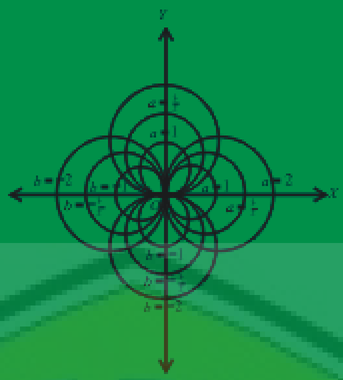
Digital Repository Universitas Jember

Edisi Perdana

Teori dan Soal-soal

Geometri Analitika Bidang



Prof. Dr. Sunardi, M.Pd
Erfan Yudianto, S.Pd., M.Pd.

2015

RIWAYAT PENULIS

Prof. Dr. Sunardi, M.Pd. adalah staf pengajar pada Program Studi Pendidikan Matematika FKIP Universitas Jember. Menyelesaikan program Sarjana Pendidikan Matematika pada tahun 1981 di IKIP Malang, dan memulai karir sebagai dosen di Program Studi Pendidikan Matematika FKIP Universitas Jember pada tahun 1983. Gelar Magister Pendidikan dibidang Pendidikan Matematika diperoleh dari IKIP Malang pada tahun 1996. Gelar Doktor dibidang Pendidikan Matematika diperoleh dari Universitas Negeri Surabaya pada tahun 2005. Jabatan Guru Besar dibidang Pembelajaran Geometri dicapai pada tahun 2008. Bidang penelitian yang ditekuni adalah Pembelajaran Geometri

Erfan Yudianto, S.Pd., M.Pd. adalah staf pengajar pada Program Studi Pendidikan Matematika FKIP Universitas Jember. [illegible] Situbondo, Jawa Timur, pada tanggal [illegible] [illegible] Pendidikan Matematika di FKIP Universitas Jember (UNEJ) [illegible] S2 Pendidikan Matematika di Universitas Negeri Surabaya (UNESA) [illegible] S3 Pendidikan Matematika di Universitas Negeri Surabaya (UNESA) [illegible] matematika, Olimpiade Matematika dan Olimpiade Sains Nasional (OSN) tingkat SD, SMP dan SMA. [illegible]

Buku Geometri Analitika Bidang ini hadir guna melengkapi kebutuhan mahasiswa dalam belajar Geometri khususnya geometri bidang. Buku ini mengupas tuntas masalah pembuktian terperinci dan latihan soal-soal setiap bagian bab yang telah dijelaskan secara lengkap. Besar harapan penulis bahwa pembaca mampu memahami secara menyeluruh masalah geometri khususnya bagian analitika bidang ini. Masalah yang dibahas dalam buku ini adalah (1) sistem koordinat, (2) persamaan garis, (3) irisan kerucut, (4) lingkaran, (5) elips, (6) parabola, dan (7) hiperbola. Buku ini mengupas tuntas masalah 7 pokok bahasan di atas. Contoh soal yang mudah dipahami dan dikerjakan secara terperinci.

sunardifkipunej@yahoo.com/sunardi.fkip@unej.ac.id
erfan8math@gmail.com/erfanyudi@unej.ac.id

Digital Repository Universitas Jember

TEORI DAN SOAL-SOAL GEOMETRI ANALITIKA BIDANG

Oleh:

Prof. Dr. Sunardi, M.Pd.
Erfan Yudianto, S.Pd., M.Pd.

Scanned by CamScanner

Digital Repository Universitas Jember

TEORI DAN SOAL-SOAL GEOMETRI ANALITIKA BIDANG

Diterbitkan oleh
UPT Penerbitan UNEJ
Jl. Kalimantan 37 Jember 68121
Telp. 0331-330224, Voip. 0319, Fax. 0331-339029
E-mail: upt-penerbitan@unej.ac.id

Hak Cipta @ 2014

Perpustakaan Nasional RI – Katalog Dalam Terbitan

516
S
t

Sunardi
Teori dan Soal-soal Geometri Analitik Bidang/oleh Sunardi, dkk--Jember: Jember University Press, 2014
vii, 136 hlm. ; 29,5 cm.

ISBN: 978-602-9030-73-0

1. GEOMETRI
I. Judul

Hak Cipta dilindungi Undang-Undang. Dilarang memperbanyak tanpa ijin tertulis dari penerbit, sebagian atau seluruhnya dalam bentuk apapun, baik cetak, *photoprint*, maupun *microfilm*.

Scanned by CamScanner

Digital Repository Universitas Jember

TEORI DAN SOAL-SOAL
GEOMETRI ANALITIK BIDANG

Prof. Dr. Sunardi, M. Pd & Erfan Yudianto, S. Pd., M. Pd.
Pendidikan Matematika - FKIP - Universitas Jember

Digital Repository Universitas Jember

BUKU INI KAMI PERSEMBAHAN UNTUK KELUARGA DAN SAHABAT KAMI TERCINTA

&

TEMAN-TEMAN DOSEN PENDIDIKAN MATEMATIKA

FKIP UNIVERSITAS JEMBER

Digital Repository Universitas Jember

PRAKATA

Puji syukur penulis panjatkan kehadirat ALLAH SWT, dengan rahmat dan anugerahNya sehingga buku dengan judul **Teori dan Soal-soal GEOMETRI ANALITIKA BIDANG** ini dapat diselesaikan. Buku edisi perdana ini membahas masalah yang berkaitan dengan Geometri Analitik bidang, materi terperinci, contoh penyelesaian soal, dan latihan-latihan, sebagian kegiatan terstruktur yang harus diselesaikan oleh mahasiswa dan soal-soal sebagai latihan yang beraneka ragam. Contoh-contoh penyelesaian soal diberikan pada buku ini dimaksudkan untuk memberi gambaran yang lebih operasional dalam menyelesaikan soal-soal geometri analitika bidang.

Buku ini terdiri dari 7 bab. Bab I membahas masalah sistem koordinat kartesius, bab II membahas persamaan garis, bab III membahas masalah irisan kerucut (sebagai pengantar bab selanjutnya), bab IV membahas masalah lingkaran, bab V membahas masalah elips, bab VI membahas masalah parabola dan bab VII membahas masalah hiperbola. Setiap bab dilengkapi dengan penjelasan materi, pembuktian, rangkuman, sampai ke latihan dan umpan balik bagi mahasiswa dalam memahami materi di buku ini.

Diharapkan buku ini dapat membantu pembaca khususnya mahasiswa pendidikan matematika untuk memahami tentang masalah geometri analitika bidang. Kami menyadari kekurangan buku ini, oleh karena itu saran dan kritik untuk memperbaiki buku ini sangat kami harapkan dari semua pihak. Semoga buku ini bermanfaat bagi pembelajaran khususnya pada pembelajaran matematika.

Jember, Desember 2014

Prof. Dr. Sunardi, M.Pd.
Erfan Yudianto, S.Pd., M.Pd.
Universitas Jember

Digital Repository Universitas Jember

KATA PENGANTAR

Penyediaan bahan ajar atau materi perkuliahan yang disusun secara sistematis sesuai dengan prinsip-prinsip pembelajaran yang digunakan oleh mahasiswa dan dosen sangat diperlukan. Oleh karena itu, merupakan tuntutan untuk menyediakan bacaan-bacaan yang dapat dijadikan sumber acuan yang berkaitan dengan hal tersebut. Materi atau bahan perkuliahan tentang Geometri Analitika Bidang banyak tersedia, tetapi materi atau bahan yang tersusun sesuai dengan prinsip-prinsip pembelajaran dan memberikan kemudahan bagi mahasiswa dan dosen masih jarang. Oleh karena itu, saya mendukung kepada semua pihak yang ikut berpartisipasi dalam penyediaan bahan ajar atau perkuliahan Geometri Analitika Bidang yang disusun secara sistematis dan sesuai dengan prinsip-prinsip pembelajaran.

Buku yang berjudul “Teori dan Soal-soal Geometri Analitika Bidang” ini terdiri dari 7 bab, yaitu bab 1 membahas masalah sistem koordinat kartesius, bab 2 membahas persamaan garis, bab 3 membahas masalah irisan kerucut (sebagai pengantar bab selanjutnya), bab 4 membahas masalah lingkaran, bab 5 membahas masalah elips, bab 6 membahas masalah parabola, dan bab 7 membahas masalah hiperbola. Karena setiap bab dilengkapi dengan penjelasan materi, pembuktian, rangkuman, contoh penyelesaian soal, soal-soal untuk latihan dan umpan balik bagi mahasiswa dalam memahami materi di buku ini, maka menurut penelaahan saya, buku ini akan menghemat waktu bagi dosen yang menggunakan dalam pembelajaran. Disamping itu, buku ini juga akan mengubah peran dosen dari seorang pengajar menjadi seorang fasilitator serta dapat meningkatkan proses pembelajaran menjadi lebih efektif dan interaktif. Demikian pula bagi mahasiswa, dengan menggunakan buku ini belajar tidak harus ada dosen atau teman mahasiswa lain, bisa belajar kapan saja dan dimana saja, dapat belajar sesuai dengan kecepatannya sendiri dan dapat belajar menurut urutan yang dipilihnya sendiri.

Berdasarkan hal di atas, saya sebagai pembina matakuliah Geometri mendukung terbitnya buku ini, mengharapkan dan menyarankan agar buku ini dibaca dan digunakan oleh para dosen pembina matakuliah Geometri Analitika Bidang dan mahasiswa yang menempuh matakuliah tersebut.

Jember, 29 Desember 2014

Dr. Susanto, M.Pd

Digital Repository Universitas Jember

DAFTAR ISI

Digital Repository Universitas Jember

Digital Repository Universitas Jember

Digital Repository Universitas Jember

Digital Repository Universitas Jember

DAFTAR GAMBAR

Digital Repository Universitas Jember

Digital Repository Universitas Jember

Digital Repository Universitas Jember

Kompetensi Dasar

Memahami sistem koordinat beserta unsur-unsurnya.

Indikator

Setelah mempelajari materi ini, mahasiswa diharapkan memiliki kemampuan untuk:

a. Menentukan sistem koordinat kartesius
b. Menentukan jarak dua titik pada bidang datar
c. Menentukan sistem koordinat kutub
d. Menentukan hubungan koordinat kartesius dan koordinat kutub

Digital Repository Universitas Jember

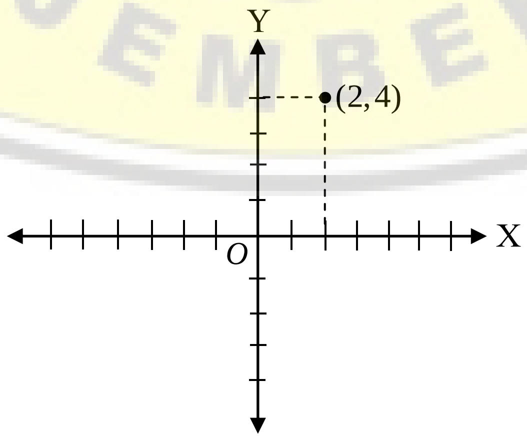
BAB 1
SISTEM KOORDINAT

A. KOORDINAT KARTESIAN

Pada saat duduk dibangku sekolah lanjutan pertama (SLTP) kita telah mengenal sistem koordinat kartesian yang terdiri dari dua garis yang saling tegak lurus. Pada umumnya, satu garis digambar mendatar (*horizontal*) dan yang lain digambar tegak (*vertikal*). Perpotongan antara dua garis tersebut biasa disebut titik potong dan diberi nama O (*Origin*) atau titik asal. Garis horizontal biasa disebut sumbu X dan garis vertikal biasa disebut sumbu Y. Seperti diungkapkan oleh Sidebotham (2002),

Rene Descartes (1596-1650) invented the gird system made up of two axes drawn on a grid of squares, and it bears his name: "Cartesian". He called the East axis the x*- axis and the North axis and included negative numbers on these axes. The two numbers in a bracket that identify a point, like Quick Sand* $(2,4)$*, are called ordered pairs, as well as the coordinates of the point. The first number in the bracket, 2 is called the* x *coordinate, and the second number in the bracket, 4 is called the* y *coordinate.*

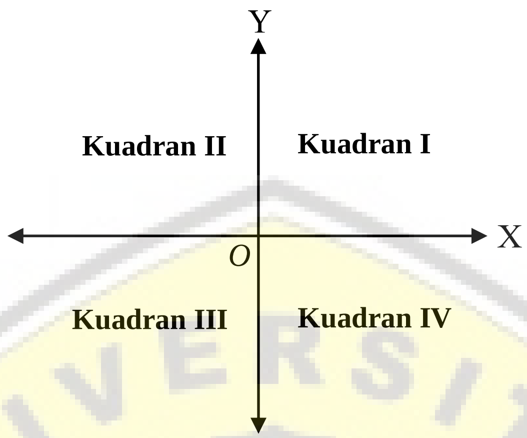
Kalimat di atas dapat dilihat pada Gambar 1.



Gambar 1. Grafik Koordinat Kartesius

Digital Repository Universitas Jember

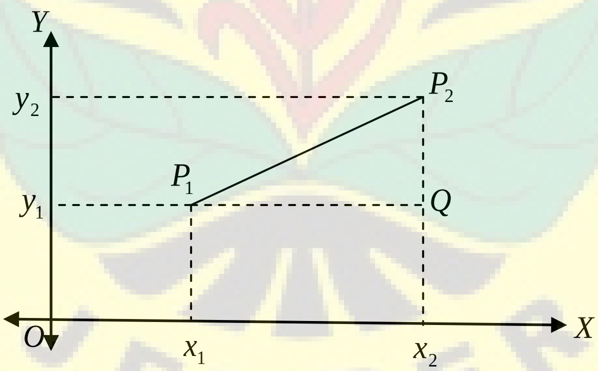
Sumbu-sumbu koordinat yaitu sumbu X dan sumbu Y, membagi bidang datar menjadi 4 daerah yang masing-masing disebut kuadran, yaitu kuadran I, kuadran II, kuadran III dan kuadran IV seperti nampak pada Gambar 2.



Gambar 2. Empat Daerah pada Koordinat Kartesius

B. JARAK DUA TITIK PADA BIDANG DATAR

Menghitung jarak dua titik pada R^2



Gambar 3. Grafik Jarak Dua Titik

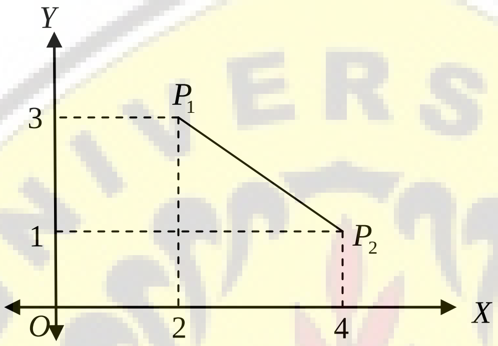
Berdasarkan Gambar 3, $P_1(x_1, y_1)$ dan $P_2(x_2, y_2)$ merupakan dua titik pada bidang. Melalui titik P_1 ditarik garis sejajar sumbu X dan melalui titik P_2 ditarik garis sejajar sumbu Y. Kedua garis tersebut berpotongan di titik Q, sedemikian hingga diperoleh segitiga siku-siku P_1QP_2. Kita dapat menentukan panjang ruas garis $|P_1Q| = |x_2 - x_1|$ dan panjang ruas garis $|P_2Q| = |y_2 - y_1|$. Dalam kasus di atas yang

Digital Repository Universitas Jember

menjadi permasalahan selanjutnya adalah menentukan panjang *hypotenusanya*. Dengan memanfaatkan teorema Pythagoras diperoleh.

$$|P_1P_2|^2 = |P_1Q|^2 + |P_2Q|^2$$
$$|P_1P_2|^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2$$
$$|P_1P_2| = \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2}$$

Contoh 1



Gambar 4. Grafik Contoh 1

Tentukan jarak antara P_1 dan P_2 dengan $P_1(2,3)$ dan $P_2(4,1)$!

Penyelesaian

$P_1(2,3)$ dan $P_2(4,1)$

$$|P_1P_2| = \sqrt{|4-2|^2 + |1-3|^2}$$
$$|P_1P_2| = \sqrt{2^2 + 2^2}$$
$$|P_1P_2| = 2\sqrt{2}$$

Jadi jarak antara P_1 dan P_2 adalah $2\sqrt{2}$.

Contoh 2

Misalkan $A(3,4)$ dan $B(2,-1)$, tentukan jarak A ke B!

Digital Repository Universitas Jember

Penyelesaian

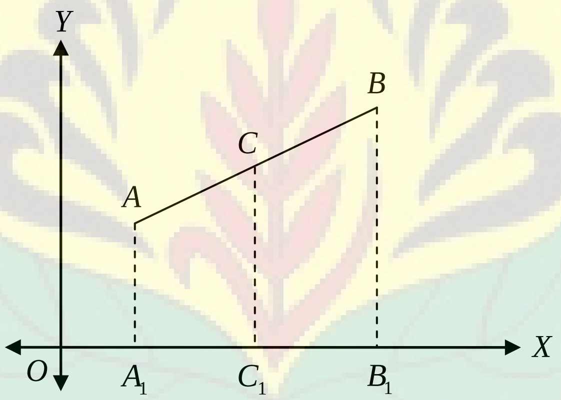
$|AB| = \sqrt{|2-3|^2 + |-1-4|^2}$

$|AB| = \sqrt{1^2 + 5^2}$

$|AB| = \sqrt{26}$

Jadi jarak A ke B adalah $\sqrt{26}$

Misalkan diketahui dua titik $A(x_1, y_1)$ dan $B(x_2, y_2)$. Titik C pada pertengahan ruas garis penghubung A dan B. Akan kita tentukan koordinat-koordinat titik C. Perhatikan Gambar 4, titik A_1, C_1 dan B_1 berturut-turut adalah proyeksi titik-titik A, C dan B. Misalkan koordinat titik C adalah (x_c, y_c)



Gambar 5. Grafik Titik di Pertengahan Ruas Garis

$|OA_1| =$ absis titik A, yaitu x_a

$|OB_1| =$ absis titik B, yaitu x_b

$|OC_1| =$ absis titik C, yaitu x_c

Karena titik C terletak pada pertengahan AB dan garis AA_1 sejajar garis CC_1, maka titik C_1 terletak pada pertengahan ruas garis A_1B_1 juga, yaitu $|A_1C_1| = |C_1B_1|$ sehingga

Digital Repository Universitas Jember

$$|OA_1| + |OB_1| = |OA_1| + |OC_1| + |C_1B_1|$$
$$|OA_1| + |OB_1| = |OA_1| + |C_1B_1| + |OC_1|$$
$$|OA_1| + |OB_1| = |OA_1| + |A_1C_1| + |OC_1|$$
$$|OA_1| + |OB_1| = |OC_1| + |OC_1|$$
$$|OA_1| + |OB_1| = 2|OC_1|$$
$$|OA_1| + |OB_1| = 2x_c$$
$$x_c = \frac{|OA_1| + |OB_1|}{2} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \quad \blacksquare$$

Dengan cara yang sama maka diperoleh

$y_c = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$ **(Tunjukkan sebagai latihan)**

Jadi absis dan ordinat titik tengah suatu ruas garis yang titik ujungnya $A(x_1, y_1)$ dan $B(x_2, y_2)$ adalah $x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ dan $y = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$.

Contoh 3

Diketahui sebuah ruas garis AB dengan titik-titik ujung $A(8,3)$ dan $B(2,7)$ terdapat titik C ditengah-tengah ruas garis AB. Tentukan koordinat titik C.

Penyelesaian

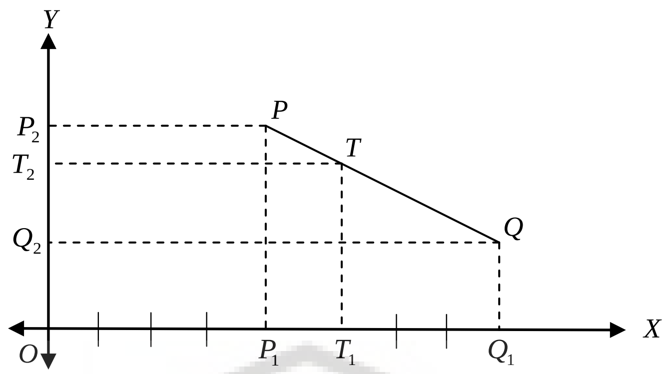
$$x_c = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) = \frac{1}{2}(8+2) = 5$$
$$y_c = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) = \frac{1}{2}(3+7) = 5$$

Sehingga koordinat titik C adalah $(5,5)$

Contoh 4

Diketahui dua titik $P(4,7)$ dan $Q(8,1)$. Titik T pada ruas garis PQ sedemikian hingga $|PT| : |TQ| = 1:3$. Tentukan koordinat titik T.

Digital Repository Universitas Jember



Gambar 6. Grafik Contoh soal 4

Misalkan $T(x_T, y_T)$ dan kita perhatikan gambar di atas. TT_1 dan QQ_1 masing-masing sejajar sumbu Y dan dikarenakan perbandingan $|PT|:|TQ| = 1:3$ maka $|P_1T_1|:|T_1Q_1| = 1:3$ sehingga $|T_1Q_1| = 3|P_1T_1|$

Perhatikan

$|T_1Q_1| = |OQ_1| - |OT_1|$

$|T_1Q_1| = \quad 8 \quad - \quad x_T$ ....(1)

$|P_1T_1| = |OT_1| - |OP_1|$

$|T_1Q_1| = x_T \quad - \quad 4$ ....(2)

Dari persamaan $|T_1Q_1| = 3|P_1T_1|$ dan persamaan (1) dan (2) diperoleh

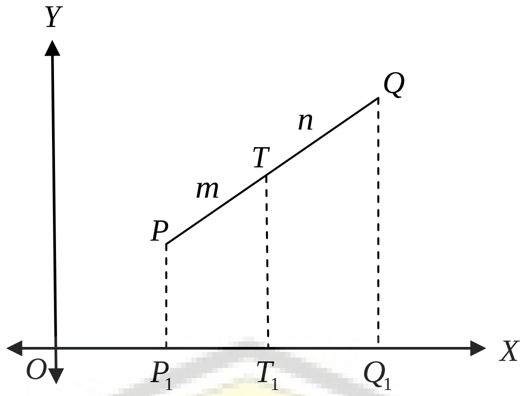
$$|T_1Q_1| = 3|P_1T_1|$$
$$(8 - x_T) = 3(x_T - 4)$$
$$x_T = 5$$

Dengan cara yang sama diperoleh $y_T = 5\tfrac{1}{2}$ (**Tunjukkan sebagai latihan**)

Jadi diperoleh koordinat $T(5, 5\tfrac{1}{2})$

Pada **Contoh 4** di atas akan kita perumum sebagai berikut

Digital Repository Universitas Jember



Gambar 7. Bentuk Umum Grafik Contoh 4

$|PT|:|TQ| = m:n$ maka

$$(x_T - x_1):(x_2 - x_T) = m:n$$
$$n(x_T - x_1) = m(x_2 - x_T)$$
$$x_T(m+n) = mx_2 + nx_1$$
$$x_T = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n}$$

Dengan cara yang sama diperoleh

$y_T = \dfrac{my_2 + ny_1}{m+n}$ (**Tunjukkan sebagai latihan**)

Dari hasil di atas dapat disimpulkan, jika diketahui titik-titik $P(x_1, y_1)$ dan $Q(x_2, y_2)$, serta titik T pada ruas garis PQ sedemikian hingga $|PT|:|TQ| = m:n$, maka diperoleh absis dan ordinat titik T sebagai berikut:

$$x_T = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n} \text{ dan } y_T = \frac{my_2 + ny_1}{m+n}$$

Contoh 5

Jika $P(2,6), Q(7,2)$ dan titik T pada ruas garis PQ sedemikian hingga $|PT|:|TQ| = 2:3$, maka tentukan absis dan ordinat titik T.

Penyelesaian

Absis $x_T = \dfrac{2(7)+3(2)}{2+3} = \dfrac{14+6}{5} = 4$

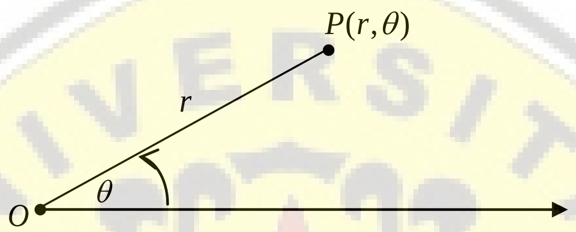
Ordinat $y_T = \dfrac{2(2)+3(6)}{2+3} = \dfrac{4+18}{5} = \dfrac{22}{5}$

Digital Repository Universitas Jember

Jadi koordinat titik $T\left(4, \frac{22}{5}\right)$

C. KOORDINAT KUTUB

Sebarang titik P pada bidang dinyatakan dengan pasangan bilangan real (r, θ), dengan r merupakan jarak titik P ke titik O (**kutub**) sedangkan θ yaitu sudut antara sinar yang memancar dari titik O melewati titik P dengan sumbu-X positif (**sumbu kutub**). Perhatikan Gambar 8.



Gambar 8. Koordinat Kutub

Berbeda dengan sistem koordinat Kartesius (Rene Descartes: 1596-1650) dalam koordinat kutub letak suatu titik dapat dinyatakan dalam tak hingga banyak koordinat. Sebelumnya kita akan membandingkan antara sistem koordinat kartesius dengan sistem koordinat kutub.

Contoh 6

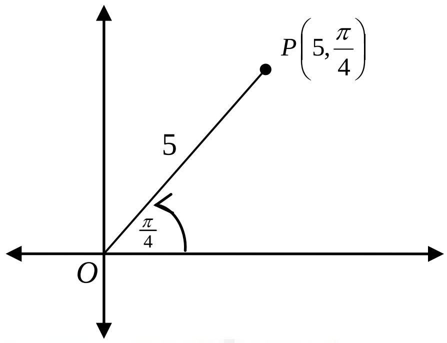
Tentukan letak titik $P\left(5, \frac{\pi}{4}\right)$

Penyelesaian

Cara 1

Kita sketsa sinar yang memancar dari titik asal O dengan sudut sebesar $\frac{\pi}{4}$ radian terhadap sumbu mendatar arah positif.

Digital Repository Universitas Jember

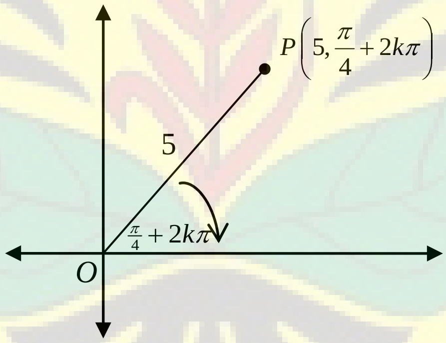


Gambar 9. Sketsa Grafik Contoh 6 Cara 1

Titik *P* terletak pada sinar dengan jarak 5 satuan dari titik asal *O*.

Cara 2

Titik *P* dapat juga dinyatakan dalam koordinat $\left(5, \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi\right)$, dengan *k* anggota bilangan bulat. Perhatikan Gambar 10.

