



**PERBANDINGAN METODE *KALMAN FILTER* DAN  
*ENSEMBLE KALMAN FILTER* UNTUK MENGESTIMASI  
PERUBAHAN TEMPERATUR PADA PROSES  
PENGERINGAN BUAH KOPI**

**SKRIPSI**

Oleh

**Choirun Nisa Ulfa  
NIM 151810101003**

**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS JEMBER  
2019**



**PERBANDINGAN METODE *KALMAN FILTER* DAN  
*ENSEMBLE KALMAN FILTER* UNTUK MENGESTIMASI  
PERUBAHAN TEMPERATUR PADA PROSES  
PENGERINGAN BUAH KOPI**

**SKRIPSI**

Diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat  
untuk menyelesaikan Program Studi Matematika (S1)  
dan mencapai gelar Sarjana Sains

Oleh

**Choirun Nisa Ulfa  
NIM 151810101003**

**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS JEMBER  
2019**

## PERSEMBAHAN

Skripsi ini saya persembahkan untuk:

1. Ibunda Suparmi dan Ayahanda Muhtar yang telah memberikan cinta, kasih sayang, pengorbanan, dan perhatian tiada henti, serta dukungan dan doa yang tidak pernah putus mulai dalam kandungan hingga saat ini;
2. Saudara tersayang Fajrina Fisha Az-Zahra dan Wahyu Eka Purmomo yang terus memberikan semangat dan selalu menguatkan serta doa yang selalu menyertai langkah;
3. Guru-guru sejak taman kanak-kanak hingga SMA yang memberikan ilmu, motivasi dan membimbing dalam penuh kesabaran dan bersahaja;
4. Dosen FMIPA Universitas Jember yang selalu sabar dalam mambagi ilmu.
5. Almamater Jurusan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

### MOTTO

Man Jadda Wa Jada, Siapa yang bersungguh sungguh  
pasti akan mendapatkan hasil.

Sesungguhnya sesudah kesulitan pasti ada kemudahan.\*)

Impian haruslah menyala dengan apapun yang kita miliki,  
meskipun yang kita miliki tidak sempurna, meskipun itu retak-retak.\*\*)

- 
- \*) Qs. Al Insyirah ayat 5. 2010. *1 Kesulitan Mustahil Mengalahkan 2 Kemudahan*. [Serial Online]. <https://rumaysho.com/1151-1-kesulitan-mustahil-mengalahkan-2-kemudahan.html>. [18 Januari 2019]
- \*\*\*) Setiawan. I. 2011. *9 Summers 10 Autumns*. Jakarta: Gramedia Pustaka Utama.

**PERNYATAAN**

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama: Choirun Nisa Ulfa

NIM: 151810101003

menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang berjudul “Perbandingan Metode *Kalman Filter* dan *Ensemble Kalman Filter* untuk Mengestimasi Perubahan Temperatur pada Proses Pengeringan Buah Kopi” adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali kutipan yang sudah saya sebutkan sumbernya, belum pernah diajukan pada institusi manapun dan bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa ada tekanan dan paksaan dari pihak manapun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata dikemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, 22 Januari 2019

Yang menyatakan,

Choirun Nisa Ulfa  
NIM 151810101003

**SKRIPSI**

**PERBANDINGAN METODE *KALMAN FILTER* DAN *ENSEMBLE  
KALMAN FILTER* UNTUK MENGESTIMASI PERUBAHAN  
TEMPERATUR PADA PROSES PENGERINGAN BUAH KOPI**

Oleh

Choirun Nisa Ulfa  
NIM 151810101003

Pembimbing:

Dosen Pembimbing Utama : Drs. Rusli Hidayat, M.Sc

Dosen Pembimbing Anggota : Kosala Dwija Purnomo, S.Si, M.Si.

**PENGESAHAN**

Skripsi berjudul “Perbandingan Metode *Kalman Filter* dan *Ensemble Kalman Filter* untuk Mengestimasi Perubahan Temperatur pada Proses Pengeringan Buah Kopi” karya Choirun Nisa Ulfa telah diuji dan disahkan pada:

hari, tanggal : Selasa, 22 Januari 2019

tempat : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Universitas Jember.

**Tim Penguji:**

Ketua,

Anggota I,

Drs. Rusli Hidayat, M.Sc.  
NIP 196610121993031001

Kosala Dwidja Purnomo, S.Si, M.Si  
NIP 196908281998021001

Anggota II,

Anggota III,

Dr. Kristiana Wijaya, S.Si, M.Si  
NIP 197408132000032004

Ikhsanul Halikin, S.Pd, M.Si.  
NIP 198610142014041001

Mengesahkan  
Dekan,

Drs. Sujito, Ph.D.  
NIP 196102041987111001

## RINGKASAN

**Perbandingan Metode *Kalman Filter* dan *Ensemble Kalman Filter* untuk Mengestimasi Perubahan Temperatur pada Proses Pengeringan Buah Kopi;**  
Choirun Nisa Ulfa, 151810101003; 2019; 63 halaman; Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Jember.

Kopi merupakan salah satu tanaman hasil perkebunan yang dikenal oleh masyarakat Indonesia. Pengeringan pada buah kopi dapat dilakukan dengan dua cara yakni metode tradisional dengan memanfaatkan sinar matahari dan metode modern dengan memanfaatkan mesin. Temperatur yang dibutuhkan dalam proses pengeringan buah kopi dengan cara tradisional dan modern dapat dikaji secara sistematis dengan model perpindahan panas.

Penelitian ini, mengilustrasikan kopi sebagai bentuk bola yang tersusun dalam dua lapisan yakni lapisan biji kopi yang dilapisi dengan daging buah, sedangkan untuk lapisan kulit ari atau kulit tanduk yang melapisi biji kopi diabaikan karena ukurannya sangat tipis. Model pemanasan kopi nonlinier dinamik yang bersifat deterministik, yakni dapat diukur dengan derajat kepastian tinggi. Namun terdapat beberapa faktor stokastik yang memengaruhi model pengeringan buah kopi. Faktor stokastik tersebut dapat berupa temperatur sumber yang tidak stabil serta adanya panas yang menguap keluar karena pengaruh temperatur lingkungan yang berubah-ubah. Adanya faktor stokastik yang cukup besar pada proses pengeringan buah kopi mengindikasikan penggunaan metode lain yang mempertimbangkan faktor tersebut. Untuk mengestimasi model nonlinier dinamik yang bersifat stokastik digunakan metode *Ensemble Kalman Filter* (EnKF) dan *Kalman Filter* (KF) dengan menerapkan metode diskritisasi *tetha* untuk pendiskritan model. Penelitian dilakukan bertujuan untuk mendapatkan rata-rata estimasi optimal pada pemanasan biji kopi hingga suhu homogen dan mengetahui perbandingan pengestimasi antara metode *Kalman Filter* dan *Ensemble Kalman Filter* sehingga didapatkan metode estimasi yang baik antar keduanya.



Untuk memperoleh hasil estimasi dilakukan beberapa langkah yakni diskritisasi dengan metode *tetha*, kemudian menambahkan *noise* pada model, *noise* merepresentasikan *error* atau kesalahan pada sistem dan pengukuran seperti pengaruh suhu dari lingkungan, sumber panas yang tidak stabil dan model persamaan yang mengilustrasikan kopi berbentuk bulat. Setelah itu mengimplementasikan metode KF dan EnKF. Hasil analisis simulasi adalah membandingkan nilai rata-rata norm kovariansi error dari metode KF dan EnKF. Dilakukan juga perbandingan masukan terhadap beberapa *Ensemble* yakni 50, 100, 200, 300, 400, dan 500. *Ensemble* berpengaruh pada nilai *norm* kovariansi *error*.

Hasil simulasi pada pembangkitan beberapa *Ensemble* membuktikan bahwa semakin banyak *Ensemble* yang dibangkitkan, nilai *norm* kovariansi *error* semakin kecil. Untuk perbandingan metode KF dan EnKF, dibandingkan rata-rata *norm* kovariansi *error* metode KF dan rata-rata *norm* kovariansi *error* metode EnKF dengan 500 *Ensemble* yang menunjukkan bahwa rata-rata *norm* kovariansi *error* EnKF lebih kecil. Disimpulkan bahwa metode EnKF lebih akurat daripada metode KF sehingga waktu rata-rata yang optimal menggunakan metode EnKF.

## PRAKATA

Puji syukur kehadiran Allah SWT. Atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul “Perbandingan Metode *Kalman Filter* dan *Ensemble Kalman Filter* untuk Mengestimasi Perubahan Temperatur pada Proses Pengeringan Buah Kopi”. Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat menyelesaikan pendidikan strata satu (S1) pada Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Penyusunan skripsi ini tidak lepas dari bantuan berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan terima kasih kepada:

1. Bapak Drs. Rusli Hidayat, M.Sc, selaku Dosen Pembimbing Utama dan Bapak Kosala Dwidja Purnomo, S.Si, M.Si selaku Dosen Pembimbing Anggota yang telah membimbing dan mengarahkan penulis;
2. Ibu Dr. Kristiana Wijaya, S.Si, M.Si, dan Bapak Ikhsanul Halikin, S.Pd, M.Si selaku Dosen Penguji yang telah memberikan masukan, saran dan kritik yang membangun dalam penulisan skripsi ini;
3. Ibunda Suparmi dan Ayahanda Muhtar yang tiada henti memberikan pengorbanan dan doanya untuk menyelesaikan skripsi ini.
4. Sahabatku Dicha, Tika, Iza, Sabrina, Nila dan Arifah yang selalu memberikan semangat dan motivasinya;
5. Seluruh keluarga GenBI Jember, UKMS Titik dan Jurusan Matematika Angkatan 2015 yang sudah menghadirkan kekompakan, kebersamaan dan dukungannya;
6. Semua pihak yang tidak bisa disebutkan satu-persatu.

Penulis juga menerima segala kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan skripsi ini. Akhirnya penulis berharap, semoga skripsi ini dapat bermanfaat.

Jember, Januari 2019

Penulis

DAFTAR ISI

	Halaman
HALAMAN JUDUL.....	ii
HALAMAN PERSEMBAHAN.....	iii
HALAMAN MOTTO.....	iv
HALAMAN PERNYATAAN.....	v
HALAMAN PEMBIMBINGAN.....	vi
HALAMAN PENGESAHAN.....	vii
RINGKASAN.....	viii
PRAKATA.....	x
DAFTAR ISI.....	xi
DAFTAR GAMBAR.....	xiii
DAFTAR TABEL.....	xiv
DAFTAR LAMPIRAN.....	xv
<b>BAB 1. PENDAHULUAN.....</b>	<b>1</b>
<b>1.1 Latar Belakang.....</b>	<b>1</b>
<b>1.2 Rumusan Masalah.....</b>	<b>3</b>
<b>1.3 Batasan Masalah.....</b>	<b>3</b>
<b>1.4 Tujuan Penelitian.....</b>	<b>3</b>
<b>1.5 Manfaat Penelitian.....</b>	<b>3</b>
<b>BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA.....</b>	<b>5</b>
<b>2.1 Jenis Kopi.....</b>	<b>5</b>
2.2.1 Kopi Arabika.....	5
2.2.2 Kopi Robusta.....	6
<b>2.2 Persamaan Differensial.....</b>	<b>6</b>
<b>2.3 Persamaan Model pada Biji Kopi.....</b>	<b>7</b>
<b>2.4 Metode Beda Hingga.....</b>	<b>10</b>
2.5.1 Metode Eksplisit.....	13
2.5.2 Metode Implisit.....	14

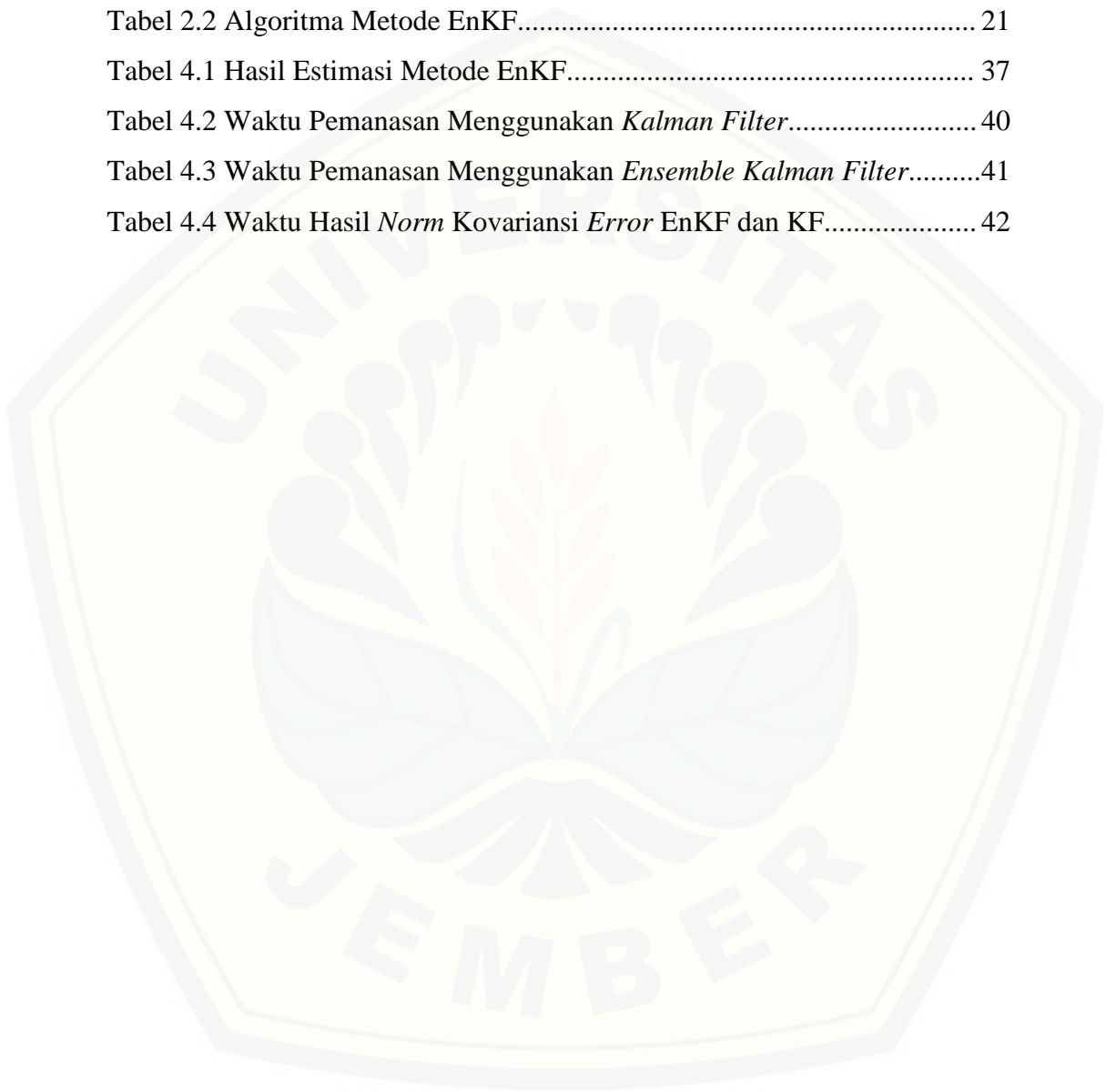
2.5.3 Metode <i>Crank-Nicholson</i> .....	15
2.5.4 Metode Tetha.....	16
<b>2.6 Metode <i>Kalman Filter</i>.....</b>	<b>17</b>
<b>2.7 Metode <i>Ensemble Kalman Filter</i>.....</b>	<b>20</b>
<b>2.8 Kovariansi <i>Error</i>.....</b>	<b>22</b>
<b>BAB 3. METODE PENELITIAN.....</b>	<b>24</b>
3.1 Kajian Literatur.....	24
3.2 Penentuan Model.....	24
3.3 Diskritisasi Model.....	26
3.4 Pembuatan Program.....	26
3.5 Analisa Hasil.....	27
3.6 Penarikan Kesimpulan.....	28
<b>BAB 4. HASIL DAN PEMBAHASAN.....</b>	<b>29</b>
4.1 Model Matematis.....	29
4.2 Diskritisasi pada Titik Pusat Biji Kopi.....	29
4.3 Diskritisasi Titik Interior.....	31
4.4 Diskritisasi Titik <i>Interface</i> .....	32
4.5 Diskritisasi Batas Luar.....	32
4.6 Penambahan <i>Noise</i> pada Model Diskrit.....	34
4.7 Implementasi Metode <i>Ensemble Kalman Filter</i> dan <i>Kalman Filter</i> pada Model Pengeringan Buah Kopi.....	35
4.8 Simulasi dan Hasil Simulasi.....	36
<b>BAB 5. KESIMPULAN DAN SARAN.....</b>	<b>44</b>
5.1 Kesimpulan.....	44
5.2 Saran.....	44
<b>Daftar Pustaka.....</b>	<b>45</b>
<b>LAMPIRAN.....</b>	<b>47</b>

