots \dots \dots (2.16)$$

Pada persamaan (2.16) diperoleh  $B = 0$ , maka persamaan (2.16) akan menjadi seperti persamaan (2.17) berikut:

$$A \sin kL = 0 \dots \dots \dots (2.17)$$

Persamaan (2.17) memberikan dua pemecahan yaitu  $A = 0$  atau  $\sin kL = 0$ . Apabila diambil  $A = 0$ , maka fungsi gelombang awal akan bernilai  $\psi = 0$ . Hal ini berarti dalam kotak tidak terdapat partikel (pemecahan yang tidak masuk akal). Sehingga, pemecahan yang mungkin yaitu  $\sin kL = 0$ . Nilai  $kL$  dirumuskan seperti persamaan (2.18) berikut:

$$kL = \pi, 2\pi, 3\pi, \dots \dots \dots (2.18)$$

Persamaan (2.18) dapat juga dituliskan seperti persamaan (2.19) berikut:

$$kL = n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots \dots \dots (2.19)$$

Simbol  $n$  menunjukkan bilangan kuantum utama. Bilangan gelombang dirumuskan dengan  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  dan panjang gelombang dirumuskan dengan  $\lambda = \frac{2L}{n}$ . Gelombang berdiri dalam sebuah dawai yang panjangnya  $L$  dan kedua ujungnya terikat memiliki hasil yang identik dengan persamaan  $k$  dan  $\lambda$  tersebut. Maka, secara tidak langsung partikel yang terperangkap dalam suatu wilayah sepanjang  $L$  akan memiliki pemecahan persamaan Schrodinger yang tidak lain merupakan sederetan gelombang berdiri de Broglie. Energi partikel dalam suatu kotak terkuantisasi dirumuskan seperti persamaan (2.20) berikut:

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2mL^2} \dots \dots \dots (2.20)$$

Pemecahan berikutnya akan menjadi lebih mudah apabila digunakan acuan yaitu  $E_0 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2}$ . Persamaan tersebut menunjukkan bahwa energi salah satunya dipengaruhi oleh massa partikel dan panjang kotak. Maka dapat disimpulkan bahwa  $E = n^2 E_0$ . Berdasarkan persamaan  $E = n^2 E_0$  maka dapat disimpulkan bahwa keadaan energi terendah berada pada  $n = 1$  yang dikenal sebagai keadaan dasar. Keadaan energi yang lebih tinggi berada pada  $n > 1$  dan dikenal sebagai keadaan eksitasi.

Fungsi gelombang  $\psi(x)$  mengandung unsur A dan B. Nilai B telah diketahui namun nilai A belum diketahui. Sehingga persamaan  $\psi(x)$  dapat dikatakan belum lengkap. Nilai A dapat ditentukan melalui persamaan persyaratan normalisasi  $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1$ . Persamaan normalisasi dapat dirumuskan seperti persamaan (2.21) berikut:

$$\int_0^L A^2 \sin^2 \frac{n\pi x}{L} dx = 1 \dots \dots \dots (2.21)$$

Persamaan (2.21) menghasilkan  $A = \sqrt{2/L}$ . Persamaan (2.15) menghasilkan bahwa  $B = 0$ . Maka, fungsi gelombang partikel dalam kotak satu dimensi dalam selang  $0 \leq x \leq L$  secara lengkap adalah seperti persamaan (2.22) berikut:

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L} \quad n=1,2,3,\dots \dots \dots (2.22)$$

(Krane, 1992).

Partikel dalam kotak satu dimensi tentu memiliki fungsi gelombang tertentu. Apabila kotak tersebut dibagi menjadi dua bagian, maka fungsi gelombang yang dihasilkan pun akan berbeda. Kedua kotak hasil pembagian tersebut akan memiliki fungsi gelombang masing-masing. Gea (2002) melakukan penelitian tentang pemisahan fungsi gelombang pada sebuah partikel dalam kotak satu dimensi. Hasil penelitian tersebut menunjukkan bahwa partikel hanya akan ada satu dari dua kotak tersebut, dan partikel akan selalu berakhir dalam sebuah kotak yang memiliki ukuran lebih luas dari kotak lainnya setelah proses pemisahan dilakukan.

### 2.3.2 Partikel dalam kotak dua dimensi

Pemecahan pada partikel dalam kotak dua dimensi tidak jauh berbeda dengan partikel dalam kotak satu dimensi. Namun, ada satu ciri khas yang penting untuk diperhatikan yaitu pada kasus dua dimensi dapat terjadi peristiwa degenerasi. Apabila sebelumnya pada kotak satu dimensi hanya bergantung pada fungsi  $x$  saja, maka pada tinjauan ini bergantung pada fungsi  $x$  dan  $y$ . Apabila potensialnya mengandung unsur  $x$  dan  $y$ , maka  $\psi$  juga akan bergantung pada  $x$  dan  $y$  sehingga turunannya pun merupakan turunan terhadap  $x$  dan  $y$ . Persamaan Schrodinger dua dimensi dirumuskan seperti persamaan (2.23) berikut:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2 \psi(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi(x,y)}{\partial y^2} \right) + V(x,y)\psi(x,y) = E\psi(x,y) \dots (2.23)$$

Berdasarkan persamaan (2.23) maka  $\psi(x,y)$  merupakan fungsi gelombang pada sumbu  $x$  dan  $y$ ,  $m$  merupakan massa partikel,  $E$  merupakan energi dan  $V(x,y)$  merupakan potensial pada sumbu  $x$  dan  $y$ . Partikel dalam kotak dua dimensi memiliki batasan-batasan seperti persamaan (2.24) berikut:

$$\begin{aligned} V(x,y) &= 0 & 0 \leq x \leq L, 0 \leq y \leq L \\ &= \infty & \text{untuk yang lainnya} \dots (2.24) \end{aligned}$$

Persamaan Schrodinger dua dimensi mengandung persamaan differensial parsial yang mengandung unsur  $x$  dan  $y$ . Maka, pemecahan persamaan tersebut memerlukan suatu teknik khusus. Teknik yang dapat digunakan untuk memecahkan persamaan tersebut yaitu teknik pemisahan variabel (*separable variable*). Pada teknik pemisahan variabel ini, fungsi dari variabel  $x$  maupun variabel  $y$  yang ditinjau dapat dinyatakan sebagai hasil kali antara fungsi yang hanya bergantung pada  $x$  dengan fungsi lain yang hanya bergantung pada  $y$ . Persamaan pada teknik pemisahan variabel dinyatakan pada persamaan (2.25) berikut:

$$\psi(x,y) = f(x)g(y) \dots (2.25)$$

Persamaan suatu partikel yang terletak dalam kotak dua dimensi dirumuskan seperti persamaan (2.26) dan (2.27) berikut:

$$f(x) = A \sin k_x x + B \cos k_x x \dots (2.26)$$

$$g(y) = C \sin k_y y + D \cos k_y y \dots\dots\dots(2.27)$$

Simbol  $A$  dan  $B$  pada persamaan (2.26) merupakan konstanta. Simbol  $C$  dan  $D$  pada persamaan (2.27) juga merupakan konstanta. Sedangkan simbol  $k$  menunjukkan bilangan gelombang. Namun, pada kasus dua dimensi bilangan gelombangnya dibedakan menjadi  $k_x$  bagi  $f(x)$  dan  $k_y$  bagi  $g(y)$ . Syarat kontinu pada  $\psi(x, y)$  menghendaki bahwa pemecahan di luar dan di dalam kotak bernilai sama pada daerah batas kotak. Jadi  $\psi = 0$  di  $x = 0$  dan di  $x = L$  (untuk semua  $y$ ) dan  $\psi = 0$  di  $y = 0$  dan di  $y = L$  (untuk semua  $x$ ). Persyaratan pada  $x = 0$  dan  $y = 0$  menghendaki bahwa dengan cara yang sama seperti pada pembahasan 2.3.1 diperoleh  $B = 0$  dan  $D = 0$ .

Persyaratan pada  $x = L$  menghendaki bahwa  $\sin k_x L = 0$  dan pada  $y = L$  menghendaki pula  $\sin k_y L = 0$ . Fungsi sinus akan menunjukkan nilai 0 ketika menggunakan nilai berupa kelipatan bilangan bulat dari  $\pi$ . Bilangan-bilangan bulat tersebut tidak harus bernilai sama, namun dapat bernilai beda. Agar lebih mudah dalam hal membedakan bilangan bulatnya, maka bilangan bulat pada kasus dua dimensi dinyatakan dengan  $n_x$  dan  $n_y$ . Bilangan gelombang ( $k$ ) memiliki persamaan  $k = \frac{n\pi}{L}$ . Sehingga persamaan fungsi gelombangnya ( $\psi(x, y)$ ) menjadi seperti persamaan (2.28) berikut:

$$\psi(x, y) = F \sin \frac{n_x \pi x}{L} \sin \frac{n_y \pi y}{L} \dots\dots\dots(2.28)$$

Persamaan (2.28) mengandung koefisien  $F$  yang merupakan hasil kali antara  $A$  dan  $C$ . Simbol  $F$  merupakan konstanta atau koefisien. Nilai koefisien tersebut dapat diperoleh dengan menerapkan syarat normalisasi pada kasus dua dimensi, di mana persamaan normalisasi untuk kasus dua dimensi dinyatakan seperti persamaan (2.29) berikut:

$$\iint \psi^2 dx dy = 1 \dots\dots\dots(2.29)$$

Apabila diterapkan syarat batas 0 sampai dengan  $L$  maka diperoleh persamaan (2.30) berikut:

$$F^2 \int_0^L \sin^2 \frac{n_x \pi x}{L} dx \int_0^L \sin^2 \frac{n_y \pi y}{L} dy = 1 \dots\dots\dots(2.30)$$

Persamaan tersebut akan memberikan nilai koefisien  $F$  seperti persamaan (2.31) berikut:

$$F = \frac{2}{L} \dots \dots \dots (2.31)$$

Pada kasus partikel dalam kotak, selain fungsi gelombangnya, energi partikel dalam kotak dua dimensi pun dapat ditentukan. Penentuan energi partikel dalam kotak dua dimensi hampir sama dengan satu dimensi hanya saja bilangan kuantumnya menggunakan  $n_x$  dan  $n_y$ . Maka, energinya seperti persamaan (2.32) berikut:

$$E = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} (n_x^2 + n_y^2) \dots \dots \dots (2.32)$$

Persamaan  $E_0 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2}$  tetap digunakan untuk mempermudah perumusan berikutnya, sehingga diperoleh  $E = E_0 (n_x^2 + n_y^2)$  (Krane, 1992).

### 2.3.3 Partikel dalam kotak tiga dimensi

Pembahasan mengenai partikel dalam kotak tiga dimensi hampir sama dengan partikel dalam kotak satu dimensi maupun dua dimensi. Partikel dalam kotak tiga dimensi ini secara khusus dibedakan menjadi dua topik bahasan, yaitu kotak tiga dimensi dengan kotak berbentuk persegi panjang maupun kubik.

#### a. Potensial kotak persegi panjang

Partikel dalam kotak persegi panjang memiliki batas-batas seperti berikut:

$$V(x, y, z) = \begin{cases} 0, & 0 < x < a, 0 < y < b, 0 < z < c \\ \infty, & \text{yang lainnya} \end{cases} \dots \dots \dots (2.33)$$

Secara tidak langsung dapat dituliskan bahwa  $V_{(x, y, z)} = V_x(x) + V_y(y) + V_z(z)$ . Dalam hal ini potensial  $V_y(y)$  dan  $V_z(z)$  memiliki panjang yang serupa karena potensial yang digunakan berbentuk persegi panjang (lebarnya dianggap sama dengan tingginya). Seperti yang telah dijelaskan sebelumnya pada kasus satu dimensi bahwa nilai koefisien  $X$  yang diperoleh melalui penerapan syarat normalisasi dirumuskan pada persamaan (2.34) berikut:

$$X_{(x)} = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n_x \pi}{L} x\right), \quad n_x = 1, 2, 3, \dots \dots \dots (2.34)$$

Selain itu, besarnya energi yang sesuai dirumuskan seperti persamaan (2.35) berikut:

$$E_{n_x} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} n_x^2 \dots \dots \dots (2.35)$$

Berdasarkan persamaan-persamaan (2.33), (2.34) dan (2.35) serta melalui operasi matematis maka diperoleh fungsi eigen untuk partikel dalam kotak tiga dimensi seperti persamaan (2.36) berikut:

$$\psi_{n_x n_y n_z}(x, y, z) = \sqrt{\frac{8}{abc}} \sin\left(\frac{n_x \pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n_y \pi}{b} y\right) \sin\left(\frac{n_z \pi}{c} z\right) \dots (2.36)$$

(Zettili, 2009).

Berdasarkan persamaan (2.36) maka  $\psi(x, y, z)$  merupakan fungsi gelombang pada sumbu  $x, y$ , dan  $z$ ,  $a$  merupakan panjang kotak,  $b$  merupakan lebar kotak,  $c$  merupakan tinggi kotak,  $m$  merupakan massa partikel, dan  $E$  merupakan energi serta  $V(x, y, z)$  merupakan potensial pada sumbu  $x, y$ , dan  $z$ .