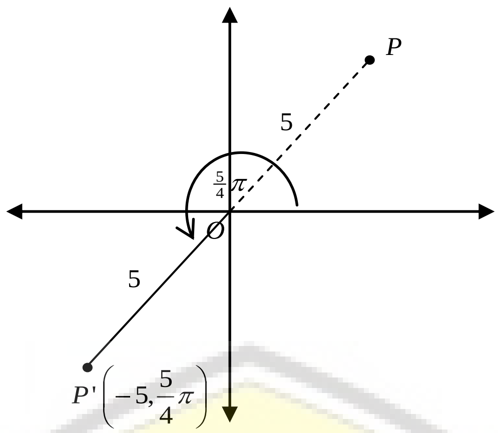


Gambar 10. Sketsa Grafik Contoh 6 Cara 2

Cara 3

Kita manfaatkan sudut berelasi sehingga kita dapatkan koordinat $\left(-5, \dfrac{5}{4}\pi\right)$ dimana dapat juga menggambarkan titik *P*. Jarak berarah negatif, hal ini dikarenakan titik *P* terletak pada bayangan sinar OP (OP').

Digital Repository Universitas Jember

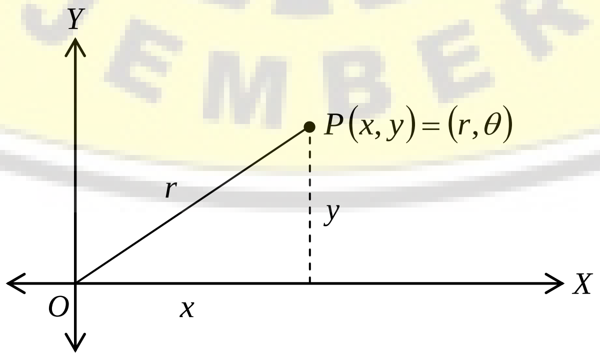


Gambar 11. Sketsa Grafik Contoh 6 Cara 3

Berdasarkan penjelasan contoh di atas kita dapat simpulkan bahwa, jika (r,θ) menyatakan koordinat kutub suatu titik maka koordinat titik tersebut dapat pula dinyatakan sebagai berikut: $(r,\theta+2k\pi)$ atau $(-r,\theta+(2k+1)\pi)$ dengan k bilangan bulat. Kutub mempunyai koordinat $(0,\theta)$ dengan θ merupakan sebarang bilangan.

D. HUBUNGAN SISTEM KOORDINAT KARTESIUS & SISTEM KOORDINAT KUTUB

Suatu titik P berkoordinat (x,y) dalam sistem koordinat Kartesius dan (r,θ) dalam sistem koordinat kutub. Apabila kutub dan titik asal diimpitkan, demikian pula sumbu kutub dan sumbu-X positif juga diimpitkan, maka kedudukan titik dapat digambarkan sebagai berikut.



Gambar 12. Hubungan Koordinat Kartesius & Koordinat Kutub

Digital Repository Universitas Jember

Berdasarkan rumus segitiga diperoleh hubungan sebagai berikut.

$$x = r \cos \theta \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (1)$$

$$y = r \sin \theta \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (2)$$

atau

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; (3)$$

$$\theta = \sin^{-1}\left(\frac{y}{r}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{x}{r}\right) \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; (4)$$

E. BAHAN DISKUSI

Sumber Gambar:
http://id.wikipedia.org/wiki/Kapal

Nahkoda Perahu Dewa Ruci sedang melakukan perjalanan dari Jakarta menuju Amerika. Misi mereka untuk kemanusiaan dan menjaga linkungan perairan. Dewa Ruci dari posisi awal menuju arah utara sejauh 400 mil membentuk sudut $30°$ kemudian berbelok sebesar $45°$ ke arah kanan sejauh 150 mil. Tentukan jarak yang ditempuh Dewa Ruci itu.

F. RANGKUMAN

1. Koordinat kartesius terdiri dari 4 daerah yang masing-masing disebut kuadran I, kuadran II, kuadran III dan kuadran IV.
2. Sumbu X disebut absis, sumbu Y disebut ordinat, dan titik asal disebut *Origin*.
3. Jarak antara titik P_1 dan titik P_2 (jarak dua titik) adalah

$$|P_1P_2| = \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2}$$

4. Dalam koordinat kutub, letak suatu titik dapat dinyatakan dalam tak hingga banyak koordinat.
5. Hubungan sistem koordinat kartesius dan sistem koordinat kutub adalah

$$x = r\cos\theta \text{ dan } y = r\sin\theta$$

Digital Repository Universitas Jember

G. TES FORMATIF

Pilihlah salah satu jawaban yang Anda anggap paling tepat!

1. Diberikan titik $A(-2,-3)$ dan titik $B(3,0)$. Jarak antara titik A dan titik B adalah ...

   A. 32

   B. $\sqrt{32}$

   C. 34

   D. $\sqrt{34}$

   E. $\sqrt{14}$

2. Diberikan ruas garis PQ dengan titik ujungnya $P(0,5)$ dan $Q(1,-2)$ terdapat titik R di antara PQ dan membagi ruas garis sama besar. Koordinat titik R yang dimaksud adalah ...

   A. $R\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$

   B. $R\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$

   C. $R\left(-\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\right)$

   D. $R\left(\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\right)$

   E. $R\left(-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)$

3. Diberikan persamaan kutub $r = 2\sin\alpha + \cos\alpha$, bentuk kartesius dari persamaan koordinat kutub di atas adalah ....

   A. $x^2 + y^2 + x - 2y = 0$

   B. $x^2 + y^2 - x - 2y = 0$

   C. $x^2 + y^2 - x + 2y = 0$

   D. $x^2 + y^2 + x + 2y = 0$

   E. $x^2 - y^2 - x - 2y = 0$

Digital Repository Universitas Jember

4. Diberikan persamaan kutub $r^2 = \sin 2\alpha$, bentuk kartesius dari persamaan koordinat kutub di atas adalah ....
   A. $x^4 + y^4 + 2xy - 2x^3 y = 0$
   B. $x^4 + y^4 + 2x^2 y^2 - 2x = 0$
   C. $x^4 + y^4 + 2x^2 y^2 + 2xy = 0$
   D. $x^4 + y^4 - 2x^2 y^2 - 2xy = 0$
   E. $x^4 + y^4 + 2x^2 y^2 - 2xy = 0$
5. Diberikan persamaan kartesius $x^2 + y^2 + ax = a\sqrt{x^2 + y^2}$, bentuk koordinat kutub dari persamaan di atas yaitu ...
   A. $r = 0$ atau $r = a - a\cos\alpha$
   B. $r = 0$ atau $r = 1 - a\cos\alpha$
   C. $r = 1$ atau $r = a - a\cos\alpha$
   D. $r = 1$ atau $r = a - \cos\alpha$
   E. $r = 1$ atau $r = \cos\alpha$

H. UMPAN BALIK

Setelah mengerjakan tes formatif, bandingkanlah jawaban Anda dengan kunci jawaban yang terdapat pada akhir bab ini. Jika Anda dapat menjawab dengan benar minimal 80%, maka Anda dinyatakan berhasil dengan baik dan silahkan berlanjut mempelajari materi berikutnya. Sebaliknya jika jawaban yang benar kurang dari 80%, maka silahkan Anda pelajari kembali uraian yang terdapat dalam bab sebelumnya, terutama bagian-bagian yang belum Anda kuasai dengan baik.

I. KUNCI JAWABAN TES FORMATIF

1. D
2. A
3. B
4. E
5. A

Digital Repository Universitas Jember

J. LATIHAN

1. Gambarlah setiap koordinat berikut !
   a. $(2,5)$
   b. $(-2,5)$
   c. $(-3,-4)$
   d. $(3,-4)$
   e. $(0,-2)$
   f. $(-3,0)$
   g. $(5,-2)$
   h. $(-2,-3)$
2. Gambarlah titik-titik $A(0,1), B(2,5),$ dan $C(-1,4)$. Kemudian hubungkan ketiga titik ABC . Tentukan bangun yang terbentuk!
3. Tunjukkan bahwa titik-titik $(3,8),(-11,3)$ dan $(-8,-2)$ adalah titik-titik sudut segitiga sama kaki.
4. Tunjukkan bahwa titik-titik $(7,5),(2,3)$ dan $(6,-7)$ adalah titik-titik sudut segitiga siku-siku.
5. Tunjukkan bahwa titik-titik $(0,4),(3,-2)$ dan $(-2,8)$ adalah titik-titik yang segaris.
6. Tentukan suatu titik yang jaraknya 10 satuan dari titik $(-3,6)$ yang absisnya 3.
7. Tentukan titik sudut suatu segitiga jika titik-titik tengah sisinya adalah $(-2,1),(5,2)$ dan $(2,-3)$.
8. Tentukan titik yang berjarak sama ke titik $(1,7),(8,6)$ dan $(7,1)$.
9. Diketahui koordinat dua titik sudut suatu segitiga samasisi adalah $(5,-5)$ dan $(-1,-3)$. Tentukan titik sudut ketiga.
10. Tentukan koordinat titik $P(x,y)$ pada garis AB sehingga $|AP| = 2|AB|$, dengan $A(2,-1)$ dan $B(-4,3)$.
11. Tunjukkan bahwa titik-titik berikut $(-1,-2),(0,1),(-3,2)$ dan $(-4,-1)$ adalah titik-titik sudut jajargenjang dan tentukan luasnya.
12. Tentukan sudut dalam segitiga yang titik-titik sudutnya $(3,2),(5,-4)$ dan $(1,-2)$
13. Diketahui sebuah segitiga dengan titik-titik sudut $P(-3,2), Q(0,-1),$ dan $R(5,4)$. Buktikan bahwa segitiga tersebut merupakan segitiga siku-siku dan gambarlah!
14. Gambarlah titik-titik berikut kemudian sebutkan bangun yang terbentuk, dimana $\forall a,b,c,d,e \in R$
    a. $(0,0),(b,0),(a,0)$
    b. $(0,0),(a,0),(a,b),(0,b)$

Digital Repository Universitas Jember

c. $(0,0),(a,0),(a,a),(0,a)$

d. $(a,0),(0,b),(-a,0),(0,-b)$

e. $(0,0),(a,0),(a+b,c),(b,c)$

f. $(0,0),(a,0),(b,c)$

g. $(0,0),(a,0),(b,c),(d,e)$

15. Diketahui sebuah segitiga yang titik-titik sudutnya adalah $A(3,0), B(-2,4),$ dan $C(-5,-3)$. Tentukanlah koordinat-koordinat titik beratnya.
16. Tentukan jarak antara titik $A(a,\alpha)$ dan $B(b,\beta)$.
17. Tentukan jarak antara titik $(6,15°)$ dan $(8,75°)$.
18. Tentukan persamaan kutub suatu lingkaran yang pusatnya dititik $M(r,\alpha)$ dan jari-jari p.
19. Tentukan luas daerah segitiga yang titik sudutnya adalah $O(0,0), A(a,\alpha)$ dan $B(b,\beta)$
20. Tentukan luas daerah segitiga yang titik sudutnya adalah $O(0,0), A(6,20°)$ dan $B(9,50°)$
21. Tentukan persamaan kutub dari ellips $9x^2+4y^2=36$
22. Nyatakan persamaan $r^2-2r(\cos\theta-\sin\theta)-7$ ke dalam bentuk koordinat kartesius.
23. Tentukan persamaan tempat kedudukan titik-titik yang bergerak sedemikian hingga hasil kali jaraknya dari titik $(-r,0°)$ dan $(r,0°)$ adalah r^2.
24. Buat sketsa gambar dari persamaan $r=10\cos\theta$
25. Buat sketsa gambar dari persamaan $r=\dfrac{2}{1-\cos\theta}$
26. Buat sketsa gambar dari persamaan $r=5(1+\cos\theta)$
27. Buat sketsa gambar dari persamaan $r=9\cos 2\theta$

Digital Repository Universitas Jember

Kompetensi Dasar

Memahami persamaan garis

Indikator

Setelah mempelajari materi ini, mahasiswa diharapkan memiliki kemampuan untuk:

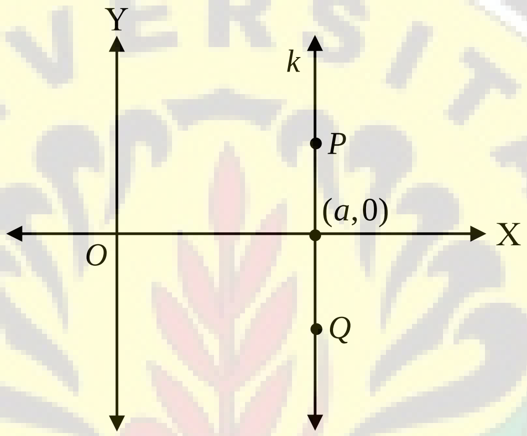
a. Menentukan persamaan garis
b. Menentukan gradien dan persamaan garis
c. Menentukan persamaan garis yang sejajar
d. Menentukan persamaan garis yang tegak lurus
e. Menentukan persamaan garis yang berimpit

Digital Repository Universitas Jember

BAB 2
PERSAMAAN GARIS

A. PEMAHAMAN MASALAH GARIS

Awal pengenalan materi garis lurus terdapat pada jenjang Pendidikan Dasar kelas VIII. Dalam banyak hal garis lurus adalah yang paling sederhana dari semua kurva. Kita akan memulai dengan memperhatikan Gambar 13.

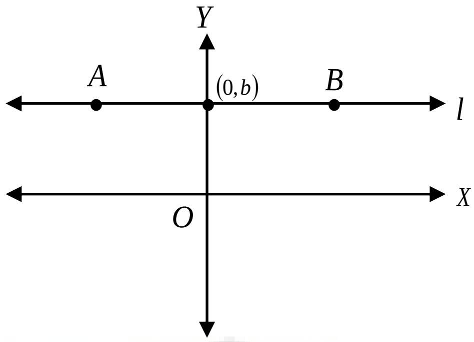


Gambar 13. Grafik Persamaan Garis Lurus k

Pada gambar di atas, terdapat garis PQ atau k sejajar sumbu Y, sehingga absis titik P adalah a, dan absis titik Q adalah a juga. Bahkan semua titik pada garis k selalu memiliki absis a. Sehingga dapat disimpulkan bahwa garis k merupakan himpunan semua titik dengan absis a dan dapat ditulis $\{(x, y) | x = a\}$, dapat juga dikatakan bahwa $x = a$ merupakan persamaan garis k yaitu garis yang sejajar sumbu Y dan melalui titik $(a, 0)$.

Dari penjelasan di atas dapat dipahami bahwa persamaan sumbu Y adalah $x = 0$. Perhatikan Gambar 14.

Digital Repository Universitas Jember

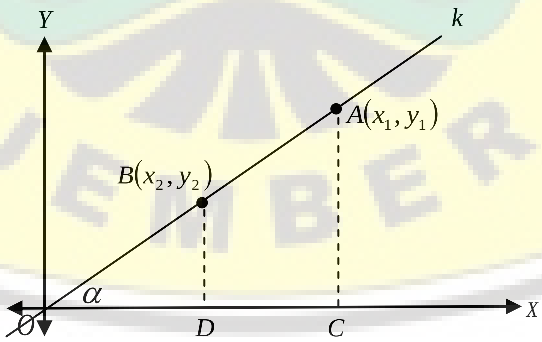


Gambar 14. Grafik Persamaan Garis Lurus l

Titik A dan B terletak pada garis l, maka ordinat-ordinat titik-titik A dan B adalah b. Semua titik yang terletak pada garis l selalu mempunyai ordinat b. Sehingga kita dapat menyimpulkan bahwa garis l merupakan himpunan semua titik yang memiliki ordinat b atau biasa dittulis dengan $\{(x,y) \mid y=b\}$, dapat juga dikatakan bahwa $y=b$ merupakan persamaan garis l yaitu garis yang sejajar sumbu X dan melalui titik $(0,b)$.

B. GRADIEN DAN PERSAMAAN GARIS LURUS

Selanjutnya diberikan garis k yang melalui titik asal $O(0,0)$ dan titik $A(x_1, y_1)$. Kita akan menentukan persamaan garis lurusnya. Hubungkan titik asal $O(0,0)$ dan $A(x_1, y_1)$ dengan cara menarik garis lurus antar dua titik tersebut.



Gambar 15. Persamaan Garis yang melalui titik asal

Ambil sebarang titik $B(x_2, y_2)$ dan $A(x_1, y_1)$ pada garis k, titik D adalah proyeksi titik B pada sumbu dan titik C adalah proyeksi titik A pada sumbu X, maka koordinat titik $D(x_2, 0)$. Kita cermati kembali Gambar 10 di atas, apa yang dapat kita

Digital Repository Universitas Jember

peroleh dari gambar tersebut? Pandang ODB dan OCA, kedua bangun tersebut merupakan segitiga yang sebangun. Masih ingatkah Anda syarat-syarat kesebangunan? Selanjutnya dapat kita beri nama ΔODB dan ΔOCA sebangun $(\Delta ODB \sim \Delta OCA)$. Sehingga berlaku:

$$|BD| : |OD| = |AC| : |OC|$$
$$y_2 : x_2 = y_1 : x_1$$
$$\frac{y_2}{x_2} = \frac{y_1}{x_1}$$

Jika pada Gambar 15, α merupakan sudut yang dibentuk oleh garis k dengan sumbu X arah positif maka diperoleh persamaan berikut.

$$\frac{y_2}{x_2} = \frac{y_1}{x_1} = \tan \alpha$$

Dapat disimpulkan apabila titik (x, y) terletak pada garis k, maka diperoleh

$$\tan \alpha = \frac{y}{x}$$

Sehingga, jika kita tinjau kembali Gambar 15 di atas, titik $A(x_1, y_1)$ juga terletak pada garis k, maka diperoleh

$$\tan \alpha = \frac{y_1}{x_1}$$

Hal ini berlaku pada setiap titik yang terletak pada garis k. Selanjutnya kita perumum persamaan di atas menjadi

$$\frac{y}{x} = \frac{y_1}{x_1}$$
$$y = \frac{y_1}{x_1} x$$

Jadi persamaan garis lurus k yang melalui titik asal O dan $A(x, y)$ adalah $y = \frac{y_1}{x_1} x$

Dari persamaan $y = \frac{y_1}{x_1} x$ kita ambil permisalan bahwa $m = \frac{y_1}{x_1}$ maka diperoleh $y = mx$ sedangkan $\tan \alpha = \frac{y_1}{x_1}$ dan $\tan \alpha$ disebut kemiringan/tanjakan/gradien/*slope*. Kita sepakati istilah **gradien** kita gunakan dalam buku ini.

Digital Repository Universitas Jember

Contoh 7

Tentukan persamaan garis lurus yang melalui $(0,0)$ dan $(3,7)$

Penyelesaian

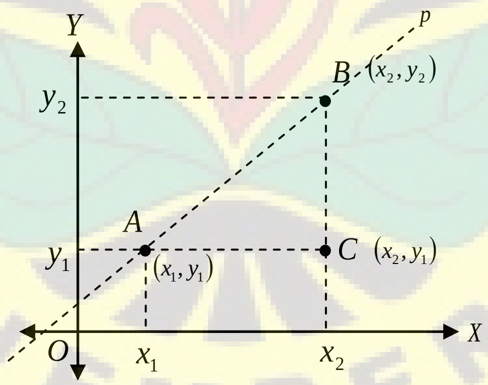
$$y = \frac{y_1}{x_1} x$$

$$y = \frac{7}{3} x$$

Sehingga persamaan garis lurus yang melalui $(0,0)$ dan $(3,7)$ adalah $y = \frac{7}{3} x$

Setelah mempelajari materi gradien di atas coba kita telaah kembali seandainya garis yang dibentuk oleh dua buah titik tidak melalui titik asal $O(0,0)$.

Misalkan diberikan titik $A(x_1, y_1)$ dan $B(x_2, y_2)$ pada koordinat kartesius, seperti pada Gambar 16.



Gambar 16. Persamaan Garis Lurus yang Melalui Dua Buah Titik

Garis $y = y_1$ dan $y = y_2$ sejajar dengan sumbu X dan garis $x = x_1$ dan garis $x = x_2$ sejajar sumbu Y. Perhatikan ΔABC pada Gambar 16, panjang sisi $AC = |x_2 - x_1|$ dan panjang sisi $BC = |y_2 - y_1|$ dengan rasio $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ dari segmen garis CB dan AC. Hal ini didefinisikan sebagai gradien segmen garis AB. Jika diberikan $x_2 = x_1$ maka rasio

Digital Repository Universitas Jember

$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ tak terdefinisi. Kenapa? (***Simpulkan sebagai latihan***) sedangkan jika diberikan $x_2 \neq x_1$ maka rasio $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ terdefinisi di setiap titik A dan B pada garis tersebut.

Perhatikan kembali Gambar 16, pada ΔABC dan $\angle CAB = \alpha$. Karena AC sejajar dengan sumbu X maka

$$\tan \alpha = \frac{|BC|}{|AC|} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \text{ .... } (*).$$

Selanjutnya, ambil sebarang titik $D(x, y)$ pada garis lurus p, maka gradien garis lurus p sama dengan gradien garis lurus AB, sehingga diperoleh

$$\tan \alpha = \frac{y - y_1}{x - x_1} \text{ .... } (**)$$

Dari persamaan $(*)$ dan persamaan $(**)$ diperoleh

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Karena $D(x, y)$ adalah sebarang titik pada garis lurus p, maka dapat diperoleh persamaan umum

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Contoh 8

Tentukan gradien dan persamaan garis lurus yang melalui titik-titik $A(2,5)$ dan $B(6,3)$

Penyelesaian

Gradien

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-5}{6-2} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

Persamaan garis lurus

Digital Repository Universitas Jember

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

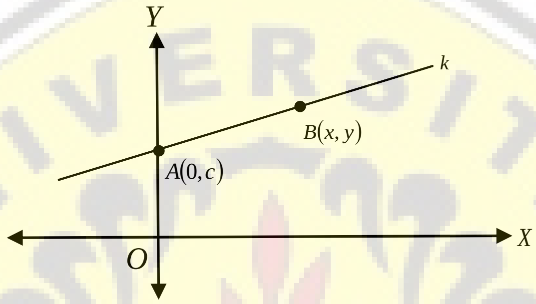
$$\frac{y-5}{3-5}=\frac{x-2}{6-2}$$

$$4(y-5)=-2(x-2)$$

$$4y-20=-2x+4$$

$$2x+4y-24=0$$

Perhatikan Gambar 17.



Gambar 17. Ilustrasi grafik untuk memperoleh rumus umum persamaan garis lurus melalui dua titik

Pada Gambar 17 diketahui bahwa garis k melalui titik $A(0,c)$ dengan gradien m. Sehingga persamaan garis k dapat kita tentukan dengan mengambil sebarang titik $B(x,y)$ maka gradien garis AB adalah

$$m=\frac{y-c}{x}$$

Secara aljabar dapat diperoleh

$$y=mx+c$$

Jadi $y=mx+c$ merupakan persamaan garis lurus dengan gradien m dan melalui titik $A(0,c)$

Digital Repository Universitas Jember

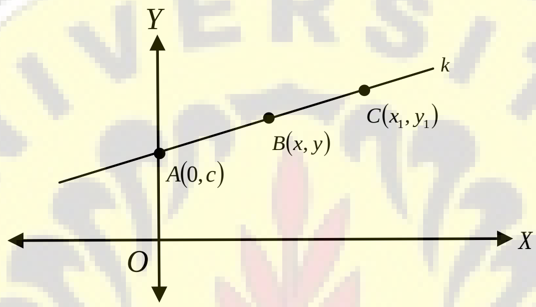
Contoh 9

Tentukan persamaan garis lurus yang memiliki gradien 4 dan melalui titik $(0,2)$.

Penyelesaian

Persamaan garis lurus dengan gradien 4 dan melalui titik $(0,2)$ adalah $y = 4x + 2$ (**sketsalah grafik sebagai latihan**)

Selanjutnya perhatikan Gambar 18.



Gambar 18. Ilustrasi grafik untuk memperoleh rumus umum persamaan garis lurus melalui tiga titik

Gambar 18 merupakan lanjutan dari Gambar 17 dengan memberikan titik $C(x_1, y_1)$ dan gradien m dan mengabaikan titik $A(0,c)$ untuk masalah ini diperoleh gradien ruas garis BC adalah

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

Secara aljabar dapat kita ubah menjadi

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Karena $B(x, y)$ adalah sebarang titik pada garis lurus k, maka persamaan garis lurus yang melalui titik $C(x_1, y_1)$ dengan gradien m adalah $y - y_1 = m(x - x_1)$.

Digital Repository Universitas Jember

Catatan :

Dapat juga kita mengatakan bahwa garis k melalui tiga titik. Silahkan pembaca membuktikan bahwa persamaan garis melalui titik-titik AB, AC, dan BC. Apa yang dapat Anda simpulkan?

Contoh 10

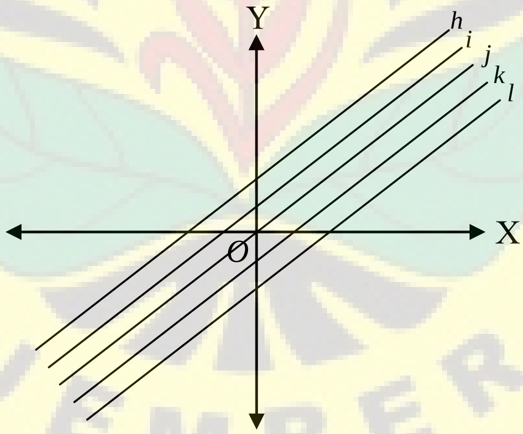
Tentukan persamaan garis lurus dengan gradien $\frac{1}{3}$ dan melalui titik $(2,5)$.