**DAFTAR GAMBAR**

	Halaman
Gambar 2.1 Biji kopi yang mempunyai 2 layer.....	7
Gambar 2.2 Skema Batas Dititik Pusat.....	8
Gambar 2.3 Skema Batas <i>Interface</i> .....	9
Gambar 2.4 Skema Batas <i>Outer</i> .....	9
Gambar 2.5 Bidang Hitungan Penyelesaian Numerik .....	12
Gambar 2.6 Skema Eksplisit.....	13
Gambar 2.7 Skema Implisit.....	14
Gambar 2.8 Skema Metode <i>Tetha</i> .....	17
Gambar 3.1 Skema Metode Penelitian.....	24
Gambar 3.2 Keterangan Lapisan pada Kopi.....	25
Gambar 4.1 Grafik Pemanasan pada Biji Kopi.....	38
Gambar 4.2 Grafik Pemanasan Menggunakan KF.....	39
Gambar 4.3 Grafik Pemanasan Menggunakan EnKF.....	40

**DAFTAR TABEL**

	Halaman
Tabel 2.1 Algoritma Metode KF.....	19
Tabel 2.2 Algoritma Metode EnKF.....	21
Tabel 4.1 Hasil Estimasi Metode EnKF.....	37
Tabel 4.2 Waktu Pemanasan Menggunakan <i>Kalman Filter</i> .....	40
Tabel 4.3 Waktu Pemanasan Menggunakan <i>Ensemble Kalman Filter</i> .....	41
Tabel 4.4 Waktu Hasil <i>Norm Kovariansi Error</i> EnKF dan KF.....	42



DAFTAR LAMPIRAN

	Halaman
<b>A. SKRIP PROGRAM METODE ENKF</b> .....	47
<b>B. SKRIP PROGRAM METODE KF</b> .....	51
<b>C. GRAFIK <i>NORM</i> KOVARIANSI <i>ERROR</i> ENKF</b> .....	55
C.1 Grafik <i>Norm</i> Kovariansi <i>Error</i> dengan 50 <i>Ensemble</i> .....	55
C.2 Grafik <i>Norm</i> Kovariansi <i>Error</i> dengan 100 <i>Ensemble</i> .....	55
C.3 Grafik <i>Norm</i> Kovariansi <i>Error</i> dengan 200 <i>Ensemble</i> .....	55
C.4 Grafik <i>Norm</i> Kovariansi <i>Error</i> dengan 300 <i>Ensemble</i> .....	55
C.5 Grafik <i>Norm</i> Kovariansi <i>Error</i> dengan 400 <i>Ensemble</i> .....	56
C.6 Grafik <i>Norm</i> Kovariansi <i>Error</i> dengan 500 <i>Ensemble</i> .....	56
<b>D. GRAFIK PEMANASAN DAN KOVARIANSI <i>ERROR</i> ENKF 500</b>	
<b>ENSEMBLE</b> .....	56
D.1 Simulasi 1.....	56
D.2 Simulasi 2.. ..	57
D.3 Simulasi 3.... ..	57
D.4 Simulasi 4... ..	57
D.5 Simulasi 5.....	58
D.6 Simulasi 6.....	58
D.7 Simulasi 7.....	58
D.8 Simulasi 8.....	59
D.9 Simulasi 9.....	59
D.10 Simulasi 10.....	59
<b>E. GRAFIK PEMANASAN DAN KOVARIANSI <i>ERROR</i> KF</b> .....	60
E.1 Simulasi 1.. ..	60
E.2 Simulasi 2.. ..	60
E.3 Simulasi 3.. ..	60
E.4 Simulasi 4. ....	61
E.5 Simulasi 5. ....	61
E.6 Simulasi 6.. ..	61

E.7 Simulasi 7..	62
E.8 Simulasi 8..	62
E.9 Simulasi 9..	62
E.10 Simulasi 10..	63





## BAB 1. PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Kopi merupakan salah satu tanaman hasil perkebunan yang dikenal oleh masyarakat. Secara umum proses pengolahan kopi terdiri dari 2 macam yakni proses pengolahan basah dan proses pengolahan kering. Pada proses pengolahan tersebut dibutuhkan proses pencucian untuk melepaskan kulit ari dan proses pengeringan. Pada proses pengeringan buah kopi umumnya masih menggunakan metode tradisional dengan cara dijemur di bawah sinar matahari yang membutuhkan waktu yang cukup lama. Padahal proses pengeringan kopi sendiri dapat menggunakan metode modern yakni menggunakan mesin pengering yang membutuhkan waktu relatif lebih cepat.

Temperatur yang dibutuhkan dalam proses pengeringan buah kopi dengan cara tradisional dan modern dapat dikaji secara sistematis dengan model perpindahan panas. Penelitian tentang kopi sebelumnya pernah dilakukan oleh Hidayat dan Wijaya (2014) yang mengilustrasikan sebuah biji kopi sebagai bentuk bola yang tersusun dalam dua lapisan yakni lapisan biji kopi yang dilapisi dengan daging buah, sedangkan untuk lapisan kulit ari atau kulit tanduk yang melapisi biji kopi dan kulit semu yakni lapisan paling luar pada kopi diabaikan karena ukurannya tipis. Model yang telah ditulis oleh Hidayat merupakan model nonlinier dinamik yang bersifat deterministik, yakni dapat diukur dengan derajat kepastian tinggi. Tetapi terdapat beberapa faktor stokastik yang mempengaruhi model pengeringan buah kopi. Faktor stokastik tersebut dibagi menjadi dua yakni faktor stokastik pada sistem dan faktor stokastik pada pengukuran, faktor stokastik sistem dapat berupa model kopi yang diibaratkan bola, dan faktor stokastik pada pengukuran dapat berupa temperatur sumber yang tidak stabil, adanya panas yang menguap keluar karena pengaruh temperatur lingkungan yang berubah-ubah serta tingkat keakuratan pengukuran. Adanya faktor stokastik yang cukup besar pada proses pengeringan buah kopi mengindikasikan penggunaan metode lain yang mempertimbangkan faktor tersebut. Untuk mengestimasi model nonlinier dinamik yang bersifat stokastik digunakan metode *Ensemble Kalman Filter* (EnKF) dan

*Kalman Filter* (KF), tetapi pada persamaan model kopi yang didapat pada penelitian Hidayat dan Wijaya (2014) yang berjudul Model Reduksi Kadar Kafein Pada Proses Dekafeinasi Biji Kopi harus dilakukan pendiskritan dengan metode theta agar dapat diestimasi lebih lanjut dengan menggunakan KF dan EnKF.

Metode theta telah digunakan pada penelitian sebelumnya oleh Hidayat dan Wijaya (2014) melakukan pendiskritan persamaan panas pada kopi pada jurnalnya yang berjudul “Model Reduksi Kadar Kafein pada Proses Dekafeinasi Biji Kopi”.

Dua metode pengestimasian, yakni KF dan EnKF akan dibandingkan dengan mempertimbangkan beberapa parameter seperti tingkat *error* pada model, *norm* dan lainnya. *Kalman Filter* (KF) merupakan salah satu metode untuk mengestimasi suatu masalah menggunakan sistem keadaan dan model pengukuran yang diperkenalkan pertama kali oleh Rudolph E. Kalman (1920). Algoritma pada *Kalman Filter* telah dikembangkan menjadi *Extended Kalman Filter* (EKF) dan *Ensemble Kalman Filter* (EnKF) untuk menyelesaikan persamaan linier dan non linier.

Metode *Ensemble Kalman Filter* (EnKF) adalah salah satu metode untuk mengestimasi model nonlinier dinamik yang bersifat stokastik. Metode EnKF secara sistematis dirumuskan Evensen (2003) setelah dalam penelitian sebelumnya mendapatkan norm kovariansi error pada metode *Extended Kalman Filter* (EKF) membesar tanpa batas untuk kasus tertentu. Pembangkitan sejumlah *Ensemble* pada metode EnKF dalam hal ini menjadi alternatif untuk estimasi pada kasus tersebut. EnKF adalah metode estimasi yang tergolong dalam asimilasi data. Oleh karena itu, setiap penambahan data observasi lapangan pada model dinamik secara teori akan dapat memperbaiki hasil estimasinya.

Perbandingan metode KF dan EnKF sebelumnya telah diterapkan pada penelitian Nugrahini (2012) dengan membandingkan perambatan panas pada pemanasan sebatang logam. Hasil yang diperoleh adalah sistem KF dan EnKF dapat mendeteksi gangguan panas yang masuk pada batang logam, semakin banyak *Ensemble* yang digunakan semakin kecil rata-rata *norm* kovariansi *error*nya sehingga metode EnKF dapat mendeteksi gangguan panas lebih akurat dibanding metode KF.

Pada penelitian ini akan dilakukan pengestimasi panas pada grid kopi yang dikeringkan menggunakan *temperatur* pemanas sebesar 120°C dengan target suhu homogen pada setiap lapisan biji kopi sebesar 120°C. Pendiskritisasi dilakukan dengan menggunakan metode *tetha*, kemudian dilakukan perbandingan akurasi antara metode KF dan EnKF. Untuk memudahkan komputasi dalam proses estimasi tersebut digunakan program matlab.

## 1.2 Rumusan Masalah

Adapun rumusan masalah pada penelitian ini adalah:

1. Berapa lama rata-rata waktu pemanasan yang diperlukan oleh biji kopi agar *temperatur* biji kopi homogen pada suhu sebesar 120°C?
2. Bagaimana perbandingan estimasi pemanasan kopi antara metode KF dan EnKF?

## 1.3 Batasan Masalah

Adapun batasan masalah pada penelitian kali ini adalah penelitian menggunakan persamaan model pada buah kopi yang merujuk pada artikel Hidayat dan Wijaya (2014).

## 1.4 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mendapatkan waktu yang optimal pada pemanasan biji kopi hingga suhu homogen 120°C.
2. Mengetahui perbandingan pengestimasi model pemanasan kopi dengan metode KF dan EnKF.

## 1.5 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat pada penelitian kali ini adalah mendapatkan metode estimasi yang optimal untuk memanaskan kopi melalui perbandingan antara metode KF dan EnKF, mengetahui waktu yang optimal pada pemanasan biji kopi serta

mengetahui perbandingan keakuratan metode antara *Kalman Filter* dan *Ensemble Kalman Filter*.



## BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

Bab ini, akan menjelaskan tentang teori pendukung dalam menyelesaikan permasalahan estimasi pada pemanasan biji kopi menggunakan metode *Kalman Filter* dan *Ensemble Kalman Filter*. Dasar-dasar tersebut meliputi jenis kopi, persamaan differensial, persamaan pada biji kopi, metode beda hingga, metode metode beda hingga yang didalamnya terdapat metode theta sebagai metode pendiskritan model persamaan pada kopi, metode *Kalman Filter* untuk estimasi waktu memanaskan biji kopi, metode *Ensemble Kalman Filter* untuk estimasi waktu memanaskan biji kopi dan kovariansi *error*.

### 2.1 Jenis Kopi

Kopi merupakan salah satu jenis tanaman perkebunan yang sudah lama dibudidayakan dan memiliki nilai ekonomis yang lumayan tinggi. Kopi berasal dari Afrika, yaitu daerah pegunungan di Etopia. Namun, kopi sendiri baru dikenal oleh masyarakat dunia setelah tanaman tersebut dikembangkan di luar daerah asalnya, yaitu Yaman di bagian selatan Arab (Rahardjo, 2012).

Tanaman kopi termasuk dalam famili *Rubiaceae* yang tumbuh dengan baik di dataran tinggi. Jenis kopi yang bermacam-macam akan mempengaruhi komposisi kimia, sifat fisik, dan komposisi biji kopi yang dihasilkan. Beberapa jenis kopi yaitu *Coffea arabica*, *Coffea robusta* dan *Coffea liberica*. Secara umum yang dikenal oleh masyarakat adalah kopi robusta dan arabika. Perbedaan umum pada keduanya terletak pada rasa, kondisi tempat dua spesies itu tumbuh, dan nilai ekonominya. Konsumsi kopi dunia mencapai 70% dari kopi Arabika dan 20% dari kopi Robusta (Yuwono dan Waziroh, 2017).

#### 2.1.1 Kopi Arabika

Kopi arabika masuk ke Indonesia pada tahun 1696 yang dibawa oleh perusahaan dagang Dutch East India Co. dari Ceylo (Yahmadi, 2007). Karakteristik fisik dari kopi Arabika adalah bijinya memiliki warna yang terang atau cerah, berbentuk lonjong, dan garis pada bagian tengah biji kopi tidak

memanjang ke bawah. Kopi arabika dibudidayakan di dataran tinggi yang memiliki iklim kering, 1350-1850 meter di atas permukaan laut. Adapun di Indonesia, kopi Arabika biasa dibudidayakan pada ketinggian 1000-1750 meter di atas permukaan laut. Budidaya kopi Arabika membutuhkan waktu 9 bulan dari mulai proses berbunga sampai berbuah. Kopi Arabika memiliki kandungan kafein tidak lebih dari 1,5%. Kopi ini memiliki aroma yang khas dan rasa asam yang tidak dimiliki oleh kopi jenis Robusta (Yuwono dan Waziroh, 2017).

### 2.1.2 Kopi Robusta

Kopi robusta atau yang disebut dengan *Coffea canephora*, pada awalnya hanya dikenal sebagai semak atau tanaman liar yang mampu tumbuh hingga beberapa meter tingginya. Hingga akhirnya kopi robusta pertama kali ditemukan di Kongo pada tahun 1898 oleh Emil Laurent. Namun terlepas dari itu ada yang menyatakan jenis kopi robusta ini telah ditemukan lebih dahulu oleh dua orang pengembara Inggris bernama Richard dan John Speake pada tahun 1862 (Yahmadi, 2007).

Karakteristik fisik kopi Robusta diantaranya memiliki biji yang berwarna gelap dengan ukuran yang besar, berbentuk bulat dan garis pada bagian tengah kopi memanjang ke bawah. Kopi robusta dibudidayakan pada dataran dengan ketinggian sekitar 700 meter di atas permukaan laut. Budidayanya membutuhkan waktu 11 bulan terhitung dari proses berbunga sampai berbuah. Kopi robusta umumnya digunakan sebagai kopi instant atau cepat saji. Kandungan kafein pada kopi ini mencapai 2,8%. Kopi Robusta memiliki kelebihan yaitu kekentalan lebih dan warna yang kuat (Yuwono dan Waziroh, 2017).

## 2.2 Persamaan Diferensial

Persamaan differensial adalah suatu persamaan yang memuat turunan terhadap satu atau lebih dari variabel-variabel bebas (*independent variables*) terhadap satu atau lebih peubah tak bebas (*dependent variables*) (Rochmad, 2014).