#### b. Potensial kubik

Pada kotak potensial berbentuk kubik (kubus), maka panjang, lebar, dan tinggi kotak dianggap besarnya sama yaitu  $a = b = c$ . Selanjutnya, nilai  $a, b$ , maupun  $c$  tersebut dapat digantikan dengan nilai  $L$ . Maka, energi partikel dalam kotak tiga dimensi dapat dirumuskan seperti persamaan (2.37) berikut:

$$E_{n_x n_y n_z} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \dots (2.37)$$

Pada persamaan (2.37) tersebut terdapat  $n_x, n_y, n_z$  yang nilainya seperti persamaan (2.38) berikut:

$$n_x, n_y, n_z = 1, 2, 3, \dots \dots \dots (2.38)$$

Simbol  $n_x, n_y, n_z$  pada persamaan (2.38) menunjukkan bilangan kuantum utama pada sumbu  $x, y$ , dan  $z$ . Suatu partikel dapat berada dalam beberapa keadaan, baik berada dalam keadaan dasar maupun keadaan tereksitasi. Ketika partikel berada dalam keadaan dasar, maka besarnya  $n_x = n_y = n_z = 1$ , sehingga energi partikelnya seperti persamaan (2.39) berikut:

$$E_{111} = \frac{3\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} = 3E_0 \dots (2.39)$$

Energi partikel pada keadaan dasar yaitu  $E_0 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2}$ . Berdasarkan hal tersebut maka persamaan (2.39) menunjukkan bahwa energi dasar partikel dalam kotak tiga dimensi besarnya yaitu tiga kali lipat dari energi dasar partikel dalam kotak satu dimensi. Pada saat partikel dalam kotak tiga dimensi berada pada keadaan

tereksitasi pertama, maka terdapat beberapa keadaan yang mungkin untuk bilangan kuantumnya yaitu  $(n_x, n_y, n_z) = (2,1,1), (1,2,1), (1,1,2)$ . Berdasarkan tiga keadaan tersebut maka menghasilkan fungsi gelombang  $\psi_{211}(x, y, z), \psi_{121}(x, y, z),$  dan  $\psi_{112}(x, y, z)$ . Besarnya  $\psi_{211}(x, y, z)$  dapat dirumuskan seperti persamaan (2.40) berikut:

$$\psi_{211}(x, y, z) = \sqrt{\frac{8}{L^3}} \sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{L}y\right) \sin\left(\frac{\pi}{L}z\right) \dots \dots \dots (2.40)$$

Fungsi gelombang  $\psi_{211}(x, y, z)$  dapat digunakan untuk menyimpulkan ekspresi dari  $\psi_{121}(x, y, z),$  dan  $\psi_{112}(x, y, z)$ . Ketiga keadaan tersebut memberikan besarnya energi yang sama seperti ditunjukkan pada persamaan (2.41) berikut:

$$E_{211} = E_{121} = E_{112} = 6 \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} = 6E_1 \dots \dots \dots (2.41)$$

Berdasarkan hal tersebut maka partikel dalam kotak tiga dimensi saat keadaan tereksitasi pertama mengalami degenerasi rangkap tiga. Keadaan degenerasi dikatakan dapat terjadi ketika bilangan kuantum yang digunakan berbeda-beda namun dapat menghasilkan energi yang besarnya sama. Partikel dalam kotak tiga dimensi ketika berada pada keadaan yang lain, misalnya keadaan tereksitasi kedua, ketiga, dan seterusnya dapat saja mengalami degenerasi lagi maupun tidak. Apabila terjadi degenerasi lagi bisa saja jumlah degenerasi yang dihasilkan berbeda-beda (Zettili, 2009).

## 2.4 Normalisasi

Partikel dalam kotak memiliki fungsi gelombang. Fungsi gelombang yang dimiliki oleh partikel harus dinormalisasi terlebih dahulu. Normalisasi dapat dijelaskan lebih lanjut dengan meninjau kebolehjadian menemukan partikel dalam kotak. Kebolehjadian menemukan partikel dalam kotak ( $P(x)dx$ ) dirumuskan seperti persamaan (2.42) berikut:

$$P(x)dx = |\psi(x)|^2 dx \dots \dots \dots (2.42)$$

Pada persamaan (2.42)  $\psi(x)$  menunjukkan fungsi gelombang. Apabila kebolehjadian menemukan partikel tersebut berada pada suatu selang tertentu,

maka kebolehjadian untuk menemukan partikel antara  $x_1$  dan  $x_2$  dirumuskan seperti persamaan (2.43) berikut:

$$\int_{x_1}^{x_2} P(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} |\psi(x)|^2 dx \dots \dots \dots (2.43)$$

(Krane, 1992).

Persamaan (2.43) merupakan kebolehjadian atau kemungkinan untuk menemukan partikel dari  $r = x_1$  sampai  $r = x_2$ . Syarat normalisasi menyatakan bahwa kemungkinan total tersebut harus 100 persen atau bernilai satu sehingga memberikan persamaan seperti persamaan (2.44) berikut:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1 \dots \dots \dots (2.44)$$

Ketika telah memasuki pokok bahasan partikel dalam kotak, maka batas-batas integral tersebut disesuaikan dengan keberadaan partikel. Sehingga, batas integralnya tidak harus selalu dari  $-\infty$  sampai  $\infty$ . Bisa saja dari  $\frac{L}{4}$  sampai  $\frac{L}{2}$  dan lain sebagainya. Umumnya potensial sistem bernilai real dan fungsi gelombangnya sifatnya akan tetap (Juwono, 2017).

## 2.5 Probabilitas

Pemecahan persamaan Schrodinger disebut sebagai fungsi gelombang. Fungsi gelombang tidak bergantung waktu disimbolkan dengan  $\psi(x)$ . Fungsi gelombang dapat memberikan informasi tentang perilaku partikel. Namun, fungsi gelombang tersebut tidak dapat memberikan arti fisis secara langsung. Berdasarkan hal tersebut maka diperlukan suatu cara tertentu untuk menafsirkan fungsi gelombang. Fungsi gelombang ini dapat memberikan informasi tentang keberadaan partikel dengan cara mengalikan fungsi gelombang tersebut dengan konjugat fungsi gelombangnya. Hal tersebut dapat dirumuskan seperti persamaan (2.45) berikut:

$$\psi * \psi(x) \, xyz = PdV \dots \dots \dots (2.45)$$

Perkalian antara fungsi gelombang dengan konjugatnya ( $\psi * \psi$ ) sama artinya dengan  $|\psi(x)|^2$ .  $|\psi(x)|^2$  merupakan peluang keberadaan partikel pada posisi  $x$ .

Peluang untuk menemukan partikel pada suatu daerah tertentu disebut juga probabilitas. Perumusan probabilitas diperlukan karena partikel berukuran sangat kecil (mikroskopis) sehingga akan sangat sulit untuk menemukan keberadaan partikel tersebut secara langsung. Berdasarkan persamaan Schrodinger, maka rapat probabilitas  $P(x)$  terhadap fungsi gelombangnya  $\psi(x)$  dapat dirumuskan seperti persamaan (2.46) berikut:

$$P(x)dx = |\psi(x)|^2 dx \dots \dots \dots (2.46)$$

(Rahmayani *et al.*, 2014)

Apabila probabilitas berada pada suatu selang tertentu, maka probabilitas untuk menemukan partikel antara  $x_1$  dan  $x_2$  seperti persamaan (2.47) berikut:

$$\int_{x_1}^{x_2} P(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} |\psi(x)|^2 dx \dots \dots \dots (2.47)$$

(Krane, 1992).

## 2.6 Nilai Ekspektasi

Kedudukan partikel pada suatu titik memang dapat ditentukan. Namun, penentuan kedudukan partikel tersebut merupakan suatu hal yang tidak pasti. Ketidakpastian suatu pengukuran akan berujung pada sulitnya memperoleh keakuratan suatu pengukuran. Agar memperoleh keakuratan suatu pengukuran maka perlu melakukan pengukuran secara berulang hingga diperoleh suatu nilai rata-rata. Nilai rata-rata suatu observabel ( $x_{avg}$ ) dapat dirumuskan seperti persamaan (2.48) dan (2.49) berikut:

$$x_{avg} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots}{n_1 + n_2 + \dots} \dots \dots \dots (2.48)$$

$$x_{avg} = \frac{\sum n_i x_i}{\sum n_i} \dots \dots \dots (2.49)$$

Nilai rata-rata suatu observabel dapat dicari dengan rumus lain apabila probabilitas ( $P(x)$ ) untuk menemukan partikel dalam setiap titik diketahui.

Rumus lain untuk mencari nilai rata - rata suatu observabel ditunjukkan seperti persamaan (2.50) berikut:

$$x_{avg} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} P(x)x dx}{\int_{-\infty}^{\infty} P(x)dx} \dots\dots\dots(2.50)$$

Persamaan (2.50) menghasilkan persamaan (2.51)

$$x_{avg} = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 x dx \dots\dots\dots(2.51)$$

Apabila fungsi gelombang tersebut ternormalisasikan maka persamaan (2.51) menghasilkan persamaan (2.52)

$$[f(x)_{avg}] = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 f(x) dx \dots\dots\dots(2.52)$$

Nilai rata-rata merupakan istilah yang umum digunakan dalam fisika klasik. Pada saat di fisika kuantum, maka istilah yang digunakan bukan lagi rata-rata melainkan nilai ekspektasi (*expectation value*) (Krane, 1992).

## BAB 3. METODE PENELITIAN

### 3.1 Jenis, Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini termasuk dalam jenis penelitian non eksperimen. Penelitian ini akan dilaksanakan pada bulan Oktober sampai November 2019 di Laboratorium Fisika Lanjut, Program Studi Pendidikan Fisika, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Jember.

### 3.2 Definisi Operasional Variabel

Pada penelitian ini terdapat beberapa istilah yang digunakan. Agar tidak menimbulkan kesalahpahaman terhadap istilah-istilah yang digunakan, maka penjelasan dari masing-masing operasional variabel adalah sebagai berikut:

a. Persamaan Schrodinger

Persamaan Schrodinger merupakan persamaan yang umumnya digunakan untuk menyelesaikan permasalahan fisika kuantum. Persamaan Schrodinger berbentuk persamaan differensial parsial orde dua. Persamaan Schrodinger yang digunakan dalam penelitian ini yaitu persamaan Schrodinger tunak (bebas waktu). Persamaan Schrodinger tunak (bebas waktu) hanya akan bergantung pada posisi ( $r$ ).

b. Fungsi Gelombang Partikel dalam Kotak Tiga Dimensi

Fungsi gelombang partikel dalam kotak tiga dimensi merupakan solusi dari persamaan Schrodinger tunak (bebas waktu) yang berlaku pada daerah berdimensi tiga. Fungsi gelombang yang digunakan dalam penelitian ini telah memenuhi syarat kontinuitas dan syarat normalisasi.

c. Probabilitas Partikel dalam Kotak Tiga Dimensi

Probabilitas partikel dalam kotak tiga dimensi yaitu besarnya kemungkinan untuk menemukan suatu partikel yang berukuran mikroskopis pada daerah berdimensi tiga. Probabilitas ini diperoleh dengan cara mengintegrasikan hasil kuadrat dari fungsi gelombang yang diperoleh.

f. Nilai Ekspektasi Partikel dalam Kotak Tiga Dimensi

Nilai ekspektasi partikel dalam kotak tiga dimensi yaitu besarnya harapan atau nilai rata-rata munculnya suatu partikel dalam daerah berdimensi tiga. Nilai ekspektasi dapat diperoleh dengan cara mengintegrasikan hasil kali antara posisi dengan kuadrat fungsi gelombang yang diperoleh.

g. Tingkat Energi Partikel dalam Kotak Tiga Dimensi

Tingkat energi partikel dalam kotak tiga dimensi merupakan urutan energi yang dimiliki oleh partikel dalam kotak berdimensi tiga ketika berada pada keadaan-keadaan tertentu, baik keadaan dasar maupun keadaan tereksitasi.

h. Bilangan Kuantum Utama

Bilangan kuantum merupakan bilangan yang menunjukkan posisi elektron dalam suatu atom. Bilangan kuantum utama yang digunakan pada penelitian ini disimbolkan dengan  $n_x$ ,  $n_y$ , dan  $n_z$  dikarenakan elektron berada pada daerah berdimensi tiga, yaitu daerah yang memiliki sumbu x, y, dan z.

### 3.3 Langkah Penelitian

Pada penelitian ini terdapat beberapa langkah yang harus dilakukan untuk dapat menemukan besarnya probabilitas, nilai ekspektasi, dan tingkat energi partikel dalam kotak tiga dimensi dengan variasi bilangan kuantum utama. Langkah-langkah penelitian tersebut disajikan pada Gambar 3.1 berikut:



Gambar 3.1 Langkah-langkah penelitian

### 3.3.1 Persiapan

Persiapan merupakan langkah penelitian paling awal yang perlu dilakukan. Penelitian ini termasuk dalam penelitian teoritis, sehingga persiapan yang perlu dilakukan yaitu mengumpulkan buku-buku maupun jurnal pendukung. Buku-buku dan jurnal yang dikumpulkan yaitu buku fisika modern, buku fisika kuantum, serta jurnal-jurnal yang juga berkaitan dengan fisika modern maupun fisika kuantum.