Penyelesaian

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 5 = \frac{1}{3}(x - 2)$$
$$x - 3y + 13 = 0$$

Gambar berikut memberikan gambaran masalah tiga kemungkinan yang terjadi terhadap garis lurus antara lain:

1. **Sejajar**



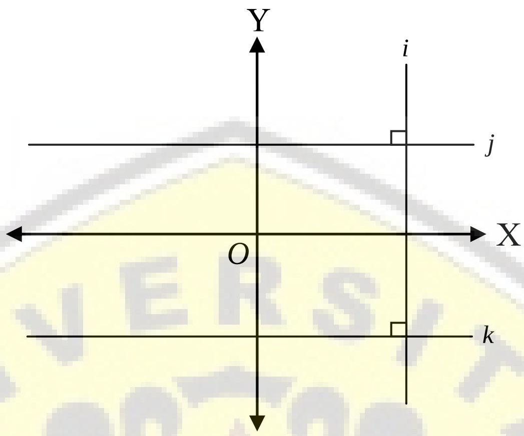
Gambar 19. Garis Sejajar

Sebelumnya kita telah mempelajari masalah gradien dan persamaan garis lurus, sekarang perhatikan Gambar 19. Gradien garis $h = 1$, gradien garis $i = 1$, gradien garis $j = 1$, gradien garis $k = 1$, gradien garis $l = 1$. Apa yang terjadi terhadap persamaan garisnya? (**buktikan sebagai latihan**). Sehingga dapat disimpulkan, suatu garis dikatakan sejajar *jika dan hanya jika* garis tersebut

Digital Repository Universitas Jember

memiliki gradien yang sama. Secara simbolis dapat ditulis $h // i // j // k // l$ ***jika dan hanya jika*** $m_h = m_i = m_j = m_k = m_l$

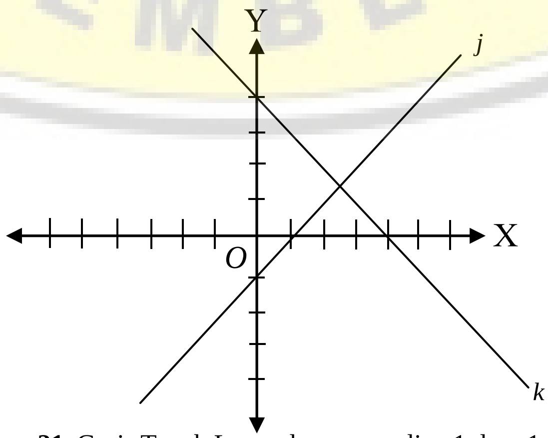
2. Tegak Lurus



Gambar 20. Garis Tegak Lurus

Pada Gambar 20 di atas, garis i berpotongan tegak lurus dengan garis j dan k. Sedangkan garis j sejajar dengan garis k, atau dengan kata lain bisa dikatakan bahwa garis i sejajar dengan sumbu Y dan berpotongan tegak lurus dengan sumbu X, sedangkan garis j dan k sejajar dengan sumbu X dan berpotongan tegak lurus dengan sumbu Y. Kita tentukan gradien garis $i = 0$ sedangkan garis j dan k menhasilkan pembagi nol, sehingga dapat disimpulkan bahwa garis j dan k tidak memiliki gradient. (**buktikan sebagai latihan**). Oleh karena itu kita membutuhkan ilustrasi yang lain dari masalah di atas.

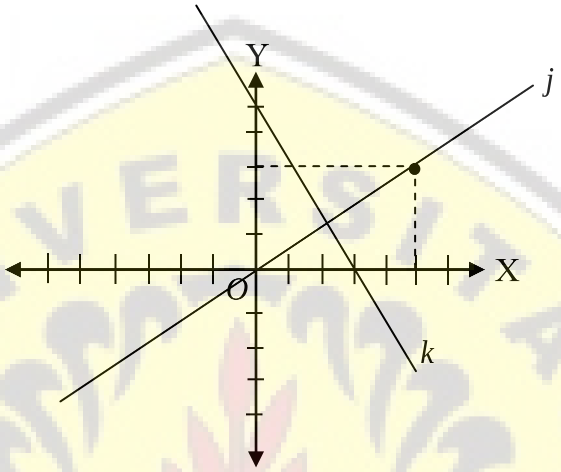
Perhatikan Gambar 21.



Gambar 21. Garis Tegak Lurus dengan gradien 1 dan -1

Digital Repository Universitas Jember

Gambar 21 di atas merupakan ilustrasi untuk menggambarkan masalah garis yang saling berpotongan tegak lurus. Garis j berpotongan tegak lurus dengan garis k. Gradien garis $j = 1$ dan gradien garis $k = -1$. Dapat dikatakan bahwa $m_j = -m_k$ (kesimpulan awal). Untuk meyakinkan kebenaran pernyataan di atas kita coba buat garis yang berpotongan tegak lurus j dan k tersebut seperti Gambar 22.



Gambar 22. Garis Tegak Lurus dengan Gradien berbeda

Garis j melalui titik $(0,0)$ dan $(5,3)$ sehingga gradien garis $j = \frac{3}{5}$ dan garis k melalui titik $(3,0)$ dan $(0,5)$ sehingga gradien garis $k = -\frac{5}{3}$ maka kesimpulan bahwa $m_j = -m_k$ merupakan pernyataan dengan nilai kebenaran salah. Jika kita uji terus menerus garis-garis yang berpotongan tegak lurus dengan garis j maupun garis k maka kita peroleh persamaan umum

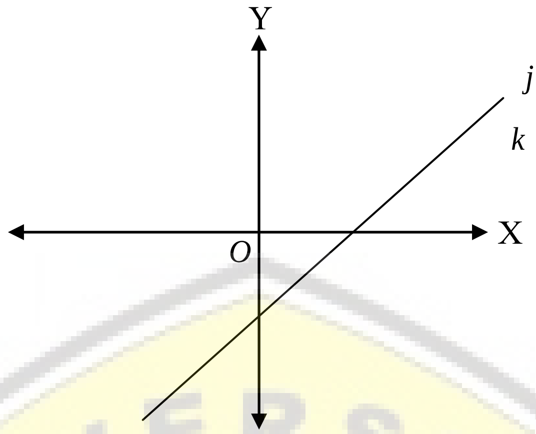
$$m_j = -\frac{1}{m_k}$$

Secara aljabar diperoleh

$$m_j \times m_k = -1$$

Digital Repository Universitas Jember

3. Berimpit



Gambar 23. Garis Berimpit

Jika gradien dari dua buah garis sama maka dikatakan bahwa garis tersebut sejajar, jika hasil perkalian dua buah gradien sama dengan -1, maka dikatakan bahwa kedua garis tersebut berpotongan tegak lurus. Pada Gambar 17, garis j memiliki gradien yang sama dengan garis k. Apakah garis j dapat dikatakan sejajar dengan garis k? Jika kita melihat kembali masalah persamaan garis lurus dengan gradien m dan melalui titik $(0, c)$ yaitu $y = mx + c$ artinya $m_j = m_k$ sekaligus $c_j = c_k$. Karena $m_j = m_k$ dan $c_j = c_k$ sehingga dapat dikatakan bahwa garis j dan garis k berimpit.

Contoh 11

Diketahui garis j dengan gradien $\frac{1}{5}$ dan melalui titik $(2,7)$. Sedangkan garis k memotong tegak lurus garis j. Tentukan persamaan garis j dan garis k yang dimaksud!

Penyelesaian

Diketahui $m_j = \frac{1}{5}$ melalui titik $(2,7)$ maka persamaan garis j adalah $y = \frac{1}{5}x - \frac{33}{5}$ atau $x - 5y - 33 = 0$. Karena gais k memotong tegak lurus garis j maka berlaku $m_k \times m_j = -1$ sehingga persamaan garis k adalah $y = -5x + 17$ atau $-5x - y + 17 = 0$.

Digital Repository Universitas Jember

Contoh 12

Perhatikan kembali Gambar 23, kemudian tentukan gradien dan persamaan garis k dan l.

Penyelesaian

Garis k dan l melalui titik $(0,-2)$ dan $(2,0)$. Maka kita dapat menentukan gradien $m_k = m_l = \dfrac{-2-0}{0-2} = 1$.

Kita gunakan titik $(2,0)$

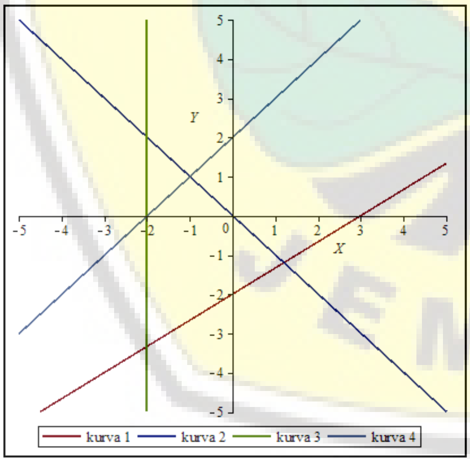
$$\begin{aligned} y-0 &= 1(x-2) \\ y &= x-2 \end{aligned}$$

Jadi persamaan garis k dan garis l adalah $y = x-2$ atau $x-y-2=0$

Catatan

Silahkan pembaca menyelesaikan menggunakan titik $(0,-2)$ dan menggunakan rumus $\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1} = \dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$. Kemudian bandingkan hasilnya.

C. BAHAN DISKUSI



Sumber Gambar:
Maple versi 17

Perhatikan Gambar di samping.

Apa yang dapat Anda simpulkan dari persamaan garis yang diberikan di samping. Pahamilah dan simpulkan

Digital Repository Universitas Jember

D. RANGKUMAN

1. Rumus umum menentukan persamaan garis yaitu $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$
2. Gradien kita simbolkan dengan m dengan rumus $m=\frac{y-c}{x}$
3. Persamaan garis lurus dengan gradien m yaitu $y=mx+c$
4. Persamaan garis lurus dengan gradien $m=\frac{y-y_1}{x-x_1}$ yaitu $y-y_1=m(x-x_1)$
5. Tiga kemungkinan yang terjadi terhadap garis lurus yaitu:
   a. Sejajar jika dan hanya jika persamaan garis memiliki besar gradien yang sama.
   b. Tegak lurus jika dan hanya jika persamaan garis berpotongan tepat dengan sudut 90^o, atau hasil perkalian dua buah gradiennya sama dengan -1.
   c. Berimpit jika dan hanya jika persamaan garis memiliki besar gradien yang sama.

E. TES FORMATIF

Pilihlah salah satu jawaban yang Anda anggap paling tepat!

1. Persamaan garis lurus melalui titik $(2,1)$ dan $(3,-3)$ adalah .....
   A. $y=-2x-9$
   B. $y=4x-9$
   C. $y=2x+9$
   D. $y=-4x+9$
   E. $y=4x+9$

2. Persamaan garis lurus dengan gradien $\frac{2}{3}$ dan melalui titik $(1,3)$ adalah ...
   A. $3y-2x+7=0$
   B. $3x-2y+7=0$
   C. $2x-3y+7=0$
   D. $2x-3y-7=0$
   E. $3x-2y-7=0$

Digital Repository Universitas Jember

3. Garis k memiliki gradien $\frac{2}{5}$, garis l memotong tegak lurus garis k dan melalui titik $(2,-3)$, persamaan garis l yang dimaksud adalah ....
   A. $2x+5y=4$
   B. $5x+2y=4$
   C. $2y+5x=4$
   D. $5y+2x=4$
   E. $5y-2x=4$
4. Persamaan garis yang melalui titik $A(-2,-4)$ dan membentuk sudut 60° yaitu ....
   A. $y=-\sqrt{3}x+2\sqrt{3}-4$
   B. $y=\sqrt{3}x-2\sqrt{3}-4$
   C. $y=\sqrt{3}x+2\sqrt{3}-4$
   D. $y=\sqrt{3}x-2(\sqrt{3}+2)$
   E. $y=\sqrt{3}x+2(\sqrt{3}+2)$
5. Persamaan $2x-3y=4$ sejajar dengan garis k yang melalui titik $(4,-1)$. Persamaan garis k yang dimaksud yaitu ...
   A. $2x-3y-11=0$
   B. $2x-3y+11=0$
   C. $2x+3y-11=0$
   D. $3x-2y-11=0$
   E. $3x+2y-11=0$

F. UMPAN BALIK

Setelah mengerjakan tes formatif, bandingkanlah jawaban Anda dengan kunci jawaban yang terdapat pada akhir bab ini. Jika Anda dapat menjawab dengan benar minimal 80%, maka Anda dinyatakan berhasil dengan baik dan silahkan berlanjut mempelajari materi berikutnya. Sebaliknya jika jawaban yang benar kurang dari 80%, maka silahkan Anda pelajari kembali uraian yang terdapat dalam bab sebelumnya, terutama bagian-bagian yang belum Anda kuasai dengan baik.

Digital Repository Universitas Jember

G. KUNCI JAWABAN TES FORMATIF

1. D
2. C
3. B
4. E
5. A

H. LATIHAN

1. Gambarlah garis-garis dengan persamaan berikut.

   a. $y = -\frac{5}{2}x$

   b. $y = -\frac{5}{2}x + 5$

   c. $y = \frac{5}{2}x - 5$

   d. $5x + 3y - 10 = 0$

2. Tentukan persamaan garis yang bergradien – 5 dan melalui titik berikut:

   a. $O(0,0)$

   b. $P(0,7)$

   c. $Q(-2,3)$

   d. $R(-3,0)$

3. Tentukan persamaan garis yang melalui titik $(0,3)$ dan memenuhi syarat berikut:

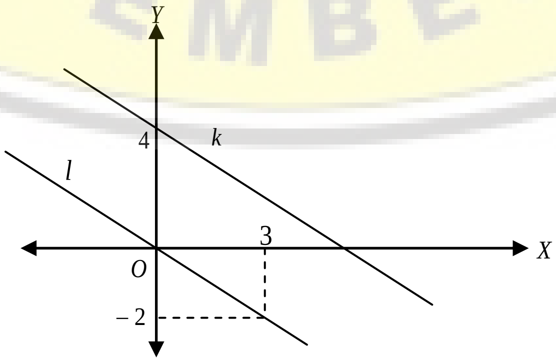
   a. Bergradien $-1\frac{1}{2}$

   b. Sejajar dengan garis $2x + 3y + 2 = 0$

   c. Tegak lurus dengan garis dengan sudut $45°$

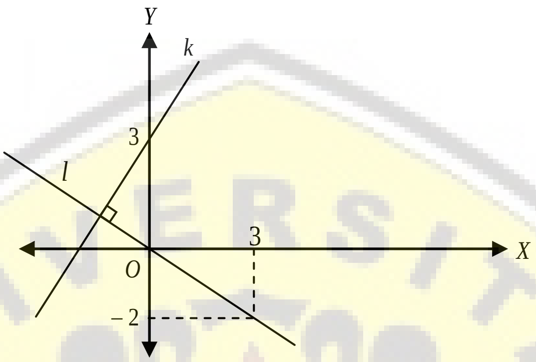
   d. Tegak lurus dengan garis $2x = 4y - 5$

4. Tentukan persamaan garis k dan garis l berikut ini jika garis k sejajar dengan garis l.

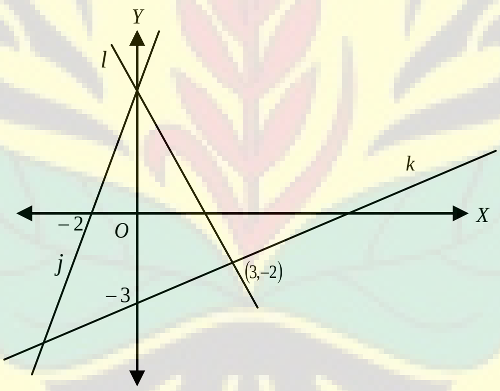


Digital Repository Universitas Jember

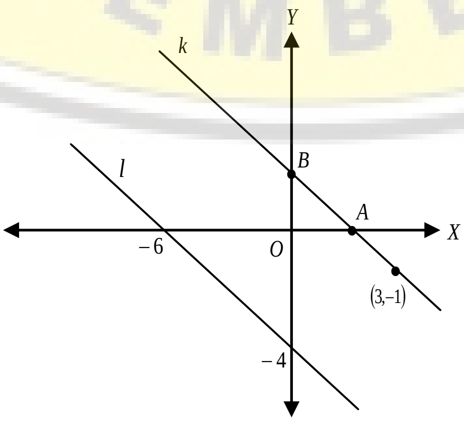
5. Tentukan persamaan garis yang melalui titik $(8,-4)$ dan memenuhi syarat berikut:
   a. Sejajar dengan garis $2x-4y+8=0$
   b. Tegak lurus dengan garis $3x+2y-6=0$
6. Tentukan persamaan garis k dan garis l berikut jika garis k tegak lurus dengan garis l.



7. Pada gambar berikut garis k tegak lurus dengan garis l. Tentukan persamaan garis j,k dan l.



8. Pada gambar berikut, garis k sejajar dengan garis l. Tentukan koordinat titik A dan B.



Digital Repository Universitas Jember

9. Tentukan hubungan pasangan-pasangan garis dengan persamaan berikut!
   a. $y = 4x - 8$ dan $2y = 8x - 10$
   b. $y = \frac{3}{2}x + 4$ dan $3x + 4y = 12$
   c. $3y = -15x + 18$ dan $10x + 2y - 12 = 0$
   d. $y = \frac{3}{4}x - 5$ dan $8x + 6y - 24 = 0$
10. Tentukan nilai a, b, c dan d pada soal berikut.
    a. Garis dengan persamaan $y = ax + b$ tegak lurus dengan garis $2y = 6x - 14$.
    b. Garis dengan persamaan $y = px + q$ berimpit dengan garis $2x + 3y - 12 = 0$.
11. Tentukan persamaan garis yang melalui titik $P(2,0)$ dan bersudut $45°$ terhadap garis $2x - y = 0$
12. Diketahui segitiga ABC dengan $A(-3,-2)$, $B(2,5)$ dan $C(4,2)$. Tentukan luas daerah segitiga tersebut dan jarak titik C ke sisi AB.
13. Diketahui garis $k : x - 2y + 1 = 0$ dan $g : 2x - y - 1 = 0$. P adalah suatu titik yang terletak pada garis bagi sudut antara garis k dan g dengan ordinat $\frac{1}{2}$. Tentukan persamaan garis OP dengan O adalah pusat koordinat.
14. Tentukan persamaan garis yang tegaklurus dengan persamaan $3x - 4y + 8 = 0$ dan berjarak 2 satuan dari titik $(-2,1)$.
15. Tentukan persamaan garis yang sejajar sumbu-X dan berjarak 5 satuan dari titik $(3,-4)$.
16. Tentukan persamaan garis yang berjarak sama dari $x + 5 = 0$ dan $x - 2 = 0$.
17. Tentukan persamaan tempat kedudukan titik-titik yang bergerak sedemikian hingga berjarak sama dari titik $(-2,3)$ dan $(3,-1)$.
18. Tentukan persamaan garis yang koefisien arahnya $\frac{2}{3}$ dan melalui titik $(-4,5)$.
19. Tentukan persamaan garis yang melalui titik $(3,-1)$ dan $(0,6)$.
20. Tentukan persamaan garis yang melalui titik $(2,-1)$ dan tegaklurus garis yang melalui $(4,3)$ dan $(-2,5)$

Digital Repository Universitas Jember

21. Tentukan persamaan garis yang melalui titik $(-4,1)$ dan sejajar garis yang melalui $(2,3)$ dan $(-5,0)$.
22. Sebuah titik bergerak sedemikian hingga jaraknya dari titik $(2,-1)$ adalah selalu 5. Tentukan tempat kedudukan titik tersebut.
23. Sebuah titik bergerak sedemikian hingga jumlah kuadrat jaraknya dari titik $(0,0)$ dan $(2,-4)$ adalah selalu 20. Tentukan tempat kedudukan titik tersebut.
24. Sebuah titik bergerak sedemikian hingga jumlah jaraknya dari sumbu koordinatnya selalu sama dengan kuadrat jaraknya dari titik *origin*. Tentukan tempat kedudukan titik tersebut.
25. Sebuah titik bergerak sedemikian hingga rasio jaraknya dari garis $y-4=0$ dari titik $(3,2)$ adalah 1. Tentukan tempat kedudukan titik tersebut.
26. Tentukan persamaan garis bagi sudut yang dibentuk oleh garis $m:3x-4y+8=0$ dan $n:5x+12y-15=0$.
27. Tentukan jarak titik $(-2,-3)$ ke garis $8x+15y-24=0$.
28. Tentukan titik potong garis bagi sudut dalam segitiga yang dibentuk oleh garis-garis $k:7x+17y+65=0$, $m:7x-y+11=0$, dan $n:x+y-15=0$.
29. Tentukan persamaan garis yang melalui titik potong garis $3x-2y+10=0$ dan $4x+3y-7=0$ dan melalui titik $(2,1)$.
30. Tentukan persamaan garis yang melalui titik potong garis $2x-5y+3=0$ dan $x-3y-7=0$ dan tegaklurus garis $4x+y-1=0$.

Digital Repository Universitas Jember

Kompetensi Dasar

Memahami irisan kerucut beserta unsur-unsurnya.

Indikator

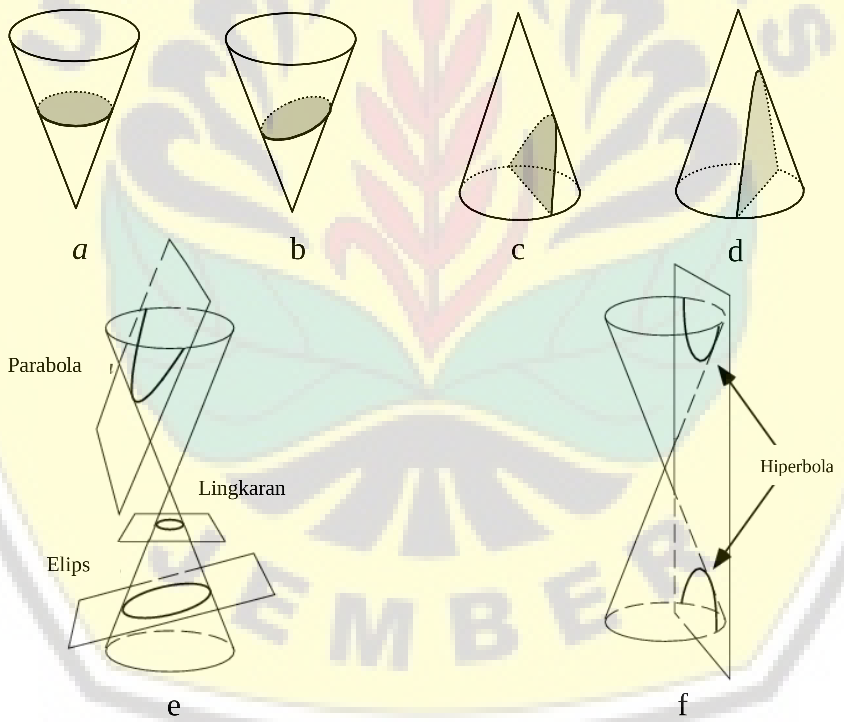
Setelah mempelajari materi ini, mahasiswa diharapkan memiliki kemampuan untuk:

a. Menentukan irisan kerucut
b. Menentukan unsur-unsur irisan kerucut

Digital Repository Universitas Jember

BAB 3
IRISAN KERUCUT

Di akhir abad ke-4 sesudah masehi kerajaan Romawi diambang kehancuran. Alexandria salah satu provinsi di Mesir masih mempertahankan kejayaannya. Kota dengan keajaiban dunia Mercusuar legendaris dan Perpustakaan terbesar di dunia. Perpustakaan bukan hanya simbol budaya tetapi juga sebagai simbol Agama. Film AGORA yang disutradarai Alejandro Amenábar merupakan contoh film yang mengupas masalah geometri analitik dimana Hypatia seorang guru dan Astronom yang hebat yang dikenal akan ilmu matematikanya untuk bidang kerucut dihukum mati karena keyakinan akan teorinya tersebut. Setelah 1200 tahun kemudian di abad 17, ahli Astronomi Johanes Kepler menemukan salah satu dari kurva tersebut yaitu kurva elips yang merupakan pergerakan planet-planet.



Sumber Gambar 24. e dan f:
http://mathworld.wolfram.com/ConicSection.html

Gambar 24. Irisan Kerucut

Digital Repository Universitas Jember

Apollonius de Perga (262-190 SM) dilahirkan di Perga, Pamphilia yang sekarang dikenal dengan sebutan Murtina atau Murtana, terletak di Antalya, Turki. Apollonius adalah seorang matematikawan yang membawa dampak besar bagi perkemabngan matematika. Buku karyanya yang terkenal adalah *conic* (kerucut), dan kemudian setelah dipotong oleh suatu bidang seperti gambar 24. Hasil pemotongannya dikenal dengan istilah-istilah yang sekarang populer seperti: parabola, elips, dan hiperbola yang akan dijelaskan di bab selanjutnya.

Irisan kerucut merupakan tempat kedudukan titik-titik sehingga perbandingan jaraknya ke titik tertentu dan jaraknya ke garis tertentu mempunyai nilai yang tetap. Titik dan garis tertentu itu berturut-turut dinamakan titik api/fokus dan garis direktriks, sedangkan nilai perbandingan yang tetap itu dinamakan eksentrisitas. Irisan kerucut dapat dibedakan dalam tiga jenis yang bergantung dari nilai eksentrisitasnya yaitu: disebut **elips** jika nilai eksentrisitas antara nol dan satu $(0 < \text{eksentrisitas} < 1)$, disebut **parabola** jika nilai eksentrisitas sama dengan satu $(\text{eksentrisitas} = 1)$, dan disebut **hiperbola** jika nilai eksentrisitas lebih dari nol $(\text{eksentrisitas} > 1)$. Jadi himpunan titik-titik (x, y) yang memenuhi persamaan $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ disebut irisan kerucut. Berdasarkan proses terbentuknya, **lingkaran** dibentuk oleh bidang irisan yang tegak lurus sumbu kerucut atau sejajar dengan bidang alas kerucut, **elips** dibentuk oleh bidang irisan yang memotong salah satu kerucut tetapi tidak tegak lurus sumbu dan tidak sejajar garis pembangun kerucutnya, **parabola** dibentuk oleh bidang irisan yang sejajar dengan garis pembangun kerucut, dan **hiperbola** dibentuk oleh bidang irisan yang memotong kedua kerucut tetapi tidak melalui titik puncaknya.

Digital Repository Universitas Jember

Kompetensi Dasar

Memahami lingkaran beserta unsur-unsurnya.

Indikator

Setelah mempelajari materi ini, mahasiswa diharapkan memiliki kemampuan untuk:

a. Menentukan persamaan lingkaran
b. Menentukan kedudukan titik terhadap lingkaran
c. Menentukan persamaan garis singgung pada lingkaran

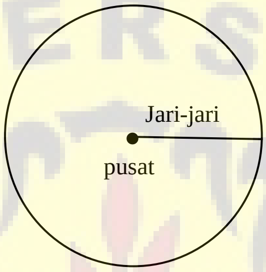
Digital Repository Universitas Jember

BAB 4
LINGKARAN

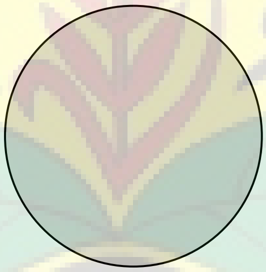
A. LINGKARAN

Definisi

Lingkaran adalah himpunan semua titik di bidang yang berjarak sama terhadap suatu titik tetap. Titik tetap ini dinamakan **pusat** lingkaran dan jarak yang sama dinamakan **jari-jari** lingkaran, lihat Gambar 25.



Gambar 25. Pusat dan jari-jari lingkaran



Gambar 26. Daerah lingkaran atau Cakram Lingkaran

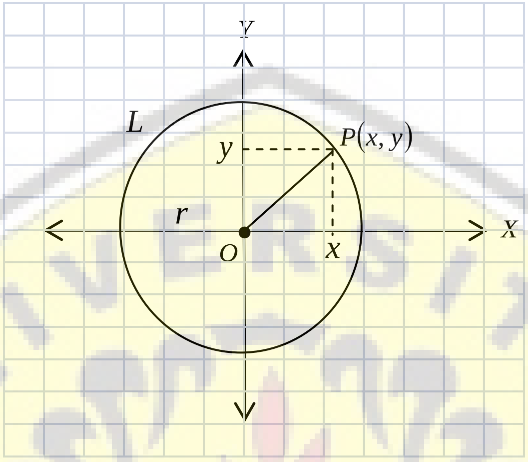
Gambar 26 merupakan daerah lingkaran yang biasa disebut dengan cakram lingkaran. Luas cakram lingkaran berjari-jari adalah $l = \pi r^2$, sedangkan kelilingnya adalah $k = 2\pi r$. Nilai π dengan 7 desimal adalah 3,1415927, sedangkan nilai hampirannya adalah $\frac{22}{7}$ atau 3,14.