Jika fungsi yang tidak diketahui hanya terdiri dari satu peubah independen disebut persamaan differensial biasa (Bronson dan Costa, 2007). Berikut merupakan contoh persamaan differensial biasa pada (1.1), (1.2) dan (1.3)

$$\frac{dy}{dx} = 2x + 10$$

$$x dy + y dx = 4 dx$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3 \frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

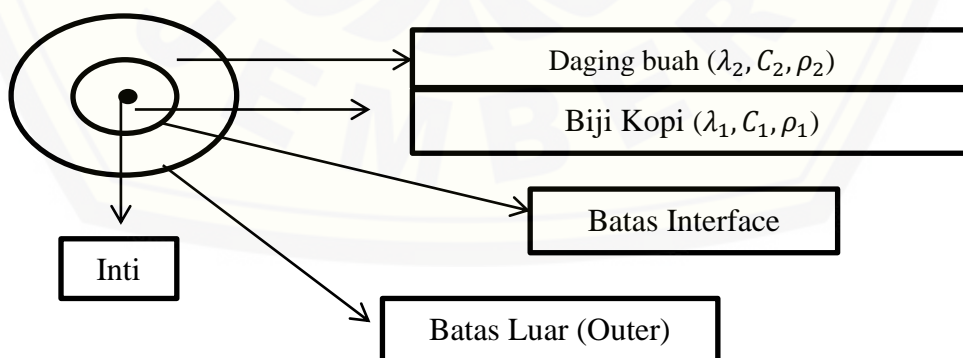
Jika persamaan differensial ada dua atau lebih variabel bebas dan memuat turunan parsial maka dinamakan persamaan differensial parsial (PDP). Turunan parsial merupakan turunan dari fungsi matematika peubah banyak terhadap salah satu peubah (variabel) sedangkan peubah yang lain dipertahankan (konstan). Contoh persamaan differensial parsial:

$$\frac{dz}{dx} + \frac{dz}{dy} + 2z = 0$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{d^2z}{dy^2} = x^2 + y^2$$

### 2.3 Persamaan Model pada Biji Kopi

Dalam penelitian ini buah kopi diasumsikan berbentuk bola dan terbagi menjadi dua lapisan (*layer*), yaitu lapisan biji kopi (*mesocarp*) dan lapisan daging kopi (*endocarp*) seperti pada gambar 2.1.



Gambar 2.1 Biji Kopi yang mempunyai 2 layer

Simbol parameter fisik lapisan biji kopi dan daging kopi yang digunakan masing-masing adalah  $C_1, C_2$  (panas spesifik, dalam  $J/kg^{\circ}C$ );  $\rho_1, \rho_2$  (massa jenis, dalam  $kg/m^3$ ); dan  $\lambda_1, \lambda_2$  (konduktivitas panas, dalam  $W/m^{\circ}C$ ). Nilai semua parameter tersebut diambil dari Hidayat dan Wijaya (2014) yang merupakan nilai-nilai parameter untuk kopi robusta, yaitu:

$$C_1 = 4005,746; C_2 = 3000; \rho_1 = 628,7; \rho_2 = 500; \lambda_1 = 0,1161; \lambda_2 = 0,1172.$$

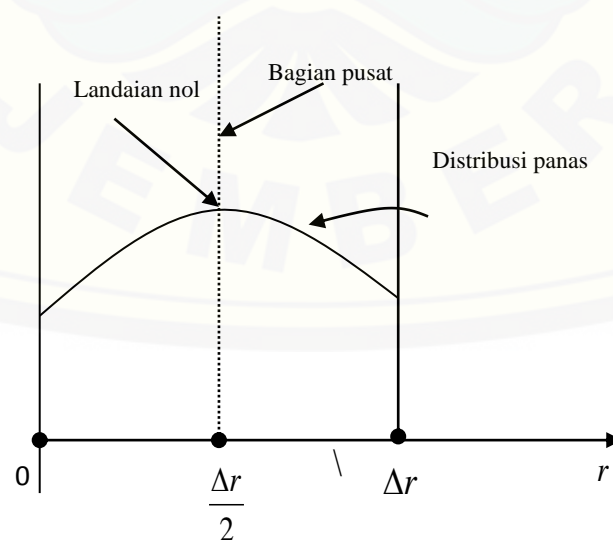
Model perpindahan panas pada pengeringan buah kopi yang akan digunakan juga mengacu pada Hidayat dan Wijaya (2014), yaitu sebagai berikut:

$$C\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad (2.1)$$

1. Di titik pusat biji kopi, yaitu di  $r = 0$

Pengurangan antara fluks masuk dan fluks keluar di pusat bola adalah nol, karena tidak terdapat fluks masuk ataupun fluks keluar pada  $r=0$  (Gambar 2.2), sehingga gradien temperaturnya adalah nol. Hal ini mengakibatkan panas di setiap lapisan menjadi konstan ketika panas telah mencapai titik pusat.

$$\left( \frac{\partial T}{\partial r} \right)_{r=0} = 0 \quad (2.2)$$



Gambar 2.2 Skema Batas Dititik Pusat



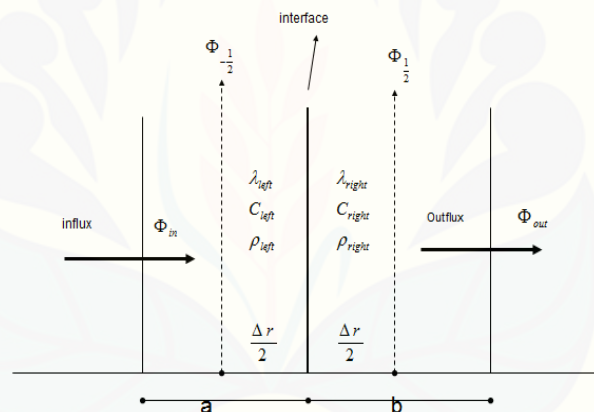
2. Di titik-titik Interior

$$C \cdot \rho \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( \lambda r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad (2.3)$$

3. Di titik *interface* (batas lapisan biji dan daging kopi)

Dalam proses perpindahan panas, panas mengalir secara terus menerus sehingga lapisan (*layer*) dengan konduktivitas panas yang berbeda dapat dipandang sebagai suatu sistem dengan nilai konduktivitas panas yang konstan sehingga dua lapisan yang berbeda diberikan syarat batasan *interface*. Syarat batas *interface* digunakan karena merupakan permukaan yang menghubungkan antara dua lapisan yang berbeda sifat fisiknya

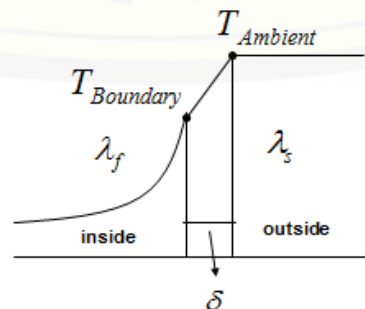
$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( \lambda \cdot r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{\rho_1 \cdot C_1 + \rho_2 \cdot C_2}{2} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.4)$$



Gambar 2.3 Skema Batas *Interface*

4. Di titik batas luar (antara buah kopi dan lingkungan luar)

$$\lambda_i \left\{ \frac{\partial T}{\partial r} \right\}_{boundary} = \frac{\lambda_o}{\delta} \{ T_{lingkungan} - T_{boundary} \} \quad (2.5)$$



Gambar 2.4 Skema Batas *Outer*

## 5. Syarat awal

$$T(r, t = 0) = T_{awal}, 0 < r < 7,5 \cdot 10^{-3} \quad (2.6)$$

Pengasumsian diameter kopi mengacu pada penelitian Sativa, dkk (2014) tentang pengamatan karakteristik buah kopi yang menghasilkan diameter kopi rentang antara 1,12 cm sampai 1,76 cm. Dalam hal ini diasumsikan bahwa buah kopi yang dikaji berukuran diameter 1,5 cm atau  $1,5 \times 10^{-2}$  m, dengan rincian biji kopi berjari-jari 0,6 cm dan ketebalan daging kopi 0,15 cm.

## 2.4 Metode Beda Hingga

Metode beda hingga merupakan salah satu metode numerik yang digunakan untuk menyelesaikan permasalahan yang berhubungan dengan persamaan differensial parsial. Untuk menyelesaikan persamaan tersebut, metode beda hingga memanfaatkan deret Taylor dengan cara mengaproksimasi atau melalui pendekatan turunan persamaan differensial parsial menjadi sistem persamaan linier.

Suatu fungsi dari variabel  $f$  didiferensialkan sampai  $n$  kali dalam interval  $[x_0 - h, x_0 + h]$  dengan  $h$  cukup kecil, berdasarkan deret Taylor dapat diuraikan sebagai berikut

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \dots \quad (2.7)$$

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \dots \quad (2.8)$$

$$f(x_0 + h) - f(x_0 - h) = 2hf'(x_0) + 2f'''(x_0) \frac{h^3}{3!} + \dots \quad (2.9)$$

Persamaan (2.7), (2.8), (2.9) diatur kembali, dengan  $f'(x_0) = \frac{\partial f(x_0)}{\partial x}$  sehingga diperoleh:

$$\frac{\partial f(x_0)}{\partial x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - \frac{h}{2!} \frac{\partial^2(x_0)}{\partial(x_0)^2} - \dots \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial f(x_0)}{\partial x} = \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} - \frac{h}{2!} \frac{\partial^2(x_0)}{\partial(x_0)^2} - \dots \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial f(x_0)}{\partial x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} - \frac{h^2}{3!} \frac{\partial^3(x_0)}{\partial(x_0)^3} - \dots \quad (2.12)$$

Dari persamaan (2.10), (2.11), (2.12) dibuat harga dari pendekatan turunan pertama  $f(x)$  dititik  $x_0$ , yaitu:

$$\frac{\partial f(x_0)}{\partial x} \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (2.10) \frac{\partial f(x_0)}{\partial x}$$

$$\approx \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial f(x_0)}{\partial x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} \quad (2.12)$$

jika sumbu  $x$  dibagi dalam beberapa interval  $\Delta x = h$  yang panjangnya sama, maka absis titik  $i$  dapat ditulis dalam bentuk  $x_i = i\Delta x = ih$  sehingga bentuk pendekatan turunan pertama di titik  $i$  menjadi:

a. Pendekatan beda maju

$$\frac{\partial f(x_i)}{\partial x} \approx \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} \quad (2.13)$$

b. Pendekatan beda mundur

$$\frac{\partial f(x_i)}{\partial x} \approx \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x} \quad (2.14)$$

c. Pendekatan beda pusat

$$\frac{\partial f(x_i)}{\partial x} \approx \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x} \quad (2.15)$$

Bentuk pendekatan turunan kedua diperoleh dengan menjumlahkan Persamaan (2.13) dengan persamaan (2.14) yaitu:

$$\frac{\partial^2 f(x_i)}{\partial x^2} \approx \frac{f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}}{\Delta x^2}$$

dengan  $f_i = f(x_i)$ ,  $x_i = i\Delta x = ih$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  (Ardian, tanpa tahun).

Untuk mempelajari metode beda hingga, misal diberikan persamaan parabola yaitu persamaan perambatan panas satu dimensi, sebagai berikut:

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = K \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} \quad (2.16)$$

dengan syarat awal:

$$T(x, t) = a_0(x), \quad 0 < x < L,$$

dan syarat batas:

$$T(0, t) = b_0(t), t < 0,$$

$$T(L, t) = b_L(t), t < 0$$

(Yang, 2005).

Persamaan (2.16) dengan keterangan lebih lanjut  $K = \frac{\lambda}{\rho C}$ ,  $T$  merupakan temperatur,  $K$  merupakan koefisien difusi thermal,  $\lambda$  merupakan konduktivitas thermal,  $\rho$  merupakan kepadatan massa,  $C$  adalah panas spesifik sedang  $t$  adalah waktu dan  $x$  adalah jarak. Untuk mengaproksimasi persamaan (2.21) dengan beda hingga, dibuat garis paralel pada sumbu  $x$  dan  $t$  yang membentuk *grid* atau *mesh* (Gambar 2.5).  $\Delta x$  dan  $\Delta t$  untuk jarak garis dapat ditulis:

$$(x_i = i\Delta x, t_n = n\Delta t); j = 0, 1, \dots, i; n = 0, 1, 2, \dots$$

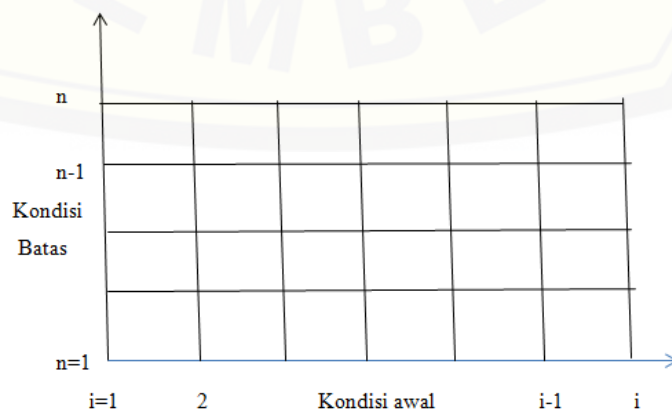
dengan  $\Delta x = 1/i$ , yang disebut titik jaringan (*grid point/mesh point*). Bentuk turunan pertama dan kedua terhadap waktu dan ruang adalah:

$$\frac{\partial T}{\partial t} \approx \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} \tag{2.17}$$

$$\frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} \approx \frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{\Delta x^2} \tag{2.18}$$

Bentuk persamaan (2.17) dan (2.18),  $n$  dan  $n+1$  menunjukkan nilai  $T$  pada waktu  $n$  dan  $n+1$  (Triatmodjo, 1992). Untuk aproksimasi solusi pada titik jaringan (*grid point*) dengan menunjukkan bahwa nilai aproksimasi adalah :

$$T_i^n = T(x_i, t_n)$$



## Gambar 2.5 Bidang Hitungan Penyelesaian Numerik

Terdapat empat metode dalam penyelesaian metode numerik yaitu Metode Eksplisit, Metode Implisit, Metode *Crank-Nicholson* dan Metode *Tetha*

## 2.4.1 Metode Eksplisit

Pada metode eksplisit, perhitungan variabel waktu  $n + 1$  dihitung berdasarkan variabel pada waktu  $n$  yang sudah diketahui. Dengan menggunakan metode seperti yang ditunjukkan pada Gambar 2.6, fungsi variabel (temperatur)  $T(x, t)$  dan turunannya dalam ruang dan waktu didekati oleh bentuk berikut:

$$\begin{aligned} T(x, t) &\approx T_i^n \\ \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} &\approx \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} \\ \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} &\approx \frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{\Delta x^2} \end{aligned} \quad (2.19)$$

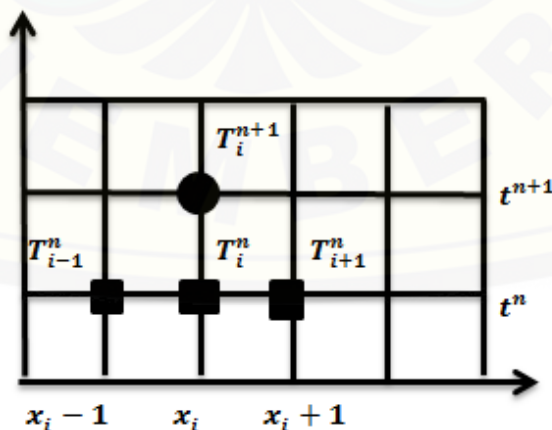
dengan menggunakan metode eksplisit dan menganggap bahwa  $K$  konstan maka Persamaan (2.16) menjadi:

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} \approx K \left( \frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{\Delta x^2} \right)$$

atau

$$T_i^{n+1} \approx T_i^n + Kv(T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n) \quad (2.20)$$

dengan,  $v = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$



Gambar 2.6 Skema Eksplisit

Keterangan:

● Tidak diketahui

■

Diketahui

Persamaan (2.20) dimungkinkan untuk menghitung  $T_i^{n+1}$  dengan kondisi batas yang diketahui untuk nilai awal dan nilai batas:

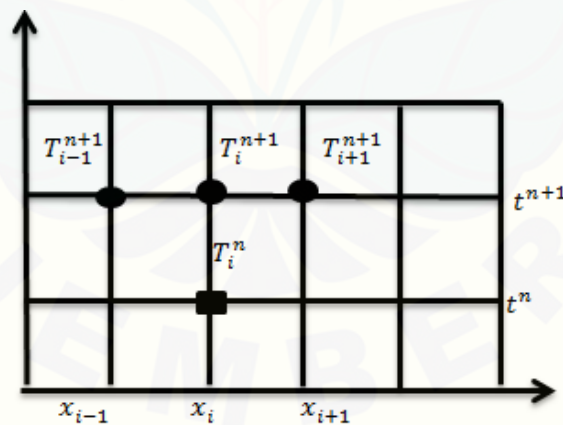
$$T_i^0 = T^0(x_i); i = 1, 2, \dots, i - 1$$

$$T_0^n = T_j^n = 0; n = 1, 2, \dots$$

Perhitungan pada metode eksplisit akan stabil jika  $0 < \nu < \frac{1}{2}$ . Jika langkah waktu  $\Delta t$  cukup kecil, metode eksplisit memberikan solusi yang baik. Namun apabila  $\Delta t$  besar, penyelesaian dari Persamaan (2.20) menjadi tidak stabil. Kekurangan dari metode eksplisit adalah membutuhkan waktu perhitungan yang lebih lama.