### 3.3.2 Pengembangan Teori

Pengembangan teori merupakan langkah yang perlu dilakukan setelah melakukan persiapan. Pada tahap ini peneliti mengembangkan penelitian yang telah dilakukan sebelumnya. Pengembangan yang dilakukan yaitu menentukan besarnya probabilitas, nilai ekspektasi, dan energi partikel dalam kotak tiga dimensi dengan bilangan kuantum utama pada masing-masing sumbu koordinatnya dibuat bervariasi. Langkah yang dilakukan yaitu menentukan fungsi gelombang partikel, lalu mencari besarnya probabilitas, nilai ekspektasi, dan energi partikel dalam kotak tiga dimensi dengan rumus sebagai berikut:

#### a. Probabilitas

$$P(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{x_1}^{x_2} |\Psi(x, y, z)|^2 dx dy dz$$

#### b. Nilai Ekspektasi

$$x_{avg} = \iiint_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x, y, z)|^2 xyz dx dy dz$$

#### c. Tingkat Energi Partikel dalam Kotak Tiga Dimensi

$$E_{n_x n_y n_z} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m} \left( \frac{n_x^2}{a^2} + \frac{n_y^2}{b^2} + \frac{n_z^2}{c^2} \right)$$

### 3.3.3 Validasi Hasil Pengembangan Teori

Pengembangan teori yang telah dilakukan menyebabkan penelitian ini menghasilkan atau memberikan data dan grafik mengenai besarnya probabilitas, data nilai ekspektasi, serta data energi partikel dalam kotak tiga dimensi ketika bilangan kuantum utama pada masing-masing sumbu koordinatnya berada dalam

keadaan bervariasi. Data-data dan grafik yang telah diperoleh selanjutnya divalidasi dengan data-data dan grafik pada penelitian sebelumnya yang relevan dengan pokok bahasan partikel dalam kotak tiga dimensi. Data-data dan grafik pada penelitian yang dilakukan oleh Supriadi *et al* (2019) dapat digunakan untuk memvalidasi data dan grafik hasil penelitian ini. Data-data yang digunakan untuk memvalidasi hasil penelitian ini disajikan pada Tabel 3.1 hingga Tabel 3.3 serta grafik yang digunakan untuk memvalidasi hasil penelitian ini disajikan pada Gambar 3.2 hingga Gambar 3.4 berikut:

a. Validasi Tingkat Energi Partikel dalam Kotak Tiga Dimensi

Tabel 3.1 Validasi Tingkat Energi Partikel dalam Kotak Tiga Dimensi

Bilangan kuantum partikel ( $n_x, n_y, n_z$ )	Tingkat Energi (E) ( $10^{-16}$ J)
1 1 1	0,7167170769
2 2 2	0,1791792690
3 3 3	0,0796352307

(Supriadi *et al.*, 2019).

b. Validasi Probabilitas Partikel dalam Kotak Tiga Dimensi

Tabel 3.2 Validasi Probabilitas Partikel dalam Kotak Tiga Dimensi

Keadaan	Lebar Kotak	Probabilitas
Dasar (1 1 1)	$\frac{L}{4}$	0,00074773143
	$\frac{L}{2}$	0,125
	$\frac{3L}{4}$	0,206178226
	$L$	1
Tereksitasi pertama (2 2 2)	$\frac{L}{4}$	0,015625
	$\frac{L}{2}$	0,125
	$\frac{3L}{4}$	0,421875
	$L$	1
Tereksitasi kedua (3 3 3)	$\frac{L}{4}$	0,027839769
	$\frac{L}{2}$	0,125
	$\frac{3L}{4}$	0,338444396
	$L$	1

(Supriadi *et al.*, 2019).

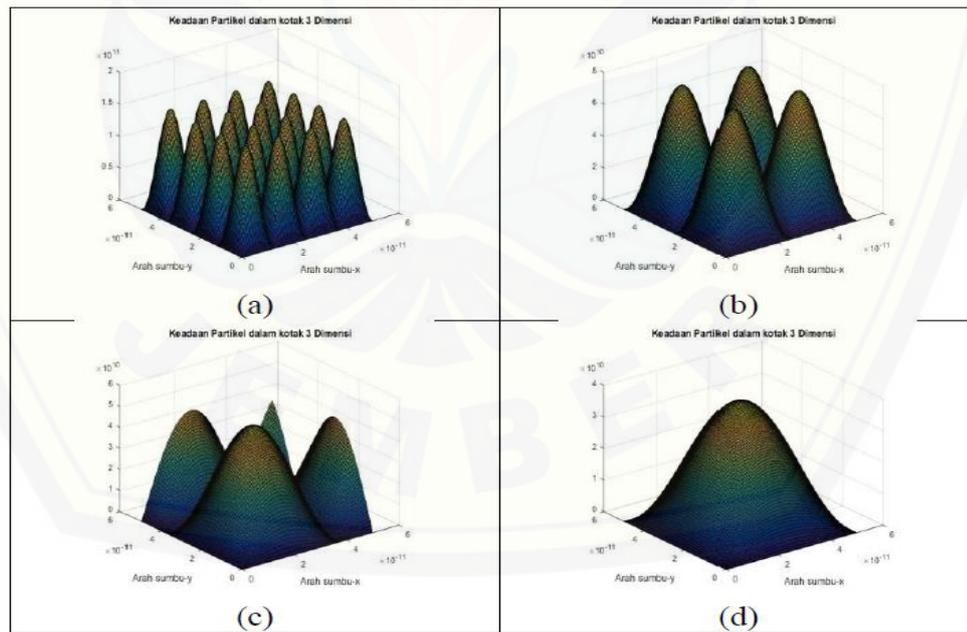
c. Validasi Nilai Ekspektasi Partikel dalam Kotak Tiga Dimensi

Tabel 3.3 Nilai Ekspektasi Partikel dalam Kotak Tiga Dimensi

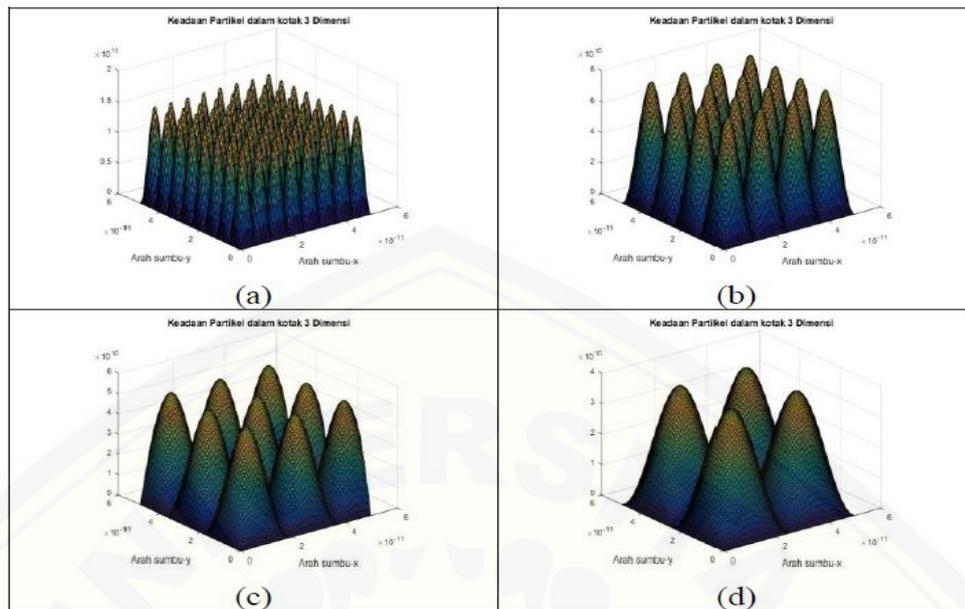
Keadaan	Lebar Kotak	Nilai Ekspektasi ( $L^3$ )
Dasar (1 1 1)	$\frac{L}{4}$	0,00000473916085
	$\frac{L}{2}$	0,00542505614
	$\frac{3L}{4}$	0,0773266074
	$L$	0,125
Tereksitasi pertama (2 2 2)	$\frac{L}{4}$	0,0000847665027
	$\frac{L}{2}$	0,001953125
	$\frac{3L}{4}$	0,0253935181
	$L$	0,125
Tereksitasi kedua (3 3 3)	$\frac{L}{4}$	0,000126160866
	$\frac{L}{2}$	0,00222933491
	$\frac{3L}{4}$	0,0145729881
	$L$	0,125

(Supriadi *et al.*, 2019).

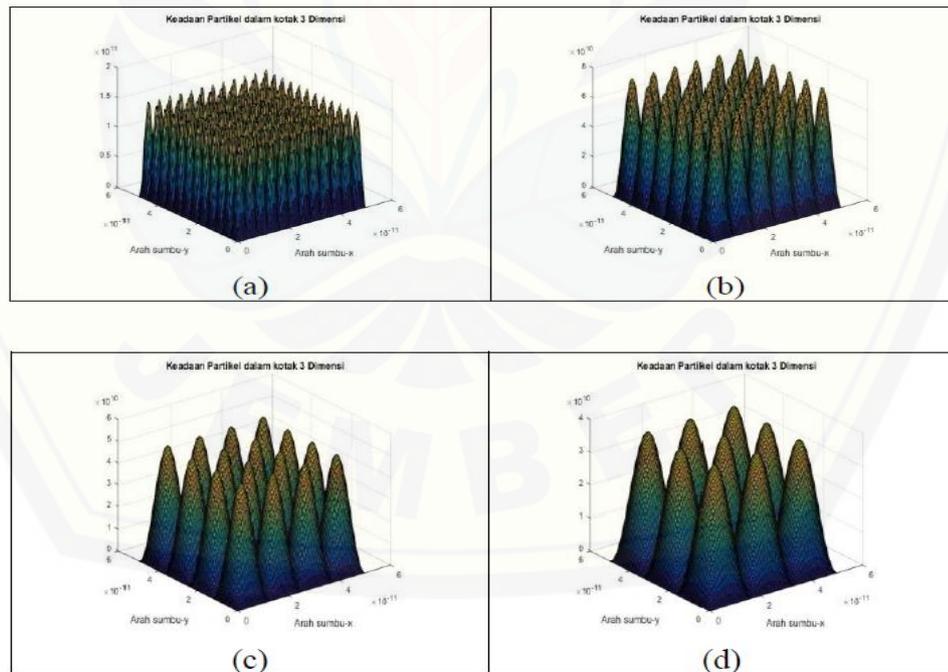
d. Validasi Grafik Probabilitas Partikel dalam Kotak Tiga Dimensi



Gambar 3.1 Grafik Probabilitas Partikel dalam Kotak Tiga Dimensi pada keadaan ( $n_x = n_y = n_z = 1$ ) dengan lebar kotak (a)  $\frac{L}{4}$  (b)  $\frac{L}{2}$  (c)  $\frac{3L}{4}$  (d)  $L$  (Sumber:Supriadi *et al.*, 2019)



Gambar 3.2 Grafik Probabilitas Partikel dalam Kotak Tiga Dimensi pada keadaan ( $n_x = n_y = n_z = 2$ ) dengan lebar kotak (a)  $\frac{L}{4}$  (b)  $\frac{L}{2}$  (c)  $\frac{3L}{4}$  (d)  $L$  (Sumber:Supriadi *et al.*, 2019)



Gambar 3.3 Grafik Probabilitas Partikel dalam Kotak Tiga Dimensi pada keadaan ( $n_x = n_y = n_z = 3$ ) dengan lebar kotak (a)  $\frac{L}{4}$  (b)  $\frac{L}{2}$  (c)  $\frac{3L}{4}$  (d)  $L$  (Sumber:Supriadi *et al.*, 2019)

### 3.3.4 Hasil

Penelitian ini akan menghasilkan data-data berupa data tingkat energi, data dan grafik probabilitas, serta data nilai ekspektasi partikel dalam kotak tiga dimensi yang telah divalidasi terlebih dahulu dengan penelitian sebelumnya yaitu penelitian oleh Supriadi *et al* (2019). Data-data hasil pengembangan teori terkait tingkat energi partikel disajikan dalam Tabel 3.4 berikut:

Tabel 3.4 Tingkat Energi Partikel dalam Kotak Tiga Dimensi dengan Variasi Bilangan Kuantum Utama

Bilangan kuantum partikel ( $n_x, n_y, n_z$ )	Tingkat Energi (E) (J)
1 1 1	
1 1 2	
1 2 1	
2 1 1	
1 1 3	
1 3 1	
3 1 1	
2 2 2	
2 2 1	
2 1 2	
1 2 2	
2 2 3	
2 3 2	
3 2 2	
3 3 3	
3 3 1	
3 1 3	
1 3 3	
3 3 2	
3 2 3	
2 3 3	

Data-data hasil pengembangan teori terkait probabilitas partikel dan nilai ekspektasi partikel dalam kotak tiga dimensi disajikan secara terlampir.

### 3.3.5 Pembahasan

Berdasarkan data-data yang telah diperoleh serta grafik yang diperoleh dari simulasi program Matlab 2013, maka selanjutnya dilakukan pembahasan secara fisis dan terinci mengenai data dan grafik tersebut disertai kaitannya dengan teori-teori yang ada.