Digital Repository Universitas Jember

B. PERSAMAAN LINGKARAN

1. Persamaan Lingkaran yang Berpusat di O (0,0) dengan Jari-jari r

Untuk merancang persamaan lingkaran, tetapkan sistem koordinat kartesius dengan titik pusat lingkaran pada titik asal, seperti pada Gambar 27.



Gambar 27. Lingkaran dengan Pusat $O(0,0)$ dan jari-jari r

Jika $r \geq 0$ dan $P(x, y)$ titik sebarang pada lingkaran, maka $(OP)^2 = r^2$. Berdasarkan rumus jarak dua titik diperoleh $(OP)^2 = x^2 + y^2$. Jadi, persamaan lingkaran berpusat di titik $O(0,0)$ dan berjari-jari $r \geq 0$ adalah

$$x^2 + y^2 = r^2$$

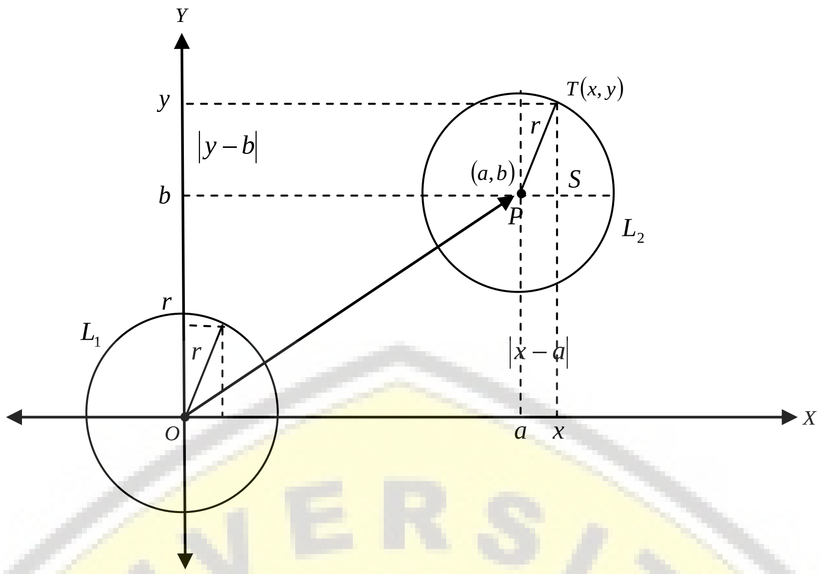
Contoh 13
Tentukan persamaan lingkaran dengan pusat $O(0,0)$ dan berjari-jari 5!

Penyelesaian
Karena lingkaran berpusat $O(0,0)$ maka persamaan lingkarannya adalah $x^2 + y^2 = 25$

2. Persamaan Lingkaran yang Berpusat di (a, b) dengan Jari-jari r

Selanjutnya, misalkan titik $T(x, y)$ terletak pada lingkaran dan S adalah perpotongan garis sejajar sumbu X yang melalui P dan garis sejajar sumbu Y yang melalui T seperti Gambar 28.

Digital Repository Universitas Jember



Gambar 28. Lingkaran dengan Pusat $O(a,b)$ dan jari-jari r

Karena $PS = |x-a|$ dan $ST = |y-b|$, dengan memanfaatkan *Teorema Pythagoras* $(PS)^2 + (ST)^2 = (PT)^2$ diperoleh $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$.

Jadi persamaan lingkaran berpusat di titik (a,b) dan berjari-jari $r > 0$ adalah

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

C. BENTUK UMUM PERSAMAAN LINGKARAN

Kita jabarkan persamaan lingkaran $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$. Jika persamaan $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$ dengan $a, b, r \in R$ dan $A = -2a, B = -2b$ dan $C = a^2 + b^2 - r^2$, maka persamaan lingkaran di atas menjadi

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

Persamaan ini disebut bentuk umum persamaan lingkaran.

Dari bentuk umum tersebut kita dapat mencirikan persamaan suatu lingkaran yaitu:

1. Koefisien-koefisien x^2 dan y^2 selalu sama
2. Tidak ada suku yang memuat xy

Persamaan lingkaran $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ kita coba faktorkan dengan cara membuat kuadrat sempurna.

Digital Repository Universitas Jember

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$
$$(x^2 + Ax) + (y^2 + By) = -C$$
$$\left(x + \frac{1}{2}A\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}B\right)^2 = \frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2 - C$$

Karena ruas kirinya berbentuk kuadrat, maka ruas kananya harus tak negatif, sehingga diberikan syarat agar bentuk $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ menghasilkan lingkaran yaitu

$$\frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2 - C \geq 0$$

Jika kondisi tersebut terpenuhi, maka persamaan $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ merupakan suatu lingkaran **berpusat** di titik $\left(-\frac{1}{2}A, -\frac{1}{2}B\right)$ dan **berjari-jari** $\sqrt{\frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2 - C}$

Jika kita perhatikan kembali jari-jari lingkaran dan menelaah lebih luas lagi syarat di atas maka diperoleh beberapa kemungkinan yaitu:

1. Jika $\frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2 - C > 0$, maka menyatakan lingkaran nyata.
2. Jika $\frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2 - C < 0$, maka menyatakan lingkaran imajiner (khayal).
3. Jika $\frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2 - C = 0$, maka menyatakan lingkaran dengan jari-jari nol (berupa titik).

D. KEDUDUKAN TITIK TERHADAP LINGKARAN

Diketahui persamaan lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$. Kita akan menentukan kedudukan titik $A(x_0, y_0)$ terhadap lingkaran tersebut.

1. Jika $OA = r$ atau $x_0^2 + y_0^2 = r^2$ maka titik A terletak **pada lingkaran**.
2. Jika $OA < r$ atau $x_0^2 + y_0^2 < r^2$ maka titik A terletak di **dalam lingkaran.**
3. Jika $OA > r$ atau $x_0^2 + y_0^2 > r^2$ maka titik A terletak di **luar lingkaran.**

Digital Repository Universitas Jember

Diketahui persamaan lingkaran $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$. Kita akan menentukan kedudukan titik $D(x_0, y_0)$ terhadap lingkaran tersebut.

1. Jika $x_0^2 + y_0^2 + Ax_0 + By_0 + C = 0$ maka titik D terletak pada lingkaran.
2. Jika $x_0^2 + y_0^2 + Ax_0 + By_0 + C < 0$ maka titik D terletak di dalam lingkaran.
3. Jika $x_0^2 + y_0^2 + Ax_0 + By_0 + C > 0$ maka titik D terletak di luar lingkaran.

Contoh 14

Diketahui persamaan $x^2 + y^2 + 6x - 2y - 15 = 0$, titik $A(1,3), B(2,4)$ dan $C(-6,5)$.

a. tunjukkan persamaan tersebut merupakan suatu lingkaran
b. tentukan pusat, jari-jari lingkaran beserta sketsa gambar lingkarannya.
c. selidiki kedudukan titik A, B dan C terhadap lingkaran tersebut.

Penyelesaian

a. Persamaan lingkaran $x^2 + y^2 + 6x - 2y - 15 = 0$ dalam bentuk kuadrat lengkap

$$x^2 + y^2 + 6x - 2y - 15 = 0$$
$$(x^2 + 6x + 9) + (y^2 - 2y + 1) = 15 + 9 + 1$$
$$(x+3)^2 + (y-1)^2 = 5^2$$

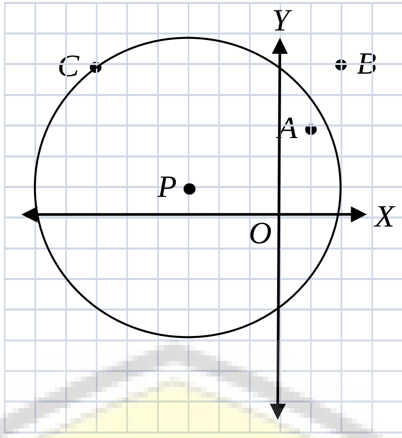
Jadi persamaan standar lingkarannya adalah $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 5^2$

b. Berdasarkan persamaan lingkaran $x^2 + y^2 + 6x - 2y - 15 = 0$ diperoleh pusat $\left(-\frac{1}{2}(6), -\frac{1}{2}(-2)\right) = (-3,1)$

dan jari-jari $\sqrt{\frac{1}{4}(36) + \frac{1}{4}(4) - (-15)} = \sqrt{25} = 5$.

Berdasarkan persamaan $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 5^2$ dan dengan memanfaatkan persamaan $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ diperoleh pusat lingkaran $(-3,1)$ dan jari-jari 5. Berikut sketsa lingkaran tersebut.

Digital Repository Universitas Jember



Gambar 29. Sketsa Lingkaran pada Contoh 14

c. **Cara 1**

- Jarak dari $A(1,3)$ ke pusat lingkaran adalah

$$PA = \sqrt{(-3-1)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{20} < 5$$

Karena $PA < r$, maka titik A terletak **di dalam** lingkaran.

- Jarak dari $B(2,4)$ ke pusat lingkaran adalah

$$PB = \sqrt{(-3-2)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{34} > 5$$

Karena $PB > r$, maka titik B terletak **di luar** lingkaran.

- Jarak dari $C(-6,5)$ ke pusat lingkaran adalah

$$PC = \sqrt{(-3+6)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{25} = 5$$

Karena $PC = r$, maka titik C terletak **pada** lingkaran.

Cara 2

Gantikan titik $A(1,3)$, $B(2,4)$ dan $C(-6,5)$ ke persamaan $x^2 + y^2 + 6x - 2y - 15 = 0$, diperoleh kesimpulan yang sama dengan hasil di atas. (**tunjukkan sebagai latihan)**

Digital Repository Universitas Jember

Contoh 15

Tentukan persamaan lingkaran yang melalui $A(-1,0)$, $B(5,0)$ dan $C(0,5)$.

Penyelesaian

Cara 1

Kita akan memanfaatkan sistem persamaan linear, misalkan persamaan lingkaran yang akan dicari adalah

$$L: x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

Substitusikan titik-titik A, B dan C sebagai berikut:

$-A + C = -1$ .... (1)
$5A + C = -25$ .... (2)
$5B + C = -25$ .... (3)

kita ambil persamaan (2) dan (3)

$5A + C = -25$
$5B + C = -25$

Selisih kedua persamaan tersebut memberikan $5A - 5B = 0$,
sehingga

$$A = B \text{ ....(4)}$$

akibatnya persamaan (2) sama dengan persamaan (3)

Dari persamaan (1) dan persamaan (2)/(3) diperoleh nilai $A = -4$ akibatnya $B = -4$.

Jadi persamaan lingkaran yang dimaksud adalah

$$L: x^2 + y^2 - 4x - 4y - 5 = 0$$

Cara 2

Kita manfaatkan garis sumbu dari sisi-sisi segitiga ABC. Berikut langkah-langkah yang dapat kita cermati:

1. pusat lingkaran luar ΔABC adalah titik potong garis sumbu AB dan garis sumbu BC.
2. karena persamaan ruas garis AB adalah sumbu X, $-1 \le x \le 5$ dan titik tengahnya adalah $(2,0)$, diperoleh garis sumbu AB adalah $x = 2$.

Digital Repository Universitas Jember

3. karena persamaan ruas garis BC adalah $y = 5 - x$, $0 \le x \le 5$ dan titik tengahnya adalah $(2\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2})$, diperoleh garis sumbu BC adalah $y = x$.
4. karena perpotongan garis $x = 2$ dan $y = x$ adalah $(2,2)$, pusat lingkaran adalah $(2,2)$ dan jari-jari lingkaran adalah $r = AP = \sqrt{(-1-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$.
5. jadi dapat disimpulkan persamaan lingkaran adalah $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 13$ atau $x^2 + y^2 - 4x - 4y - 5 = 0$

Cara 3

Kita akan memanfaatkan rumus jarak dua titik.

Pusat lingkaran luar ΔABC adalah titik $P(a,b)$ yang memenuhi $AP = BP = CP$, sehingga

Karena
$$\begin{aligned}(AP)^2 &= (x_A - x_P)^2 + (y_A - y_P)^2 \\ &= (-1-a)^2 + b^2\end{aligned}$$

Dengan cara yang sama $(BP)^2 = (5-a)^2 + b^2$

Dari $(AP)^2 = (BP)^2$ diperoleh

$a^2 + 2a + 1 + b^2 = a^2 - 10a + 25 + b^2$

Dari persamaan tersebut $12a = 24$ sehingga $a = 2$

Karena $CP = (-a)^2 + (5-b)^2$, dari $(BP)^2 = (CP)^2$ diperoleh

$$a^2 - 10a + 25 + b^2 = a^2 + 25 - 10b + b^2,$$

sehingga $b = a = 2$.

Hal ini mengakibatkan pusat lingkarannya adalah $(2,2)$ dan jari-jari $r = AP = \sqrt{13}$ (**lihat cara kedua**).

Jadi persamaan lingkarannya adalah

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 = 13 \text{ atau } x^2 + y^2 - 4x - 4y - 5 = 0$$

Digital Repository Universitas Jember

Contoh 16

Diketahui lingkaran $L_1 : x^2 + y^2 - 2x = 0$ dan $L_2 : x^2 + y^2 - 2y = 0$.

a. tentukan luas daerah di dalam cakram lingkaran L_1 dan L_2

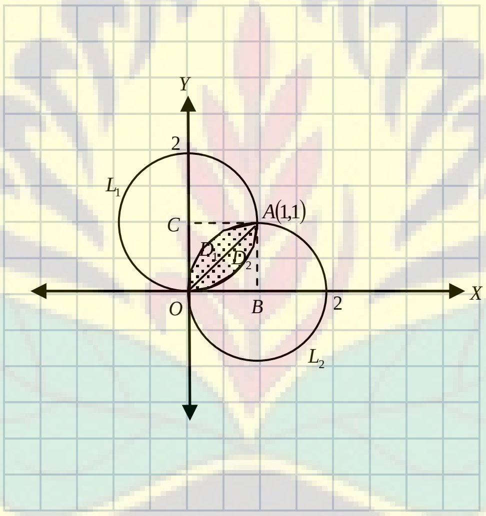
b. tentukan luas daerah di dalam cakram lingkaran L_2 dan di luar lingkaran L_1.

Penyelesaian

Persamaan lingkaran $L_1 : x^2 + y^2 - 2x = 0$ dapat kita tulis dengan $(x-1)^2 + y^2 = 1$, artinya lingkaran L_1 berpusat di $(1,0)$ dan berjari-jari 1 satuan.

Sedangkan lingkaran $L_2 : x^2 + y^2 - 2y = 0$ dapat kita tulis dengan $x^2 + (y-1)^2 = 1$, artinya lingkaran L_2 berpusat di $(0,1)$ dan berjari-jari 1 satuan.

a. Selanjutnya kita sketsa gambar dari informasi di atas



Gambar 30. SketsaLingkaran pada Contoh 16.a

Kita akan menghitung luas daerah yang diarsir $L_1 \cap L_2$.

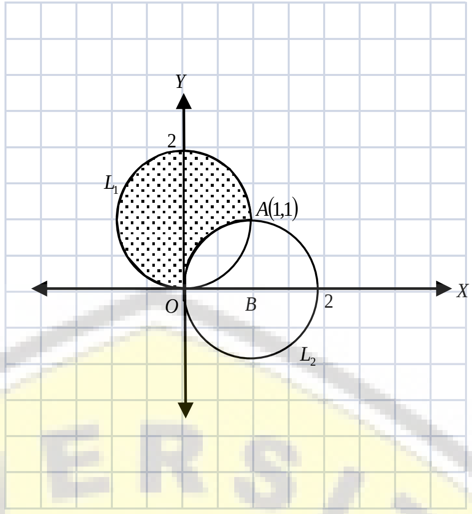
Kita bagi $L_1 \cap L_2$ atas dua daerah, D_1 dan D_2.

Luas $D_2 = \frac{1}{4}$ luas lingkaran L_1 - luas $\Delta OBA = \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}.1.1 = \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}$

Jadi luas $L_1 \cap L_2 = 2$ luas $D_2 = \frac{1}{2}\pi - 1$

Digital Repository Universitas Jember

b. Untuk mempermudah menjawab masalah b, kita sketsa terlebih dahulu.



Gambar 31. SketsaLingkaran pada Contoh 16.b

Kita akan menghitung luas daerah yang diarsir, yaitu $L_2 - L_1$.

Karena $L_2 - L_1 = L_2 - (L_1 \cap L_2)$ maka luas $(L_2 - L_1) =$ luas $L_2 -$ luas $(L_1 \cap L_2)$

diperoleh $\frac{1}{2}\pi + 1$

Jadi luas $L_2 - L_1 = \frac{1}{2}\pi + 1$

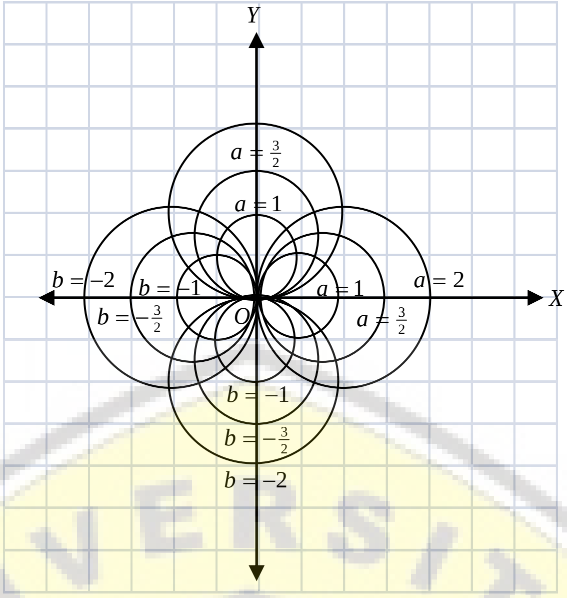
Contoh 17

Sketsalah lingkaran $x^2 + y^2 - ax = 0$ dan $x^2 + y^2 - by = 0$ untuk konstanta $a = \pm 1, \pm\frac{3}{2}, \pm 2$ dan $b = \pm 1, \pm\frac{3}{2}, \pm 2$ pada suatu sistem koordinat!

Penyelesaian

Karena persamaan lingkaran $x^2 + y^2 - ax = 0$ dapat ditulis sebagai $(x - \frac{1}{2}a)^2 + y^2 = \frac{1}{4}a^2$, dengan pusat $(\frac{1}{2}a, 0)$ dan jari-jarinya $\frac{1}{2}|a|$ satuan. Mangapa menggunakan $|a|$? (**Simpulkan sebagai latihan).** Dengan cara yang sama diperoleh pusat dan jari-jari dari persamaan lingkaran $x^2 + y^2 - by = 0$ adalah $(0, \frac{1}{2}b)$ dan $\frac{1}{2}|b|$satuan. (**tunjukkan sebagai latihan**). Sketsa gambar sebagai berikut.

Digital Repository Universitas Jember



Gambar 32. Sketsa Lingkaran pada Contoh 17

E. PERSAMAAN GARIS SINGGUNG PADA LINGKARAN

1. Hubungan Garis dengan Lingkaran

Jika persamaan garis $g: y = mx + n$ disubstitusikan ke persamaan lingkaran $L: x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$, maka kita peroleh persamaan kuadrat

$$x^2 + (mx+n)^2 + Ax + B(mx+n) + C = 0$$

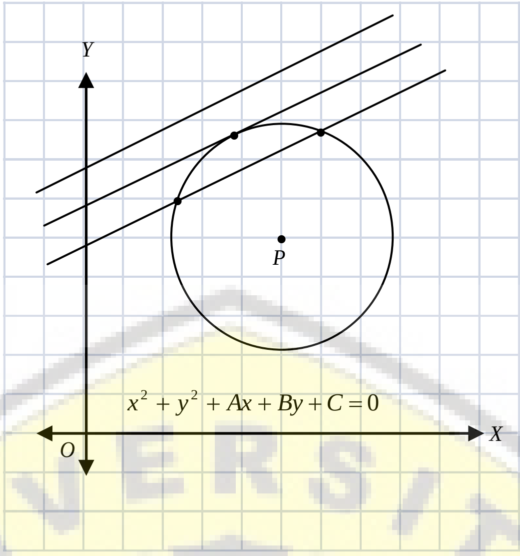
yang diskriminannya adalah D.

Kita mempunyai tiga kemungkinan yaitu

1. Jika $D > 0$, maka garis g memotong lingkaran L di dua titik.
2. Jika $D = 0$, maka garis g memotong lingkaran L di satu titik (menyinggung).
3. Jika $D < 0$, maka garis g tidak memotong lingkaran L.

Digital Repository Universitas Jember

Perhatikan Gambar 33.



Gambar 33. Hubungan Garis dan Lingkaran

Contoh 18

Diketahui garis $g: 3x - 4y = m$ dan lingkaran $L: x^2 + y^2 = 25$. Tentukan konstanta m agar garis g dan lingkaran L :

a. berpotongan di dua titik
b. bersinggungan
c. tidak berpotongan

Penyelesaian

Kita gantikan persamaan garis $g: y = \frac{1}{4}(3x - m)$ ke persamaan lingkaran L, sehingga diperoleh persamaan kuadrat $x^2 + (\frac{1}{4}(3x - m))^2 = 25$. Kita dapat menulis dalam bentuk

$$x^2 + \tfrac{1}{16}(9x^2 - 6mx + m^2) = 25$$
$$16x^2 + 9x^2 - 6mx + m^2 = 400$$
$$25x^2 - 6mx + m^2 - 400 = 0$$

Dari persamaan kuadrat di atas, kita dapat menentukan nilai diskriminannya yaitu.

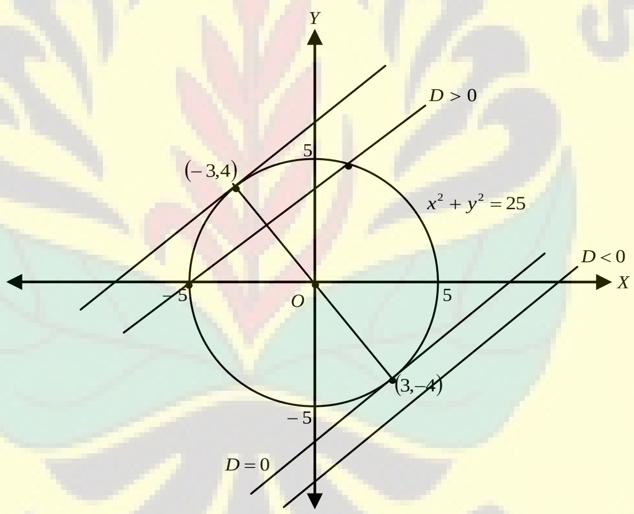
Digital Repository Universitas Jember

$$\begin{aligned} D &= 36m^2 - 100(m^2 - 400) \\ &= -64m^2 + 40.000 \\ &= -64(m^2 - 625) \end{aligned}$$

a. Agar garis g memotong lingkaran L di dua titik, harus memenuhi syarat $D = -64(m^2 - 625) > 0$, yang menghasilkan $m^2 - 625 < 0$. Berdasarkan hasil tersebut diperoleh $-25 < m < 25$. Jadi nilai m yang memenuhi terdapat pada interval $-25 < m < 25$.

b. Garis g menyinggung lingkaran L di titik $(-3, 4)$ dan $(3, 4)$. (**tunjukkan sebagai latihan**).

c. Garis g tidak memotong lingkaran L saat $m < -25$ atau $m > 25$. (**tunjukkan sebagai latihan**).



Gambar 34. Sketsa Garis Singgung Lingkaran pada Contoh 18

2. Garis Singgung dengan Gradien Tertentu pada Lingkaran

Kita mempunyai lingkaran $L : x^2 + y^2 = r^2$ dan garis $g : y = mx + n$ dengan m tetap. Akan ditentukan kondisi n agar garis g menyinggung lingkaran L. Kita gantikan persamaan garis g ke lingkaran L sehingga diperoleh

$$x^2 + (mx + n) = r^2$$

$$x^2 + m^2x^2 + 2mnx + n^2 - r^2 = 0$$

$$(1 + m^2)x^2 + 2mnx + (n^2 - r^2) = 0$$

Digital Repository Universitas Jember

Agar garis g menyinggung lingkaran, harus memenuhi syarat $D = 0$ akibatnya

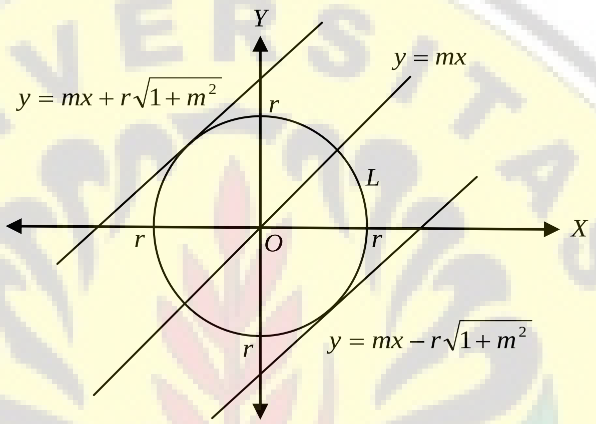
$$4m^2n^2 - 4(1+m^2)(n^2 - r^2) = 0$$

$$n^2 = (1+m^2)r^2$$

Sehingga

$$n = \pm r\sqrt{1+m^2}$$

Jadi garis $y = mx \pm r\sqrt{1+m^2}$ menyinggung lingkaran L, seperti disajikan pada Gambar 35.



Gambar 35. Garis singgung Lingkaran dengan Gradien Tertentu

Contoh 19

Tentukan persamaan garis singgung lingkaran $L : x^2 + y^2 = 25$ yang mempunyai gradien $-\frac{3}{4}$. Kemudian, tentukan juga titik singgungnya.

Penyelesaian

Lingkaran $L : x^2 + y^2 = 25$ berpusat di $(0,0)$ dan berjarai-jari 5 satuan. Sehingga dengan mudah kita dapat menentukan persamaan garis singgungnya yaitu $y = -\frac{3}{4}x \pm 5\sqrt{1+\frac{9}{16}}$, kita juga dapat menuliskannya secara terpisah yaitu $y = -\frac{3}{4}x + 5\sqrt{1+\frac{9}{16}}$ dan $y = -\frac{3}{4}x - 5\sqrt{1+\frac{9}{16}}$. Jika kita sederhanakan kedua garis singgung tersebut kita peroleh $3x + 4y = 25$ dan $3x + 4y = -25$.

Jadi, persamaan garis singgung pada lingkaran $L : x^2 + y^2 = 25$ dengan gradien $-\frac{3}{4}$ adalah $3x + 4y = 25$ dan $3x + 4y = -25$.