### 2.5.2 Metode Implisit

Pada metode implisit, ruas kanan dalam Persamaan (2.16) ditulis pada waktu  $n + 1$  yang belum diketahui nilainya. Gambar 2.7 merupakan jaringan titik hitung pada metode implisit dengan turunannya didekati sebuah waktu pada saat  $n + 1$ .



Gambar 2.7 Skema Implisit

Keterangan:

- Tidak diketahui
- Diketahui

Dari Gambar 2.7, fungsi  $T(x, t)$  dan turunannya didekati oleh bentuk sebagai berikut:

$$\begin{aligned} T(x, t) &\approx T_i^n \\ \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} &\approx \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} \\ \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} &\approx \frac{T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} \end{aligned} \quad (2.21)$$

Sehingga persamaan (2.16) dapat ditulis dalam bentuk beda hingga menjadi:

$$\begin{aligned} \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} &\approx K \left( \frac{T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} \right) \\ \frac{1}{\Delta t} T_i^{n+1} - \frac{K}{\Delta x^2} T_{i-1}^{n+1} + \frac{2K}{\Delta x^2} T_i^{n+1} - \frac{K}{\Delta x^2} T_{i+1}^{n+1} &\approx \frac{1}{\Delta t} T_i^n \\ -\frac{K}{\Delta x^2} T_{i-1}^{n+1} + \left( \frac{1}{\Delta t} + \frac{2K}{\Delta x^2} \right) T_i^{n+1} - \frac{K}{\Delta x^2} T_{i+1}^{n+1} &\approx \frac{1}{\Delta t} T_i^n \\ -vKT_{i-1}^{n+1} + (1 + 2vK)T_i^{n+1} - vKT_{i+1}^{n+1} &\approx T_i^n \end{aligned}$$

dengan,  $v = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$

kemudian, diberikan nilai  $i = 1, 2, \dots, (n - 1)$ , kita peroleh persamaan linier  $n - 1$  yang dapat diselesaikan dengan metode numerik. Kelebihan pada metode implisit adalah stabil tanpa syarat. Langkah waktu  $\Delta t$  dapat diambil sembarang (besar) tanpa menimbulkan ketidakstabilan. Pembatasan  $\Delta t$  hanya untuk menjaga kesalahan pemotongan dalam batas-batas. Namun penggunaan metode implisit lebih sulit dibandingkan dengan metode eksplisit, sehingga muncul pengembangan dari dua metode yakni metode *Crank-Nicolshon*

### 2.5.3 Metode *Crank-Nicolshon*

Metode *Crank-Nicolshon* merupakan pengembangan dari metode eksplisit dan metode implisit. Pada metode eksplisit, pendekatan solusi  $c(x_i, t_{n+1})$  dihitung menggunakan jaringan titik  $(x_i, t_n)$ . Sedangkan pada metode implisit pendekatan solusi  $c(x_i, t_n)$  dihitung menggunakan jaringan titik  $(x_i, t_{n+1})$ , pada metode *Crank-Nicolshon* pendekatan solusi  $c(x_i, t_{n+1})$  akan dihitung menggunakan jaringan titik  $(x_i, t_n)$  dan jaringan titik  $(x_i, t_{n+1})$  yang artinya differensial

terhadap waktu ditulis pada  $n + \frac{1}{2}$ . Sehingga metode differensial Persamaan (2.16) terhadap waktu adalah sebagai berikut:

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} \approx \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t}$$

Metode Crank-Nicholson ruas kanan dari Persamaan (2.16) ditulis pada waktu  $n + \frac{1}{2}$  yang artinya merupakan nilai rata rata dari metode Implisit dan Eksplisit. Sehingga turunan kedua dari metode *Crank-Nicholson* sebagai berikut:

$$\frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} \approx \frac{1}{2} \left( \frac{T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{\Delta x^2} \right)$$

Dengan menggunakan metode Crank-Nicholson, Persamaan (2.16) dapat ditulis sebagai berikut:

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} \approx K \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{\Delta x^2} \right) \right\}$$

atau

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} \approx \frac{1}{2} K \left( \frac{T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} + \frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{\Delta x^2} \right)$$

#### 2.5.4 Metode Metode *Tetha*

Metode diskritisasi *tetha* disebut juga metode tertimbang, metode ini memiliki parameter theta yang bernilai [0,1]. Pada saat  $\theta = 0$  metode ini disebut dengan diskritisasi metode beda hingga eksplisit. Sedangkan untuk  $\theta = 0,5$  metode ini disebut dengan metode *Crank-Nicholson* dan pada saat  $\theta = 1$  metode ini disebut dengan diskritisasi metode beda hingga implisit. Untuk kestabilan, metode theta akan stabil absolut pada saat  $\theta = 1$  (*implisit method*), sedangkan untuk  $0 < \theta < 1$  metode ini stabil bersyarat.

Dalam metode *tetha* dibuat pernyataan yang lebih umum dengan mengartikan aproksimasi beda hingga untuk penerapan pada beberapa titik yang lain dalam interval waktu yang merupakan pengembangan dari *Crank-Nicholson*. Dalam metode *Crank-Nicholson* beda hingga pada derivatif waktu diaproksimasi sebagai beda pusat pada titik tengah interval waktu.

Kemudian, anggap dua metode beda hingga, yang berbeda hanya dalam satu aproksimasi kedua jarak derivatif dengan tiga titik pada level waktu yang



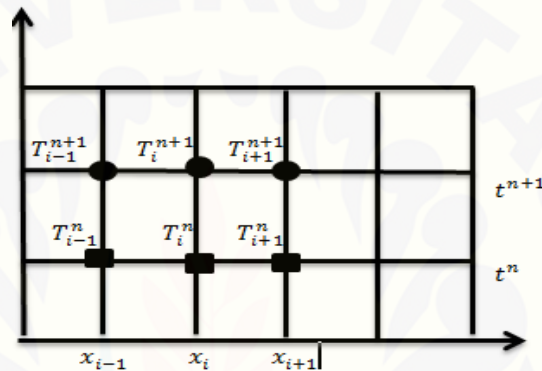
lama yaitu  $t_n$  dan tiga titik pada level waktu yang baru  $t_{n+i}$  digunakan untuk yang lainnya. Secara umum, keenam titik ini digunakan untuk mengaproksimasi dengan metode *tetha*. Skema metode *tetha* dapat dilihat pada Gambar 2.8

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = \theta \left( \frac{T_{i-1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i+1}^{n+1}}{\Delta x^2} \right) + (1 - \theta) \left( \frac{T_{i-1}^n - 2T_i^n + T_{i+1}^n}{\Delta x^2} \right)$$

$$T_i^{n+1} - T_i^n = \frac{\Delta t}{\Delta x^2} [\theta(T_{i-1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i+1}^{n+1}) + (1 - \theta)(T_{i-1}^n - 2T_i^n + T_{i+1}^n)]$$

$$T_i^{n+1} = T_i^n + v[\theta(T_{i-1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i+1}^{n+1}) + (1 - \theta)(T_{i-1}^n - 2T_i^n + T_{i+1}^n)] \quad (2.23)$$

dengan  $v = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$



Gambar 2.8 Skema Metode *Tetha*

Keterangan:

● Tidak diketahui

■ Diketahui

(Wijaya, 2014).

## 2.6 Metode *Kalman Filter*

*Kalman Filter* (KF) adalah suatu metode estimasi variabel keadaan dari sistem dinamik stokastik linear diskrit yang meminimumkan kovariansi error estimasi. Metode KF pertama kali diperkenalkan oleh Rudolph E. Kalman pada tahun 1960 lewat papernya yang terkenal tentang suatu penyelesaian rekursif pada masalah filtering data diskrit yang linear (Welch dan Bishop, 2006).

Keunggulan *Kalman Filter* adalah kemampuannya dalam mengestimasi suatu keadaan berdasarkan data yang minim. Data pengukuran terbaru menjadi bagian penting dari *Kalman Filter* karena data mutakhir akan mengoreksi hasil

prediksi, sehingga hasil estimasi selalu mendekati kondisi yang sebenarnya (Masduqi dan Apriliani, 2008).

Untuk menggambarkan suatu sistem dengan *noise* dan data pengukuran, maka dapat dibentuk persamaan linier stokastik waktu diskrit. Secara umum sistem dinamik stokastik linier diskrit adalah:

$$\hat{x}_{k+1} = \mathbf{A}_k x_k + \mathbf{B}_k u_k + w_k \quad (2.23)$$

dengan pengukuran  $z_k \in \mathcal{R}^p$  yang memenuhi

$$\hat{z}_k = \mathbf{H}_k x_k + v_k \quad (2.24)$$

dan dengan kondisi awal  $x_0 = \bar{x}_0; x_0 \sim N(\bar{x}_0, P_{x_0}); w_k \sim N(0, Q_k)$

keterangan:

$x_0$  = inisial dari sistem

$x_{k+1}$  = variabel keadaan pada waktu  $k + 1$  yang nilai estimasi awalnya  $\bar{x}_0$  dan kovarian awal  $P_{x_0}, x_k \in \mathcal{R}^n$

$x_k$  = variabel keadaan pada waktu  $k$  yang nilai estimasi awalnya  $x_0$  dan kovariansi awal  $P_{x_0}, x_k \in \mathcal{R}^n$

$u_k$  = vektor masukan deterministik, pada waktu  $k, u_k \in \mathcal{R}^m$

$w_k$  = *noise* pada sistem dengan mean  $\bar{w}_k = 0$  dengan kovarians  $Q_k$

$z_k$  = variabel pengukuran,  $z_k \in \mathcal{R}^p$

$v_k$  = *noise* pada sistem dengan mean  $\bar{v}_k = 0$  dengan kovarians  $R_k$

$\mathbf{A}_k$  = matriks  $n \times n$ , yang menyatakan dinamika model sistem dan *error*

$\mathbf{B}_k$  = matriks  $n \times r$ , disebut juga *noise gain matrix*, yang menyatakan pengaruh dinamika input

$\mathbf{H}_k$  = matriks  $m \times n$ , disebut juga matriks pengukuran atau observasi.

Variabel  $w_k \sim N(0, Q_k)$  dan  $v_k \sim N(0, R_k)$  ini diasumsikan *white* yakni berdistribusi normal dengan mean 0, tidak berkorelasi satu sama lain maupun dengan nilai estimasi awal  $\bar{x}_0$ . Proses estimasi dalam *Kalman Filter* diberikan dalam dua tahapan, yaitu tahap prediksi (*time update*) dan tahap koreksi (*measurement update*).

Pada tahap prediksi, variabel keadaan dan kovariansi error estimasi pada waktu  $k$  diproyeksikan untuk mendapatkan prioritas estimates pada waktu  $k + 1$ .

Tahap prediksi ini dipengaruhi oleh dinamika sistem dengan memprediksi variabel keadaan dengan menggunakan persamaan estimasi variabel keadaan dan tingkat akurasi dihitung menggunakan persamaan kovariansi error.

Pada tahap koreksi, hasil estimasi variabel keadaan yang diperoleh pada tahap sebelumnya (tahap prediksi) dikoreksi menggunakan model pengukuran untuk memperbaiki estimasi sesudahnya. Salah satu bagian dari tahap ini yaitu menentukan matriks *Kalman Gain* yang digunakan untuk meminimumkan kovariansi *error* (Susanto, 2008).

Tahap prediksi dan koreksi dilakukan secara rekursif dengan cara meminimumkan kovariansi kesalahan estimasi ( $x_k - \hat{x}_k$ ),  $x_k$  merupakan variabel keadaan sebenarnya dan  $\hat{x}_k$  merupakan penaksiran dari variabel keadaan.

Misal diberikan kondisi awal  $P_0 = P_{x_0}$  dan  $\hat{x}_0 = \bar{x}_0$  kemudian akan dicari estimasi untuk setiap waktu  $k \geq 0$  dengan

$\hat{x}_{k+1}^-$  = estimasi sebelum pengukuran  $z_k$  dimasukkan pada waktu  $k+1$ .

$\hat{P}_{x_0+1}^-$  = kovariansi error estimasi pengukuran sebelum  $z_k$  dimasukkan pada waktu  $k+1$ .

$\hat{x}_{k+1}$  = estimasi setelah pengukuran  $z_k$  dimasukkan pada waktu  $k+1$ .

$\hat{P}_{x_0+1}$  = kovariansi error estimasi pengukuran setelah  $z_k$  dimasukkan pada waktu  $k+1$ .

Untuk *time step*  $k=0$ , diperlukan nilai *state* awal  $\bar{x}_0$  dan kovariansi *error*  $P_{x_0}$  yang menggambarkan tingkat kepercayaan terhadap nilai estimasi *state* awal (Welch, 2006).

Berikut ini adalah persamaan-persamaan *Kalman Filter* yang diperoleh dari proses estimasi yaitu:

Tabel 2.1 Algoritma KF

<b>Model Sistem dan Model Pengukuran</b>	
$x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k + w_k$	
$z_k = H_k x_k + v_k$	
$x_0 \sim N(\bar{x}_0, P_{x_0}), w_k \sim N(0, Q_k); v_k \sim N(0, R_k)$	
<b>Inisialisasi</b>	
$\hat{x}_0 = \bar{x}_0$	
$P_0 = P_{x_0}$	
<b>Tahap Prediksi</b>	

Estimasi :  $\hat{x}_{k+1}^- = A_k \hat{x}_k + B_k u_k$

Kovariansi Error:  $P_{k+1}^- = A_k P_k A_k^T + Q_k$

---

### Tahapan Koreksi

---

Kalman Gain:

$$K_{k+1} = P_{k+1}^- H_{k+1}^T (H_{k+1} P_{k+1}^- H_{k+1}^T + R_{k+1})^{-1}$$

Estimasi:

$$\hat{x}_{k+1} = \hat{x}_{k+1}^- + K_{k+1} (z_{k+1} - H_{k+1} \hat{x}_{k+1}^-)$$

Kovariansi Error:

$$P_{k+1} = [I - K_{k+1} H_{k+1}] P_{k+1}^-$$


---

Pada Tabel 2.1 menunjukkan algoritma KF yang terdiri dari empat bagian, yakni bagian pertama mendefinisikan model pengukuran dan sistem, kemudian pada bagian kedua mendefinisikan nilai awal, kemudian bagian ketiga adalah algoritma tahap prediksi, dan bagian keempat adalah algoritma tahap koreksi (Purnomo, 2008).

## 2.7 Metode Ensemble Kalman Filter

Metode *Ensemble Kalman Filter* (EnKF) adalah metode estimasi modifikasi dari algoritma *Kalman Filter* yang dapat digunakan untuk mengestimasi model sistem linier maupun nonlinier.