### 3.3.6 Kesimpulan

Pembahasan yang telah dibuat selanjutnya disimpulkan untuk dapat menjawab pertanyaan-pertanyaan yang terdapat pada rumusan masalah



## BAB 5. PENUTUP

### 5.1 Kesimpulan

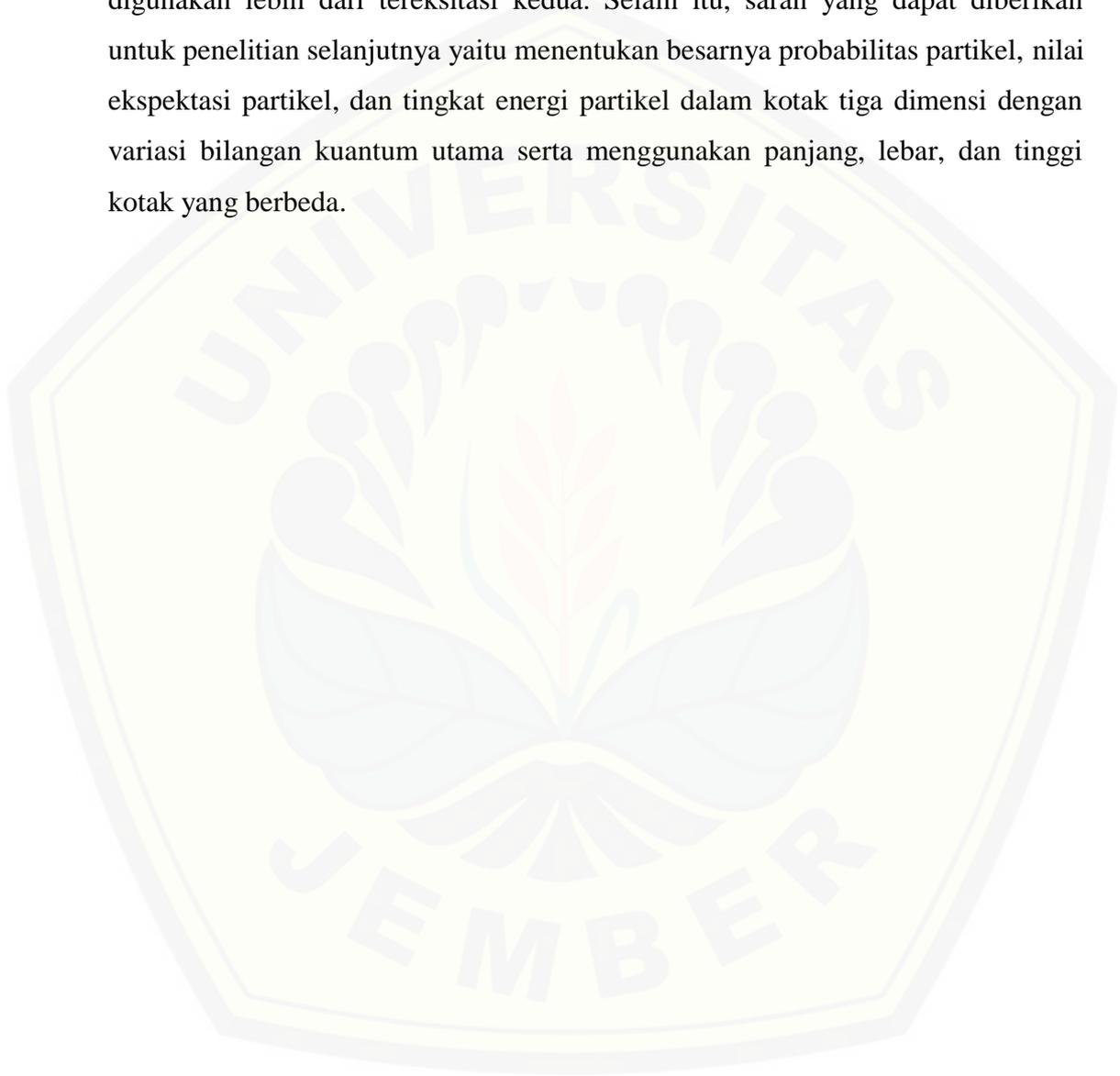
Berdasarkan rumusan masalah yang ada maka dapat diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

- a. Variasi bilangan kuantum mempengaruhi besarnya probabilitas partikel dalam kotak tiga dimensi untuk lebar kotak  $\frac{L}{4}$  dan  $\frac{3L}{4}$ . Probabilitas terkecil diperoleh ketika lebar kotak  $\frac{L}{4}$  dan probabilitas terbesar diperoleh ketika lebar kotak  $L$ . Semakin besar lebar kotak yang digunakan maka semakin mudah menemukan partikel karena areanya yang luas dan hanya sedikit titik yang tersedia sehingga memudahkan untuk menemukan partikel.
- b. Variasi bilangan kuantum mempengaruhi besarnya nilai ekspektasi partikel dalam kotak tiga dimensi untuk lebar kotak  $\frac{L}{4}$ ,  $\frac{L}{2}$  dan  $\frac{3L}{4}$ . Nilai ekspektasi terkecil diperoleh saat lebar kotak  $\frac{L}{4}$  dan nilai ekspektasi terbesar diperoleh saat lebar kotak  $L$ . Semakin besar lebar kotak yang digunakan maka rata-rata munculnya partikel dalam kotak juga semakin besar karena areanya yang luas.
- c. Variasi bilangan kuantum utama mempengaruhi besarnya tingkat energi partikel dalam kotak tiga dimensi. Semakin besar bilangan kuantum utama yang divariasikan maka semakin besar pula tingkat energi partikelnya. Hal ini dikarenakan semakin besar bilangan kuantum utamanya berarti semakin jauh partikel dari inti atom. Ketika jarak orbital semakin jauh dari inti atom maka energi yang dimiliki oleh partikel pun harus semakin besar agar dapat berpindah dari orbital yang paling dekat dengan inti atom ke orbital terluar tersebut.

### 5.2 Saran

Penelitian ini menentukan besarnya probabilitas partikel, nilai ekspektasi partikel, dan tingkat energi partikel dalam kotak tiga dimensi dengan keadaan yang digunakan berupa keadaan dasar hingga keadaan tereksitasi kedua ( $n = 3$ ).

Penelitian ini menggunakan panjang, lebar, dan tinggi kotak yang sama. Saran yang dapat diberikan untuk penelitian selanjutnya yaitu menentukan besarnya probabilitas partikel, nilai ekspektasi partikel, dan tingkat energi partikel dalam kotak tiga dimensi dengan variasi bilangan kuantum utama dan keadaan yang digunakan lebih dari tereksitasi kedua. Selain itu, saran yang dapat diberikan untuk penelitian selanjutnya yaitu menentukan besarnya probabilitas partikel, nilai ekspektasi partikel, dan tingkat energi partikel dalam kotak tiga dimensi dengan variasi bilangan kuantum utama serta menggunakan panjang, lebar, dan tinggi kotak yang berbeda.



**DAFTAR PUSTAKA**

- Alberto, P., S. Das., dan E.C. Vagenas. 2011. Relativistic particle in a three-dimensional box. *Physics Letters A*. 1-8.
- Anugraha, R. 2018. *Pengantar Mekanika Klasik*. Yogyakarta: Gadjah Mada University Press.
- Beiser, A. 2003. *Concepts of Modern Physics 6<sup>th</sup> edition*. New York: McGraw-Hill.
- Dahiya, B., dan V. Prasad. 2010. Dynamics of particle in a box in time varying potential due to chirped laser pulse. *Journal of Modern Physics*. 1: 372-378.
- Ebbens, A.T. 2018. Using particle in a box models to calculate energy levels in semiconductor quantum well structures. *Physics Education IOP Publishing*. 53(4): 1-8.
- Gea, J. 2001. Splitting the wave function of particle in a box. *American Journal of Physics*. 70(3): 307-312.
- Hanafi, I. 2016. Tingkat energi atom helium dengan pendekatan model partikel bebas (*Independent Particle Model*). *Jurnal Pembelajaran Fisika*. 1(1): 166-174.
- Humaidi, S., T.R. Simbolon., R. Ong., dan W.N. Afrida. 2016. Analisis dan Visualisasi Persamaan Klein-Gordon pada Elektron dalam Sumur Potensial dengan menggunakan Program Mathematic 10. *Prosiding Seminar Nasional Fisika*. 5: 19-23.
- Juwono, A.M. 2017. *Pendahuluan Fisika Kuantum*. Malang: UB Press.
- Kharismawati, I., B. Supriadi, dan R.D. Handayani. 2012. Probabilitas partikel dalam kotak tiga dimensi pada bilangan kuantum  $n \leq 5$ . *Jurnal Pembelajaran Fisika*. 1(1): 58-63.
- Krane, K. S. 1992. *Fisika Modern*. Jakarta: Universitas Indonesia Press.
- Purwanto, A. 2019. *Fisika Kuantum*. Bandung: Gava Media.
- Rahmayani, H., Hidayati, dan P. Razi. 2014. Perhitungan tingkat energi sumur potensial keadaan terikat melalui persamaan schrodinger menggunakan metode beda hingga. *Pillar of Physics*. 1: 17-24.

- Ruggenthaler, M., M. Penz, dan R.V. Leeuwen. 2015. Existence, uniqueness, and construction of the density-potential mapping in time-dependent density-functional theory. *Journal of Physics: Institute of Physics Publishing*. (27): 1-41.
- Saleem, M. 2015. A particle in one dimensional box. *Journal of Physics*.
- Singh, C., dan E. Marshman. 2017. Student difficulties with determining expectation values in quantum mechanics. *Journal of Physics Cornell University*.1-4.
- Siregar, R.E. 2018. *Fisika Kuantum*. Jatinangor: Universitas Padjadjaran Press.
- Supriadi, B., S.H.B. Prastowo, S. Bahri, Z.R. Ridlo, dan T. Prihandono. 2018. The stark effect on the wave function of tritium in relativistic condition. *Journal of Physics Conference Series*. 997(45): 1-7.
- Supriadi, B., Z.R. Ridlo, N. Aida, V. Rizqiyah, R.W.I. Wati, dan A.M. Firdaus. 2019. Determination of energy levels, probabilities, and expectation values of particles in three dimensional box at quantum number  $\leq 5$ . *Journal of Physics Conference Series*. 1211(35): 1-11.
- Supriadi, B., Z.R.Ridlo , Yushardi, C.I.W. Nugroho, J. Arsanti, S. Septiana. 2019. Tunneling effect on triple potential barriers GaN, SiC and GaAs. *Journal of Physics Conference Series*. 1211(34): 1-8.
- Surjono, H.D. 2007. *Elektronika: Teori dan Penerapan*. Jember: Cerdas Ulet Kreatif.
- Sutarno, S., E. Erwin, dan M.S Hayat. 2017. Radiasi benda hitam dan efek fotolistrik sebagai konsep kunci revolusi saintifik dalam perkembangan teori kuantum cahaya. *Jurnal Ilmiah Multi Sciences*. 9(2): 51-58.
- Zettili, N. 2009. *Quantum Mechanics Concepts and Applications*. England: John Wiley&Sons Ltd.

## Lampiran 1

### Matriks Penelitian

JUDUL PENELITIAN	RUMUSAN MASALAH	TUJUAN	VARIABEL	METODOLOGI
<p>“SOLUSI LENGKAP PARTIKEL DALAM KOTAK TIGA DIMENSI DENGAN VARIASI BILANGAN KUANTUM UTAMA”</p>	<p>a. Bagaimanakah tingkat energi partikel dalam kotak 3 dimensi dengan nilai <math>n_x</math>, <math>n_y</math>, dan <math>n_z</math> yang bervariasi pada <math>n \leq 3</math>?</p> <p>b. Bagaimanakah probabilitas partikel dalam kotak 3 dimensi dengan nilai <math>n_x</math>, <math>n_y</math>, dan <math>n_z</math> yang bervariasi pada <math>n \leq 3</math> pada fungsi gelombang dasar sampai tereksitasi kedua?</p> <p>c. Bagaimanakah nilai ekspektasi partikel dalam kotak 3 dimensi dengan nilai <math>n_x</math>, <math>n_y</math>, dan <math>n_z</math> yang bervariasi pada <math>n \leq 3</math> pada fungsi gelombang dasar sampai tereksitasi kedua?</p>	<p>a) Menganalisis besarnya tingkat energi partikel dalam kotak 3 dimensi dengan dengan nilai <math>n_x</math>, <math>n_y</math>, dan <math>n_z</math> yang bervariasi pada <math>n \leq 3</math></p> <p>b) Menganalisis besarnya probabilitas partikel dalam kotak 3 dimensi dengan nilai <math>n_x</math>, <math>n_y</math>, dan <math>n_z</math> yang bervariasi pada <math>n \leq 3</math> pada fungsi gelombang dasar sampai tereksitasi kedua</p> <p>c) Menganalisis besarnya nilai ekspektasi partikel dalam kotak 3 dimensi dengan nilai <math>n_x</math>, <math>n_y</math>, dan <math>n_z</math> yang bervariasi pada <math>n \leq 3</math> pada fungsi gelombang dasar sampai tereksitasi kedua</p>	<p>a. Variabel Bebas: susunan bilangan kuantum di setiap sumbu koordinat</p> <p>b. Variabel Kontrol: Keadaan eksitasi elektron dan lebar kotak</p> <p>c. Variabel Terikat:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Tingkat energi partikel dalam kotak tiga dimensi</li> <li>• Probabilitas partikel dalam kotak tiga dimensi</li> <li>• Nilai ekspektasi energi partikel dalam kotak tiga dimensi</li> </ul>	<p>a. Jenis penelitian: Kajian teoritis (<i>Study Literature</i>)</p> <p>b. Tempat penelitian: Lab. Fisika Lanjut Pendidikan Fisika Universitas Jember</p> <p>c. Langkah penelitian:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Menentukan fungsi gelombang partikel dalam kotak tiga dimensi</li> <li>• Menentukan probabilitas partikel dalam kotak tiga dimensi</li> <li>• Menentukan nilai ekspektasi partikel dalam kotak tiga dimensi</li> <li>• Menentukan tingkat energi partikel dalam kotak tiga dimensi</li> </ul>

**Lampiran 2**

Tabel a. Hasil Probabilitas Partikel dalam Kotak Tiga Dimensi dengan Variasi Bilangan Kuantum Utama (1 1 2), (1 2 1), (2 1 1), (2 2 1), (2 1 2), (1 2 2)

Lebar Kotak	Keadaan					
	(1 1 2)	(1 2 1)	(2 1 1)	(2 2 1)	(2 1 2)	(1 2 2)
Probabilitas						
$\frac{L}{4}$						
$\frac{L}{2}$						
$\frac{3L}{4}$						
$L$						

Tabel b. Hasil Probabilitas Partikel dalam Kotak Tiga Dimensi dengan Variasi Bilangan Kuantum Utama (1 1 3), (1 3 1), (3 1 1), (3 3 1), (3 1 3), (1 3 3)

Lebar Kotak	Keadaan					
	(1 1 3)	(1 3 1)	(3 1 1)	(3 3 1)	(3 1 3)	(1 3 3)
Probabilitas						
$\frac{L}{4}$						
$\frac{L}{2}$						
$\frac{3L}{4}$						
$L$						

Tabel c. Hasil Probabilitas Partikel dalam Kotak Tiga Dimensi dengan Variasi Bilangan Kuantum Utama (2 2 3), (2 3 2), (3 2 2), (3 3 2), (3 2 3), (2 3 3)