Digital Repository Universitas Jember

Untuk menentukan titik singgungnya, kita gantikan $y = -\frac{3}{4}x + 5\sqrt{1+\frac{9}{16}}$ dan $y = -\frac{3}{4}x - 5\sqrt{1+\frac{9}{16}}$ ke persamaan lingkaran $L: x^2 + y^2 = 25$ sehingg diperoleh titik singgungnya adalah $(3,4)$ dan $(-3,-4)$. (**Tunjukkan Hasil Akhir sebagai Latihan kemudian Sketsalah Gambar untuk Memperjelas Hasil yang diperoleh**)

Selanjutnya kita geser pusat lingkaran $L_1: x^2 + y^2 = r^2$ ke titik (a,b) sehingga menjadi lingkaran $L_2: (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$, agar pembaca lebih memahami maksud dari materi ini, diharapkan pembaca menunjukkan persamaan garis singgung yang mempunya gradien m pada lingkaran $L_2: (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ yang penulis peroleh yaitu

$$y - b = m(x-a) \pm r\sqrt{1+m^2}$$

Contoh 20

Tentukan persamaan garis singgung yang mempunyai gradien 3 pada lingkaran $L: x^2 + y^2 - 4x + 8y + 10 = 0$, kemudian tentukan juga titik singgungnya.

Penyelesaian

Lingkaran $L: x^2 + y^2 - 4x + 8y + 10 = 0$ dapat kita tulis dalam bentuk

$$(x-2)^2 + (y+4)^2 = 10$$

kita dapat menentukan pusat lingkaran tersebut adalah $(2,-4)$ dan berjari-jari $\sqrt{10}$. Sehingga dapat kita tentukan persamaan garis singgungnya adalah

$$y + 4 = 3(x-2) + \sqrt{10}.\sqrt{1+9}$$

diperoleh $y = 3x$ dan $y + 4 = 3(x-2) - \sqrt{10}.\sqrt{1+9}$

atau

$$y = 3x - 20.$$

Jadi persamaan garis singgung pada lingkaran $L: x^2 + y^2 - 4x + 8y + 10 = 0$ adalah $y = 3x$ dan $y = 3x - 20$.

Digital Repository Universitas Jember

Dengan cara yang sama pada contoh sebelumnya, kita substitusikan persamaan garis singgung $y = 3x$ dan $y = 3x - 20$ pada persamaan lingkaran $L: x^2 + y^2 - 4x + 8y + 10 = 0$, sehingga diperoleh titik singgungnya berturut-turut adalah $(-1, -3)$ dan $(5, -5)$. (**Tunjukkan Kebenarannya**).

3. Garis Singgung Tegak Lurus Jari-jari Lingkaran

Kedua contoh di atas akan kita perumum dengan mensubstitusi dua persamaan garis singgung bergrradien m pada lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$. Akan ditunjukkan kedua persamaan garis singgung tersebut tegak lurus pada jari-jari lingkaran.

Substitusikan persamaan $y = mx + r\sqrt{1 + m^2}$ pada $x^2 + y^2 = r^2$, diperoleh

$$x^2 + \left(mx + r\sqrt{1+m^2}\right)^2 = r^2$$

$$x^2 + m^2x^2 + 2mr\sqrt{1+m^2}\ x + r^2(1+m^2) = r^2$$

$$(1+m^2)x^2 + 2mr\sqrt{1+m^2}\ x + r^2m^2 = r^2$$

$$\left(\sqrt{1+m^2}\ x + mr\right)^2 = 0$$

$$x = \frac{-rm}{\sqrt{1+m^2}}$$

Sehingga diperoleh

$$y = mx + r\sqrt{1+m^2}$$

$$y = m\left(\frac{-rm}{\sqrt{1+m^2}}\right) + r\sqrt{1+m^2}$$

$$y = \frac{-rm^2 + r + rm^2}{\sqrt{1+m^2}} = \frac{r}{\sqrt{1 = m^2}}$$

Jadi titik singgung dari $y = mx + r\sqrt{1+m^2}$ ke lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$ adalah

$$T_1\left(\frac{-rm}{\sqrt{1+m^2}}, \frac{r}{\sqrt{1+m^2}}\right)$$

Dengan cara yang sama,

Titik singgung dari $y = mx - r\sqrt{1+m^2}$ ke lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$ adalah

Digital Repository Universitas Jember

$$T_2\left(\frac{rm}{\sqrt{1+m^2}},\frac{-r}{\sqrt{1+m^2}}\right)$$ **(Tunjukkan sebagai latihan)**

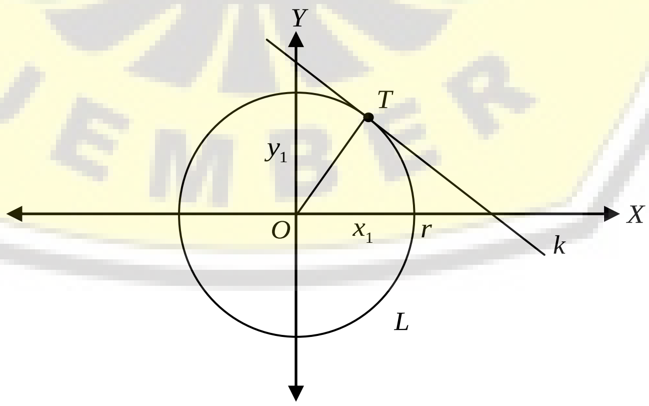
Dari koordinat titik singgung

$T_1\left(\frac{-rm}{\sqrt{1+m^2}},\frac{r}{\sqrt{1+m^2}}\right)$ dan $T_2\left(\frac{rm}{\sqrt{1+m^2}},\frac{-r}{\sqrt{1+m^2}}\right)$ diperoleh persamaan jari-jari OT_1 dan OT_2 adalah $y=-\frac{x}{m}$. Karena garis ini tegak lurus dengan garis singgung $y=mx\pm r\sqrt{1+m^2}$, maka ***dapat disimpulkan bahwa garis singgung selalu tegak lurus pada jari-jari lingkarannya.***

4. Garis singgung di Suatu Titik pada Lingkaran

Misalkan kita ambil sebarang titik $T(x_1,y_1)$ pada lingkaran $L: x^2+y^2=r^2$. Akan kita tentukan persamaan garis singgung di titik T pada lingkaran L. Karena kita ambil titik $T(x_1,y_1)$, sehingga kita dapat menentukan persamaan garis OT adalah $y=\frac{y_1}{x_1}x, x_1\neq 0$ dengan gradien OT, $m_{OT}=\frac{y_1}{x_1}x,\ x_1\neq 0$.

Karena titik $T(x_1,y_1)$ terletak pada lingkaran L, ruas garis OT adalah suatu jari-jari lingkaran. Akibatnya, garis singgung k tegak lurus OT, sehingga $m_{OT}\times m_k=-1$ atau $m_k=-\frac{x_1}{y_1},\ y_1\neq 0$



Gambar 36. Garis Singgung di Suatu titik pada lingkaran

Digital Repository Universitas Jember

Karena garis singgungnya melalui T, persamaan garis singgung di titik T pada lingkaran L adalah

$$y - y_1 = -\frac{x_1}{y_1}(x - x_1)$$

Persamaan ini dapat ditulis sebagai

$$yy_1 - y_1^2 = -xx_1 + x_1^2$$

atau

$$xx_1 + yy_1 = x_1^2 + y_1^2$$

Kita perhatikan ruas kanan dari persamaan di atas, $x_1^2 + y_1^2 = r^2$. Akibatnya

$$xx_1 + yy_1 = r^2$$

Sekarang coba kita geser pusat lingkaran $L_1 : x^2 + y^2 = r^2$ ke titik (a,b) sehingga menjadi lingkaran $L_2 : (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$, maka persamaan garis singgungnya adalah $(x-a)(x_1-a)+(y-b)(y_1-b)=r^2$ (**Tunjukkan Sebagai Latihan**)

Contoh 21

Tentukan persamaan garis singgung di titik $A(3,4)$ pada lingkaran $L : x^2 + y^2 = 25$

Penyelesaian

Dengan mudah kita dapat menentukan pusat dan jari-jari lingkaran $L : x^2 + y^2 = 25$ yaitu berpusat di $P(0,0)$ dan berjari-jari $r = 5$. Kita ketahui bahwa titik $A(3,4)$ terletak pada lingkaran $L : x^2 + y^2 = 25$ karena $L : 3^2 + 4^2 = 25$ merupakan pernyataan bernilai benar. Jadi, persamaan garis singgung di titik $A(3,4)$ adalah $3x + 4y = 25$. (**Sketsalah untuk Lebih Mempermudah Pemahaman Pembaca**)

Contoh 22

Tentukan persamaan garis singgung di titik $A(-1,-3)$ dan $B(5,-5)$ pada lingkaran $L : x^2 + y^2 - 4x + 8y + 10 = 0$

Digital Repository Universitas Jember

Penyelesaian

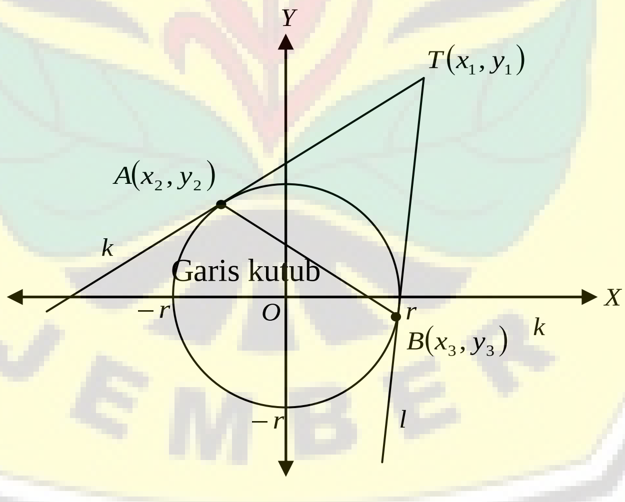
Dari persamaan ligkaran $L: x^2 + y^2 - 4x + 8y + 10 = 0$, diperoleh pusat $P(2,-4)$ dan jari-jari $r = \sqrt{10}$. Titik A dan B, keduanya terletakpada lingkaran. (**Kenapa?**).

Jadi persamaan garis singgung di titik $A(-1,-3)$ adalah $y = 3x$ dan persamaan garis singgung di titik $B(5,-5)$ adalah $y = 3x - 20$.

F. LINGKARAN DAN TOPIK YANG BERKAITAN

1. GARIS KUTUB

Jika T adalah titik yang terletak di luar lingkaran L maka melalui titik T dapat dibuat dua garis yang menyinggung lingkaran L di titik A dan B. Persamaan garis yang melalui titik A dan B dikenal sebagai **garis kutub** pada L. Kita akan menentukan garis kutub dari informasi koordinat titik T dan persamaan lingkaran L. Perhatikan Gambar 37.



Gambar 37. Garis Kutub

Pada gambar di atas diperlihatkan titik $T(x_1, y_1)$ yang terletak di luar lingkaran $L: x^2 + y^2 = r^2$. Melalui titik T dibuat dua garis singgung k yang menyinggung L di titik $A(x_2, y_2)$ dan l yang menyinggung L di titik

Digital Repository Universitas Jember

$B(x_3, y_3)$. Kita akan menentukan persamaan garis kutub AB : (1) persamaan garis k dengan titik singgung $A(x_2, y_2)$ pada lingkaran $L: x^2 + y^2 = r^2$ adalah $k: xx_2 + yy_2 = r^2$ dan (2) persamaan garis l dengan titik singgung $B(x_3, y_3)$ pada lingkaran $L: x^2 + y^2 = r^2$ adalah $l: xx_3 + yy_3 = r^2$. Karena k dan l melalui titik $T(x_1, y_1)$, maka diperoleh $x_1x_2 + y_1y_2 = r^2$ dan $x_1x_3 + y_1y_3 = r^2$. Selisih dari kedua persamaan memberikan $x_1(x_2 - x_3) + y_1(y_2 - y_3) = 0$, sehingga diperoleh gradien AB yang dapat dinyatakan dalam x_1 dan y_1

$$m_{AB} = \frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3} = -\frac{x_1}{y_1}$$

Persamaan garis kutub AB adalah

$$y - y_1 = m_{AB}(x - x_2)$$

$$y = y_2 - \frac{x_1}{y_1}(x - x_2)$$

$$yy_1 = y_1y_2 - xx_1 + x_1x_2$$

$$xx_1 + yy_1 = x_1x_2 + y_1y_2 = r^2$$

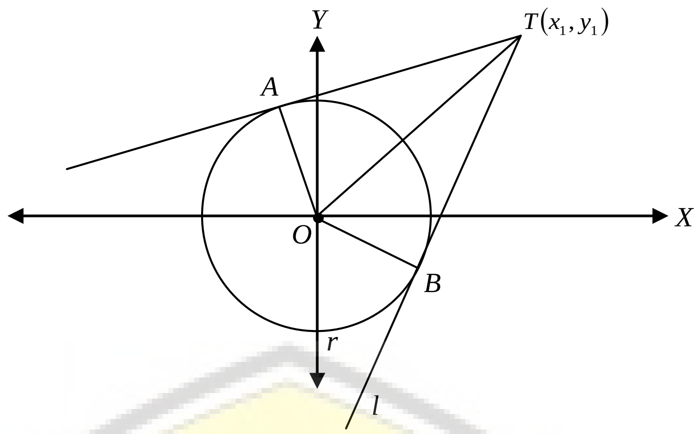
Dengan menggeser pusat lingkaran $(0,0)$ ke titik (a,b) diperoleh persamaan garis kutub untuk $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ sebagai berikut.

$$(x-a)(x_1 - a) + (y-b)(y_1 - b) = r^2$$

2. PANJANG RUAS GARIS SINGGUNG

Jika T adalah sebuah titik yang terletak di luar lingkaran L, maka melalui titik T dapat dibuat dua garis yang menyinggung lingkaran L di titik A dan B. Seperti disajikan pada Gambar 38.

Digital Repository Universitas Jember



Gambar 38. Panjang Ruas Garis Singgung

Kita dapat menentukan garis kutub AB, yang memotong lingkaran L di titik singgungnya. Dari koordinat titik singgung ini dengan mudah dapat ditentukan persamaan garis singgungnya dan panjang ruas garis singgung dari titik T ke titik singgungnya. Tetapi, panjang ruas garis singgung TA dan TB dapat ditentukan secara langsung tanpa mengetahui koordinat titik A dan B. Pada gambar di atas diperlihatkan titik $T(x_1, y_1)$ yang terletak di luar lingkaran $L : x^2 + y^2 = r^2$. Melalui titik T dibuat dua garis singgung yaitu garis singgung k yang mengyinggung L di titik A dan l yang menyinggung L di titik B. Karena T terletak di luar lingkaran L, maka $x_1^2 + y_1^2 > r^2$ sehingga $x_1^2 + y_1^2 - r^2 > 0$. Karena jari-jari lingkaran OA dan OB tegak lurus pada garis singgung TA dan TB. Sehingga diperoleh panjang garis singgung TA dan TB adalah

$$TA = TB = \sqrt{(OT)^2 - r^2} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 - r^2}$$

Secara umum, jika $T(x_1, y_1)$ terletak di luar lingkaran

$L : x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ maka $x_1^2 + y_1^2 + Ax_1 + By_1 + C > 0$. Panjang ruas garis singgung dari titik T ke titik singgungnya adalah

$$\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + Ax_1 + By_1 + C}\,.$$

Digital Repository Universitas Jember

Contoh 23

Diketahui lingkaran $L : x^2 + y^2 = 25$ dan titik $T(1,-7)$. Tentukan:

a. panjang ruas garis singgung dari titik T ke titik singgung A dan B.
b. persamaan garis singgung di titik A dan B pada lingkaran L

Penyelesaian

a. Dapat disimpulkan titik $T(1,-7)$ terletak di luar lingkaran L, sehingga panjang ruas garis singgung dari titik T ke titik A dan B adalah $TA = TB = \sqrt{25} = 5$.
b. Persamaan garis kutub yang dibangun dari titik $T(1,-7)$ adalah $x - 7y = 25$. Dengan mensubstitusikan $x - 7y = 25$ ke $L : x^2 + y^2 = 25$ diperoleh koordinat titik $A(-3,-4)$ dan koordinat titik $B(4,-3)$. Jadi kita peroleh persamaan garis singgung di $A(-3,-4)$ dan $B(4,-3)$ pada lingkaran $L : x^2 + y^2 = 25$ berturut-turut adalah
$-3x - 4y = 25$ dan $4x - 3y = 25$.

Contoh 24

Tentukan panjang ruas garis singgung dari titik $T(1,2)$ ke lingkaran $L : 2x^2 + 2y^2 - 3x + 8y + 8 = 0$.

Penyelesaian

Karena $2.(1)^2 + 2(2)^2 - 3(1) + 8(2) + 8 = 25 > 0$, maka titik $T(1,2)$ terletak di luar lingkaran.kita tulis persamaan lingkaran dalam bentuk $L : x^2 + y^2 - \frac{3}{2}x + 4y + 4 = 0$ sehingga panjang ruas garis singgung dari titik $T(1,2)$ adalah $\sqrt{1^2 + 2^2 - \frac{3}{2}(1) + 4(2) + 4} = \frac{1}{2}\sqrt{62}$

Jadi panjang ruas garis singgung dari titik $T(1,2)$ adalah $\frac{1}{2}\sqrt{62}$.

Digital Repository Universitas Jember

3. GARIS KUASA DUA LINGKARAN

Kita ambil sebarang lingkaran dengan persamaan

$$L_1 : x^2 + y^2 + A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$$

dan

$$L_2 : x^2 + y^2 + A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$$

yang tidak sepusat. Kita memiliki garis kuasa pada kasus ini yaitu selisih dari persamaan L_1 dan L_2. Sehingga persamaan garis kuasa dari L_1 dan L_2 adalah $L_1 - L_2 = 0$ atau dijabarkan menjadi

$$(A_1 - A_2)x + (B_1 - B_2)y + C_1 - C_2 = 0$$

Persamaan di atas merupakan persamaan yang berbentuk garis lurus (linear). Jika digantikan ke salah satu persamaan lingkaran, maka diperoleh persamaan kuadrat dalam x atau y dengan tiga kemungkinan.

1. Jika $D > 0$ maka L_1 dan L_2 berpotongan di dua titik,
2. Jika $D = 0$ maka L_1 dan L_2 bersinggungan, dan
3. Jika $D < 0$ maka L_1 dan L_2 tidak berpotongan.

Contoh 25

Tentukan titik potong dari lingkaran $L_1 : x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$ dan $L_2 : x^2 + y^2 = 4y$.

Penyelesaian

Garis kuasa dari kedua lingkaran tersebut adalah

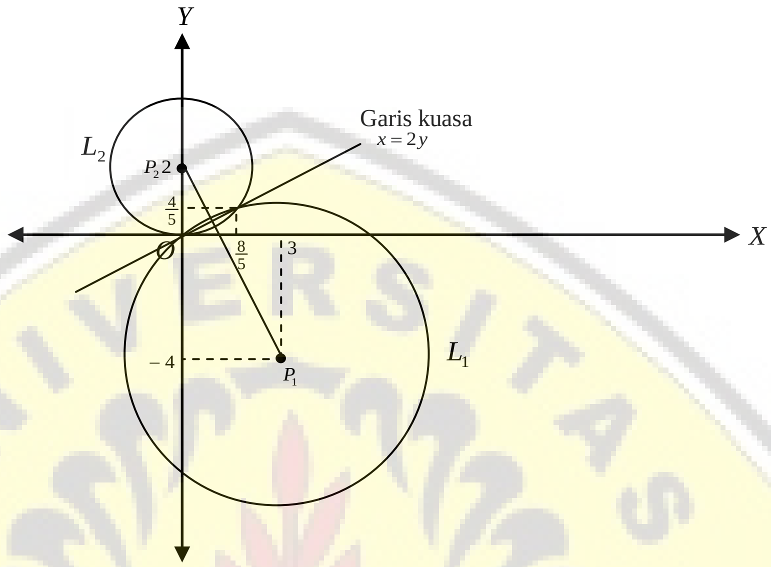
$$L_1 - L_2 = 0$$
$$-6x + 12y = 0$$
$$x = 2y$$

Substitusi $x = 2y$ ke persamaan $L_2 : x^2 + y^2 = 4y$, diperoleh $y_1 = 0$ atau $y_2 = \frac{4}{5}$ dan $x_1 = 0$ atau $x_2 = \frac{8}{5}$.

Digital Repository Universitas Jember

Jadi titik potong lingkaran L_1 dan L_2 adalah $(0,0)$ dan $\left(\frac{4}{5},\frac{8}{5}\right)$.

Perhatikan Gambar 39 yang memperlihatkan lingkaran L_1 dan L_2, serta garis kuasa $x = 2y$ dan kedua titik potongnya.

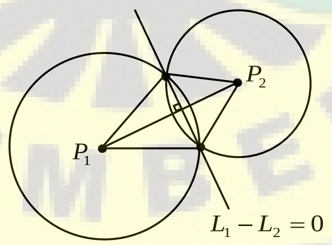


Gambar 39. Garis Kuasa antara dua Lingkaran

4. HUBUNGAN GARIS KUASA DAN GARIS HUBUNG KEDUA PUSATNYA

Garis kuasa pada dua lingkaran selalu tegak lurus pada garis hubung kedua pusat lingkaran. Perhatikan gambar beikut.

a. Berpotongan $(D > 0)$

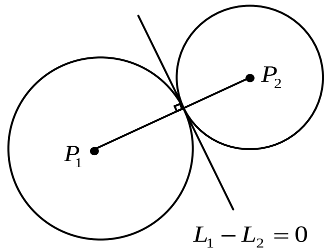


Gambar 40. Garis Kuasa Berpotongan di Dua Titik pada Dua Lingkaran yang Berpotongan

Pada Gambar 40 diperlihatkan lingkaran L_1 dan L_2 yang berpotongan di dua titik. Jika lingkaran L_1 berjari-jari r_1 dan L_2 berjari-jari r_2, maka untuk keadaan ini berlaku $|P_1P_2| < |r_1 + r_2|$

Digital Repository Universitas Jember

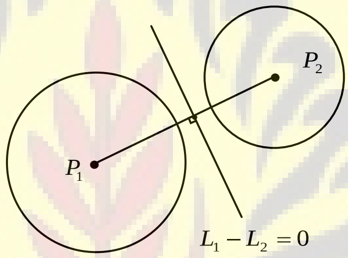
b. Bersinggungan $(D = 0)$



Gambar 41. Garis Kuasa Menyinggung Dua Lingkaran yang Bersinggungan

Pada Gambar 41 diperlihatkan lingkaran L_1 dan L_2 yang bersinggungan di luar. Untuk keadaan ini berlaku $|P_1P_2| = |r_1 + r_2|$

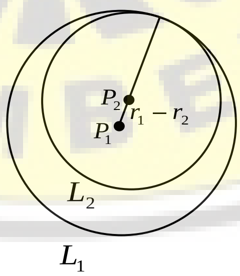
c. Tidak Berpotongan $(D < 0)$



Gambar 42. Garis Kuasa diantara Dua Lingkaran yang Tidak Berpotongan

Pada Gambar 42 diperlihatkan lingkaran L_1 dan L_2 yang tidak berpotongan. Untuk keadaan ini berlaku $|P_1P_2| > |r_1 + r_2|$

d. Bersinggungan Dalam

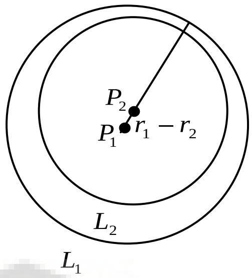


Gambar 43. Garis Kuasa diantara Dua Lingkaran yang Saling Bersinggungan Dalam

Pada Gambar 43 diperlihatkan lingkaran L_1 dan L_2 yang bersinggungan dalam. Untuk keadaan ini berlaku $|P_1P_2| = |r_1 - r_2|$

Digital Repository Universitas Jember

e. Tidak Berpotongan (L_2 di dalam L_1)



Gambar 44. Garis Kuasa diantara Dua Lingkaran yang Saling Tidak Berpotongan

Pada Gambar 44 diperlihatkan lingkaran L_2 dan L_1 yang bersinggungan dalam. Untuk keadaan ini berlaku $|P_1P_2| < |r_1 - r_2|$

G. BERKAS LINGKARAN

Persamaan garis kuasa dari lingkaran dengan persamaan

$$L_1 : x^2 + y^2 + A_1x + B_1y + C_1 = 0$$

dan

$$L_2 : x^2 + y^2 + A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

yang tidak sepusat adalah $L_1 - L_2 = 0$ atau $(A_1 - A_2)x + (B_1 - B_2)y + (C_1 - C_2) = 0$ yang merupakan tali busur persekutuan dari kedua lingkaran itu. Untuk sebarang konstanta $\lambda \neq -1; \forall \in R$, persamaan $L_1 + \lambda L_2 = 0$

atau

$$x^2 + y^2 + A_1x + B_1y + C_1 + \lambda(x^2 + y^2 + A_2x + B_2y + C_2) = 0$$

merupakan lingkaran yang melalui titik potong L_1 dan L_2. Bentuk ini dinamakan berkas lingkaran yang dibangun oleh L_1 dan L_2. Dalam keadaan $\lambda = -1$ diperoleh garis kuasa dari L_1 dan L_2 yang melalui kedua titik potongnya.

Digital Repository Universitas Jember

Contoh 26

Tentukan lingkaran L_3 yang melalui titik asal $(0,0)$ serta titik potong lingkaran $L_1 : x^2 + y^2 - 2x - 6y + 2 = 0$ dan $L_2 : x^2 + y^2 - 5x - 8y + 3 = 0$. Kemudian tunjukkan L_1 dan L_3 berpotongann tegak lurus.

Penyelesaian

Kita akan memanfaatkan persamaan berkas yang dibangun oleh L_1 dan L_2.

$$x^2 + y^2 - 2x - 6y + 2 + \lambda\left(x^2 + y^2 - 5x - 8y + 3\right) = 0$$

Dengan λ suatu konstanta dan $\lambda \neq -1$. Kita akan menentukan λ dari berkas lingkaran ini, sehingga lingkarannya melalui $(0,0)$. Jika titik $(0,0)$ diigantikan ke persamaan ini maka diperoleh $2 + 3\lambda = 0$ sehingga $\lambda = -\dfrac{2}{3}$. Jadi, persamaan lingkaran L_3 adalah

$$x^2 + y^2 - 2x - 6y + 2 - \tfrac{2}{3}\left(x^2 + y^2 - 5x - 8y + 3\right) = 0$$

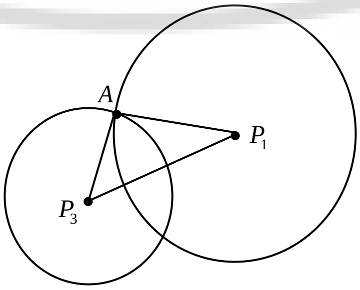
$$3x^2 + 3y^2 - 6x - 18y + 6 - 2x^2 - 2y^2 + 10x + 16y - 6 = 0$$

$$L_3 : x^2 + y^2 + 4x - 2y = 0$$

Sekarang akan ditunjukkan L_1 dan L_3 berpotongan tegak lurus, maka akan kita tentukan dahulu jari-jari dan pusat lingkarannya.