Metode EnKF pertama kali dikembangkan oleh G. Evensen (1994) pada saat mencoba mengimplementasikan metode EKF untuk asimilasi data pada suatu model. Linierisasi dalam metode EKF ternyata menyebabkan kovariansi *error*nya membesar menuju takhingga. G. Evensen (1994) juga memperkenalkan ide penggunaan sejumlah *Ensemble* untuk mengestimasi kovariansi *error* pada tahap *forecasting* pada masalah yang sama (Evensen, 1994). Bentuk umum sistem dinamik nonlinier pada EnKF adalah

$$x_{k+1} = f(u_k, x_k) + w_k \quad (2.25)$$

dengan pengukuran linier  $y_k \in \mathcal{R}^p$  yaitu:

$$y_k = H_k x_k + v_k \quad (2.26)$$

dengan,  $x_0 = \bar{x}_0$ ;  $x_0 \sim N(\bar{x}_0, P_{x_0})$ ;  $w_k \sim N(0, Q_k)$ ,  $v_k \sim N(0, R_k)$

Proses estimasi pada EnKF diawali dengan membangkitkan sejumlah  $N_e$  *Ensemble* dengan mean 0 dan kovariansi konstan. *Ensemble* yang dibangkitkan

dilakukan secara random dan berdistribusi normal. Berdasarkan eksperimen, pada umumnya jumlah anggota *Ensemble* yang mencukupi adalah 100-500 (Evensen 2003, dalam Purnomo 2008). Misalkan akan dibangkitkan sejumlah  $N_e$  *Ensemble* untuk  $x_{0,i} = [x_{0,1}, x_{0,2}, x_{0,3}, \dots, x_{0,N_e}]$ .

Secara umum algoritma EnKF terdiri dari dua tahap yaitu tahap prediksi (*time update*) dan tahap koreksi (*measurement update*). Pada metode EnKF terlebih dahulu dihitung *mean Ensemble* sebelum masuk ke tahap prediksi yaitu:

$$\hat{x}_k^- = \frac{1}{N_e} \sum_{i=1}^{N_e} \hat{x}_{k,i}^- \quad (2.27)$$

dengan  $N_e$  adalah banyaknya *Ensemble* yang dibangkitkan dan  $x_{k,i}$  merupakan nilai *Ensemble* yang dibangkitkan. Untuk memperoleh nilai *mean Ensemble* yaitu pada Persamaan (2.27). *Mean Ensemble* ini digunakan untuk menghitung estimasi  $\hat{x}_k^-$  pada tahap prediksi (*time update*) dan  $\hat{x}_k$  pada tahap koreksi (*measurement update*). Sedangkan untuk menghitung kovariansi *error*  $P_k^-$  pada tahap prediksi menggunakan

$$P_k^- = \frac{1}{N_e - 1} \sum_{i=1}^{N_e} (\hat{x}_{k,i}^- - \hat{x}_k^-)(\hat{x}_{k,i}^- - \hat{x}_k^-)^T \quad (2.28)$$

Pada EnKF, *noise* sistem  $w_k$  pada tahap prediksi dan *noise* pengukuran  $v_k$  pada tahap koreksi dibangkitkan dalam bentuk *Ensemble*. Perlu diperhatikan bahwa algoritma EnKF tidak membutuhkan nilai awal kovariansi error. Sedangkan nilai awal  $\hat{x}_0$  dihitung dari rata rata *Ensemble*  $\hat{x}_{0,i}^-$  yang dibangkitkan pada tahap inialisasi. Demikian juga *noise* sistem  $w_{k,i}$  pada tahap prediksi dan *noise* pengukuran  $v_{k,i}$  pada tahap koreksi dibangkitkan dalam bentuk *Ensemble* (Purnomo, 2008). Algoritma EnKF secara jelas dapat dilihat pada tabel 2.2 sebagai berikut:

Tabel 2.2 Algoritma EnKF

<b>Model Sistem dan Model Pengukuran</b>
$x_{k+1} = f(x_k, u_k) + w_k, w_k \sim N(0, Q_k)$
$z_k = Hx_k + v_k, v_k \sim N(0, R_k)$
<b>Inialisasi</b>
Bangkitkan $N_e$ <i>Ensemble</i> sesuai estimasi awal $\bar{x}_0$
$x_{0,t} = [x_{0,1}, x_{0,2}, x_{0,3} \dots, x_{0,N_e}]$

Tentukan nilai awal

$$\hat{x}_0 = \frac{1}{N_e} \sum_{i=1}^{N_e} x_{0,t}$$

---

### Tahap Prediksi

---

$$\hat{x}_{k,i}^- = f(\hat{x}_{k-1}, u_{k-1}) + w_k, w_{k,i} \sim N(0, Q_k)$$

Estimasi:

$$\hat{x}_k^- = \frac{1}{N_e} \sum_{i=1}^{N_e} \hat{x}_{k,i}^-$$

Kovariansi *Error*:

$$P_k^- = \frac{1}{N_e - 1} \sum_{i=1}^{N_e} (\hat{x}_{k,i}^- - \hat{x}_k^-)(\hat{x}_{k,i}^- - \hat{x}_k^-)^T$$


---

### Tahap Koreksi

---

$$z_{k,i} = z_k + v_{k,i}, v_{k,i} \sim N(0, R_k)$$

Kalman *Gain*:

$$K_k = P_k^- H^T (H P_k^- H^T + R_k)^{-1}$$

Estimasi:

$$\hat{x}_{k,i}^- = \hat{x}_{k,i}^- + K_k (z_{k,i} - H \hat{x}_{k,i}^-)$$

$$\hat{x}_k = \frac{1}{N_e} \sum_{i=1}^{N_e} \hat{x}_{k,i}$$

Kovariansi *Error*:

$$P_k = [I - K_k H] P_k^-$$


---

## 2.8 Kovariansi *Error*

Kovariansi atau kovarian adalah suatu ukuran data yang bertujuan untuk melihat hubungan antar dimensi. Sedangkan kovariansi *error* menyatakan kovarian perbedaan antara *true state vector*  $x(t)$  dengan *estimated state vector*  $\hat{x}(t)$  (Masduqi, 2008).

Norm matriks pada himpunan  $S$  yang memuat matriks-matriks berukuran  $n \times n$ , yaitu dituliskan dengan notasi  $\|\cdot\|$  atau biasa disebut panjang/besar yang merupakan fungsi bernilai riil yang terdefinisi pada  $S$  dan memenuhi:

- (i)  $\|\mathbf{A}\| \geq 0$ ,
- (ii)  $\|\mathbf{A}\|=0$  jika dan hanya jika  $\mathbf{A}=0$
- (iii)  $\|\alpha\mathbf{A}\| = |\alpha| \|\mathbf{A}\|$ , untuk semua bilangan riil  $\alpha$

$$(iv) \quad \|\mathbf{A}+\mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\|$$

$$(v) \quad \|\mathbf{AB}\| \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{B}\|.$$

Untuk semua  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in S$  (Purnomo, 2008).

Matriks kovariansi *error*  $P_k$  digunakan untuk menentukan tingkat kepercayaan terhadap hasil estimasi. Semakin kecil matriks kovariansi *error*, maka hasil estimasinya memiliki tingkat kepercayaan yang semakin tinggi. Besaran matriks kovariansi *error* dinyatakan dengan nilai *normnya*, yaitu didefinisikan sebagai nilai singular terbesar dari matriks  $P_k$ . Namun dalam penelitian ini, penulisan *norm* matriks kovariansi *error*  $P_k$  yang digunakan pada program Matlab dinotasikan dengan  $norm(P)$ . Maka  $\|P\|$  merupakan besarnya matriks kovariansi *error*. Nilai dari  $\|P\|$  sangat mempengaruhi hasil estimasi KF. Semakin besar nilainya, maka semakin besar korelasi antara *error* variabelnya maka *error* yang dihasilkan akan semakin besar juga sehingga mempengaruhi estimasi yang dilakukan dan sebaliknya.

### BAB 3. METODE PENELITIAN

Langkah langkah yang harus dilakukan dalam menyelesaikan tugas akhir ini adalah secara skematik dapat diilustrasikan pada skema 3.1



Gambar 3.1 Skema Metode Penelitian

#### 3.1 Kajian Literatur

Kajian literatur dilakukan dengan mencari, mempelajari dan mengkaji referensi yang berkaitan dengan model pemanasan biji kopi, metode diskritisasi tetha, estimasi menggunakan metode Kalman Filter dan Ensemble Kalman Filter.

#### 3.2 Penentuan Model

Penentuan model untuk persamaan pada biji kopi yang diibaratkan berbentuk bola dan terdiri dari 2 layer yakni lapisan biji dan daging kopi,



pembuatan model berdasarkan penelitian Hidayat dan Wijaya (2014) dengan didapatkan model kopi sebagai berikut:

$$C\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right)$$

1. Di titik pusat biji kopi, yaitu di  $r = 0$ :

$$\left( \frac{\partial T}{\partial r} \right)_{r=0} = 0$$

2. Di titik-titik interior untuk  $0 < r < 6 \cdot 10^{-3}$  atau  $6 \cdot 10^{-3} < r < 7,5 \cdot 10^{-3}$ :

$$C \cdot \rho \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( \lambda r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right)$$

3. Di titik *interface* (batas lapisan biji dan daging kopi), yaitu di  $r = 6 \cdot 10^{-3}$ :

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( \lambda \cdot r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{\rho_1 \cdot C_1 + \rho_2 \cdot C_2}{2} \frac{\partial T}{\partial t}$$

4. Di titik batas luar (antara buah kopi dan lingkungan luar), yaitu di  $r = 7,5 \cdot 10^{-3}$ :

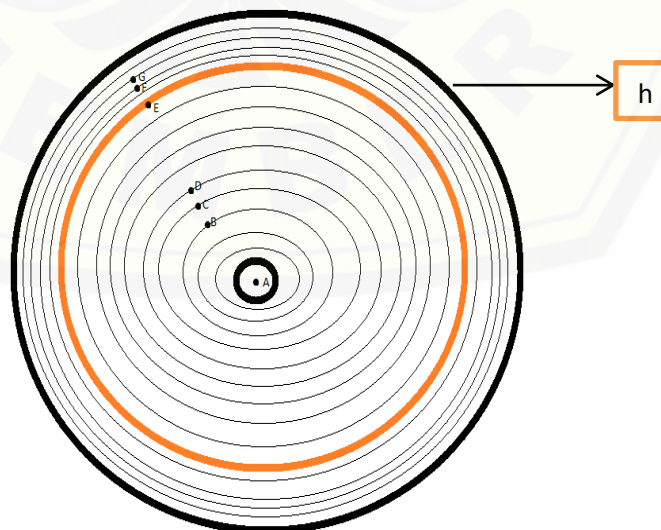
$$\lambda_i \left\{ \frac{\partial T}{\partial r} \right\}_{boundary} = \frac{\lambda_o}{\delta} \{ T_{lingkungan} - T_{boundary} \}$$

5. Syarat awal

$$T(r, t = 0) = T_{awal}, 0 < r < 7,5 \cdot 10^{-3}$$

(Hidayat dan Wijaya, 2014).

untuk lebih jelasnya, gambar kopi diilustrasikan seperti berikut:



Gambar 3.2 Keterangan Lapisan pada Kopi

Berdasarkan penelitian Sativa, dkk (2014), diameter kopi berkisar antara 1,1 cm sampai dengan 1,7 cm. Pada penelitian ini, kopi diasumsikan mempunyai diameter sebesar 1,5 cm sehingga jari-jari kopi tersebut adalah 0,75 cm. Biji kopi dibagi menjadi 25 grid untuk memudahkan perhingan ketika pemanasan. Sehingga setiap grid pada kopi mempunyai panjang 0,03 cm. Ilustrasi pada Gambar 3.2 diketahui bahwa A merupakan pusat pada biji kopi, sedangkan B, C, D, F, G merupakan grid-grid pada kopi. Grid pada kopi ini dibagi menjadi 25. E merupakan batas *interface* dan H merupakan lapisan luar pada kopi. A sampai E merupakan *interior point*. Begitupun E sampai H merupakan *interior point*.

### 3.3 Diskritisasi Model

Untuk pengimplementasian pembuatan program *Kalman Filter* dan *Ensemble Kalman Filter* diperlukan penyelesaian persamaan panas pada Persamaan (2.1) sampai (2.5) dengan metode beda hingga. Proses diskritisasi menggunakan metode diskritisasi tetha yakni gabungan antara metode eksplisit dan metode implisit yang kemudian diimplementasikan menggunakan metode KF dan EnKF. Diskritisasi bertujuan untuk merubah model kontinu menjadi model diskrit.

### 3.4 Pembuatan Program

Pembuatan program dilakukan dengan menggunakan *software* Matlab R2015b. Program akan digunakan sebagai media simulasi pemanasan pada biji kopi dengan mengimplementasikan metode KF dan EnKF.

#### a. Input

Inputkan parameter dan nilai yang dibutuhkan seperti:

1. Nilai massa jenis
2. Konduktivitas panas
3. Massa Jenis
4. Banyak grid
5. Jari jari

6. Nilai tetha
  7. Banyak iterasi
  8. Nilai Kovariansi Model
- b. Proses Pembuatan Program
1. Membuat program dengan *Ensemble Kalman Filter*, dengan tahapan: tahapan prediksi, koreksi. Untuk metode EnKF, *Ensemble* yang akan dibangkitkan sebesar 50, 100, 200, 300, 400, dan 500.
  2. Membuat Program dengan Kalman Filter dengan tahapan: Tahapan pembangkitan awal ensemble, tahapan prediksi, dan tahapan koreksi
- c. Simulasi Program
- Langkah selanjutnya adalah menjalankan program yang telah dibuat sebelumnya, nilai-nilai yang dimasukkan adalah nilai yang akan disimulasikan seperti suhu, jumlah grid, dan banyak ensemble. Kemudian dilakukan proses *running* program serta dilihat hasil yang berupa grafik, nilai kovariansi *error*, dan jumlah waktu.

### 3.4 Analisa Hasil

Simulasi yang dilakukan adalah menggunakan program KF dan EnKF pada persamaan model kopi dengan diameter 1,5 cm yang dibagi menjadi 25 grid. Proses simulasi dibagi menjadi beberapa bagian dengan berdasarkan data pengukuran yang ditunjukkan dalam banyaknya alat ukur dan ditandai dengan tanda X. Kopi dipanaskan dengan suhu pada sumber panas sebesar 120°C.. Simulasi dilakukan dengan suhu awal biji kopi setara dengan suhu ruangan yakni 27 derajat. Terdapat dua faktor stokastik yang mempengaruhi yakni faktor stokastik pada sistem dan faktor stokastik pada pengukuran. Faktor stokastik pada sistem dapat berupa model kopi yang diilustrasikan bulat berbentuk bola dan banyak lapisan pada kopi. Faktor stokastik pada pengukuran adalah kesalahan pengukuran, sumber panas yang tidak stabil serta pengaruh suhu dari luar sistem.

Adanya faktor stokastik ini menyebabkan percobaan menghasilkan hasil berbeda setiap dijalankan program. Hasil yang dianalisis pada penelitian adalah hasil estimasi banyaknya waktu yang dibutuhkan hingga suhu kopi homogen pada suhu  $120^{\circ}\text{C}$  pada setiap lapisan. Analisis yang dilakukan juga membandingkan nilai norm kovariansi error dan rata-rata norm kovariansi *error*. Nilai error merupakan selisih antara nilai numerik dengan nilai estimasi dari metode KF dan EnKF.

### 3.5 Penarikan Kesimpulan

Setelah menganalisa hasil, ditarik kesimpulan untuk perbandingan dua metode tersebut, nilai *norm kovariansi error* dan nilai rata-rata nilai *norm kovariansi error* yang semakin kecil, membuktikan bahwa nilai estimasi lebih baik diantara kedua metode KF dan EnKF. Waktu yang optimal untuk pemanasan kopi mengacu pada metode yang lebih akurat pada saat membandingkan nilai rata-rata *norm kovariansi error*.

## BAB 5. KESIMPULAN DAN SARAN

### 5.1 Kesimpulan

Adapun kesimpulan pada penelitian kali ini adalah sebagai berikut:

1. Rata-rata waktu optimal yang dibutuhkan untuk memanaskan kopi hingga mencapai suhu homogen pada 120°C untuk metode kalman filter sebanyak 44,7 detik sedangkan EnKF 44,8 detik. Dan rata-rata waktu optimal berdasarkan pada perbandingan nilai kovariansi error dengan semakin kecil nilai kovariansi error, waktu yang dihasilkan semakin akurat sehingga waktu yang digunakan adalah EnKF sebanyak 44,8 detik
2. Perbandingan metode KF dan EnKF menunjukkan bahwa metode EnKF lebih akurat dibandingkan dengan metode KF hal ini ditunjukkan pada perbandingan rata-rata norm kovariansi error metode EnKF yakni pada EnKF sebesar  $1,4179 \times 10^{-3}$  dan pada KF sebesar  $6,0791 \times 10^{-3}$ .