Lebar Kotak	Keadaan					
	(2 2 3)	(2 3 2)	(3 2 2)	(3 3 2)	(3 2 3)	(2 3 3)
Probabilitas						
$\frac{L}{4}$						
$\frac{L}{2}$						
$\frac{3L}{4}$						
$L$						

**Lampiran 3**

Tabel a. Hasil Nilai Ekspektasi Partikel dalam Kotak Tiga Dimensi dengan Variasi Bilangan Kuantum Utama (1 1 2), (1 2 1), (2 1 1), (2 2 1), (2 1 2), (1 2 2)

Lebar Kotak	Keadaan					
	(1 1 2)	(1 2 1)	(2 1 1)	(2 2 1)	(2 1 2)	(1 2 2)
Nilai Ekspektasi ( $L^3$ )						
$\frac{L}{4}$						
$\frac{L}{2}$						
$\frac{3L}{4}$						
$L$						

Tabel b. Hasil Nilai Ekspektasi Partikel dalam Kotak Tiga Dimensi dengan Variasi Bilangan Kuantum Utama (1 1 3), (1 3 1), (3 1 1), (3 3 1), (3 1 3), (1 3 3)

Lebar Kotak	Keadaan ( $L^3$ )					
	(1 1 3)	(1 3 1)	(3 1 1)	(3 3 1)	(3 1 3)	(1 3 3)
Nilai Ekspektasi						
$\frac{L}{4}$						
$\frac{L}{2}$						
$\frac{3L}{4}$						
$L$						

Tabel c. Hasil Nilai Ekspektasi Partikel dalam Kotak Tiga Dimensi dengan Variasi Bilangan Kuantum Utama (2 2 3), (2 3 2), (3 2 2), (3 3 2), (3 2 3), (2 3 3)

Lebar Kotak	Keadaan					
	(2 2 3)	(2 3 2)	(3 2 2)	(3 3 2)	(3 2 3)	(2 3 3)
Nilai Ekspektasi ( $L^3$ )						
$\frac{L}{4}$						
$\frac{L}{2}$						
$\frac{3L}{4}$						
$L$						

**Lampiran 4****Penentuan Fungsi Gelombang Partikel dalam Kotak Tiga Dimensi**

Batas-batas kotak

$$V(x, y, z) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x, y, z \leq L, \\ \infty, & \text{yang lainnya} \end{cases}$$

(1) Persamaan Schrodinger

a. Daerah di luar kotak ( $x, y, z < 0$  dan  $x, y, z > L$ )

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V) \psi = 0$$

Untuk  $x, y, z < 0$  berlaku

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi_{1,3,5} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - \infty) \psi_{1,3,5} = 0$$

Diperoleh

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi_{1,3,5} = \infty \psi_{1,3,5}$$

Maka:

$$\psi_{1,3,5} = 0$$

Untuk  $x, y, z > L$  berlaku

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi_{2,4,6} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - \infty) \psi_{2,4,6} = 0$$

Diperoleh

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi_{2,4,6} = \infty \psi_{2,4,6}$$

Maka:

$$\psi_{2,4,6} = 0$$

b. Daerah di dalam kotak ( $0 \leq x, y, z \leq L$ )

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi_{x,y,z} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V) \psi_{x,y,z} = 0$$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi_{x,y,z} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - 0) \psi_{x,y,z} = 0$$

Diperoleh

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi_{x,y,z} = -\frac{2mE}{\hbar^2}\psi_{x,y,z}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi_{x,y,z} = -k^2\psi_{x,y,z}$$

Dengan

$$k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2mE}$$

Solusi persamaan di atas dengan menggunakan teknik pemisahan variabel

$$\psi_{x,y,z} = X_{(x)}Y_{(y)}Z_{(z)}$$

Dengan bentuk masing-masing fungsi dari  $X_{(x)}$  dan  $Y_{(y)}$  serta  $Z_{(z)}$  adalah

$$X_{(x)} = A \sin k_x x + B \cos k_x x$$

$$Y_{(y)} = C \sin k_y y + D \cos k_y y$$

$$Z_{(z)} = F \sin k_z z + G \cos k_z z$$

(2) Syarat kontinuitas pada titik batas (syarat berperilaku baik)

(a) Untuk  $x = 0$

$$\psi_1 = X_{(x)}$$

$$0 = A \sin k_x x + B \cos k_x x$$

$$0 = B$$

$$B = 0$$

Untuk  $x = L$

$$\psi_2 = X_{(x)}$$

$$0 = A \sin k_x x + B \cos k_x x$$

$$0 = A \sin k_x L$$

$$A \sin k_x L = 0$$

(b) Untuk  $Y = 0$

$$\psi_3 = Y_{(y)}$$

$$0 = C \sin k_y y + D \cos k_y y$$

$$0 = D$$

$$D = 0$$

Untuk  $Y = L$

$$\psi_4 = Y_{(y)}$$

$$0 = C \sin k_y y + D \cos k_y y$$

$$0 = C \sin k_y L$$

$$C \sin k_y L = 0$$

(c) Untuk  $Z = 0$

$$\psi_5 = Z_{(z)}$$

$$0 = F \sin k_z z + G \cos k_z z$$

$$0 = G$$

$$G = 0$$

Untuk  $x = L$

$$\psi_6 = Y_{(y)}$$

$$0 = F \sin k_z z + G \cos k_z z$$

$$0 = F \sin k_z L$$

$$F \sin k_z L = 0$$

Sesuai kasus satu dimensi, A, C, dan F tidak boleh sama dengan nol. Sehingga:

$$\begin{array}{lll}
 (1) \sin k_x L = 0 & (2) \sin k_y L = 0 & (3) \sin k_z L = 0 \\
 \sin k_x L = \sin n_x \pi & \sin k_y L = \sin n_y \pi & \sin k_z L = \sin n_z \pi \\
 k_x L = n_x \pi & k_y L = n_y \pi & k_z L = n_z \pi \\
 k_x = \frac{n_x \pi}{L} & k_y = \frac{n_y \pi}{L} & k_z = \frac{n_z \pi}{L}
 \end{array}$$

Maka, solusinya dapat dituliskan seperti berikut

$$\begin{aligned}
 X(x) &= A \sin k_x x \\
 &= A \sin \frac{n_x \pi}{L} x \\
 Y(y) &= C \sin k_y y \\
 &= C \sin \frac{n_y \pi}{L} y \\
 Z(z) &= F \sin k_z z \\
 &= F \sin \frac{n_z \pi}{L} z
 \end{aligned}$$

Sehingga:

$$\begin{aligned}
 \psi_{x,y,z} &= X(x)Y(y)Z(z) \\
 &= A \sin \frac{n_x \pi}{L} x (C \sin \frac{n_y \pi}{L} y)(F \sin \frac{n_z \pi}{L} z) \\
 &= M \sin \frac{n_x \pi}{L} x \cdot \sin \frac{n_y \pi}{L} y \cdot \sin \frac{n_z \pi}{L} z
 \end{aligned}$$

### (3) Syarat Normalisasi

$$\iiint_0^L |\psi|^2 dx dy dz = 1$$

$$M^2 \int_0^L \sin^2 \left( \frac{n_x \pi}{L} x \right) dx \int_0^L \sin^2 \left( \frac{n_y \pi}{L} y \right) dy \int_0^L \sin^2 \left( \frac{n_z \pi}{L} z \right) dz = 1$$

$$M^2 \int_0^L \frac{1}{2} \left( 1 - \cos \frac{2n_x \pi}{L} x \right) dx \int_0^L \frac{1}{2} \left( 1 - \cos \frac{2n_y \pi}{L} y \right) dy \int_0^L \frac{1}{2} \left( 1 - \cos \frac{2n_z \pi}{L} z \right) dz = 1$$

$$M^2 \left[ \frac{x}{2} - \frac{L}{4n_x\pi} \sin \frac{2n_x\pi}{L} x \right]_0^L \left[ \frac{y}{2} - \frac{L}{4n_y\pi} \sin \frac{2n_y\pi}{L} y \right]_0^L \left[ \frac{z}{2} - \frac{L}{4n_z\pi} \sin \frac{2n_z\pi}{L} z \right]_0^L = 1$$

$$M^2 \left[ \left( \frac{L}{2} - \frac{L}{4n_x\pi} \sin 2n_x\pi \right) \left( \frac{L}{2} - \frac{L}{4n_y\pi} \sin 2n_y\pi \right) \left( \frac{L}{2} - \frac{L}{4n_z\pi} \sin 2n_z\pi \right) \right] = 1$$

Saat  $n_x = n_y = n_z = 1$ , maka:

$$M^2 \left[ \left( \frac{L}{2} - \frac{L}{4n_x\pi} \sin 2\pi \right) \left( \frac{L}{2} - \frac{L}{4n_y\pi} \sin 2\pi \right) \left( \frac{L}{2} - \frac{L}{4n_z\pi} \sin 2\pi \right) \right] = 1$$

$$M^2 \left[ \left( \frac{L}{2} - 0 \right) \left( \frac{L}{2} - 0 \right) \left( \frac{L}{2} - 0 \right) \right] = 1$$

$$M^2 \cdot \frac{L^3}{8} = 1$$

$$M^2 = \frac{8}{L^3}$$

$$M = \sqrt{\frac{8}{L^3}}$$

Jadi, fungsi gelombang partikel dalam kotak tiga dimensi yaitu sebagai berikut

$$\psi_{x,y,z} = M \sin \frac{n_x\pi}{L} x \cdot \sin \frac{n_y\pi}{L} y \cdot \sin \frac{n_z\pi}{L} z$$

$$\psi_{x,y,z} = \sqrt{\frac{8}{L^3}} \sin \frac{n_x\pi}{L} x \cdot \sin \frac{n_y\pi}{L} y \cdot \sin \frac{n_z\pi}{L} z$$

**Lampiran 5****Penentuan Tingkat Energi Partikel dalam Kotak Tiga Dimensi**

$$k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2mE}$$

Kuadratkan kedua ruas, maka diperoleh:

$$(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) \hbar^2 = 2mE$$

Dengan  $k = \frac{n\pi}{L}$ , maka:

$$\left( \frac{n_x^2 \pi^2}{L^2} + \frac{n_y^2 \pi^2}{L^2} + \frac{n_z^2 \pi^2}{L^2} \right) \hbar^2 = 2mE$$

$$(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \frac{\pi^2 \hbar^2}{L^2} = 2mE$$

$$(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} = E$$

Sehingga

$$E = (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2}$$

## Lampiran 6

## Perhitungan Probabilitas Partikel dalam Kotak Tiga Dimensi dengan Variasi Bilangan Kuantum Utama

A. Interval  $0 \leq x \leq \frac{L}{4}$ 1.  $n_x = 1, n_y = 1, n_z = 2$ 

$$\begin{aligned}
\iiint_0^{\frac{L}{4}} P(x, y, z) dx dy dz &= \iiint_0^{\frac{L}{4}} |\psi|^2 dx dy dz \\
&= \iiint_0^{\frac{L}{4}} \left( \sqrt{\frac{8}{L^3}} \sin\left(\frac{n_x \pi}{L} x\right) \sin\left(\frac{n_y \pi}{L} y\right) \sin\left(\frac{n_z \pi}{L} z\right) \right) \\
&\quad \left( \sqrt{\frac{8}{L^3}} \sin\left(\frac{n_x \pi}{L} x\right) \sin\left(\frac{n_y \pi}{L} y\right) \sin\left(\frac{n_z \pi}{L} z\right) \right) dx dy dz \\
&= \frac{8}{L^3} \int_0^{\frac{L}{4}} \sin^2\left(\frac{n_x \pi}{L} x\right) dx \int_0^{\frac{L}{4}} \sin^2\left(\frac{n_y \pi}{L} y\right) dy \int_0^{\frac{L}{4}} \sin^2\left(\frac{n_z \pi}{L} z\right) dz \\
&= \frac{8}{L^3} \int_0^{\frac{L}{4}} \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{2n_x \pi}{L} x\right) dx \int_0^{\frac{L}{4}} \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{2n_y \pi}{L} y\right) dy \int_0^{\frac{L}{4}} \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{2n_z \pi}{L} z\right) dz \\
&= \frac{8}{L^3} \left[ \frac{x}{2} - \frac{L}{4n_x \pi} \sin \frac{2n_x \pi}{L} x \right]_0^{\frac{L}{4}} \left[ \frac{y}{2} - \frac{L}{4n_y \pi} \sin \frac{2n_y \pi}{L} y \right]_0^{\frac{L}{4}} \left[ \frac{z}{2} - \frac{L}{4n_z \pi} \sin \frac{2n_z \pi}{L} z \right]_0^{\frac{L}{4}} \\
&= \frac{8}{L^3} \left[ \frac{L}{8} - \frac{L}{4n_x \pi} \sin \frac{n_x \pi}{2} \right] \cdot \left[ \frac{L}{8} - \frac{L}{4n_y \pi} \sin \frac{n_y \pi}{2} \right] \cdot \left[ \frac{L}{8} - \frac{L}{4n_z \pi} \sin \frac{n_z \pi}{2} \right] \\
&= \frac{8}{L^3} \left[ \frac{L}{8} - \frac{L}{4\pi} \sin \frac{\pi}{2} \right] \cdot \left[ \frac{L}{8} - \frac{L}{4\pi} \sin \frac{\pi}{2} \right] \cdot \left[ \frac{L}{8} - \frac{L}{8\pi} \sin \pi \right] \\
&= \frac{8}{L^3} \left[ \frac{L}{8} - \frac{L}{4\pi} \right] \cdot \left[ \frac{L}{8} - \frac{L}{4\pi} \right] \cdot \left[ \frac{L}{8} \right] \\
&= \frac{8}{L^3} \left[ \frac{L}{8} - \frac{L}{12,56} \right] \cdot \left[ \frac{L}{8} - \frac{L}{12,56} \right] \cdot \left[ \frac{L}{8} \right] \\
&= \frac{8}{L^3} \left[ \frac{4,56 L}{100,48} \right] \cdot \left[ \frac{4,56 L}{100,48} \right] \cdot \left[ \frac{L}{8} \right] \\
&= \frac{1}{L^3} \left[ \frac{166,3488 L^3}{80769,8432} \right] \\
&= 0,0020595409550
\end{aligned}$$