Kita mulai dengan $L_1 : (x-1)^2 + (y-3)^2 = 8$ dan $L_3 : (x+2)^2 + (y-1)^2 = 5$ diperoleh $P_1(1,3)$ dengan $r_1 = 2\sqrt{2}$ dan $P_2(-2,1)$ dengan $r_3 = \sqrt{5}$.

Jika L_1 dan L_3 berpotongan di titik A, maka kondisi agar dua lingkaran saling tegak lurus adalah ΔP_1AP_3 siku-siku di A seperti diperlihatkan Gambar 45.



Gambar 45. Contoh Permasalahan Berkas Lingkaran

Digital Repository Universitas Jember

Karena $P_1A = r_1 = \sqrt{2}$, $P_3A = r_3 = \sqrt{5}$ dan

$P_1P_3 = \sqrt{(1+2)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{13}$

Kita mempunyai $(P_1A)^2 + (P_3A)^2 = (P_3P_1)^2$. Karena pada ΔP_1AP_3 berlaku teorema Pythagoras, ΔP_1AP_3 siku-siku di A sehingga lingkaran L_1 dan L_3 berpotongan tegak lurus.

H. BAHAN DISKUSI

Diberikan sebuah lingkaran yang berpusat di $O(0,0)$ dengan jari-jari 7 satuan. Di dalam lingkaran tersebut terdapat segitiga ABC sama sisi. Titik P terletak pada tembereng OAC dengan jarak titik $O(0,0)$ ke titik P adalah k satuan, dimana $k < r$, r adalah jari-jari. Tentukan $|PA||PB||PC|$

I. RANGKUMAN

1. Lingkaran adalah himpunan semua titik di bidang yang berjarak sama terhadap suatu titik tetap. Selanjutnya titik tetap disebut pusat lingkaran dan jarak yang sama dinamakan jari-jari lingkaran.
2. Persamaan lingkaran
   a. Berpusat di $O(0,0)$ dengan jari-jari r $x^2 + y^2 = r^2$
   b. Berpusat di (a,b) dengan jari-jari r $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$
3. Bentuk umum persamaan lingkaran yaitu $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$
4. Kedudukan titik $A(x_0, y_0)$ terhadap lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$ yaitu
   a. Jika $x_0^2 + y_0^2 = r^2$, maka titik A terletak pada lingkaran
   b. Jika $x_0^2 + y_0^2 < r^2$, maka titik A terletak di dalam lingkaran
   c. Jika $x_0^2 + y_0^2 > r^2$, maka titik A terletak luar lingkaran
5. Kedudukan titik $D(x_0, y_0)$ terhadap lingkaran $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ yaitu
   a. Jika $x_0^2 + y_0^2 + Ax_0 + By_0 + C = 0$, maka titik D terletak pada lingkaran
   b. Jika $x_0^2 + y_0^2 + Ax_0 + By_0 + C < 0$, maka titik D terletak di dalam lingkaran
   c. Jika $x_0^2 + y_0^2 + Ax_0 + By_0 + C > 0$, maka titik D terletak di luar lingkaran

Digital Repository Universitas Jember

6. Persamaan garis singgung pada lingkaran
   a. Hubungan garis dengan lingkaran
      i. jika $D>0$, maka garis g memotong lingkaran L di dua titik.
      ii. jika $D=0$, maka garis g memotong lingkaran L di satu titik (menyinggung).
      iii. jika $D<0$, maka garis g tidak memotong lingkaran L.
   b. Garis singgung dengan gradien tertentu pada lingkaran
      i. Berpusat di $(0,0)$ yaitu $y=mx\pm r\sqrt{1+m^2}$
      ii. Berpusat di (a,b) yaitu $y-b=m(x-a)\pm r\sqrt{1+m^2}$
   c. Garis singgung tegak lurus jari-jari lingkaran
      i. Titik singgung dari $y=mx+r\sqrt{1+m^2}$ ke lingkaran $x^2+y^2=r^2$ yaitu
      $$T_1\left(\frac{-rm}{\sqrt{1+m^2}},\frac{r}{\sqrt{1+m^2}}\right)$$
      ii. Titik singgung dari $y=mx-r\sqrt{1+m^2}$ ke lingkaran $x^2+y^2=r^2$ yaitu
      $$T_2\left(\frac{rm}{\sqrt{1+m^2}},\frac{-r}{\sqrt{1+m^2}}\right)$$
   d. Garis singgung di suatu titik pada lingkaran
      i. Berpusat di $(0,0)$ yaitu $xx_1+yy_1=r^2$
      ii. Berpusat di (a,b) yaitu $(x-a)(x_1-a)+(y-b)(y_1-b)=r^2$
7. Persamaan garis kutub $(x-a)(x_1-a)+(y-b)(y_1-b)=r^2$
8. Panjang ruas garis singgung $\sqrt{x_1^2+y_1^2+Ax_1+By_1+C}$
9. Garis kuasa dua lingkaran memiliki tiga kemungkinan
   a. Jika $D>0$ maka L_1 dan L_2 berpotongan di dua titik
   b. Jika $D=0$ maka L_1 dan L_2 bersinggungan
   c. Jika $D<0$ maka L_1 dan L_2 tidak berpotongan

Digital Repository Universitas Jember

J. TES FORMATIF

Pilihlah salah satu jawaban yang Anda anggap paling tepat!

1. Lingkaran yang persamaannya $x^2 + y^2 + ax + 6y - 87 = 0$ melalui titik $(-6,3)$.

   Pusat lingkaran tersebut adalah .....

   A. $(2,3)$

   B. $(3,1)$

   C. $(-2,-3)$

   D. $(-2,3)$

   E. $(2,-3)$

2. Salah satu persamaan garis singgung yang ditarik dari titik $(0,10)$ ke lingkaran yang persamaannya $x^2 + y^2 = 10$ adalah ...

   A. $y = 10x + 3$

   B. $y = 10x - 3$

   C. $y = 3x - 10$

   D. $y = -3x - 10$

   E. $y = -3x + 10$

3. Persamaan garis singgung lingkaran yang berpusat di titik $P(2,-3)$ dan menyinggung garis $g \equiv 3x - 4y + 7 = 0$ adalah ....

   A. $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$

   B. $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 12 = 0$

   C. $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$

   D. $x^2 + y^2 + 4x + 6y + 12 = 0$

   E. $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 12 = 0$

Digital Repository Universitas Jember

4. Diberikan dua buah lingkaran

   $L_1 \equiv x^2 + y^2 = r^2$

   $L_2 \equiv x^2 + y^2 - 10x + 16 = 0$

   Agar L_1 dan L_2 saling berpotongan, maka batasan nilai r nya adalah ....

   A. $1 < x < 4$

   B. $2 < x < 4$

   C. $2 < x < 8$

   D. $2 < x < 9$

   E. $1 < x < 16$

5. Diberikan dua buah lingkaran $x^2 + y^2 = 36$ dan $(x-6)^2 + y^2 = 36$. Keliling irisan dari kedua lingkaran itu adalah ....

   A. 8π

   B. 7π

   C. 6π

   D. 5π

   E. 6π

K. UMPAN BALIK

Setelah mengerjakan tes formatif, bandingkanlah jawaban Anda dengan kunci jawaban yang terdapat pada akhir bab ini. Jika Anda dapat menjawab dengan benar minimal 80%, maka Anda dinyatakan berhasil dengan baik dan silahkan berlanjut mempelajari materi berikutnya. Sebaliknya jika jawaban yang benar kurang dari 80%, maka silahkan Anda pelajari kembali uraian yang terdapat dalam bab sebelumnya, terutama bagian-bagian yang belum Anda kuasai dengan baik.

L. KUNCI JAWABAN TES FORMATIF

1. C
2. E
3. A
4. C
5. A

Digital Repository Universitas Jember

M. LATIHAN

1. Tentukan titik pusat dan jarii-jari lingkaran dengan persamaan

   a. $x^2+y^2+6x-10y=9$ b. $3x^2+3y^2-4x+6y-12=0$
2. Tentukan persamaan garis lurus yang tegak lurus pada garis $y=2x+3$ dan melalui pusat lingkaran $x^2+y^2-2x-4y=-2$
3. Diketahui titik $A(-5,k)$, k konstanta dan lingkaran $x^2+y^2+2x-5y=21$. Tentukan k agar titik A terletak

   a. pada lingkaran; b. di dalam lingkaran c. di luar lingkaran
4. Jika lingkaran $x^2+y^2+4x+by=12$ melalui titik $(1,7)$, tentukan konstanta b, pusat dan jari-jari lingkarannya.
5. Sebuah lingkaran berpusat di titik $(2,-4)$ dan melalui titik $(5,-8)$, tentukan bentuk umum persamaan lingkaran tersebut.
6. Tentukan titik potong garis $x=2y+5$ dengan lingkaran $x^2+y^2-4x+8y=-10$.
7. Tentukan persamaan lingkaran yang melalui titik-titik $(1,2),(3,1)$ dan $(-3,-1)$.
8. Tentukan persamaan lingkaran yang melalui titik $(1,-4)$ dan $(5,2)$ dan pusatnya pada garis $x-2y+9=0$.
9. Diketahui garis $g: y=2x+m$ dan lingkaran yang berpusat $P(0,0)$ dengan $r=5$. Tentukan konstanta m agar garis g dan lingkaran berpotongan di dua titik, bersinggungan dan tidak berpotongan.
10. Diberikan lingkaran $L: x^2+y^2=5$. Garis g sejajar dengan $x=2y$ dan menyinggung L di titik A dan B. Garis h tegak lurus pada $x=2y$ dan menyinggung L di titik C dan D. Tentukan koordinat A,B,C dan D kemudian hitunglah luas segiempat $ABCD$.
11. Garis g dan h melalui titik $(0,2)$ dan menyinggung lingkaran $L: x^2+y^2=1$ di titik A dan B. Tentukan persamaan garis g dan h, koordinat titik A dan B, serta luas segiempat $OABC$.
12. Garis $g: x=7y-20$ memotong lingkaran $L: x^2+y^2+4x+2y=20$ di titik A dan B. Tunjukkan $OA\perp AB$ kemudian tentukan persamaan lingkaran yang melalui titik $O(0,0), A$ dan B.

Digital Repository Universitas Jember

13. Diketahui garis $g: y = mx$ dan lingkaran $L: x^2 + y^2 - 10y + 20 = 0$. Tentukan konstanta m agar garis g dan lingkaran L berpotongan di dua titik, bersinggungan dan tidak berpotongan.
14. Diketahui garis $g: y = 3x + m$ dan lingkaran $L: x^2 + y^2 - 8x - 4y = 20$. Tentukan konstantan m agar garis g dan lingkaran L berpotongan di dua titik, bersinggungan dan tidak berpotongan.
15. Tentukan persamaan garis singgung pada lingkaran $L: x^2 + y^2 - 4x + 6y = 12$ di titik $A(5,1)$ dan $B(-1,1)$.
16. Tentukan persamaan lingkaran L yang berjari-jari 2 satuan, berpusat di sumbu X menyinggung garis $y = x$ dan garis $y = -x$.
17. Tentukan persamaan lingkaran L yang terletak di kuuadran pertama, berjari-jari 1 satuan, menyinggung sumbu X positif dan garis $3y = 4x$.
18. Tentukan persamaan lingkaran L yang berpusat di titik $A(1,2)$ dan menyinggung garis $g: 5x + 12y = 42$. Tunjukkan bahwa lingkaran L juga menyinggung sumbu Y kemudian tentukan persamaan garis singgung lainnya yang melalui titik $O(0,0)$.
19. Tentukan persamaan lingkaran yang pusatnya di titik $(-2,3)$ dan menyinggung garis $20x - 21y - 42 = 0$.
20. Tentukan persamaan lingkaran yang pusatnya dititik $(-1,-3)$ dan menyinggung garis yang melalui titik $(-2,4)$ dan $(2,1)$.
21. Tentukan persamaan lingkaran yang melalui titik $(-3,2)$ dan $(4,1)$ juga menyinggung sumbu- X .
22. Pada lingkaran $L: x^2 + y^2 + 2x - 2y = 23$ dibuat garis singgung dari titik $A(6,0)$, tentukan.
    a. Persamaan garis kutubnya
    b. Penjang ruas garis singgungnya

23. Pusat lingkaran L_3 terletak pada garis $8x - 3y = 2$ serta melalui titik potong lingkaran $L_1: x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$ dan $L_2: x^2 + y^2 - 10x - 16y + 40 = 0$. Tentukan persamaan lingkaran L_3.

Digital Repository Universitas Jember

24. Tentukan lingkaran L_3 yang melalui titik asal $(0,0)$ serta titik potong lingkaran $L_1 : x^2 + y^2 - 6x - 8y - 11 = 0$ dan $L_2 : x^2 + y^2 - 4x - 6y = 22$.
25. Garis h melaluui titik $A(3,0)$ dan $B(0,4)$. Jika lingkaran L_1 dan L_2 menyinggung garis h, sumbu X dan sumbu Y, tentukan garis kutub pada lingkaran L_1 dan L_2 yang dibangun dari titik $(0,0)$.

Digital Repository Universitas Jember

Kompetensi Dasar

Memahami elips beserta unsur-unsurnya.

Indikator

Setelah mempelajari materi ini, mahasiswa diharapkan memiliki kemampuan untuk:

a. Menentukan persamaan elips
b. Menentukan garis singgung elips

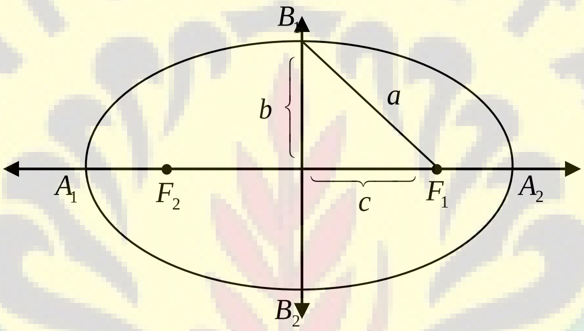
Digital Repository Universitas Jember

BAB 5
ELIPS

A. ELIPS

Definisi

Elips dibentuk oleh bidang irisan yang memotong kerucut tetapi tidak tegak lurus sumbu dan tidak sejajar garis pembangun kerucut (Gambar 24b). Elips merupakan himpunan semua titik yang jumlah jaraknya terhadap dua titik tertentu bernilai tetap. Kedua titik tertentu dinamakan **fokus elips.** Perhatikan Gambar 46.



Gambar 46. Bagian-bagian Elips

Keterangan:

F_1F_2	: sumbu *transver* (sumbu utama)
A_1A_2	: sumbu *mayor* (sumbu panjang)
B_1B_2	: sumbu *minor* (sumbu pendek)
A_1, A_2, B_1, B_2	: puncak-puncak elips
F_1, F_2	: fokus

1. Jika jarak kedua fokus sama dengan $2c$ maka koordinat titik fokus adalah $(c,0)$ dan $(-c,0)$.
2. Jika panjang sumbu panjang $A_1A_2 = 2a$ maka koordinat titik puncak adalah $(a,0)$ dan $(-a,0)$

Digital Repository Universitas Jember

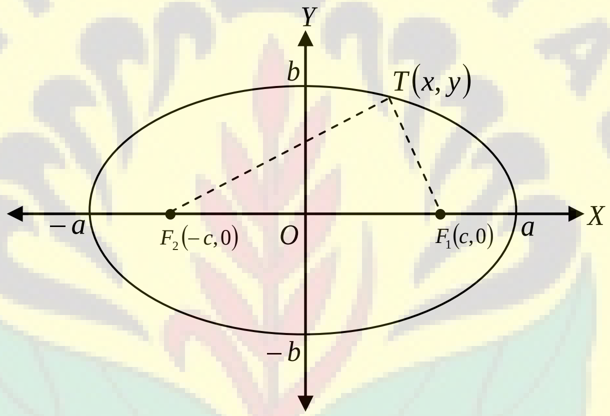
3. Jika panjang sumbu pendek $B_1B_2 = 2b$ maka koordinat titik puncak adalah $(0,b)$ dan $(0,-b)$

Sehingga diperoleh hubungan antara a,b dan c yaitu

$$a^2 = b^2 + c^2 \text{ atau } b^2 = a^2 - c^2 \text{ dengan } a,b \text{ dan } c > 0$$

1. PERSAMAAN ELIPS

Persamaan elips yang berpusat di titik $(0,0)$, dengan titik fokus $F_1(c,0)$ dan $F_2(-c,0)$ dan jumlah jarak kedua fokus adalah $2a$.



Gambar 47. Persamaan Elips

Kita akan menentukan persamaan elips. Ambil sebarang $T(x,y)$ pada Gambar 47 maka berlaku

$$\{T \,|\, |TF_1| + |TF_2| = 2a\}$$
$$\left\{(x,y) \,|\, \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a\right\}$$
$$\left\{(x,y) \,|\, \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right\}$$

Kedua ruas dikuadratkan, diperoleh

$$\left\{(x,y) \,|\, (x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + ((x-c)^2 + y^2)\right\}$$
$$\left\{(x,y) \,|\, (x+c)^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2\right\}$$

Digital Repository Universitas Jember

Kita jabarkan kemudian disederhanakan, sehingga diperoleh

$$\left\{ (x,y) \,|\, xc - a^2 = -a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right\}$$

Kedua ruas dikuadratkan kembali, diperoleh

$$\left\{ (x,y) \,|\, (c^2 - a^2)x^2 - a^2 y^2 = a^2(c^2 - a^2) \right\}$$

Kedua ruas dibagi a^2 dan $(c^2 - a^2)$, diperoleh

$$\left\{ (x,y \,|\, \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{(c^2 - a^2)} = 1 \right\}$$

Dengan memanfaatkan hubungan antara a, b dan c yaitu $a^2 = b^2 + c^2$ diperoleh

$$\left\{ (x,y) \,|\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}$$

Jadi persamaan elips dengan pusat $(0,0)$, fokus $F_1(c,0)$ dan $F_2(-c,0)$ adalah

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

■

Selanjutnya jika kita geser titik pusatnya ke (p,q) maka diperoleh persamaan elips

$$\frac{(x-p)^2}{a^2} + \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1$$ (**Tunjukkan sebagai latihan**)

Contoh 27

Diketahui persamaan elips $9x^2 + 16y^2 - 18x - 96y + 9 = 0$. Tentukan:

1. Koordinat pusat
2. Koordinat puncak
3. Koordinat fokus
4. Panjang sumbu mayor
5. Panjang sumbu minor
6. Sumbu transver (utama)

Penyelesaian

Kita dapat menggunakan cara demikian

$$9x^2 + 16y^2 - 18x - 96y + 9 = 0$$

Digital Repository Universitas Jember

$$9x^2 - 18x + 16y^2 - 96y = -9$$

$$9(x^2 - 2x) + 16(y^2 - 6y) = -9$$

$$9(x^2 - 2x + 1) + 16(y^2 - 6y + 9) = -9 + 9 + 144$$

$$9(x^2 - 1) + 16(y - 3)^2 = 144$$

$$\frac{(x-1)^2}{16} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1$$

sehingga kita dapat menentukan nilai

$a = 4$, $b = 3$, $c = \sqrt{7}$, $p = 1$, dan $q = 3$

Kemudian kita dapat menentukan:

1. Koordinat pusat yaitu $(1,3)$
2. Koordinat puncak
   - $(1+4,3) = (5,3)$
   - $(1-4,3) = (-3,3)$
   - $(1,3+3) = (1,6)$
   - $(1,3-3) = (1,0)$
3. Koordinat fokusnya yaitu $(1+\sqrt{7},3)$ dan $(1-\sqrt{7},3)$
4. Panjang sumbu mayor yaitu $2a = 2(4) = 8$
5. Panjang sumbu minor yaitu $2b = 2(3) = 6$
6. Sumbu transver (utama) yaitu $y = 3$

Contoh 28

Tentukan persamaan elips dengan puncak $(-5,0)$, fokus $(-3,0)$ dan $(3,0)$.

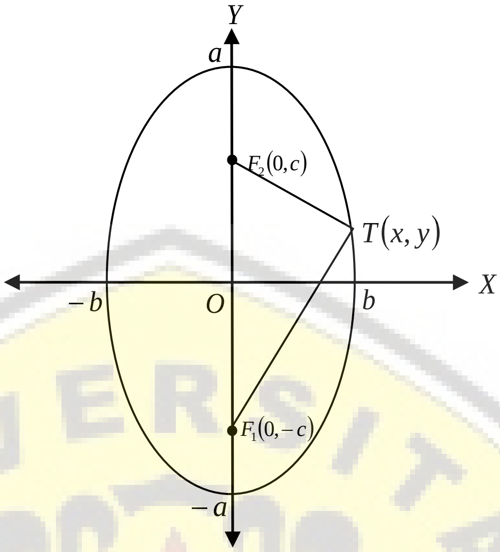
Penyelesaian

Diketahui $a = 5$ dan $c = 3$ maka $b^2 = 25 - 9 = \pm 4$

Jadi persamaan elipsnya adalah $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

Digital Repository Universitas Jember

Kita akan mencoba merotasi elips pada Gambar 47 sejauh $90°$, seperti Gambar 48.



Gambar 48. Sketsa Elips pada Contoh 27

Kita akan menentukan persamaan elips yang berpusat di titik $(0,0)$ dengan titik fokus $F_1(0,-c)$ dan $F_2(0,c)$, jumlah jarak tetap sebesar $2a$, $a > c > 0$ dan $b^2 = a^2 - c^2$, $b > 0$. Ambil sebarang $T(x,y)$ pada Gambar 42, maka diperoleh.

$$\left\{T \mid |TF_1| + |TF_2| = 2a\right\}$$

$$\left\{(x,y) \mid \sqrt{x^2+(y+c)^2} + \sqrt{x^2+(y-c)^2} = 2a\right\}$$

$$\left\{(x,y) \mid \sqrt{x^2+(y+c)^2} = 2a - \sqrt{x^2+(y-c)^2}\right\}$$

Kuadratkan kedua ruas diperoleh

$$\left\{(x,y) \mid a\sqrt{x^2+(y-c)^2} = c^2y^2 - 2cya^2 + a^4\right\}$$

$$\left\{(x,y) \mid a^2x^2 + (a^2-c^2)y^2 = a^2(a^2-c^2)\right\}$$

Gantikan $b^2 = a^2 - c^2$ pada persamaan terakhir, diperoleh

$$\left\{(x,y) \mid a^2x^2 + b^2y^2 = a^2b^2\right\}$$

$$\left\{(x,y) \mid \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1\right\}$$

Digital Repository Universitas Jember

Jadi persamaan elips dengan pusat $(0,0)$, fokus $F_1(0,-c)$ dan $F_2(0,c)$ adalah

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$ ■

Selanjutnya jika kita geser titik pusatnya ke (p,q) maka diperoleh persamaan elips

$$\frac{(x-p)^2}{b^2}+\frac{(y-q)^2}{a^2}=1$$ (**Tunjukkan sebagai latihan**)

Contoh 29

Tentukan titik pusat, sumbu panjang, sumbu pendek dan titik fokus titik elips $E: 16x^2+9y^2+64x-72y+64=0$.

Penyelesaian

Kita akan menuliskan persamaan elips

$E: 16x^2+9y^2+64x-72y+64=0$ dalam kuadrat lengkap

$$16(x^2+4x+4)+9(y^2-8y+16)=16+144-64$$

$$16(x+2)^2+9(y-4)^2=144$$

$$\frac{(x+2)^2}{9}+\frac{(y-4)^2}{16}=1$$

Dari persamaan tersebut dapat diperoleh $b=3$ dan $a=4$. Gunakan persamaan $b^2=a^2-c^2$, $b>0$ untuk memperoleh nilai $c=\sqrt{7}$. Jadi titik pusat elips $(-2,4)$, sumbu panjangnya sama dengan 8, sumbu pendeknya sama dengan 6 dan titik fokusnya $F_1(-2,4-\sqrt{7})$ dan $F_2(-2,4+\sqrt{7})$.

Contoh 30

Tentukan persamaan elips yang memiliki puncak di titik $(3,2)$, sumbu utama sejajar sumbu X, sumbu mayor 8, dan sumbu minor 6.

Penyelesaian

- Pusat elips di $(3,2)$, artinya nilai $p=3$ dan $q=2$

Digital Repository Universitas Jember

- Sumbu mayor 8, artinya $2a = 8$, sehingga $a = 4$
- Sumbu minor 6, artinya $2b = 6$, sehingga $b = 3$
- Sumbu utama sejajar sumbu X .

Sehingga persamaan elips adalah $\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$

2. GARIS SINGGUNG ELIPS

Sama halnya dengan lingkaran. Suatu garis lurus dapat memotong, menyinggung atau tidak memotong dan tidak menyinggung elips. Misalkan persamaan garis yang gradiennya m adalah $y = mx + n$ pada persamaan elips $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ atau $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ kemudian substitusikan $y = mx + n$ sehingga diperoleh

$$b^2x^2 + a^2(mx+n)^2 = a^2b^2$$

$$b^2x^2 + a^2(m^2x^2 + 2mnx + n^2) = a^2b^2$$

$$b^2x^2 + a^2m^2x^2 + 2a^2mnx + a^2n^2 = a^2b^2$$

$$(b^2 + a^2m^2)x^2 + (2a^2mn)x + (a^2n^2 - a^2b^2) = 0$$

Persamaan di atas merupakan persamaan kuadrat, sehingga kita dapat menentukan persamaan garis singgungnya dengan memenuhi syarat $D = 0$, diperoleh

$$(2a^2mn)^2 - 4(b^2 + a^2m^2)(a^2n^2 - a^2b^2) = 0$$

$$4a^4m^2n^2 - 4(a^2b^2n^2 - a^2b^4 + a^4m^2n^2 - a^4b^2m^2) = 0$$

$$-a^2b^2n^2 + a^2b^4 + a^4b^2m^2 = 0$$

$$a^2b^2(-n^2 + b^2) = -a^4b^2m^2$$

$$-n^2 + b^2 = \frac{-a^4b^2m^2}{a^2b^2}$$

$$n^2 = a^2m^2 + b^2$$

$$n = \pm\sqrt{a^2m^2 + b^2}$$

Digital Repository Universitas Jember

Jadi garis singgung elips $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ dengan gradien m adalah

$$y = mx \pm \sqrt{b^2 + a^2m^2}$$

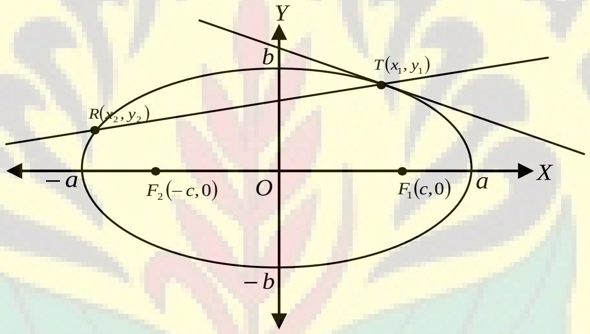
Selanjutnya, dengan cara menggeser pusat elips dari $O(0,0)$ ke titik (p,q) diperoleh garis singgungnya adalah

$$y - q = m(x - p) \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$$

3. GARIS SINGGUNG MELALUI TITIK PADA ELIPS

Titik $T(x_1, y_1)$ dan $R(x_2, y_2)$ terletak pada elips $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Perhatikan Gambar 49.