### 5.2 Saran

Adapun saran pada penelitian ini adalah untuk penelitian selanjutnya dikaji lebih lanjut tentang pemberhentian panas sehingga optimal karena pada penelitian ini dengan kopi homogen pada suhu 120°C tidak diketahui apakah kopi tersebut ideal untuk dipasarkan atau tidak. Untuk penelitian berikutnya diharapkan dapat mengkaji ulang model kopi sehingga mirip dengan aslinya yakni bentuk elips. Serta model persamaan ditambahkan model tentang persamaan penguapan air atau penurunan kafein. Sehingga, pemberhentian suhu diharapkan sampai memenuhi syarat yakni kadar air atau kandungan kafein yang diinginkan.

**Daftar Pustaka**

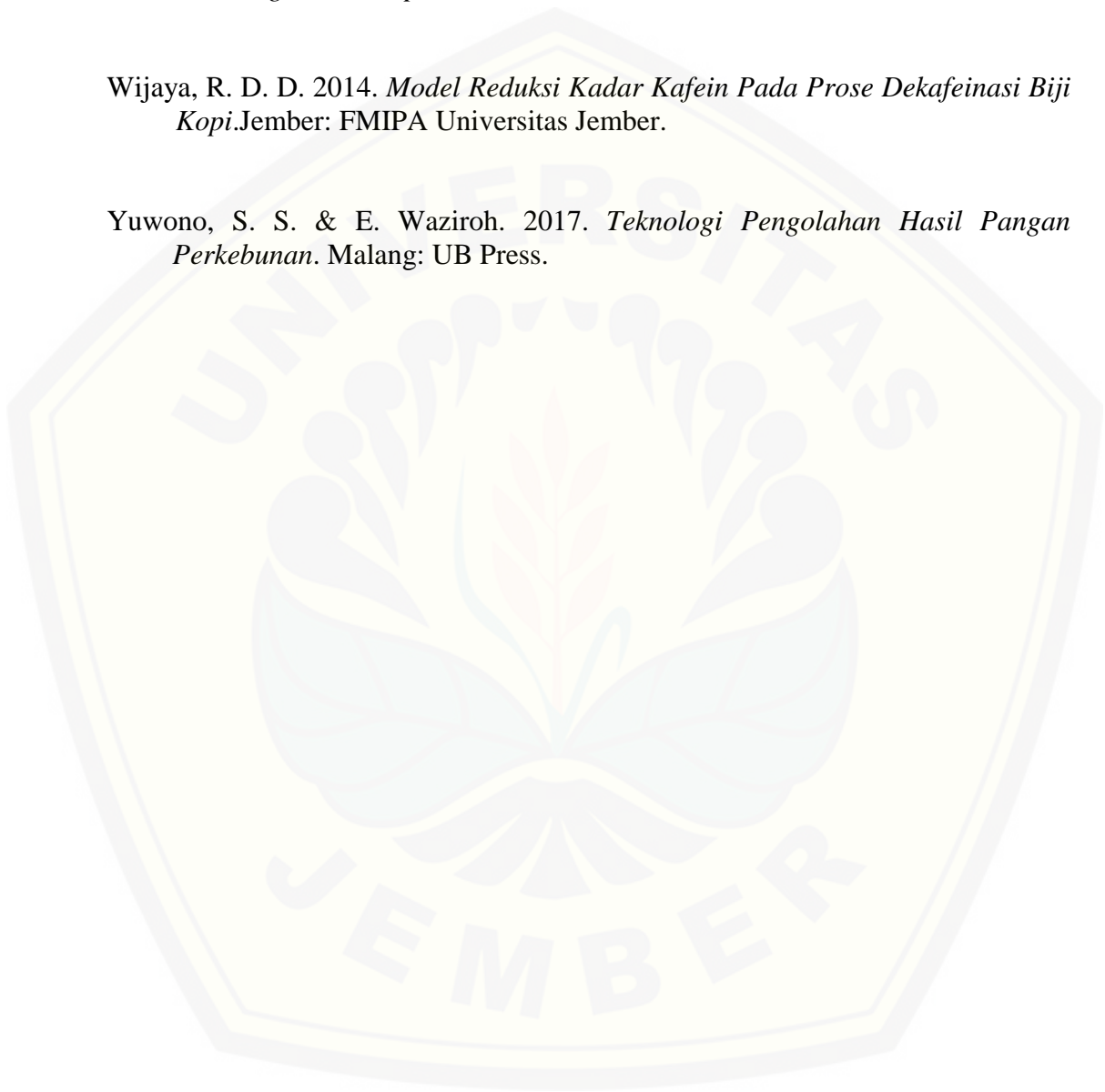
- Bronson, R. dan G. Costa. 2007. *Schaum's Outlines Persamaan Differensial Edisi Ketiga*. Jakarta: Erlangga.
- Cahyono, B. 2012. *Sukses Berkebun Kopi*. Jakarta: Penerbit Mina.
- Hidayat, R dan R. D. D. Wijaya. 2014. *Model Reduksi Kadar Kafein Pada Proses Dekafeinasi Biji Kopi*. Jember: Seminar Nasional Universitas Jember.
- Hidayat, R. 2000. *Modeling Palm Fruit Sterilization In Batch Unit Process*. Netherlands: Twente University.
- Masduqi, A. dan E. Apriliani. 2008. Estimation of Surabaya River Water Quality Using Kalman Filter Algorithm. *The Journal for Technology and Science*, 19 (3) : 87-91.
- Nugrahini, T. 2012. *Perbandingan Metode Kalman Filter dan Metode Ensemble Kalman Filter dalam Mendeteksi Gangguan Konduksi Panas pada Batang Logam*. Jember: Universitas Jember.
- Purnomo, K. D. 2008. Aplikasi Metode Ensemble Kalman Filter pada Model Populasi Plankton. Tidak Diterbitkan. *Thesis*. Surabaya: Program Pascasarjana Institut Teknologi Sepuluh November.
- Rahardjo, P. 2012. *Panduan Budidaya dan Pengolahan Kopi Arabika dan Robusta*. Jakarta: Penebar Swadaya
- Rochmad. 2014. *Persamaan Differensial*. Semarang: FMIPA UNNES.
- Sativa, O. dkk. 2017. *Karakteristik Buah Kopi, Kopi Beras, dan Hasil Olahan Kopi Rakyat di Desa Sindang Jati, Kabupaten Rejang Lebong*. Bengkulu: Jurnal Agroindustri.
- Susanto, E. 2008. *Minimum Varians untuk Sistem Multi Input Multi Output (Mimo)*. Bogor: Departemen Teknik Elektro ITB.

Welch, G., & G. Bishop. 2006. *An Introduction to The Kalman Filter*. Chapel Hill: Department of Computer Science University of North Carolina.

Yahmadi, Mudrig. 2007. *Rangkaian Perkembangan dan Permasalahan Budidaya & Pengolahan Kopi di Indonesia*. Jawa Timur: PT Bina Ilmu Offset.

Wijaya, R. D. D. 2014. *Model Reduksi Kadar Kafein Pada Prose Dekafeinasi Biji Kopi*. Jember: FMIPA Universitas Jember.

Yuwono, S. S. & E. Waziroh. 2017. *Teknologi Pengolahan Hasil Pangan Perkebunan*. Malang: UB Press.



## LAMPIRAN

### Lampiran A. SKRIP PROGRAM METODE ENKF

```
clear all; clc;
disp('=====');
disp('    Ensemble Kalman Filter pada Pemanasan Biji Kopi');
disp('=====');
disp(' ');
%Parameter
Ne=input('Masukkan jumlah Ensemble (Ne) = ');
sigQ=0.01;
sigR=0.01;

T0=input('Masukkan suhu awal (T0) = ');
TL=input('Masukkan suhu lingkungan (Ts) = ');

N1=input('Masukkan jumlah grid lapisan dalam (N1) = ');
N2=input('Masukkan jumlah grid lapisan luar (N2) = ');
Nt=N1+N2;
theta=0.75;
lambda1=0.1161;
lambda2=0.1172;
C1=4005.746;
C2=3000;
r1=0.006;
r2=0.0075;
rho1=628.7;
rho2=500;
mu=0.0003;
delta=1E-6;
alpha=mu/(lambda2*delta);
param={'Theta = ' num2str(theta)}
      ['Lambda = ' num2str(lambda1) ';' ' num2str(lambda2)]
      ['C      = ' num2str(C1) ';' ' num2str(C2)]
      ['r      = ' num2str(r1) ';' ' num2str(r2)]
      ['rho    = ' num2str(rho1) ';' ' num2str(rho2)]
      ['mu     = ' num2str(mu)]
      ['Delta  = ' num2str(delta)];
disp(char(param));
disp(' ');

dt=1;
dr1=r1/N1;
dr2=(r2-r1)/N2;
Jr=[0:dr1:r1 r1+dr2:dr2:r2]; %Jari-jari

Mat1=zeros(Nt+1,Nt+1);
Mat2=zeros(Nt+1,Nt+1);

%T Lingkungan
Tling=zeros(Nt+1,1);
```



```

Tling(Nt+1)=TL;

H=ones(1,Nt+1);

Tj= repmat(T0,Nt+1,Ne);
Tjhat(:,1)=(sum(Tj,2)/Ne);
Npk(1)=0;
V=normrnd(0,sigR,Nt+1,Ne);
Z=repmat(H',1,Ne).*Tj+V;
Pk=0;

Tt=1;
fprintf('%5s','t');
for i=1:Nt+1
    fprintf('%10s',[ 'Ts' num2str(i) ]);
end
fprintf('\n');
fprintf('%5d',Tt-1);
for i=1:Nt+1
    fprintf('%10.4f',Tjhat(i,Tt));
end
fprintf('\n');

while sum(Tjhat(:,Tt))/(Nt+1)<TL
    Tt=Tt+1;
    v1=dt/dr1^2;
    v2=dt/dr2^2;

    % Syarat Batas pada x=0 -----
    A1=1+6*lambda1*v1*theta/(C1*rho1);
    A2=-6*lambda1*v1*theta/(C1*rho1);
    B1=1-6*lambda1*v1*(1-theta)/(C1*rho1);
    B2=6*lambda1*v1*(1-theta)/(C1*rho1);
    Mat1(1,1)=A1;
    Mat1(1,2)=A2;
    Mat2(1,1)=B1;
    Mat2(1,2)=B2;

    %Syarat Batas pada Batas Luar -----
    gamma1=-theta/dr2;
    gamma2=(alpha+1/dr2)*theta;
    gamma3=(1-theta)/dr2;
    gamma4=- (alpha+1/dr2)*(1-theta);
    Mat1(Nt+1,Nt)=gamma1;
    Mat1(Nt+1,Nt+1)=gamma2;
    Mat2(Nt+1,Nt)=gamma3;
    Mat2(Nt+1,Nt+1)=gamma4;

    %Lapisan Dalam -----
for j=2:(N1-1)
    temp1=(j-1)*dr1;
    temp2=C1*rho1*(temp1^2+dr1^2/12);
    alpha1a=-v1*lambda1*theta*(temp1-dr1/2)^2/temp2;
    alpha2a=1+2*v1*lambda1*theta*(temp1^2+dr1^2/4)/temp2;
    alpha3a=-v1*lambda1*theta*(temp1+dr1/2)^2/temp2;

```

```

        beta1a=v1*lambda1*(1-theta)*(temp1-dr1/2)^2/temp2;
        beta2a=1-2*v1*lambda1*(1-theta)*(temp1^2+dr1^2/4)/temp2;
        beta3a=v1*lambda1*(1-theta)*(temp1+dr1/2)^2/temp2;
        Mat1(j,j-1)=alpha1a;
        Mat1(j,j)=alpha2a;
        Mat1(j,j+1)=alpha3a;
        Mat2(j,j-1)=beta1a;
        Mat2(j,j)=beta2a;
        Mat2(j,j+1)=beta3a;
    end

    %Syarat Batas Interface -----
    vr1=N1*dr1;
    den=rho1*C1*(vr1^2/2-
    vr1*dr1/4+dr1^2/24)+rho2*C2*(vr1^2/2+vr1*dr1/4+dr1^2/24);
    I1=-theta*v1*(vr1-dr1/2)^2*lambda1/den;
    I2=1+theta*v1*((vr1-
    dr1/2)^2*lambda1+(vr1+dr1/2)^2*lambda2)/den;
    I3=-theta*v1*(vr1+dr1/2)^2*lambda2/den;
    I4=(1-theta)*v1*(vr1-dr1/2)^2*lambda1/den;
    I5=1-(1-theta)*v1*((vr1-
    dr1/2)^2*lambda1+(vr1+dr1/2)^2*lambda2)/den;
    I6=(1-theta)*v1*(vr1+dr1/2)^2*lambda2/den;
    Mat1(N1,N1-1)=I1;
    Mat1(N1,N1)=I2;
    Mat1(N1,N1+1)=I3;
    Mat2(N1,N1-1)=I4;
    Mat2(N1,N1)=I5;
    Mat2(N1,N1+1)=I6;

    %Lapisan Luar -----
    for j=(N1+1):Nt
        temp3=(j-1)*dr2;
        temp4=C2*rho2*(temp3^2+dr2^2/12);
        alpha1b=-v2*lambda2*theta*(temp3-dr2/2)^2/temp4;
        alpha2b=1+2*v2*lambda2*theta*(temp3^2+dr2^2/4)/temp4;
        alpha3b=-v2*lambda2*theta*(temp3+dr2/2)^2/temp4;
        beta1b=v2*lambda2*(1-theta)*(temp3-dr2/2)^2/temp4;
        beta2b=1-2*v2*lambda2*(1-theta)*(temp3^2+dr2^2/4)/temp4;
        beta3b=v2*lambda2*(1-theta)*(temp3+dr2/2)^2/temp4;
        Mat1(j,j-1)=alpha1b;
        Mat1(j,j)=alpha2b;
        Mat1(j,j+1)=alpha3b;
        Mat2(j,j-1)=beta1b;
        Mat2(j,j)=beta2b;
        Mat2(j,j+1)=beta3b;
    end

    %Prediksi -----
    Fx=Tjhat(:,Tt-1);
    for i=1:Nt+1
        Fx=Mat2*Fx;
        Fx=Fx+alpha*Tling;
        Fx=Mat1\Fx;
    end
    W=normrnd(0,sigQ,Nt+1,Ne);

```

```

Tj=repmat (Fx,1,Ne)+W;
Tjhat (:,Tt)=sum (Tj,2)/Ne;
for i=1:Ne
    Pk=Pk+(Tj (:,i)-Tjhat (:,Tt))*(Tj (:,i)-Tjhat (:,Tt))';
end
Pk=Pk/(Ne-1);

%Koreksi -----
V=normrnd(0,sigR,Nt+1,Ne);
Vbar=sum(V,2)/Ne;
Z=repmat (H' .*Tjhat (:,Tt),1,Ne)+V;
Rk=0;
for i=1:Ne
    Rk=Rk+sum((V(:,i)-Vbar).^2);
end
Rk=Rk/(Ne-1);
Kk=Pk*H'*(H*Pk*H'+Rk)^-1;
for i=1:Ne
    Tj (:,i)=Tj (:,i)+Kk.*(Z(:,i)-H' .*Tj (:,i));
end
Tjhat (:,Tt)=sum (Tj,2)/Ne;
Pk=(eye (Nt+1)-Kk*H)*Pk;
Npk (Tt)=norm (Pk);

%Print
fprintf ('%5d',Tt-1);
for i=1:Nt+1
    fprintf ('%10.4f',Tjhat (i,Tt));
end
fprintf ('\n');

%Plotting -----
subplot (2,1,1);
plot (Jr*100,Tjhat, '-');
xlim ([Jr (1) Jr (end)]*100);
title ('Estimasi');
xlabel ('jari-jari (cm)');
ylabel ('Suhu (C)');
subplot (2,1,2);
plot (dt:dt:Tt-1,Npk (2:end));
xlim ([0 Tt-1]);
xlabel ('waktu (detik)');
ylabel ('Norm Kovariansi Error');
pause (0.1);
end

disp (' ');
disp (['Waktu yang dibutuhkan untuk pemanasan = ' num2str (Tt-1) '
detik']);
disp (['Norm kovariansi error = ' num2str (mean (Npk))]);