**B. Interval  $0 \leq x \leq \frac{L}{2}$** 

2.  $n_x = 1, n_y = 1, n_z = 3$

$$\begin{aligned}
\iiint_0^{\frac{L}{2}} P(x, y, z) dx dy dz &= \iiint_0^{\frac{L}{2}} |\psi|^2 dx dy dz \\
&= \iiint_0^{\frac{L}{2}} \left( \sqrt{\frac{8}{L^3}} \sin\left(\frac{n_x \pi}{L} x\right) \sin\left(\frac{n_y \pi}{L} y\right) \sin\left(\frac{n_z \pi}{L} z\right) \right) \\
&\quad \left( \sqrt{\frac{8}{L^3}} \sin\left(\frac{n_x \pi}{L} x\right) \sin\left(\frac{n_y \pi}{L} y\right) \sin\left(\frac{n_z \pi}{L} z\right) \right) dx dy dz \\
&= \frac{8}{L^3} \int_0^{\frac{L}{2}} \sin^2\left(\frac{n_x \pi}{L} x\right) dx \int_0^{\frac{L}{2}} \sin^2\left(\frac{n_y \pi}{L} y\right) dy \int_0^{\frac{L}{2}} \sin^2\left(\frac{n_z \pi}{L} z\right) dz \\
&= \frac{8}{L^3} \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{2n_x \pi}{L} x\right) dx \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{2n_y \pi}{L} y\right) dy \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{2n_z \pi}{L} z\right) dz \\
&= \frac{8}{L^3} \left[ \frac{x}{2} - \frac{L}{4n_x \pi} \sin \frac{2n_x \pi}{L} x \right]_0^{\frac{L}{2}} \left[ \frac{y}{2} - \frac{L}{4n_y \pi} \sin \frac{2n_y \pi}{L} y \right]_0^{\frac{L}{2}} \left[ \frac{z}{2} - \frac{L}{4n_z \pi} \sin \frac{2n_z \pi}{L} z \right]_0^{\frac{L}{2}} \\
&= \frac{8}{L^3} \left[ \frac{L}{4} - \frac{L}{4n_x \pi} \sin n_x \pi \right] \cdot \left[ \frac{L}{4} - \frac{L}{4n_y \pi} \sin n_y \pi \right] \cdot \left[ \frac{L}{4} - \frac{L}{4n_z \pi} \sin n_z \pi \right] \\
&= \frac{8}{L^3} \left[ \frac{L}{4} - \frac{L}{4\pi} \sin \pi \right] \cdot \left[ \frac{L}{4} - \frac{L}{4\pi} \sin \pi \right] \cdot \left[ \frac{L}{4} - \frac{L}{12\pi} \sin 3\pi \right] \\
&= \frac{8}{L^3} \left[ \frac{L}{4} \right] \cdot \left[ \frac{L}{4} \right] \cdot \left[ \frac{L}{4} \right] \\
&= \frac{8}{L^3} \left[ \frac{L^3}{64} \right] \\
&= \frac{1}{8} \\
&= 0,125
\end{aligned}$$

**C. Interval  $0 \leq x \leq \frac{3L}{4}$** 

3.  $n_x = 1, n_y = 2, n_z = 2$

$$\iiint_0^{\frac{3L}{4}} P(x, y, z) dx dy dz = \iiint_0^{\frac{3L}{4}} |\psi|^2 dx dy dz$$

$$\begin{aligned}
&= \iiint_0^{\frac{3L}{4}} \left( \sqrt{\frac{8}{L^3}} \sin\left(\frac{n_x \pi}{L} x\right) \sin\left(\frac{n_y \pi}{L} y\right) \sin\left(\frac{n_z \pi}{L} z\right) \right) \\
&= \iiint_0^{\frac{3L}{4}} \left( \sqrt{\frac{8}{L^3}} \sin\left(\frac{n_x \pi}{L} x\right) \sin\left(\frac{n_y \pi}{L} y\right) \sin\left(\frac{n_z \pi}{L} z\right) \right) dx dy dz \\
&= \frac{8}{L^3} \int_0^{\frac{3L}{4}} \sin^2\left(\frac{n_x \pi}{L} x\right) dx \int_0^{\frac{3L}{4}} \sin^2\left(\frac{n_y \pi}{L} y\right) dy \int_0^{\frac{3L}{4}} \sin^2\left(\frac{n_z \pi}{L} z\right) dz \\
&= \frac{8}{L^3} \int_0^{\frac{3L}{4}} \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{2n_x \pi}{L} x\right) dx \int_0^{\frac{3L}{4}} \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{2n_y \pi}{L} y\right) dy \int_0^{\frac{3L}{4}} \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{2n_z \pi}{L} z\right) dz \\
&= \frac{8}{L^3} \left[ \frac{x}{2} - \frac{L}{4n_x \pi} \sin \frac{2n_x \pi}{L} x \right]_0^{\frac{3L}{4}} \left[ \frac{y}{2} - \frac{L}{4n_y \pi} \sin \frac{2n_y \pi}{L} y \right]_0^{\frac{3L}{4}} \left[ \frac{z}{2} - \frac{L}{4n_z \pi} \sin \frac{2n_z \pi}{L} z \right]_0^{\frac{3L}{4}} \\
&= \frac{8}{L^3} \left[ \frac{3L}{8} - \frac{L}{4n_x \pi} \sin \frac{3n_x \pi}{2} \right] \cdot \left[ \frac{3L}{8} - \frac{L}{4n_y \pi} \sin \frac{3n_y \pi}{2} \right] \cdot \left[ \frac{3L}{8} - \frac{L}{4n_z \pi} \sin \frac{3n_z \pi}{2} \right] \\
&= \frac{8}{L^3} \left[ \frac{3L}{8} - \frac{L}{4\pi} \sin \frac{\pi}{2} \right] \cdot \left[ \frac{3L}{8} - \frac{L}{8\pi} \sin 3\pi \right] \cdot \left[ \frac{3L}{8} - \frac{L}{8\pi} \sin 3\pi \right] \\
&= \frac{8}{L^3} \left[ \frac{3L}{8} - \frac{L}{4\pi} \right] \cdot \left[ \frac{3L}{8} \right] \cdot \left[ \frac{3L}{8} \right] \\
&= \frac{8}{L^3} \left[ \frac{3L}{8} - \frac{L}{12,56} \right] \cdot \left[ \frac{3L}{8} \right] \cdot \left[ \frac{3L}{8} \right] \\
&= \frac{8}{L^3} \left[ \frac{29,68L}{100,48} \right] \cdot \left[ \frac{3L}{8} \right] \cdot \left[ \frac{3L}{8} \right] \\
&= \frac{1}{L^3} \left[ \frac{2136,96L^3}{6430,72} \right] \\
&= 0,3323049363057
\end{aligned}$$

**D. Interval  $0 \leq x \leq L$**

4.  $n_x = 2, n_y = 3, n_z = 3$

$$\begin{aligned}
&\iiint_0^L P(x, y, z) dx dy dz = \iiint_0^L |\psi|^2 dx dy dz \\
&= \iiint_0^L \left( \sqrt{\frac{8}{L^3}} \sin\left(\frac{n_x \pi}{L} x\right) \sin\left(\frac{n_y \pi}{L} y\right) \sin\left(\frac{n_z \pi}{L} z\right) \right) \\
&= \iiint_0^L \left( \sqrt{\frac{8}{L^3}} \sin\left(\frac{n_x \pi}{L} x\right) \sin\left(\frac{n_y \pi}{L} y\right) \sin\left(\frac{n_z \pi}{L} z\right) \right) dx dy dz
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{8}{L^3} \int_0^L \sin^2\left(\frac{n_x \pi}{L} x\right) dx \int_0^L \sin^2\left(\frac{n_y \pi}{L} y\right) dy \int_0^L \sin^2\left(\frac{n_z \pi}{L} z\right) dz \\
&= \frac{8}{L^3} \int_0^L \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{2n_x \pi}{L} x\right) dx \int_0^L \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{2n_y \pi}{L} y\right) dy \int_0^L \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{2n_z \pi}{L} z\right) dz \\
&= \frac{8}{L^3} \left[ \frac{x}{2} - \frac{L}{4n_x \pi} \sin \frac{2n_x \pi}{L} x \right]_0^L \left[ \frac{y}{2} - \frac{L}{4n_y \pi} \sin \frac{2n_y \pi}{L} y \right]_0^L \left[ \frac{z}{2} - \frac{L}{4n_z \pi} \sin \frac{2n_z \pi}{L} z \right]_0^L \\
&= \frac{8}{L^3} \left[ \frac{L}{2} - \frac{L}{4n_x \pi} \sin n_x \pi \right] \cdot \left[ \frac{L}{2} - \frac{L}{4n_y \pi} \sin n_y \pi \right] \cdot \left[ \frac{L}{2} - \frac{L}{4n_z \pi} \sin n_z \pi \right] \\
&= \frac{8}{L^3} \left[ \frac{L}{2} - \frac{L}{8\pi} \sin 2\pi \right] \cdot \left[ \frac{L}{2} - \frac{L}{12\pi} \sin 3\pi \right] \cdot \left[ \frac{L}{2} - \frac{L}{12\pi} \sin 3\pi \right] \\
&= \frac{8}{L^3} \left[ \frac{L}{2} \right] \cdot \left[ \frac{L}{2} \right] \cdot \left[ \frac{L}{2} \right] \\
&= \frac{8}{L^3} \left[ \frac{L^3}{8} \right] \\
&= 1
\end{aligned}$$

## Lampiran 7

## Perhitungan Nilai Ekspektasi Partikel dalam Kotak Tiga Dimensi dengan Variasi Bilangan Kuantum Utama

a) Interval  $0 \leq x \leq \frac{L}{4}$ 1)  $n_x = 1, n_y = 1, n_z = 2$ 

$$\begin{aligned}
\langle V \rangle &= \iiint_0^{\frac{L}{4}} |\psi|^2 x y z dx dy dz \\
&= \iiint_0^{\frac{L}{4}} \left( \sqrt{\frac{8}{L^3}} \sin\left(\frac{n_x \pi}{L} x\right) \sin\left(\frac{n_y \pi}{L} y\right) \sin\left(\frac{n_z \pi}{L} z\right) \right) \\
&\quad \left( \sqrt{\frac{8}{L^3}} \sin\left(\frac{n_x \pi}{L} x\right) \sin\left(\frac{n_y \pi}{L} y\right) \sin\left(\frac{n_z \pi}{L} z\right) \right) x y z dx dy dz \\
&= \frac{8}{L^3} \int_0^{\frac{L}{4}} x \sin^2\left(\frac{n_x \pi}{L} x\right) dx \int_0^{\frac{L}{4}} y \sin^2\left(\frac{n_y \pi}{L} y\right) dy \int_0^{\frac{L}{4}} z \sin^2\left(\frac{n_z \pi}{L} z\right) dz \\
&= \frac{8}{L^3} \int_0^{\frac{L}{4}} \frac{L}{\pi} \theta_x \sin^2 n_x \theta_x dx \int_0^{\frac{L}{4}} \frac{L}{\pi} \theta_y \sin^2 n_y \theta_y dy \int_0^{\frac{L}{4}} \frac{L}{\pi} \theta_z \sin^2 n_z \theta_z dz \\
&= \frac{8}{L^3} \cdot \frac{L}{\pi} \cdot \frac{L}{\pi} \cdot \frac{L}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \theta_x \sin^2 n_x \theta_x \frac{L}{\pi} d\theta_x \int_0^{\frac{\pi}{4}} \theta_y \sin^2 n_y \theta_y \frac{L}{\pi} d\theta_y \int_0^{\frac{\pi}{4}} \theta_z \sin^2 n_z \theta_z \frac{L}{\pi} d\theta_z \\
&= \frac{8}{\pi^3} \cdot \frac{L}{\pi} \cdot \frac{L}{\pi} \cdot \frac{L}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \theta_x \sin^2 n_x \theta_x d\theta_x \int_0^{\frac{\pi}{4}} \theta_y \sin^2 n_y \theta_y d\theta_y \int_0^{\frac{\pi}{4}} \theta_z \sin^2 n_z \theta_z d\theta_z \\
&= \frac{8L^3}{\pi^6} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \theta_x \frac{(1 - \cos 2 n_x \theta_x)}{2} d\theta_x \int_0^{\frac{\pi}{4}} \theta_y \frac{(1 - \cos 2 n_y \theta_y)}{2} d\theta_y \int_0^{\frac{\pi}{4}} \theta_z \frac{(1 - \cos 2 n_z \theta_z)}{2} d\theta_z \\
&= \frac{8L^3}{\pi^6} \cdot \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \theta_x (1 - \cos 2 n_x \theta_x) d\theta_x \int_0^{\frac{\pi}{4}} \theta_y (1 - \cos 2 n_y \theta_y) d\theta_y \int_0^{\frac{\pi}{4}} \theta_z (1 - \cos 2 n_z \theta_z) d\theta_z \\
&= \frac{L^3}{\pi^6} \left[ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \theta_x d\theta_x - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \theta_x \cos 2 n_x \theta_x d\theta_x \right] \left[ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \theta_y d\theta_y - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \theta_y \cos 2 n_y \theta_y d\theta_y \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \theta_z d\theta_z - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \theta_z \cos 2n_z \theta_z d\theta_z \right] \\
&= \frac{L^3}{\pi^6} \left[ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \theta_x d\theta_x - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \theta_x \cos 2 \theta_x d\theta_x \right] \left[ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \theta_y d\theta_y - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \theta_y \cos 2 \theta_y d\theta_y \right] \\
& \left[ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \theta_z d\theta_z - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \theta_z \cos 4 \theta_z d\theta_z \right] \\
&= \frac{L^3}{\pi^6} \left[ \left[ \frac{\theta_x^2}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \theta_x \cos 2 \theta_x d\theta_x \right] \left[ \left[ \frac{\theta_y^2}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \theta_y \cos 2 \theta_y d\theta_y \right] \\
& \left[ \left[ \frac{\theta_z^2}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \theta_z \cos 4 \theta_z d\theta_z \right] \\
&= \frac{L^3}{\pi^6} \left[ \frac{\pi^2}{32} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \theta_x \cos 2\theta_x d\theta_x \right] \left[ \frac{\pi^2}{32} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \theta_y \cos 2\theta_y d\theta_y \right] \left[ \frac{\pi^2}{32} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \theta_z \cos 4\theta_z d\theta_z \right] \\
&= \frac{L^3}{\pi^6} \left[ \frac{\pi^2}{32} - \left[ \frac{\theta_x}{2} \sin 2\theta_x + \frac{1}{4} \cos 2\theta_x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \right] \left[ \frac{\pi^2}{32} - \left[ \frac{\theta_y}{2} \sin 2\theta_y + \frac{1}{4} \cos 2\theta_y \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \right] \\
& \left[ \frac{\pi^2}{32} - \left[ \frac{\theta_z}{4} \sin 4\theta_z + \frac{1}{16} \cos 4\theta_z \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \right] \\
&= \frac{L^3}{\pi^6} \left[ \frac{\pi^2}{32} - \left[ \frac{\pi}{8} \sin \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4} \cos \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4} \cos 0 \right] \right] \cdot \left[ \frac{\pi^2}{32} - \left[ \frac{\pi}{8} \sin \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4} \cos \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4} \cos 0 \right] \right] \\
& \left[ \frac{\pi^2}{32} - \left[ \frac{\pi}{16} \sin \pi + \frac{1}{16} \cos \pi - \frac{1}{16} \cos 0 \right] \right] \\
&= \frac{L^3}{\pi^6} \left[ \frac{\pi^2}{32} - \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} \right] \cdot \left[ \frac{\pi^2}{32} - \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} \right] \cdot \left[ \frac{\pi^2}{32} + \frac{1}{8} \right] \\
&= \frac{L^3}{\pi^6} [0,3084251375 - 0,3926990816 + 0,25] \cdot [0,3084251375 - 0,3926990816 + 0,25] \cdot [0,3084251375 + 0,125] \\
&= \frac{L^3}{\pi^6} [0,1657260559] \cdot [0,1657260559] \cdot [0,4334251375] \\
&= L^3 \frac{0,0119040758}{961,389193575304} \\
&= 0,0000123821610L^3
\end{aligned}$$