Gambar 49. Garis Singgung melalui Sebuah Titik pada Elips

Karena T dan R pada elips maka ada hubungan.
Untuk $T(x_1, y_1)$ diperoleh

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1 \text{ atau } b^2x_1^2 + a^2y_1^2 = a^2b^2 \text{ ....(1)}$$

Untuk $R(x_2, y_2)$ diperoleh

$$\frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}=1 \text{ atau } b^2x_2^2 + a^2y_2^2 = a^2b^2 \text{ ....(2)}$$

Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh

$$b^2x_1^2 + a^2y_1^2 = b^2x_2^2 + a^2y_2^2$$

Digital Repository Universitas Jember

$$b^2(x_1^2 - x_2^2) = a^2(y_2^2 - y_1^2)$$

$$b^2(x_1^2 - x_2^2) = -a^2(y_1^2 - y_2^2)$$

$$-\frac{b^2}{a^2} = \frac{(y_1^2 - y_2^2)}{(x_1^2 - x_2^2)} = \frac{(y_1 - y_2)(y_1 + y_2)}{(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)}$$

$$\frac{-b^2(x_1 + x_2)}{a^2(y_1 + y_2)} = \frac{(y_1 - y_2)}{(x_1 - x_2)}$$

Gradien garis TR

$$m_{TR} = \frac{(y_1 - y_2)}{(x_1 - x_2)}$$

Persamaan garis TR adalah

$$y - y_1 = m_{TR}(x - x_1)$$

$$y - y_1 = \frac{(y_1 - y_2)}{(x_1 - x_2)}(x - x_1)$$

Jika garis TR diputar berpusat di T dan pada saat titik R berimpit dengan titik T maka dalam hal ini garis TR merupakan garis singgung elips di titik T. Sehingga diperoleh bahawa $x_1 = x_2$ dan $y_1 = y_2$. Akibatnya TR menjadi garis singgung di titik T dan persamaannya adalah

$$y - y_1 = \frac{(y_1 - y_2)}{(x_1 - x_2)}(x - x_1)$$

$$y - y_1 = \frac{-b^2(x_1 + x_2)}{a^2(y_1 + y_2)}(x - x_1)$$

$$y - y_1 = \frac{-b^2}{a^2}\frac{2x_1}{2y_1}(x - x_1)$$

$$y - y_1 = \frac{-b^2}{a^2}\frac{x_1}{y_1}(x - x_1)$$

$$a^2 y_1 y - a^2 y_1^2 = -b^2 x_1 x + b^2 x_1^2$$

$$b^2 x_1 x + a^2 y_1 y = a^2 y_1^2 + b^2 x_1^2$$

$$x_1 x + \frac{a^2 y_1 y}{b^2} = \frac{a^2 y_1^2}{b^2} + x_1^2$$

Digital Repository Universitas Jember

$$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=\frac{y_1^2}{b^2}+\frac{x_1^2}{a^2}$$

Kita gunakan persamaan (1)

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1$$

Sehingga diperoleh persamaan garis singgung elips yang berpusat $(0,0)$ dengan titik singgung (x_1,y_1) adalah

$$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$$

Kita coba geser elips dengan pusat $(0,0)$ ke pusat (p,q) sehingga diperoleh persamaan elips dengan pusat (p,q) adalah $\frac{(x-p)^2}{a^2}+\frac{(y-q)^2}{b^2}=1$. Jadi dengan mudah dapat kita tentukan persamaan garis singgung elips yang berpusat di (p,q) dengan titik singgung (x_1,y_1) adalah

$\frac{(x_1-p)(x-p)}{a^2}+\frac{(y_1-q)(y-q)}{b^2}=1$ (**Tunjukkan sebagai latihan**)

Contoh 31

Tentukan persamaan garis singgung elips $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1$ yang melalui titik $(4,1)$.

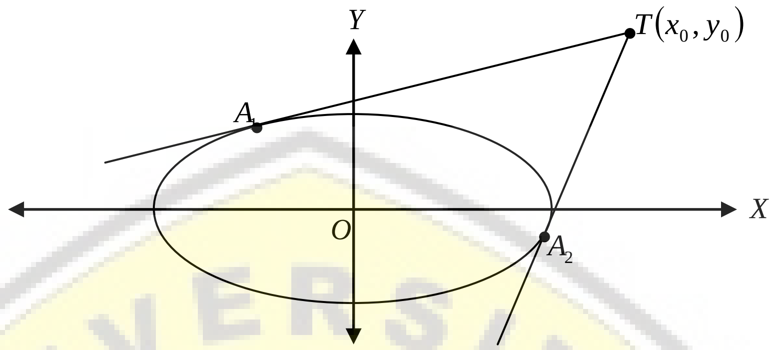
Penyelesaian

Persamaan garis singgung yang melalui titik $(4,1)$ adalah $\frac{4x}{20}+\frac{y}{5}=1$ atau $x+y=5$.

Digital Repository Universitas Jember

4. GARIS SINGGUNG MELALUI SEBUAH TITIK DI LUAR ELIPS

Sekarang kita akan menentukan persamaan garis singgung pada elips yang melalui titik $T(x_0, y_0)$ di luar elips. Perhatikan Gambar 50.



Gambar 50. Garis singgung melalui Sebuah Titik di Luar Elips

Misalkan persamaan elipsnya $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ sedangkan $A(x', y')$ merupakan suatu titik singgung. Kita dapat menentukan persamaan garis singgung di A adalah

$$\frac{x'x}{a^2}+\frac{y'y}{b^2}=1$$

Karena titik A pada elips maka memenuhi $\frac{(x')^2}{a^2}+\frac{(y')^2}{b^2}=1$ .... (1)

Dan karena garis singgung di T maka memenuhi $\frac{x'x_0}{a^2}+\frac{y'y_0}{b^2}=1$ .... (2)

Dari persamaan (1) dan (2) sehingga x' dan y' dapat ditentukan dan kita dapat mencari persamaan garis singgungnya. Untuk lebih jelasnya materi ini, pahami contoh berikut.

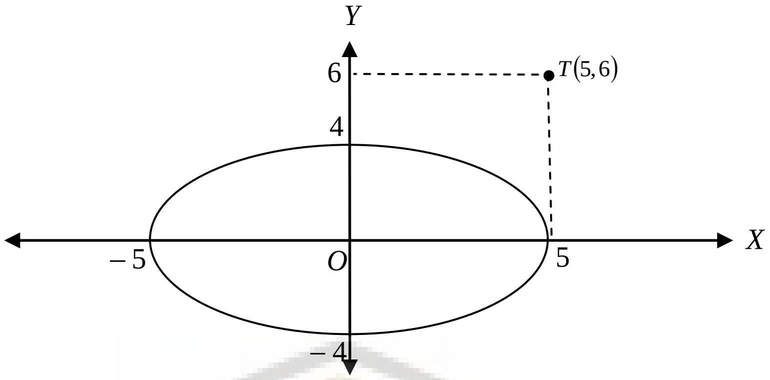
Contoh 32

Tentukan persamaan garis singgung pada elips $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ dari titik $T(5,6)$.

Penyelesaian

perhatikan Gambar 51.

Digital Repository Universitas Jember



Gambar 51. Persamaan Garis Singgung Elips pada Contoh 30

Misalkan $Q(x_0, y_0)$ suatu titik singgung. Kita dapat menentukan persamaan garis singgung di Q yaitu

$$\frac{x_0 x}{25} + \frac{y_0 y}{16} = 1$$

Sehingga berlaku juga persamaan

$$\frac{x_0^2}{25} + \frac{y_0^2}{16} = 1$$

atau

$$16x_0^2 + 25y_0^2 = 400 \text{ .... } (1)$$

Karena titik $T(5,6)$ pada garis singgung maka berlaku

$$\frac{5x_0}{25} + \frac{16y_0}{16} = 1$$

atau

$$x_0 = \frac{40 - 15y_0}{8} \text{ .... } (2)$$

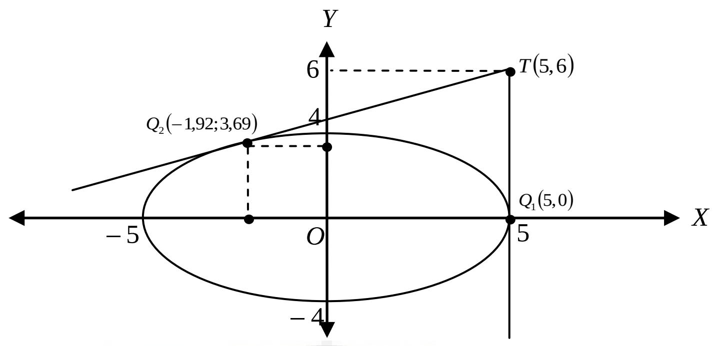
Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh

$y_0 = 0$ atau $y_0 = 3{,}33$ substitusikan ke persamaan (2)

Saat $y_0 = 0$ diperoleh $x_0 = 5$ sehingga koordinat garis singgung adalah $(5, 0)$

Saat $y_0 = 3{,}69$ diperoleh $x_0 = -1{,}92$ sehingga koordinat garis singgung adalah $(-1.92, 3.69)$

Digital Repository Universitas Jember



Gambar 52. Koordinat Garis Singgung elips pada Contoh 30

Jadi diperoleh persamaan garis singgung di Q_1 adalah $\frac{5x}{25}+\frac{0y}{16}=1$ atau $x=5$ dan persamaan garis singgung di Q_2 adalah $\frac{-1{,}92x}{25}+\frac{3{,}69y}{16}=1$.

5. PERSAMAAN KUTUB PADA ELIPS

Perhatikan kembali Gambar 52, kita mempunyai dua garis singgung yang melalui titik $T(x_0, y_0)$ di luar elips. Misalkan persamaan elips $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, titik $A_1(x_1, y_1)$ dan $A_2(x_2, y_2)$ merupakan titik-titik singgung dari garis-garis singgung elips yang melalui titik $T(x_0, y_0)$ di luar elips.

- Persamaan garis singgung di A_1 adalah $\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$, karena T pada garis singgung maka

  $\frac{x_1x_0}{a^2}+\frac{y_1y_0}{b^2}=1$ .... (1)

- Persamaan garis singgung di A_2 adalah $\frac{x_2x}{a^2}+\frac{y_2y}{b^2}=1$, karena T pada garis singgung maka

  $\frac{x_2x_0}{a^2}+\frac{y_2y_0}{b^2}=1$ .... (2)

Dari persamaan (1) dan (2) kita dapat menyimpulkan bahwa titik-titik A_1 dan A_2 terletak pada garis dengan persamaan $\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$.

Digital Repository Universitas Jember

Jadi persamaan $\frac{x_1 x}{a^2}+\frac{y_1 y}{b^2}=1$ merupakan persamaan kutub dari T terhadap elips $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Catatan

Jika T **pada** elips maka garis kutubnya menjadi **garis singgung**

Jika T **di luar** elips maka garis kutubnya menjadi **tali busur singgung**

Jika T **di dalam** elips maka garis kutubnya **tidak memotong elips**

Contoh 33

Titik $(-2,-1)$ terletak di luar elips $5x^2+y^2=5$. Tentukan persamaan garis singgung elips yang dapat ditarik melalui titik $(-2,-1)$.

Penyelesaian

$$5x^2+y^2=5$$

$$x^2+\frac{y^2}{5}=1$$

Garis kutub titik $(-2,-1)$ adalah $-2x-\frac{1}{5}y=1$ atau $y=-10x-5$.

Garis kutub kita potongkan dengan elips dan kita dapatkan titik singgungnya yaitu

$$5x^2+y^2=5$$

$$5x^2+(-10x-5)^2=5$$

$$(7x+2)(3x+2)=0$$

$$x_1=-\frac{2}{7} \text{ atau } x_2=-\frac{2}{3}$$

Sehingga

- Untuk $x_1=-\frac{2}{7}$ kita dapatkan titik singgungnya $\left(-\frac{2}{7},-\frac{15}{7}\right)$, kemudian kita dapat menentukan garis singgungnya yaitu $2x+3y+7=0$

Digital Repository Universitas Jember

- Untuk $x_2 = -\frac{2}{3}$ kita dapatkan titik singgungnya $\left(-\frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right)$, kemudian kita dapat menentukan garis singgungnya yaitu $2x - y + 3 = 0$

Jadi persamaan garis singgung elips yang dapat ditarik melalui titik $(-2,-1)$ yaitu $2x + 3y + 7 = 0$ dan $2x - y + 3 = 0$.

B. BAHAN DISKUSI

Pilihlah sebarang elips kemudian sketsalah pada bidang koordinat dilengkapi dengan unsur-unsurnya, selanjutnya tentukan salah satu persamaan garis singgungnya.

C. RANGKUMAN

1. Persamaan elips dengan pusat $(0,0)$, fokus $F_1(c,0)$ dan $F_2(-c,0)$ yaitu
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$
2. Persamaan elips dengan pusat (p,q) yaitu $\frac{(x-p)^2}{a^2} + \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1$
3. Persamaan garis singgung elips dengan pusat $(0,0)$ yaitu $y = mx \pm \sqrt{b^2 + a^2m^2}$ dan dengan pusat (p,q) yaitu $y - q = m(x-p) \pm \sqrt{b^2 + a^2m^2}$
4. Persamaan garis singgung melalui sebuah titik pada elips yang berpusat di $(0,0)$ yaitu $\frac{x_1x}{a^2} + \frac{y_1y}{b^2} = 1$ dan yang berpusat di (p,q) yaitu $\frac{(x_1-p)(x-p)}{a^2} + \frac{(y_1-q)(y-q)}{b^2} = 1$

Digital Repository Universitas Jember

D. TES FORMATIF

Pilihlah salah satu jawaban yang Anda anggap paling tepat!

1. Persamaan parabola dengan titik api di $(-3,0)$ dan persamaan garis direktriks $x-3=0$, yaitu ....
   A. $y^2 = 12x$
   B. $y^2 = -12x$
   C. $y^2 = 4x$
   D. $y^2 = 8x$
   E. $y^2 = -8x$
2. Persamaan elips yang berpusat di $O(0,0)$ dengan titik fokus $(0,-4)$ dan eksentrisitasnya $\frac{2}{5}$, yaitu ....
   A. $100x^2 + 84y^2 = 8.400$
   B. $84x^2 + 100y^2 = 8.400$
   C. $64x^2 + 100y^2 = 8.400$
   D. $\frac{x^2}{84} - \frac{y^2}{100} = 1$
   E. $\frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{84} = 1$
3. Jika diketahui persamaan elips $x^2 + 4y^2 - 4x - 8y - 92 = 0$, maka koordinat titik fokusnya adalah ...
   A. $(2 \pm 5\sqrt{3}, 2)$
   B. $(2 \pm 5\sqrt{3}, 1)$
   C. $(1 \pm 5\sqrt{3}, 2)$
   D. $(3 \pm 5\sqrt{3}, 2)$
   E. $(3 \pm 5\sqrt{3}, 1)$

Digital Repository Universitas Jember

4. Persamaan elips yang berpusat di titik asal $O(0,0)$ dengan titik fokus $(0,-4)$ dan eksentrisitasnya $\frac{2}{5}$ adalah ..

   A. $\frac{x^2}{84}-\frac{y^2}{100}=1$

   B. $\frac{x^2}{84}+\frac{y^2}{100}=1$

   C. $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{84}=1$

   D. $\frac{x^2}{100}-\frac{y^2}{84}=1$

   E. $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{84}=-1$

5. Persamaan elips yang berpusat di titik asal $O(0,0)$, salah satu fokusnya terletak di titik $(0,3)$, dan panjang sumbu mayornya 10 yaitu ...

   A. $25x^2-16y^2=400$

   B. $25x^2+16y^2=100$

   C. $25x^2-16y^2=100$

   D. $25x^2+16y^2=200$

   E. $25x^2+16y^2=400$

E. UMPAN BALIK

Setelah mengerjakan tes formatif, bandingkanlah jawaban Anda dengan kunci jawaban yang terdapat pada akhir bab ini. Jika Anda dapat menjawab dengan benar minimal 80%, maka Anda dinyatakan berhasil dengan baik dan silahkan berlanjut mempelajari materi berikutnya. Sebaliknya jika jawaban yang benar kurang dari 80%, maka silahkan Anda pelajari kembali uraian yang terdapat dalam bab sebelumnya, terutama bagian-bagian yang belum Anda kuasai dengan baik.

Digital Repository Universitas Jember

F. KUNCI JAWABAN

1. B
2. A
3. B
4. B
5. E

G. LATIHAN

1. Tentukan titik pusat dan fokus dari persamaan.

   a. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$

   b. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$

   c. $\frac{(x-2)^2}{100}+\frac{(y-6)^2}{64}=1$

   d. $9x^2+y^2=9$

   e. $\frac{1}{2}x^2+2y^2=8$

   f. $\frac{(x-5)^2}{25}+\frac{(y+2)^2}{64}=1$

2. Tentukan persamaan elips dengan syarat:

   a. Puncak $(-8,0)$ dan $(8,0)$, fokus $(5,0)$ dan $(-5,0)$

   b. Puncak $(-5,0)$ dan $(5,0)$, panjang sumbu *minor* 6

   c. Puncak $(-3,0)$ dan $(3,0)$, panjang sumbu *minor* 4

3. Sketsalah elips dengan fokus $(0,c)$ dan $(0,-c)$ titik puncak $(b,0),(-b,0),(0,a)$ dan $(0,-a)$.

4. Tentukan persamaan garis singgung elips melalui titik pada elips, yang koordinatnya tertulis di belakang persamaan elips.

   a. $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{25}=1;(-6,4)$

   b. $x^2+9y^2=90;(-2,-6)$

   c. $9x^2+4y^2=25;(-\frac{4}{3},\frac{3}{2})$

   d. $x^2+2y^2=6$ dengan absis $=2$

   e. $3x^2+y^2=16$ dengan ordinat $=-2$

Digital Repository Universitas Jember

5. Tentukan persamaan garis singgung pada elips $E: 4x^2 + y^2 = 5$ dan garis $g: 2x + y = 3$. Kemudian sketsa gambar elips E, garis g dan kedua garis singgungnya.
6. Tentukan titik pusat, sumbu panjang, sumbu pendek, dan titik fokus pada elips $E: 4x^2 + 9y^2 - 24x - 18y + 9 = 0$. Tunjukkan elips E menyinggung sumbu Y kemudian gambarkan grafiknya.
7. Garis g melalui titik $(1,2)$ yang menyinggung elips $E: 4x^2 + 9y^2 = 36$. Tentukan persamaan garis singgung beserta titik singgungnya. Kemudian gambarkan elips E beserta kedua garis singgungnya.
8. Elips E_2 diperoleh dengan menggeser elips $E_1: 25x^2 + 9y^2 = 225$ sebesar 3 satuan ke kiri dan 2 satuan ke bawah. Tentukan persamaan E_2, titik pusat, sumbu panjang, sumbu pendek, dan gambarlah grafiknya.
9. Tentukan persamaan ellip yang pusatnya di titik (1, 2), fokusnya di titik (6, 2) serta melalui titik (4, 6).
10. Tentukan persamaan ellip yang pusatnya di origin, salah satu fokusnya di (0,3) dan panjang setengah sumbu *mayor*nya 5.
11. Tentukan persamaan ellip yang pusatnya di origin, sumbu *mayor*nya sumbu X, dan melalui titik (4,3) dan (6,2).
12. Sebuah titik bergerak sedemikian hingga jumlah jaraknya dari titik (2,-3) dan (2,7) adalah 12. Tentukan persamaan tempat kedudukan titik tersebut.
13. Sebuah titik bergerak sedemikian hingga jaraknya dari titik (3,2) adalah setengah dari jaraknya ke garis $x + 2 = 0$. Tentukan persamaan tempat kedudukan titik tersebut dan apa bentuk kurvanya?
14. Tentukan persamaan ellip yang pusatnya di (4,-1), fokusnya di (1,-1) dan melalui titik (8,0).
15. Tentukan persamaan ellip yang pusatnya dititik (3,1), puncaknya di (3,-2), dan eksentrisitenya $\frac{1}{3}$.
16. Sebuah ruas garis AB panjangnya 12 satuan dan memuat titik $P(x, y) = 8$ satuan dari A, bergerak sedemikian sehingga A selalu pada sumbu Y dan B selalu pada sumbu X. Tentukan persamaan tempat kedudukan titik P tersebut.

Digital Repository Universitas Jember

17. Tentukan persamaan garis singgung ellip $x^2 + 4y^2 - 4x - 8y - 92 = 0$ yang tegaklurus garis $2x - y - 3 = 0$.
18. Sebuah titik bergerak sedemikian hingga jaraknya dari titik (3,2) adalah setengah dari jaraknya ke garis $x + 2 = 0$. Tentukan tempat kedudukan titik tersebut dan apa bentuk kurvanya?

Digital Repository Universitas Jember

Kompetensi Dasar

Memahami parabola beserta unsur-unsurnya.

Indikator

Setelah mempelajari materi ini, mahasiswa diharapkan memiliki kemampuan untuk:

a. Menentukan persamaan parabola
b. Menentuka Garis Singgung Parabola

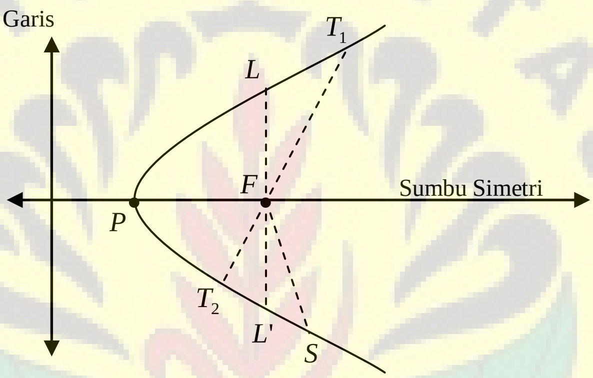
Digital Repository Universitas Jember

BAB 6
PARABOLA

A. PARABOLA

Definisi

Parabola adalah himpunan semua titik (tempat kedudukan titik-titik) yang berjarak sama terhadap sebuah titik tertentu dan sebuah garis tertentu. Titik tertentu disebut fokus (titik api) dan garis tertentu disebut garis arah (direktriks). Perhatikan Gambar 53.



Gambar 53. Parabola

Keterangan:

P	: Titik puncak
F	: Fokus (titik api)
LL'	: Latus rectum (tali busur fokal terpendek)
T_1T_2	: Tali busur fokal (tali busur yang melewati fokus)
FS	: Jari-jari fokal

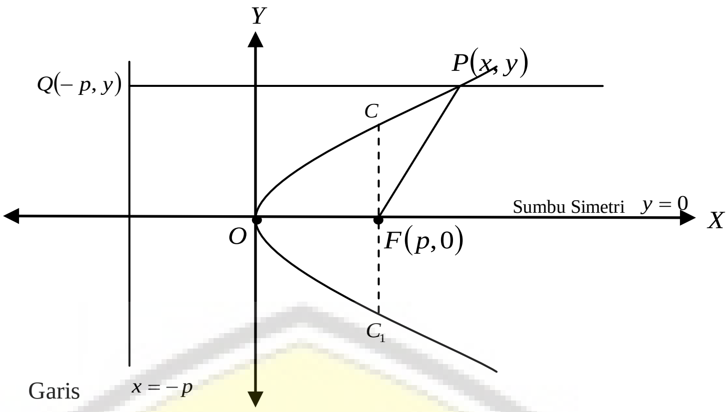
Catatan:
Parabola dapat dilukis jika diketahui garis arah (direktriks) dan titik fokus yang terletak pada suatu garis, dimana garis tersebut tegak lurus garis arah.

1. PERSAMAAN PARABOLA

a. PUNCAK $(0,0)$ dan FOKUS $(p,0)$

Persamaan parabola dengan puncak $O(0,0)$, titik fokus $F(p,0)$ dan persamaan garis arahnya $x = -p$. Perhatikan Gambar 54.

Digital Repository Universitas Jember



Gambar 54. Parabola dengan puncak $(0,0)$ dan Fokus $(p,0)$

Titik $P(x,y)$ pada parabola dan PQ menunjukkan jarak P ke garis arah. Berdasarkan definisi diperoleh

$$\{P \mid |PF| = |PQ|\}$$

$$\left\{(x,y) \mid \sqrt{(x-p)^2+(y-0)^2} = \sqrt{(x+p)^2+(y-y)^2}\right\}$$

$$\{(x,y) \mid (x-p)^2 + y^2 = (x+p)^2\}$$

$$\{(x,y) \mid x^2 - 2px + p^2 + y^2 = x^2 + 2px + p^2\}$$

$$\{(x,y) \mid y^2 = 4px\}$$

Jadi persamaan parabola dengan puncak $O(0,0)$ dan $F(p,0)$ dengan garis arah $x=-p$ adalah

$$y^2 = 4px$$

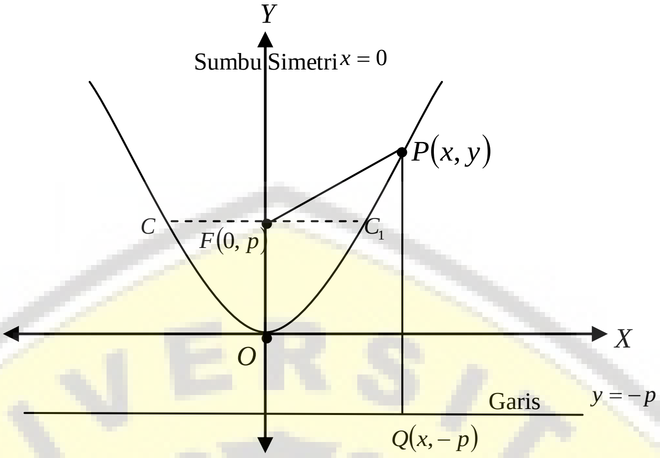
Catatan:

1. Jika $p>0$ maka parabola terbuka ke kanan
2. Jika $p<0$ maka parabola terbuka ke kiri
3. Dengan ketentuan:
   a. Puncak $(0,0)$
   b. Fokus $F(p,0)$
   c. Persamaan direktriks : $x=-p$
   d. Persamaan sumbu simetri : $y=0$
4. Tali busur CC_1 adalah lotus rectum

Digital Repository Universitas Jember

b. PUNCAK $(0,0)$ dan FOKUS $(0,p)$

Perhatikan Gambar 55



Gambar 55. Parabola dengan puncak $(0,0)$ dan Fokus $(0,p)$

Titik $P(x,y)$ pada parabola dan PQ menunjukkan jarak P ke garis arah. Berdasarkan definisi diperoleh

$$\{P \mid |PF| = |PQ|\}$$

$$\left\{(x,y) \mid \sqrt{(x-0)^2+(y-p)^2} = \sqrt{(y+p)^2}\right\}$$

$$\left\{(x,y) \mid x^2+(y-p)^2 = (y+p)^2\right\}$$

$$\left\{(x,y) \mid x^2-y^2-y^2+p^2-p^2-2py-2py=0\right\}$$

$$\left\{(x,y) \mid -4py+x^2=0\right\}$$

$$\left\{(x,y) \mid x^2=4py\right\}$$

Jadi persamaan parabola dengan puncak $O(0,0)$ dan $F(0,p)$ dengan garis arah $y=-p$ adalah

$$\boxed{x^2=4py}$$

Catatan:

1. Jika $p>0$ maka parabola terbuka ke atas

Digital Repository Universitas Jember

2. Jika $p < 0$ maka parabola terbuka ke bawah
3. Dengan ketentuan:
   a. Puncak $(0,0)$
   b. Fokus $F(0, p)$
   c. Persamaan direktriks : $y = -p$
   d. Persamaan sumbu simetri : $x = 0$
4. Tali busur CC_1 adalah lotus rektum

Contoh 34

Tentukan koordinat fokus, persamaan direktriks dan panjang latus rektum parabola $y^2 = -8x$.