```

**Lampiran B. SKRIP PROGRAM METODE KF**

```

clear all; clc;
disp('=====
=====');
disp('                Kalman Filter pada Pemanasan Biji Kopi');
disp('=====
=====');
disp(' ');
%Parameter
sigQ=0.01;
sigR=0.01;

T0=input('Masukkan suhu awal (T0) = ');
TL=input('Masukkan suhu lingkungan (Ts) = ');

N1=input('Masukkan jumlah grid lapisan dalam (N1) = ');
N2=input('Masukkan jumlah grid lapisan luar (N2) = ');
Nt=N1+N2;
theta=0.75;
lambda1=0.1161;
lambda2=0.1172;
C1=4005.746;
C2=3000;
r1=0.006;
r2=0.0075;
rho1=628.7;
rho2=500;
mu=0.0003;
delta=1E-6;
alpha=mu/(lambda1*delta);
param={'Theta = ' num2str(theta)
       ['Lambda = ' num2str(lambda1) '; ' num2str(lambda2) ]
       ['C      = ' num2str(C1) '; ' num2str(C2) ]
       ['r      = ' num2str(r1) '; ' num2str(r2) ]
       ['rho    = ' num2str(rho1) '; ' num2str(rho2) ]
       ['mu     = ' num2str(mu) ]
       ['Delta  = ' num2str(delta) ]};
disp(char(param));
disp(' ');

dt=1;
dr1=r1/N1;
dr2=(r2-r1)/N2;
Jr=[0:dr1:r1 r1+dr2:dr2:r2]; %Jari-jari

Mat1=zeros(Nt+1,Nt+1);
Mat2=zeros(Nt+1,Nt+1);

%T Lingkungan
Tling=zeros(Nt+1,1);
Tling(Nt+1)=TL;

H=ones(1,Nt+1);

```

```

Tjhat(:,1)=repmat(T0,Nt+1,1);
Pk=0;
Npk(1)=0;
V=normrnd(0,sigR,Nt+1,1);
Z=H'.*Tjhat(:,1)+V;

Tt=1;
fprintf('%5s','t');
for i=1:Nt+1
    fprintf('%10s',['Ts' num2str(i)]);
end
fprintf('\n');
fprintf('%5d',Tt-1);
for i=1:Nt+1
    fprintf('%10.4f',Tjhat(i,Tt));
end
fprintf('\n');

while sum(Tjhat(:,Tt))/(Nt+1)<TL
    Tt=Tt+1;
    v1=dt/dr1^2;
    v2=dt/dr2^2;

    % Syarat Batas pada x=0 -----
    -----
    A1=1+6*lambda1*v1*theta/(C1*rho1);
    A2=-6*lambda1*v1*theta/(C1*rho1);
    B1=1-6*lambda1*v1*(1-theta)/(C1*rho1);
    B2=6*lambda1*v1*(1-theta)/(C1*rho1);
    Mat1(1,1)=A1;
    Mat1(1,2)=A2;
    Mat2(1,1)=B1;
    Mat2(1,2)=B2;

    %Syarat Batas pada Batas Luar -----
    -----
    gamma1=-theta/dr2;
    gamma2=(alpha+1/dr2)*theta;
    gamma3=(1-theta)/dr2;
    gamma4=- (alpha+1/dr2)*(1-theta);
    Mat1(Nt+1,Nt)=gamma1;
    Mat1(Nt+1,Nt+1)=gamma2;
    Mat2(Nt+1,Nt)=gamma3;
    Mat2(Nt+1,Nt+1)=gamma4;

    %Lapisan Dalam -----
    -----
    for j=2:(N1-1)
        temp1=(j-1)*dr1;
        temp2=C1*rho1*(temp1^2+dr1^2/12);
        alpha1a=-v1*lambda1*theta*(temp1-dr1/2)^2/temp2;
        alpha2a=1+2*v1*lambda1*theta*(temp1^2+dr1^2/4)/temp2;
        alpha3a=-v1*lambda1*theta*(temp1+dr1/2)^2/temp2;
        beta1a=v1*lambda1*(1-theta)*(temp1-dr1/2)^2/temp2;

```

```

        beta2a=1-2*v1*lambda1*(1-theta)*(temp1^2+dr1^2/4)/temp2;
        beta3a=v1*lambda1*(1-theta)*(temp1+dr1/2)^2/temp2;
        Mat1(j,j-1)=alpha1a;
        Mat1(j,j)=alpha2a;
        Mat1(j,j+1)=alpha3a;
        Mat2(j,j-1)=beta1a;
        Mat2(j,j)=beta2a;
        Mat2(j,j+1)=beta3a;
    end

    %Syarat Batas Interface -----
    -----
    vr1=N1*dr1;
    den=rho1*C1*(vr1^2/2-
vr1*dr1/4+dr1^2/24)+rho2*C2*(vr1^2/2+vr1*dr1/4+dr1^2/24);
    I1=-theta*v1*(vr1-dr1/2)^2*lambda1/den;
    I2=1+theta*v1*((vr1-
dr1/2)^2*lambda1+(vr1+dr1/2)^2*lambda2)/den;
    I3=-theta*v1*(vr1+dr1/2)^2*lambda2/den;
    I4=(1-theta)*v1*(vr1-dr1/2)^2*lambda1/den;
    I5=1-(1-theta)*v1*((vr1-
dr1/2)^2*lambda1+(vr1+dr1/2)^2*lambda2)/den;
    I6=(1-theta)*v1*(vr1+dr1/2)^2*lambda2/den;
    Mat1(N1,N1-1)=I1;
    Mat1(N1,N1)=I2;
    Mat1(N1,N1+1)=I3;
    Mat2(N1,N1-1)=I4;
    Mat2(N1,N1)=I5;
    Mat2(N1,N1+1)=I6;

    %Lapisan Luar -----
    -----
    for j=(N1+1):Nt
        temp3=(j-1)*dr2;
        temp4=C2*rho2*(temp3^2+dr2^2/12);
        alpha1b=-v2*lambda2*theta*(temp3-dr2/2)^2/temp4;
        alpha2b=1+2*v2*lambda2*theta*(temp3^2+dr2^2/4)/temp4;
        alpha3b=-v2*lambda2*theta*(temp3+dr2/2)^2/temp4;
        beta1b=v2*lambda2*(1-theta)*(temp3-dr2/2)^2/temp4;
        beta2b=1-2*v2*lambda2*(1-theta)*(temp3^2+dr2^2/4)/temp4;
        beta3b=v2*lambda2*(1-theta)*(temp3+dr2/2)^2/temp4;
        Mat1(j,j-1)=alpha1b;
        Mat1(j,j)=alpha2b;
        Mat1(j,j+1)=alpha3b;
        Mat2(j,j-1)=beta1b;
        Mat2(j,j)=beta2b;
        Mat2(j,j+1)=beta3b;
    end

    %Prediksi -----
    -----
    MatA=Mat1\Mat2;
    W=normrnd(0,sigQ,Nt+1,1);
    Fx=Tjhat(:,Tt-1);
    for i=1:Nt+1
        Fx=Mat2*Fx;
    end

```

```

        Fx=Fx+alpha*Tling;
        Fx=Mat1\Fx;
    end
    Tjhat(:,Tt)=Fx+W;
    Pk=MatA*Pk*MatA'+sum(W)/Nt;

    %Koreksi -----
    -----
    V=normrnd(0,sigR,Nt+1,1);
    Z=H'.*Tjhat(:,Tt)+V;
    Kk=Pk*H'*(H*Pk*H'+sum(V)/Nt)^-1;
    Tjhat(:,Tt)=Tjhat(:,Tt)+Kk.*(Z-H'.*Tjhat(:,Tt));
    Pk=(eye(Nt+1)-Kk*H)*Pk;
    Npk(Tt)=norm(Pk);

    %Print
    fprintf('%5d',Tt-1);
    for i=1:Nt+1
        fprintf('%10.4f',Tjhat(i,Tt));
    end
    fprintf('\n');

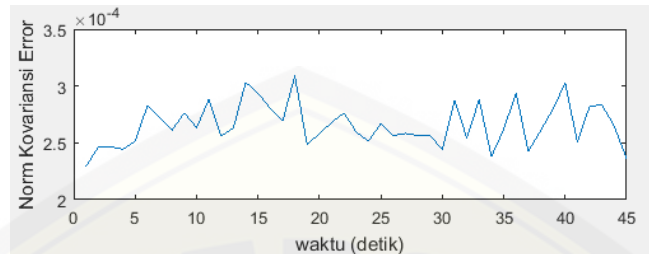
    %Plotting -----
    -----
    subplot(2,1,1);
    plot(Jr*100,Tjhat);
    xlim([Jr(1) Jr(end)]*100);
    title('Estimasi');
    xlabel('jari-jari (cm)');
    ylabel('Suhu (C)');
    subplot(2,1,2);
    plot(0:dt:Tt-1,Npk);
    xlim([0 Tt-1]);
    xlabel('waktu (detik)');
    ylabel('Norm Kovariansi Error');
    pause(0.1);
end

disp(' ');
disp(['Waktu yang dibutuhkan untuk pemanasan = ' num2str(Tt-1) '
detik']);
disp(['Norm kovariansi error = ' num2str(mean(Npk))]);

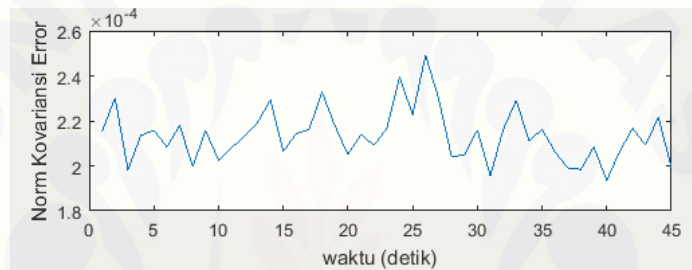
```

**Lampiran C. GRAFIK *NORM KOVARIANSI ERROR ENKF***

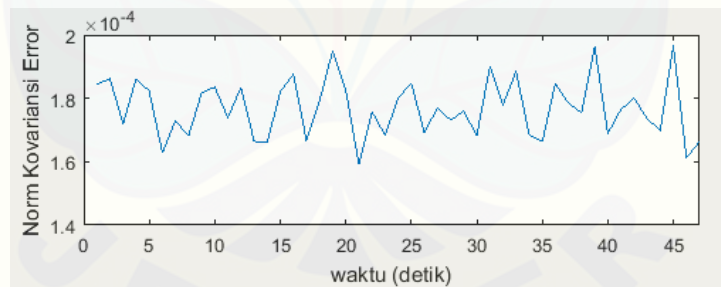
C.1 Grafik rata-rata norm kovariansi error pada saat  $N_e = 50$



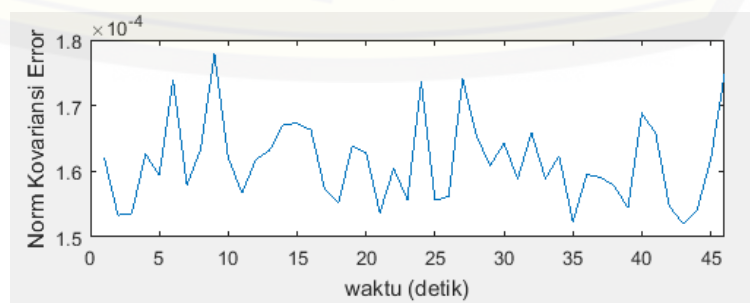
C.2 Grafik rata-rata norm kovariansi error pada saat  $N_e = 100$