b) Interval  $0 \leq x \leq \frac{L}{2}$

2)  $n_x = 1, n_y = 1, n_z = 3$

$$\begin{aligned}
 \langle V \rangle &= \iiint_0^{\frac{L}{2}} |\psi|^2 x y z \, dx \, dy \, dz \\
 &= \iiint_0^{\frac{L}{2}} \left( \sqrt{\frac{8}{L^3}} \sin\left(\frac{n_x \pi}{L} x\right) \sin\left(\frac{n_y \pi}{L} y\right) \sin\left(\frac{n_z \pi}{L} z\right) \right) \\
 &\quad \left( \sqrt{\frac{8}{L^3}} \sin\left(\frac{n_x \pi}{L} x\right) \sin\left(\frac{n_y \pi}{L} y\right) \sin\left(\frac{n_z \pi}{L} z\right) \right) x y z \, dx \, dy \, dz \\
 &= \frac{8}{L^3} \int_0^{\frac{L}{2}} x \sin^2\left(\frac{n_x \pi}{L} x\right) dx \int_0^{\frac{L}{2}} y \sin^2\left(\frac{n_y \pi}{L} y\right) dy \int_0^{\frac{L}{2}} z \sin^2\left(\frac{n_z \pi}{L} z\right) dz \\
 &= \frac{8}{L^3} \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{L}{\pi} \theta_x \sin^2 n_x \theta_x dx \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{L}{\pi} \theta_y \sin^2 n_y \theta_y dy \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{L}{\pi} \theta_z \sin^2 n_z \theta_z dz \\
 &= \frac{8}{L^3} \cdot \frac{L}{\pi} \cdot \frac{L}{\pi} \cdot \frac{L}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta_x \sin^2 n_x \theta_x \frac{L}{\pi} d\theta_x \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta_y \sin^2 n_y \theta_y \frac{L}{\pi} d\theta_y \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta_z \sin^2 n_z \theta_z \frac{L}{\pi} d\theta_z \\
 &= \frac{8}{\pi^3} \frac{L}{\pi} \cdot \frac{L}{\pi} \cdot \frac{L}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta_x \sin^2 n_x \theta_x d\theta_x \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta_y \sin^2 n_y \theta_y d\theta_y \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta_z \sin^2 n_z \theta_z d\theta_z \\
 &= \frac{8L^3}{\pi^6} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta_x \frac{(1 - \cos 2 n_x \theta_x)}{2} d\theta_x \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta_y \frac{(1 - \cos 2 n_y \theta_y)}{2} d\theta_y \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta_z \frac{(1 - \cos 2 n_z \theta_z)}{2} d\theta_z \\
 &= \frac{8L^3}{\pi^6} \cdot \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta_x (1 - \cos 2 n_x \theta_x) d\theta_x \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta_y (1 - \cos 2 n_y \theta_y) d\theta_y \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta_z (1 - \cos 2 n_z \theta_z) d\theta_z \\
 &= \frac{L^3}{\pi^6} \left[ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta_x d\theta_x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta_x \cos 2 n_x \theta_x d\theta_x \right] \left[ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta_y d\theta_y - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta_y \cos 2 n_y \theta_y d\theta_y \right] \\
 &\quad \left[ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta_z d\theta_z - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta_z \cos 2 n_z \theta_z d\theta_z \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{L^3}{\pi^6} \left[ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta_x d\theta_x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta_x \cos 2\theta_x d\theta_x \right] \left[ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta_y d\theta_y - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta_y \cos 2\theta_y d\theta_y \right] \\
 &\quad \left[ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta_z d\theta_z - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta_z \cos 6\theta_z d\theta_z \right] \\
 &= \frac{L^3}{\pi^6} \left[ \left[ \frac{\theta_x^2}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta_x \cos 2\theta_x d\theta_x \right] \left[ \left[ \frac{\theta_y^2}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta_y \cos 2\theta_y d\theta_y \right] \\
 &\quad \left[ \left[ \frac{\theta_z^2}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta_z \cos 6\theta_z d\theta_z \right] \\
 &= \frac{L^3}{\pi^6} \left[ \frac{\pi^2}{8} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta_x \cos 2\theta_x d\theta_x \right] \left[ \frac{\pi^2}{8} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta_y \cos 2\theta_y d\theta_y \right] \left[ \frac{\pi^2}{8} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta_z \cos 6\theta_z d\theta_z \right] \\
 &= \frac{L^3}{\pi^6} \left[ \frac{\pi^2}{8} - \left[ \frac{\theta_x}{2} \sin 2\theta_x + \frac{1}{4} \cos 2\theta_x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \right] \left[ \frac{\pi^2}{8} - \left[ \frac{\theta_y}{2} \sin 2\theta_y + \frac{1}{4} \cos 2\theta_y \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \right] \\
 &\quad \left[ \frac{\pi^2}{8} - \left[ \frac{\theta_z}{6} \sin 6\theta_z + \frac{1}{36} \cos 6\theta_z \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \right] \\
 &= \frac{L^3}{\pi^6} \left[ \frac{\pi^2}{8} - \left[ \frac{\pi}{4} \sin \pi + \frac{1}{4} \cos \pi - \frac{1}{4} \cos 0 \right] \right] \cdot \left[ \frac{\pi^2}{8} - \left[ \frac{\pi}{4} \sin \pi + \frac{1}{4} \cos \pi - \frac{1}{4} \cos 0 \right] \right] \\
 &\quad \left[ \frac{\pi^2}{8} - \left[ \frac{\pi}{12} \sin \frac{3\pi}{2} + \frac{1}{36} \cos \frac{3\pi}{2} - \frac{1}{36} \cos 0 \right] \right] \\
 &= \frac{L^3}{\pi^6} \left[ \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{2} \right] \cdot \left[ \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{2} \right] \cdot \left[ \frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi}{12} + \frac{1}{36} \right] \\
 &= \frac{L^3}{\pi^6} [1,2346938775 + 0,5] \cdot [1,234693877 + 0,5] \\
 &\quad [1,2346938775 + 0,2617993878 + 0,0277777778] \\
 &= \frac{L^3}{\pi^6} [1,7346938775] \cdot [1,7346938775] \cdot [1,5242710431] \\
 &= L^3 \frac{4,5867797941}{961,389193575304} \\
 &= 0,0047709916283L^3
 \end{aligned}$$

c) Interval  $0 \leq x \leq \frac{3L}{4}$

3)  $n_x = 1, n_y = 2, n_z = 2$

$$\begin{aligned}
 \langle V \rangle &= \iiint_0^{\frac{3L}{4}} |\psi|^2 x y z \, dx \, dy \, dz \\
 &= \iiint_0^{\frac{3L}{4}} \left( \sqrt{\frac{8}{L^3}} \sin\left(\frac{n_x \pi}{L} x\right) \sin\left(\frac{n_y \pi}{L} y\right) \sin\left(\frac{n_z \pi}{L} z\right) \right) \\
 &\quad \left( \sqrt{\frac{8}{L^3}} \sin\left(\frac{n_x \pi}{L} x\right) \sin\left(\frac{n_y \pi}{L} y\right) \sin\left(\frac{n_z \pi}{L} z\right) \right) x y z \, dx \, dy \, dz \\
 &= \frac{8}{L^3} \int_0^{\frac{3L}{4}} x \sin^2\left(\frac{n_x \pi}{L} x\right) dx \int_0^{\frac{3L}{4}} y \sin^2\left(\frac{n_y \pi}{L} y\right) dy \int_0^{\frac{3L}{4}} z \sin^2\left(\frac{n_z \pi}{L} z\right) dz \\
 &= \frac{8}{L^3} \int_0^{\frac{3\pi}{4}} \frac{L}{\pi} \theta_x \sin^2 n_x \theta_x dx \int_0^{\frac{3\pi}{4}} \frac{L}{\pi} \theta_y \sin^2 n_y \theta_y dy \int_0^{\frac{3\pi}{4}} \frac{L}{\pi} \theta_z \sin^2 n_z \theta_z dz \\
 &= \frac{8}{L^3} \cdot \frac{L}{\pi} \cdot \frac{L}{\pi} \cdot \frac{L}{\pi} \int_0^{\frac{3\pi}{4}} \theta_x \sin^2 n_x \theta_x \frac{L}{\pi} d\theta_x \int_0^{\frac{3\pi}{4}} \theta_y \sin^2 n_y \theta_y \frac{L}{\pi} d\theta_y \int_0^{\frac{3\pi}{4}} \theta_z \sin^2 n_z \theta_z \frac{L}{\pi} d\theta_z \\
 &= \frac{8}{\pi^3} \frac{L}{\pi} \cdot \frac{L}{\pi} \cdot \frac{L}{\pi} \int_0^{\frac{3\pi}{4}} \theta_x \sin^2 n_x \theta_x d\theta_x \int_0^{\frac{3\pi}{4}} \theta_y \sin^2 n_y \theta_y d\theta_y \int_0^{\frac{3\pi}{4}} \theta_z \sin^2 n_z \theta_z d\theta_z \\
 &= \frac{8L^3}{\pi^6} \int_0^{\frac{3\pi}{4}} \theta_x \frac{(1 - \cos 2 n_x \theta_x)}{2} d\theta_x \int_0^{\frac{3\pi}{4}} \theta_y \frac{(1 - \cos 2 n_y \theta_y)}{2} d\theta_y \int_0^{\frac{3\pi}{4}} \theta_z \frac{(1 - \cos 2 n_z \theta_z)}{2} d\theta_z \\
 &= \frac{8L^3}{\pi^6} \cdot \frac{1}{8} \int_0^{\frac{3\pi}{4}} \theta_x (1 - \cos 2 n_x \theta_x) d\theta_x \int_0^{\frac{3\pi}{4}} \theta_y (1 - \cos 2 n_y \theta_y) d\theta_y \\
 &\quad \int_0^{\frac{3\pi}{4}} \theta_z (1 - \cos 2 n_z \theta_z) d\theta_z \\
 &= \frac{L^3}{\pi^6} \left[ \int_0^{\frac{3\pi}{4}} \theta_x d\theta_x - \int_0^{\frac{3\pi}{4}} \theta_x \cos 2 n_x \theta_x d\theta_x \right] \left[ \int_0^{\frac{3\pi}{4}} \theta_y d\theta_y - \int_0^{\frac{3\pi}{4}} \theta_y \cos 2 n_y \theta_y d\theta_y \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[ \int_0^{\frac{3\pi}{4}} \theta_z d\theta_z - \int_0^{\frac{3\pi}{4}} \theta_z \cos 2n_z \theta_z d\theta_z \right] \\
&= \frac{L^3}{\pi^6} \left[ \int_0^{\frac{3\pi}{4}} \theta_x d\theta_x - \int_0^{\frac{3\pi}{4}} \theta_x \cos 2 \theta_x d\theta_x \right] \left[ \int_0^{\frac{3\pi}{4}} \theta_y d\theta_y - \int_0^{\frac{3\pi}{4}} \theta_y \cos 4 \theta_y d\theta_y \right] \\
& \left[ \int_0^{\frac{3\pi}{4}} \theta_z d\theta_z - \int_0^{\frac{3\pi}{4}} \theta_z \cos 4 \theta_z d\theta_z \right] \\
&= \frac{L^3}{\pi^6} \left[ \left[ \frac{\theta_x^2}{2} \right]_0^{\frac{3\pi}{4}} - \int_0^{\frac{3\pi}{4}} \theta_x \cos 2 \theta_x d\theta_x \right] \left[ \left[ \frac{\theta_y^2}{2} \right]_0^{\frac{3\pi}{4}} - \int_0^{\frac{3\pi}{4}} \theta_y \cos 4 \theta_y d\theta_y \right] \\
& \left[ \left[ \frac{\theta_z^2}{2} \right]_0^{\frac{3\pi}{4}} - \int_0^{\frac{3\pi}{4}} \theta_z \cos 4 \theta_z d\theta_z \right] \\
&= \frac{L^3}{\pi^6} \left[ \frac{9\pi^2}{32} - \int_0^{\frac{3\pi}{4}} \theta_x \cos 2 \theta_x d\theta_x \right] \left[ \frac{9\pi^2}{32} - \int_0^{\frac{3\pi}{4}} \theta_y \cos 4 \theta_y d\theta_y \right] \left[ \frac{9\pi^2}{32} - \int_0^{\frac{3\pi}{4}} \theta_z \cos 4 \theta_z d\theta_z \right] \\
&= \frac{L^3}{\pi^6} \left[ \frac{9\pi^2}{32} - \left[ \frac{\theta_x}{2} \sin 2 \theta_x + \frac{1}{4} \cos 2 \theta_x \right]_0^{\frac{3\pi}{4}} \right] \left[ \frac{9\pi^2}{32} - \left[ \frac{\theta_y}{4} \sin 4 \theta_y + \frac{1}{16} \cos 4 \theta_y \right]_0^{\frac{3\pi}{4}} \right] \\
& \left[ \frac{9\pi^2}{32} - \left[ \frac{\theta_z}{4} \sin 4 \theta_z + \frac{1}{16} \cos 4 \theta_z \right]_0^{\frac{3\pi}{4}} \right] \\
&= \frac{L^3}{\pi^6} \cdot \left[ \frac{9\pi^2}{32} - \left[ \frac{3\pi}{8} \sin \frac{3\pi}{2} + \frac{1}{4} \cos \frac{3\pi}{2} - \frac{1}{4} \cos 0 \right] \right] \\
& \left[ \frac{9\pi^2}{32} - \left[ \frac{3\pi}{16} \sin 3\pi + \frac{1}{16} \cos 3\pi - \frac{1}{16} \cos 0 \right] \right] \\
& \left[ \frac{9\pi^2}{32} - \left[ \frac{3\pi}{16} \sin 3\pi + \frac{1}{16} \cos 3\pi - \frac{1}{16} \cos 0 \right] \right] \\
&= \frac{L^3}{\pi^6} \left[ \frac{9\pi^2}{32} + \frac{3\pi}{8} + \frac{1}{4} \right] \cdot \left[ \frac{9\pi^2}{32} + \frac{1}{8} \right] \cdot \left[ \frac{9\pi^2}{32} + \frac{1}{8} \right] \\
&= \frac{L^3}{\pi^6} [2,7758262378 + 1,1780972451 + 0,25] \cdot [2,7758262378 + 0,125] \\
& [2,7758262378 + 0,125] \\
&= \frac{L^3}{\pi^6} [4,2039234829] \cdot [2,9008262378] \cdot [2,9008262378]
\end{aligned}$$

$$= L^3 \frac{35,3751453159}{961,389193575304}$$

$$= 0,0367958632698L^3$$

d) Interval  $0 \leq x \leq L$

4)  $n_x = 2, n_y = 3, n_z = 3$

$$\begin{aligned} \langle V \rangle &= \iiint_0^L |\psi|^2 x y z \, dx \, dy \, dz \\ &= \iiint_0^L \left( \sqrt{\frac{8}{L^3}} \sin\left(\frac{n_x \pi}{L} x\right) \sin\left(\frac{n_y \pi}{L} y\right) \sin\left(\frac{n_z \pi}{L} z\right) \right) \\ &\quad \left( \sqrt{\frac{8}{L^3}} \sin\left(\frac{n_x \pi}{L} x\right) \sin\left(\frac{n_y \pi}{L} y\right) \sin\left(\frac{n_z \pi}{L} z\right) \right) x y z \, dx \, dy \, dz \\ &= \frac{8}{L^3} \int_0^L x \sin^2\left(\frac{n_x \pi}{L} x\right) dx \int_0^L y \sin^2\left(\frac{n_y \pi}{L} y\right) dy \int_0^L z \sin^2\left(\frac{n_z \pi}{L} z\right) dz \\ &= \frac{8}{L^3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{L}{\pi} \theta_x \sin^2 n_x \theta_x dx \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{L}{\pi} \theta_y \sin^2 n_y \theta_y dy \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{L}{\pi} \theta_z \sin^2 n_z \theta_z dz \\ &= \frac{8}{L^3} \cdot \frac{L}{\pi} \cdot \frac{L}{\pi} \cdot \frac{L}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta_x \sin^2 n_x \theta_x \frac{L}{\pi} d\theta_x \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta_y \sin^2 n_y \theta_y \frac{L}{\pi} d\theta_y \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta_z \sin^2 n_z \theta_z \frac{L}{\pi} d\theta_z \\ &= \frac{8}{\pi^3} \frac{L}{\pi} \cdot \frac{L}{\pi} \cdot \frac{L}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta_x \sin^2 n_x \theta_x d\theta_x \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta_y \sin^2 n_y \theta_y d\theta_y \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta_z \sin^2 n_z \theta_z d\theta_z \\ &= \frac{8L^3}{\pi^6} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta_x \frac{(1 - \cos 2 n_x \theta_x)}{2} d\theta_x \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta_y \frac{(1 - \cos 2 n_y \theta_y)}{2} d\theta_y \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta_z \frac{(1 - \cos 2 n_z \theta_z)}{2} d\theta_z \\ &= \frac{8L^3}{\pi^6} \cdot \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta_x (1 - \cos 2 n_x \theta_x) d\theta_x \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta_y (1 - \cos 2 n_y \theta_y) d\theta_y \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta_z (1 - \cos 2 n_z \theta_z) d\theta_z \\ &= \frac{L^3}{\pi^6} \left[ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta_x d\theta_x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta_x \cos 2 n_x \theta_x d\theta_x \right] \left[ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta_y d\theta_y - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta_y \cos 2 n_y \theta_y d\theta_y \right] \\ &\quad \left[ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta_z d\theta_z - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta_z \cos 2 n_z \theta_z d\theta_z \right] \\ &= \frac{L^3}{\pi^6} \left[ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta_x d\theta_x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta_x \cos 4 \theta_x d\theta_x \right] \left[ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta_y d\theta_y - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta_y \cos 6 \theta_y d\theta_y \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[ \int_0^\pi \theta_z d\theta_z - \int_0^\pi \theta_z \cos 6 \theta_z d\theta_z \right] \\
&= \frac{L^3}{\pi^6} \left[ \left[ \frac{\theta_x^2}{2} \right]_0^\pi - \int_0^\pi \theta_x \cos 4 \theta_x d\theta_x \right] \left[ \left[ \frac{\theta_y^2}{2} \right]_0^\pi - \int_0^\pi \theta_y \cos 6 \theta_y d\theta_y \right] \\
& \left[ \left[ \frac{\theta_z^2}{2} \right]_0^\pi - \int_0^\pi \theta_z \cos 6 \theta_z d\theta_z \right] \\
&= \frac{L^3}{\pi^6} \left[ \left[ \frac{\pi^2}{2} \right] - \int_0^\pi \theta_x \cos 4 \theta_x d\theta_x \right] \left[ \left[ \frac{\pi^2}{2} \right] - \int_0^\pi \theta_y \cos 6 \theta_y d\theta_y \right] \left[ \left[ \frac{\pi^2}{2} \right] - \int_0^\pi \theta_z \cos 6 \theta_z d\theta_z \right] \\
&= \frac{L^3}{\pi^6} \left[ \frac{\pi^2}{2} - \left[ \frac{\theta_x}{4} \sin 4 \theta_x + \frac{1}{16} \cos 4 \theta_x \right]_0^\pi \right] \left[ \frac{\pi^2}{2} - \left[ \frac{\theta_y}{6} \sin 6 \theta_y + \frac{1}{36} \cos 6 \theta_y \right]_0^\pi \right] \\
& \left[ \frac{\pi^2}{2} - \left[ \frac{\theta_z}{6} \sin 6 \theta_z + \frac{1}{36} \cos 6 \theta_z \right]_0^\pi \right] \\
&= \frac{L^3}{\pi^6} \left[ \frac{\pi^2}{2} - \left[ \frac{\pi}{4} \sin 4\pi + \frac{1}{16} \cos 4\pi - \frac{1}{16} \cos 0 \right] \right] \\
& \left[ \frac{\pi^2}{2} - \left[ \frac{\pi}{6} \sin 6\pi + \frac{1}{36} \cos 6\pi - \frac{1}{36} \cos 0 \right] \right] \cdot \left[ \frac{\pi^2}{2} - \left[ \frac{\pi}{6} \sin 6\pi + \frac{1}{36} \cos 6\pi - \frac{1}{36} \cos 0 \right] \right] \\
&= \frac{L^3}{\pi^6} \left[ \frac{\pi^2}{2} \right] \cdot \left[ \frac{\pi^2}{2} \right] \cdot \left[ \frac{\pi^2}{2} \right] \\
&= \frac{L^3}{\pi^6} \left[ \frac{\pi^6}{8} \right] \\
&= L^3 \frac{1}{8} \\
&= 0,125 L^3
\end{aligned}$$

**Lampiran 8****Tingkat Energi Partikel Dalam Kotak Tiga Dimensi Dengan Variasi Bilangan Kuantum Utama**

$$E = (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2}$$

**1.  $n_x=1, n_y=1, n_z=2$** 

$$E = (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2}$$

$$E = (1^2 + 1^2 + 2^2) \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2}$$

$$E = 6 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2}$$

$$E = \frac{6x(3,1416)^2x(1,05x10^{-34})^2}{2x(9,10953x10^{-31})x(0,5x10^{-10})^2}$$

$$E = \frac{6x9,86965056x1,1025x10^{-68}}{2x9,10953x10^{-31}x0,25x10^{-20}}$$

$$E = \frac{65,2877384544x10^{-68}}{4,554765x10^{-51}}$$

$$E = 1,4333942246x10^{-16} J$$

**2.  $n_x=1, n_y=1, n_z=3$** 

$$E = (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2}$$

$$E = (1^2 + 1^2 + 3^2) \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2}$$

$$E = 11 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2}$$

$$E = \frac{11x(3,1416)^2x(1,05x10^{-34})^2}{2x(9,10953x10^{-31})x(0,5x10^{-10})^2}$$

$$E = \frac{11x9,86965056x1,1025x10^{-68}}{2x9,10953x10^{-31}x0,25x10^{-20}}$$

$$E = \frac{119,6941871664x10^{-68}}{4,554765x10^{-51}}$$

$$E = 2,6278894118x 10^{-16} J$$

**3.  $n_x=2, n_y=2, n_z=1$**

$$E = (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2}$$

$$E = (2^2 + 2^2 + 1^2) \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2}$$

$$E = 9 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2}$$

$$E = \frac{9x(3,1416)^2x(1,05x10^{-34})^2}{2x(9,10953x10^{-31})x(0,5x10^{-10})^2}$$

$$E = \frac{9x9,86965056x1,1025x10^{-68}}{2x9,10953x10^{-31}x0,25x10^{-20}}$$

$$E = \frac{97,9316076816x10^{-68}}{4,554765x10^{-51}}$$

$$E = 2,1500913369x 10^{-16} J$$

**4.  $n_x=2, n_y=2, n_z=3$**

$$E = (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2}$$

$$E = (2^2 + 2^2 + 3^2) \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2}$$

$$E = 17 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2}$$

$$E = \frac{17x(3,1416)^2x(1,05x10^{-34})^2}{2x(9,10953x10^{-31})x(0,5x10^{-10})^2}$$

$$E = \frac{17x9,86965056x1,1025x10^{-68}}{2x9,10953x10^{-31}x0,25x10^{-20}}$$

$$E = \frac{184,9819256208x10^{-68}}{4,554765x10^{-51}}$$

$$E = 4,0612836364x 10^{-16} J$$

**5.  $n_x=3, n_y=3, n_z=1$** 

$$E = (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2}$$

$$E = (3^2 + 3^2 + 1^2) \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2}$$

$$E = 19 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2}$$

$$E = \frac{19x(3,1416)^2x(1,05x10^{-34})^2}{2x(9,10953x10^{-31})x(0,5x10^{-10})^2}$$

$$E = \frac{19x9,86965056x1,1025x10^{-68}}{2x9,10953x10^{-31}x0,25x10^{-20}}$$

$$E = \frac{206,7445051056x10^{-68}}{4,554765x10^{-51}}$$

$$E = 4,5390817112x10^{-16}J$$

**6.  $n_x=3, n_y=3, n_z=2$** 

$$E = (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2}$$

$$E = (3^2 + 3^2 + 2^2) \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2}$$

$$E = 22 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2}$$

$$E = \frac{22x(3,1416)^2x(1,05x10^{-34})^2}{2x(9,10953x10^{-31})x(0,5x10^{-10})^2}$$

$$E = \frac{22x9,86965056x1,1025x10^{-68}}{2x9,10953x10^{-31}x0,25x10^{-20}}$$

$$E = \frac{239,3883743328x10^{-68}}{4,554765x10^{-51}}$$

$$E = 5,2557788235x10^{-16}J$$