C.3 Grafik rata-rata norm kovariansi error pada saat  $N_e = 200$

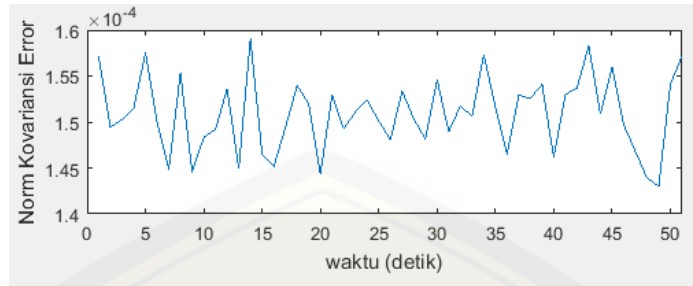


C.4 Grafik rata-rata norm kovariansi error pada saat  $N_e = 300$

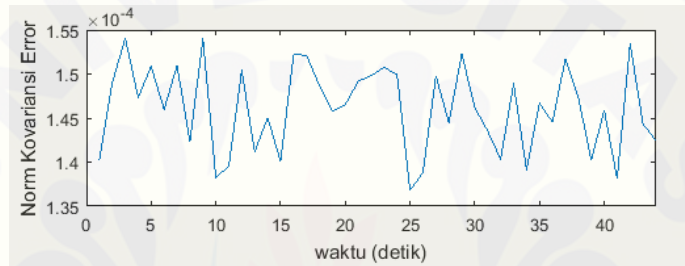




C.5 Grafik rata-rata norm kovariansi error pada saat  $N_e = 400$

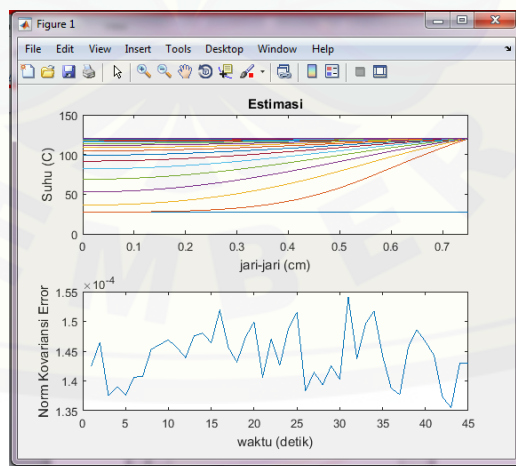


C.6 Grafik rata-rata norm kovariansi error pada saat  $N_e = 500$

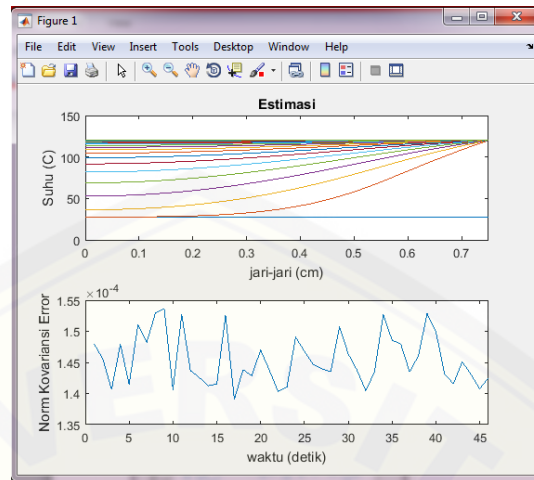


**Lampiran D. GRAFIK PEMANASAN DAN KOVARIANSI ERROR ENKF 500 ENSEMBLE**

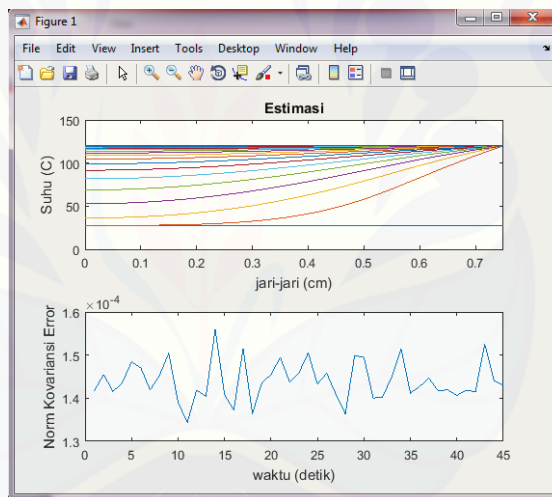
**D.1 Simulasi 1**



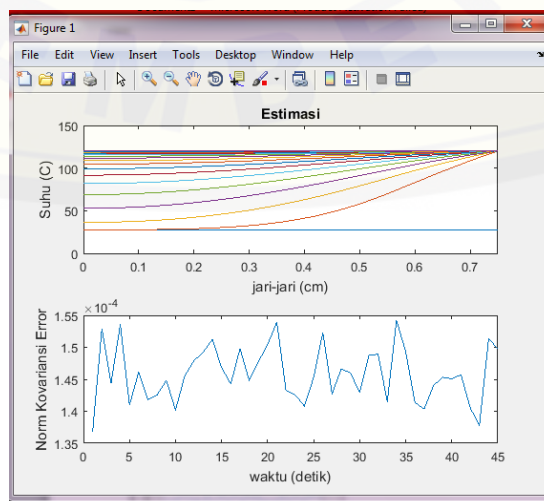
## D.2 Simulasi 2



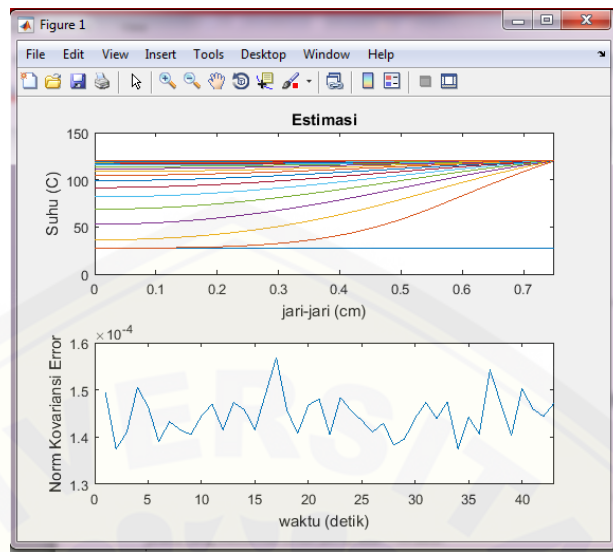
## D.3 Simulasi 3



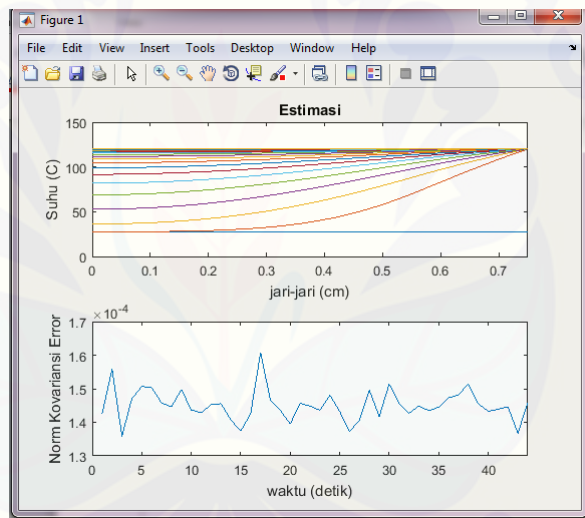
## D.4 Simulasi 4



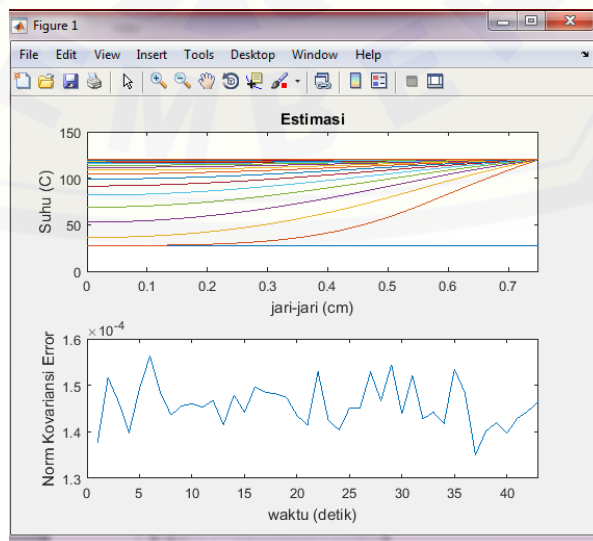
D.5 Simulasi 5



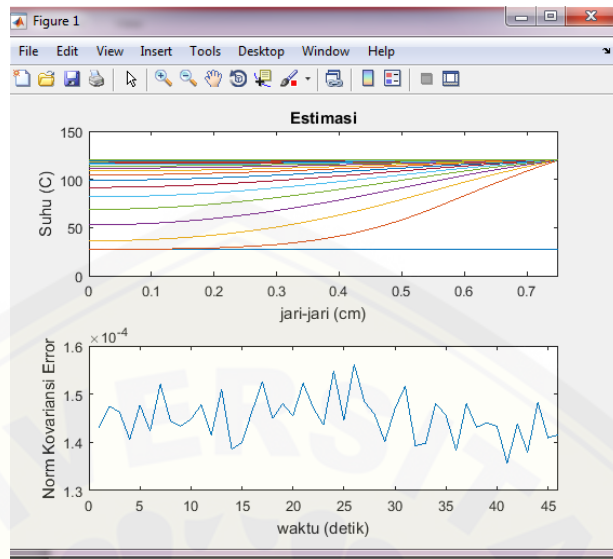
D.6 Simulasi 6



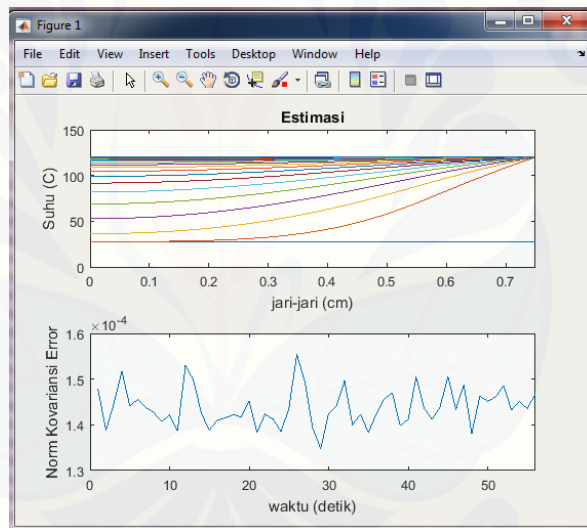
D.7 Simulasi 7



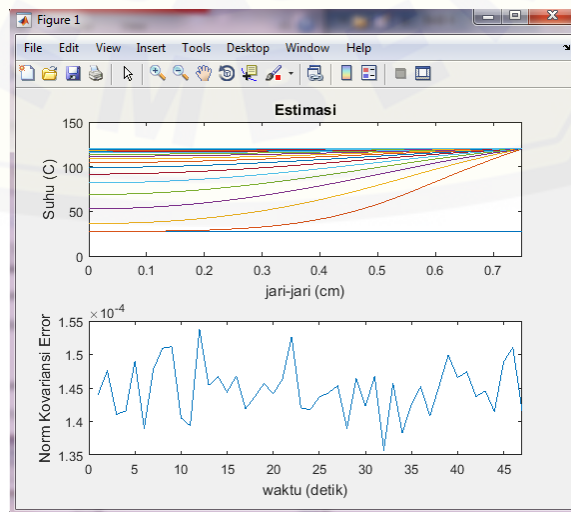
D.8 Simulasi 8



D.9 Simulasi 9

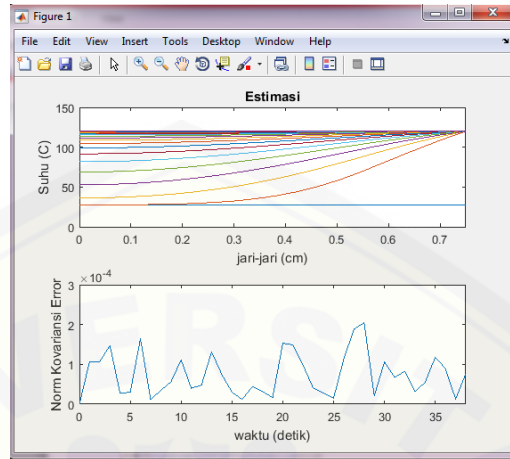


D.10 Simulasi 10

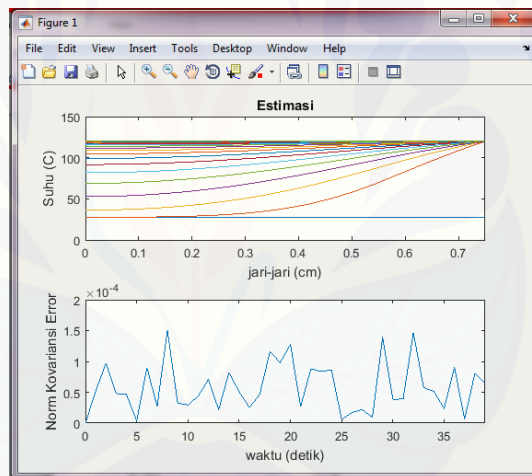


**Lampiran E. GRAFIK PEMANASAN DAN KOVARIANSI ERROR KF**

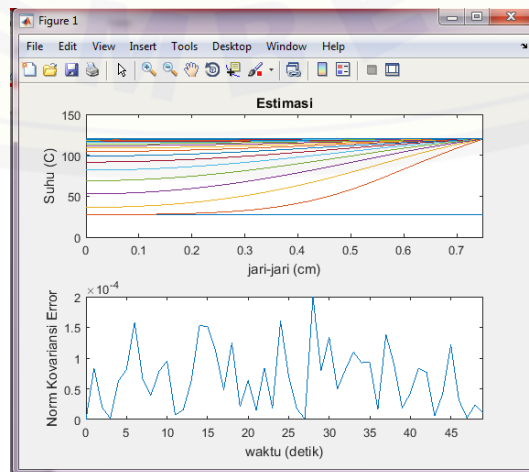
## E.1 Simulasi 1



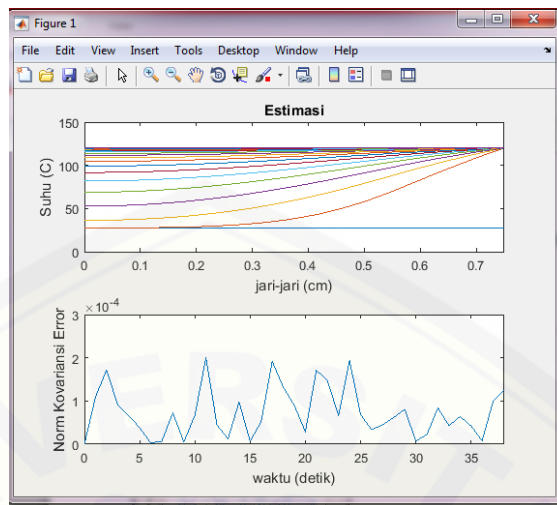
## E.2 Simulasi 2



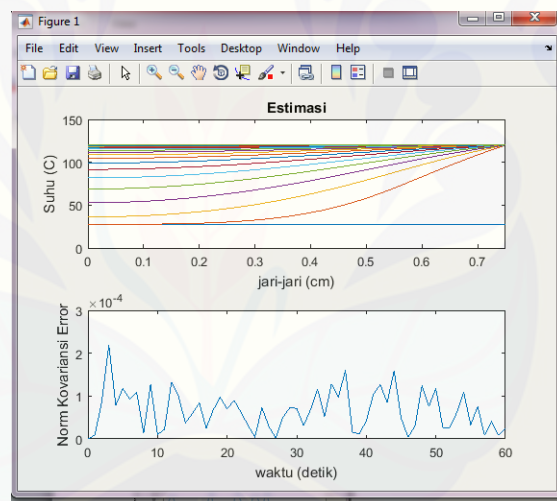
## E.3 Simulasi 3



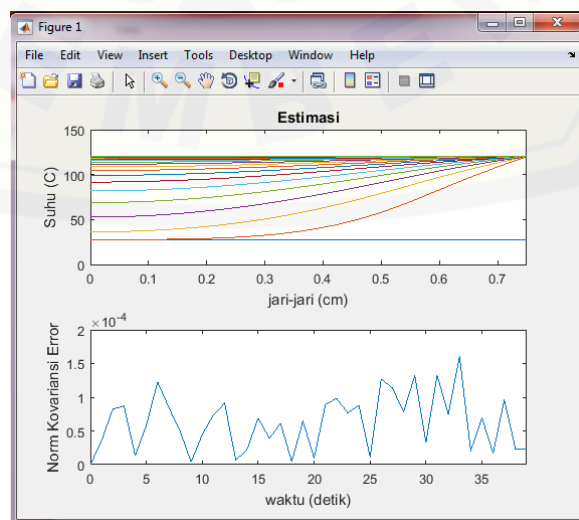
E.4 Simulasi 4



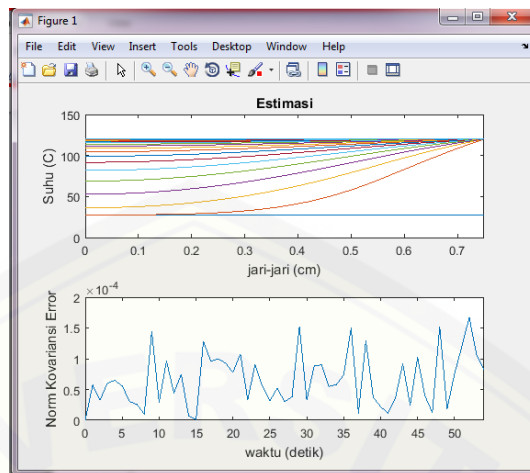
E.5 Simulasi 5



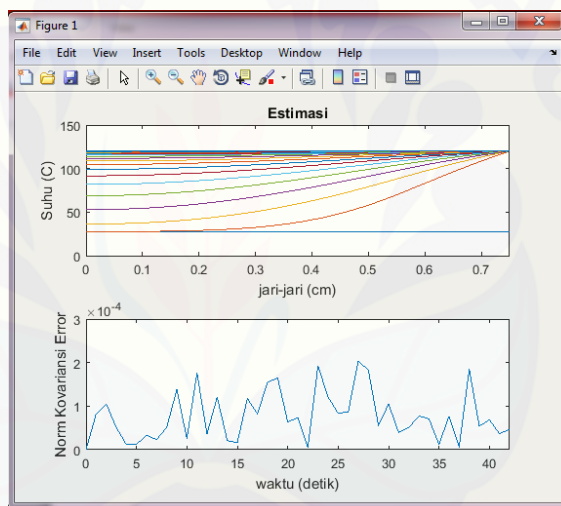
E.6 Simulasi 6



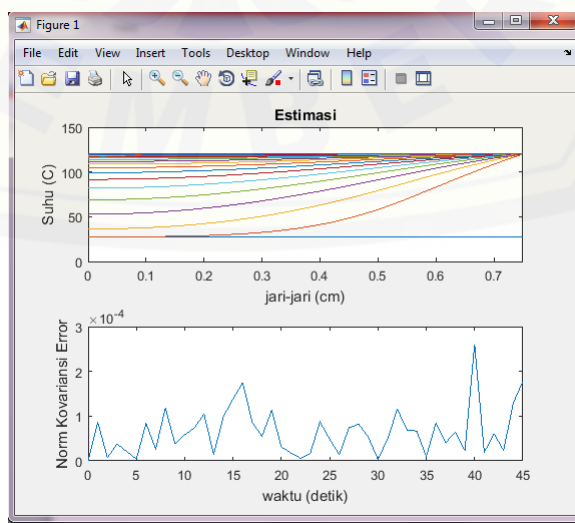
## E.7 Simulasi 7



## E.8 Simulasi 8



## E.9 Simulasi 9



## E.10 Simulasi 10