Penyelesaian

Persamaan parabola $y^2 = -8x$ artinya $4p = -8$ sehingga $p = -2$. Kita dapat menentukan koordinat titik fokus $F(-2,0)$ dan persamaan direktriksnya adalah $x = 2$ diperoleh dari $x = -p$. Jika garis $x = 2$ dipotongkan terhadap parabola $y^2 = -8x$ diperoleh $y = \pm 4$. Sehingga kita dapat menentukan koordinat latus rectumnya adalah $(-2,4)$ dan $(-2,-4)$. (**Sketsalah Grafik sebagai Latihan**)

Contoh 35

Tentukan persamaan parabola dan persamaan direktriks yang berpuncak di $O(0,0)$ dengan fokus $F(\frac{3}{2},0)$

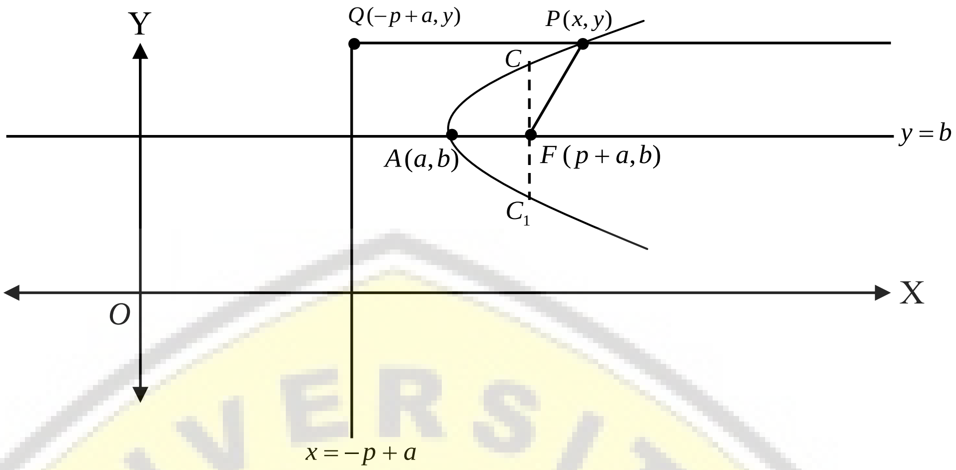
Penyelesaian

Pusat $O(0,0)$ dan fokus $F(\frac{3}{2},0)$ maka nilai $p = \frac{3}{2}$ atau $4p = 6$, sehingga persamaan parabolanya adalah $y^2 = 6x$ dan persamaan direktriksnya adalah $x = -\frac{3}{2}$. (**sketsalah Grafik sebagai Latihan**)

Digital Repository Universitas Jember

c. PUNCAK (a,b)

Perhatikan Gambar 56



Gambar 56. Parabola dengan Puncak (a,b)

Dengan cara menggeser puncak parabola ke (a,b), maka diperoleh persamaan parabola dengan fokus $F(p+a,b)$

$\{(x,y)|(y-b)^2 = 4p(x-a)\}$ (**Tunjukkan sebagai Latihan**)

Catatan:

1. Jika $p > 0$ maka parabola terbuka ke kanan
2. Jika $p < 0$ maka parabola terbuka ke kiri
3. Dengan ketentuan:
   a. Puncak (a,b)
   b. Fokus $F(p+a,b)$
   c. Persamaan direktriks : $x = -p + a$
   d. Persamaan sumbu simetri: $y = b$

Sedangkan dengan menggeser puncak (a,b) maka diperoleh persamaan parabola dengan fokus $F(p+a,b)$

$\{(x,y)|(x-a)^2 = 4p(y-b)\}$ (**Tunjukkan sebagai Latihan**)

Digital Repository Universitas Jember

Catatan:

1. Jika $p > 0$ maka parabola terbuka ke atas
2. Jika $p < 0$ maka parabola terbuka ke bawah
3. Dengan ketentuan:
   a. Puncak (a,b)
   b. Fokus $F(a, p+b)$
   c. Persamaan direktriks : $y = -p + b$
   d. Persamaan sumbu simetri: $x = a$

Contoh 36

Tentukan persamaan parabola jika titik puncaknya $(2,3)$ dan titik fokusnya $(6,3)$.

Penyelesaian

Diketahui titik puncaknya $(2,3)$ maka diperoleh nilai $a = 2, b = 3$.

Dengan titik fokus $(6,3)$, karena puncaknya di (a,b) diperoleh fokus $F(p+a,b)$, $p+a=6$ sehingga $p=4$.

Jadi persamaan parabolaanya adalah $(y-3)^2 = 16(x-2)$ atau $y^2 = 16x + 6y - 41$

Contoh 37

Tentukan koordinat titik puncak, titik fokus, sumbu simetri dan persamaan direktriksnya dari parabola $y^2 = 4x - 4y - 8$

Penyelesaian

Persamaan parabola $y^2 = 4x - 4y - 8$ dapat dibuah menjadi

$y^2 - 4x + 4y + 8 = 0$

$y^2 + 4y = 4x - 8$

$(y+2)^2 - 2^2 = 4x - 8$

$(y+2)^2 = 4x - 8 + 4$

$(y+2)^2 = 4x - 4$

$(y+2)^2 = 4(x-1)$

Digital Repository Universitas Jember

$(y-b)^2 = 4p(x-a)$

Sehingga diperoleh

$4p = 4$ sehingga diperoleh $p = 1$

Sehingga diperoleh $a = 1$ dan $b = -2$. Dari keterangan tersebut dapat kita tentukan:

a. Titik puncak $(a,b) = (1,-2)$
b. Titik fokus $F(p+a,b) = (2,-2)$
c. Persamaan direktriksnya : $x = -p = -1$
d. Persamaan sumbu simetri : $y = b = -2$

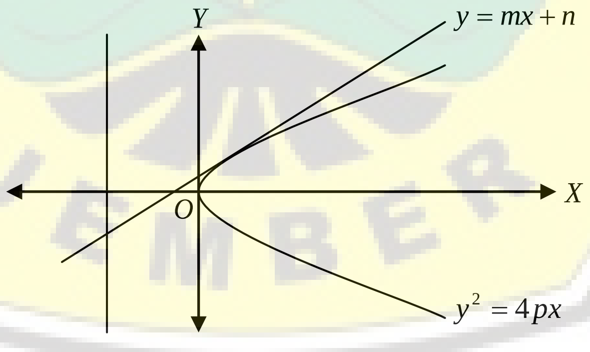
2. PERSAMAAN GARIS SINGGUNG

Definisi

Suatu garis yang memotong parabola tepat pada satu titik merupakan garis singgung parabola.

a. PUNCAK $O(0,0)$

Misalkan diberikan persamaan garis $l : y = mx + n$, sehingga terdapat satu titik pada parabola $P : y^2 = 4px$ yang memenuhi persamaan garis l. Perhatikan Gambar 57.



Gambar 57. Garis $y = mx + n$ Menyinggung Parabola dengan Puncak $O(0,0)$

sehingga kita dapat memperoleh

$$(mx+n)^2 = 4px$$

$$m^2x^2 + 2mnx + n^2 = 4px$$

Digital Repository Universitas Jember

$$m^2x^2 + (2mn - 4p)x + n^2 = 0$$

Agar garis l menyinggung parabola P, maka harus memenuhi syarat menyinggung yaitu $D = 0$.

$$b^2 - 4ac = 0$$
$$(2mn - 4p)^2 - 4m^2n^2 = 0$$
$$4m^2n^2 - 16mnp + 16p^2 - 4m^2n^2 = 0$$
$$-16mnp = -16p^2$$
$$n = \frac{p^2}{mp} = \frac{p}{m}$$

Jadi persamaan garis singgung parabol $y^2 = 4px$ dengan gradien m adalah

$$y = mx + \frac{p}{m}$$

Contoh 38

Tentukan persamaan garis singgung parabola $y^2 = 8x$.dan sejajar garis $l: 2x + y = 6$

Penyelesaian

$y^2 = 4px$ artinya $p = 2$. Gradien persamaan garis $l: 2x + y = 6$ adalah $m_l = \frac{-a}{b} = \frac{-2}{1} = -2$.

Jadi kita dapat menentukan persamaan garis singgungnya yaitu $y = -2x - 1$ atau $2x + y + 1 = 0$

b. PUNCAK (a, b)

Dengan cara yang sama, kita dapat menentukan persamaan garis singgung parabola yang berpuncak di (a, b) yaitu:

$y - b = m(x - a) + \frac{p}{m}$ **. (Tunjukkan sebagai Latihan)**

Digital Repository Universitas Jember

Contoh 39

Diketahui persamaan garis l menyinggung parabola $(y-3)^2 = 8(x-2)$. Garis l berpotongan tegak lurus dengan garis $k: 3y+6x-5=0$. Tentukan persamaan garis singgungnya.

Penyelesaian

Persamaan parabola $(y-3)^2 = 8(x-2)$ artinya $4p = 8$ dan $p = 2$. Koordinat puncaknya $(2,3)$. Persamaan garis $k: 3y+6x-5=0$ memiliki gradient $m_k = \frac{-a}{b} = \frac{-6}{3} = -2$, sehingga gradien garis l dapat kita tentukan yaitu $m_l = \frac{1}{2}$. Berdasarkan informasi di atas dapat kita tentukan persamaan garis singgungnya adalah

$$y-3 = \frac{1}{2}(x-2) + \frac{2}{\frac{1}{2}}$$

$$2y = x+10 \text{ atau } x-2y=-10$$

Jadi persamaan garis singgung l pada parabola dengan persamaan $(y-3)^2 = 8(x-2)$ adalah $x-2y=-10$.

3. PERSAMAAN GARIS SINGGUNG PARABOLA JIKA TITIK SINGGUNGNYA DIKETAHUI (x_1, y_1)

Misalkan titik singgung parabola $y^2 = 4px$ di $T(x_1, y_1)$ dengan persamaan garis $l: y = mx+n$. Karena garis singgung memotong parabola tepat di satu titik maka berlaku

$$y^2 = 4px$$

$$(mx+n) = 4px$$

$$m^2x^2 + 2mnx + n^2 = 4px$$

$$m^2x^2 + (2mn-4p)x + n^2 = 0$$

Karena terdapat satu titik potong pada parabola maka kita dapat menentukan:

Digital Repository Universitas Jember

Absisnya $x_1 = \frac{-b}{2a} = \frac{-(2mn-4p)}{2m^2} = \frac{2pmn}{m^2}$ .... (1)

Ordinatnya $y_1 = mx_1 + n = m\left(\frac{2p-mn}{m^2}\right) + n = \frac{2p}{m}$ .... (2)

Sehingga persamaan garis singgungnya $y_1 = \frac{2p}{m}$ ..... (3)

Karena titik $T(x_1, y_1)$ pada parabola sehingga berlaku $y_1^2 = 4px_1$. Berdasarkan persamaan (1), (2) dan persamaan parabola $y_1^2 = 4px_1$ diperoleh

$$y_1^2 = 4px_1$$

$$\left(\frac{2p}{m}\right)^2 = 4p\left(\frac{2p-mn}{m^2}\right)$$

$$\frac{4p^2}{m^2} = \frac{8p^2-4pmn}{m^2}$$

$$n = \frac{p}{m}$$

Sehingga dengan mensubstitusikan persamaan garis singgung pada persamaan (3) dapat kita peroleh

$$n = \frac{y_1}{2}$$

Dari persamaan $y = mx + n$ kita peroleh

$$y = \left(\frac{2p}{y_1}\right)x + \frac{y_1}{2}$$

$$y_1 y = 2px + \frac{y_1^2}{2}$$

Dengan mensubstitusikan $y_1^2 = 4px_1$ diperoleh

$$y_1 y = 2px + 2px_1$$

$$y_1 y = 2p(x + x_1)$$

Jadi persamaan garis singgung melalui titik (x_1, y_1) pada parabola $y^2 = 4px$ adalah

$$\boxed{y_1 y = 2p(x + x_1)}$$

Digital Repository Universitas Jember

Jika persamaan parabolanya $(y-b)^2 = 4p(x-a)$, maka dengan cara yang sama kita dapat menentukan persamaan garis singgungnya adalah

$(y_1 - b)(y-b) = 2p(x + x_1 - 2a)$ (**Tunjukkan sebagai Latihan**)

Contoh 40

Tentukan persamaan garis singgung melalui titik $T(-2,4)$ pada parabola $y^2 = -8x$

Penyelesaian

Persamaan parabola $y^2 = -8x$ artinya $p = -2$.

Titik $T(-2,4)$ terletak pada parabola $y^2 = -8x$. Sehingga kita dapat menentukan persamaan garis singgung melalui titik $T(-2,4)$ adalah

$$y_1 y = 2p(x + x_1)$$
$$4y = 2(-2)(x-2)$$
$$y = -x + 2$$

Jadi persamaan garis singgung yang melalui titik $T(-2,4)$ pada parabola $y^2 = -8x$ adalah $y = -x + 2$

Contoh 41

Tentukan persamaan garis singgung melalui titik $T(5,8)$ pada parabola $(y-4)^2 = 8(x-3)$.

Penyelesaian

Dari persamaan parabola $(y-4)^2 = 8(x-3)$ diperoleh $p = 2$ dengan puncaknya $(3,4)$. Titik $T(5,8)$ terletak pada parabola $(y-4)^2 = 8(x-3)$. Sehingga persamaan garis singgungnya adalah

$$(y_1 - b)(y-b) = 2p(x + x_1 - 2a)$$
$$(8-4)(y-4) = 4(x + 5 - 6)$$
$$y = x + 3 \text{ atau } x - y = -3$$

Jadi persamaan garis singgung parabola yang melalui titik $T(5,8)$ pada parabola $(y-4)^2 = 8(x-3)$ adalah $x - y = -3$

Digital Repository Universitas Jember

Sekarang kita akan menentukan persamaan garis singgung pada parabola $y^2 = 4px$ yang melalui titik $T(x_1, y_1)$ di luar parabola. Kita misalkan titik singgungnya $Q(x_0, y_0)$, maka persamaan garis singgung di titik Q adalah $y_0 y = p(x + x_0)$.

Karena garis singgung ini melalui titik $T(x_1, y_1)$ maka harus memenuhi persamaan

$$y_0 y_1 = p(x_1 + x_0) \text{ .... (1)}$$

Karena (x_0, y_0) pada parabola maka diperoleh

$$y_0^2 = 2px_0 \text{ .... (2)}$$

Dari persamaan (1) dan (2) dapat kita tentukan (x_0, y_0), sehingga diperoleh persamaan garis singgung yang melalui titik T di luar parabola.

Contoh 42

Tentukan persamaan garis singgung melalui titik $T(-3, -5)$ pada parabola $y^2 = 8x$

Penyelesaian

Dari persamaan parabola $y^2 = 8x$ dapat kita tentukan nilai $p = 2$.

Titik $T(-3, -5)$ tidak terletak pada parabola $y^2 = 8x$. Misalkan titik singgungnya $Q(x_0, y_0)$, maka persamaan garis singgung melalui Q adalah $y_0 y = 2(x + x_0)$. Titik $T(-3, -5)$ terletak pada garis singgung maka

$$y_0 y_1 = p(x_1 + x_0)$$

$$-5y_0 = 2(-3 + x_0) \text{ atau } 2x_0 + 5y_0 = 6 \text{ .... (1)}$$

Q pada parabola, maka

$$y_0^2 = 2px_0$$

$$y_0^2 = 8x_0 \text{ atau } x_0 = \frac{1}{8} y_0^2 \text{ .... (2)}$$

Digital Repository Universitas Jember

Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh

$$2x_0 + 5y_0 = 6$$

$$2\left(\tfrac{1}{8}y_0^2\right) + 5y_0 = 6$$

$$\tfrac{1}{4}y_0^2 + 5y_0 - 6 = 0$$

$$y_0^2 + 20y_0 - 24 = 0$$

Karena tidak dapat difaktorkan maka kita gunakan rumus

$$y_{0(1,2)} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$y_{0(1,2)} = \frac{-20 \pm \sqrt{400 + 96}}{2}$$

$$y_0 = 22 \text{ atau } y_0 = -42$$

Saat $y_0 = 22$ diperoleh $x_0 = -52$ dan saat $y_0 = -42$ diperoleh $x_0 = 108$

Jadi persamaan garis singgung melalui $(-52,108)$ adalah $-52y = 2(x + 22)$

dan persamaan garis singgung melalui $(108,-42)$ adalah $108y = 2(x - 42)$

4. PERSAMAAN KUTUB PADA PARABOLA

Kita misalkan persamaan parabola $y^2 = 4px$, titik-titik $Q(x_1, y_1)$ dan $R(x_2, y_2)$ merupakan titik-titik singgung dari garis-garis singgung yang ditarik dari titik $P(x_0, y_0)$ di luar parabola.

Persamaan garis singgung di Q adalah $y_1 y = p(x + x_1)$ dan persamaan garis singgung di R adalah $y_2 y = p(x + x_2)$.

Karena garis-garis singgung tersebut melalui $P(x_0, y_0)$ maka berlaku $y_1 y_0 = p(x_0 + x_1)$ dan $y_2 y_0 = p(x_0 + x_2)$

Digital Repository Universitas Jember

Hal ini berarti titik Q dan R memenuhi persamaan $y_0 y = p(x + x_0)$. Jadi persamaan garis kutub dari P terhadap parabola $y_0 y = p(x + x_0)$.

Catatan:

Jika P **pada** parabola maka garis kutub menjadi **garis singgung**

Jika P **di luar** parabola maka garis kutub menjadi **tali busur singgung**

Jika P **di dalam** parabola maka garis kutub **tidak memotong parabola**

B. BAHAN DISKUSI

Pilihlah sebarang parabola kemudian sketsalah pada bidang koordinat dilengkapi dengan unsur-unsurnya, selanjutnya tentukan salah satu persamaan garis singgungnya.

C. RANGKUMAN

1. Persamaan parabola dengan puncak $(0,0)$ dan fokus $(p,0)$ adalah $y^2 = 4px$
2. Persamaan parabola dengan puncak $(0,0)$ dan fokus $(0,p)$ adalah $x^2 = 4py$
3. Persamaan parabola dengan puncak (a,b) dan fokus $(p+a,b)$ adalah
$$\{(x,y) \mid (y-b)^2 = 4p(x-a)\}$$
4. Persamaan parabola dengan puncak (a,b) dan fokus $(a,p+b)$ adalah
$$\{(x,y) \mid (x-a)^2 = 4p(y-b)\}$$
5. Persamaan garis singgung dengan puncak $(0,0)$ yaitu $y = mx + \dfrac{p}{m}$
6. Persamaan garis singgung dengan puncak (a,b) yaitu $y - b = m(x-a) + \dfrac{p}{m}$

Digital Repository Universitas Jember

D. TES FORMATIF

Pilihlah salah satu jawaban yang Anda anggap paling tepat!

1. Persamaan parabola dengan puncak $O(0,0)$ dan titik fokus $(3,0)$ yaitu ...

   A. $y^2 = 4px$

   B. $y^2 = 2px$

   C. $y^2 = 12x$

   D. $y^2 = 2x$

   E. $y^2 = 4x$

2. Persamaan parabola yang berpuncak pada titik $(2,3)$ dan persamaan direktriks $x = -1$ yaitu ....

   A. $y^2 - 6y - 12x + 33 = 0$

   B. $y^2 + 6y - 12x + 33 = 0$

   C. $y^2 - 6y - 12x - 33 = 0$

   D. $y^2 + 6y + 12x + 33 = 0$

   E. $y^2 + 6y + 12x - 33 = 0$

3. Persamaan parabola dengan titik puncak di $(2,3)$, sumbu simetri sejajar sumbu Y, dan melalui titik $(3,4)$ yaitu ....

   A. $x^2 - 4x - y - 7 = 0$

   B. $x^2 - 4x + y + 7 = 0$

   C. $x^2 + 4x - y + 7 = 0$

   D. $x^2 + 4x + y + 7 = 0$

   E. $x^2 - 4x - y + 7 = 0$

4. Persamaan garis singgung parabola $(x-3)^2 = 8(y-2)$ dengan gradien 2 yaitu ...

   A. $y = 2x - 12$

   B. $y = 2x - 11$

   C. $y = 2x - 10$

   D. $y = 2x - 9$

   E. $y = 2x - 8$

Digital Repository Universitas Jember

5. Salah satu persamaan garis singgung parabola $x^2 = 8y$ yang melalui titik $(-1,-3)$ adalah ....
   A. $y = x + 2$
   B. $y = -x - 2$
   C. $y = x - 2$
   D. $y = \frac{3}{2}x + \frac{9}{2}$
   E. $y = -\frac{3}{2}x + \frac{9}{2}$

E. UMPAN BALIK

Setelah mengerjakan tes formatif, bandingkanlah jawaban Anda dengan kunci jawaban yang terdapat pada akhir bab ini. Jika Anda dapat menjawab dengan benar minimal 80%, maka Anda dinyatakan berhasil dengan baik dan silahkan berlanjut mempelajari materi berikutnya. Sebaliknya jika jawaban yang benar kurang dari 80%, maka silahkan Anda pelajari kembali uraian yang terdapat dalam bab sebelumnya, terutama bagian-bagian yang belum Anda kuasai dengan baik.

F. KUNCI JAWABAN TES FORMATIF

1. D
2. A
3. E
4. A
5. C

Digital Repository Universitas Jember

G. LATIHAN

1. Tentukan koordinat fokus, persamaan direktriks dan panjang latus rectum parabola yang persamaannya:
   a. $y^2 = 4x$ c. $y^2 = -2x$
   b. b. $y^2 = 3x$ d. $y^2 = -5x$
2. Tentukan panjang latus rectum dari parabola yang persamaannya:
   a. $y^2 = 2x$ c. $y^2 = -3\frac{1}{2}x$
   b. $y^2 = 2px$ d. $x + y^2 = 0$
3. Tentukan persamaan parabola yang berpuncak di $O(0,0)$ dengan:
   a. Fokus $F(-1,0)$
   b. Direktriks dengan persamaan $x + 1\frac{3}{4} = 0$
4. Tentukanlah koordinat fokus, titik puncak, persamaan garis direktriks dan panjang lactus rectum parabola yang diketahui persamaannya:
   a. $(y-2)^2 = 4(x+3)$ c. $y^2 + 4y = 4x - 4$
   b. $(x-3)^2 = 6(y+2)$ d. $y = \frac{1}{2}x^2 - 4x - 6$
5. Tentukan persamaan parabola dengan ketentuan berikut:
   a. Fokus $(4,0)$, direktriks sumbu Y
   b. Fokus $(4,2)$, puncak $(6,2)$
   c. Fokus $(0,2)$, direktriks sumbu $Y = 6$
   d. Puncak $(4,0)$, direktriks sumbu X
6. Tentukan titik potong garis $2y = x + 6$ dengan parabola $y^2 = 8x$, di titik potong ini, tentukan persamaan garis singgung pada parabola. Kemudian sketsalah kedua garis singgungnya.
7. Tentukan persamaan parabola yang memiliki puncak di titik $(1,2)$ dan melalui titik $(2,4)$. Kemudian tentukan persamaan garis singgung pada parabola di titik $A(2,0)$ kemudian sketsalah parabola dan garis singgungnya.
8. Garis g melalui titik $(2,3)$ dan menyinggung parabola $y^2 = 4x$. Tentukan persamaan garis singgung beserta titik singgungnya. Kemudian sketsalah parabola beserta garis singgungnya.

Digital Repository Universitas Jember

9. Tentukan persamaan parabola yang fokusnya dititik (3,0) dan direktriknya $x=-3$.
10. Tentukan tempat kedudukan titik-titik yang bergerak sedemikian hingga jaraknya dari titik (-2,3) sama dengan jarknya ke garis $x+6=0$.
11. Tentukan persamaan parabola yang fokusnya dititik (-2,-1) dan latus rectumnya penghubung titik (-2,2) dan (-2,-4).
12. Tentukan persamaan parabola yang latus rectumnya penghubung titik (3,5) dan $(3,-3)$.
13. Tentukan persamaan parabola yang puncaknya dititik (-2,3) dan fokusnya dititik (1,3).
14. Tentukan persamaan parabola yang puncaknya pada garis $2y-3x=0$, sumbunya sejajar sumbu- X , dan melalui titik (3,5) dan (6,-1).
15. Tentukan persamaan parabola yang sumbu simetrinya sejajar sumbu-X dan melalui titik-titik (3, 3), (6, 5), dan (6, -3).
16. Diketahui persamaan parabola $y^2-4y-6x+13=0$. Tentukan puncak, fokus, panjang latus rectum, dan persamaan direktriknya.
17. Tentukan persamaan parabola yang puncaknya pada garis $7x+3y-4=0$ dan memuat (3,-5) dan $\left(\frac{3}{2},1\right)$ dan sumbunya horizontal.

Digital Repository Universitas Jember

Kompetensi Dasar

Memahami hiperbola beserta unsur-unsurnya.

Indikator

Setelah mempelajari materi ini, mahasiswa diharapkan memiliki kemampuan untuk:

a. Menentukan persamaan hiperbola
b. Menentukan garis singgung hiperbola

Digital Repository Universitas Jember

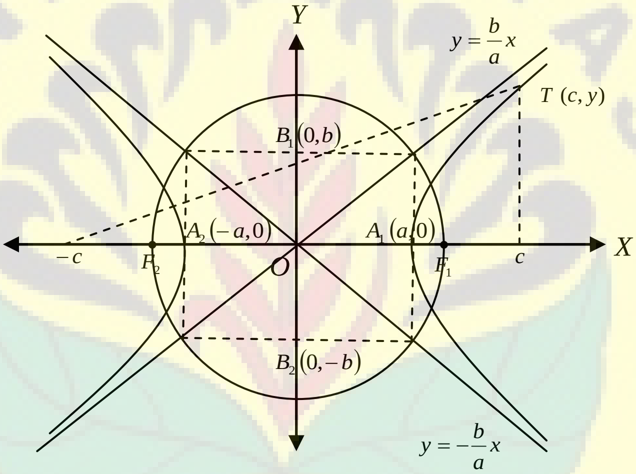
BAB 7
HIPERBOLA

A. HIPERBOLA

Definisi

Hiperbola adalah himpunan semua titik (pada bidang datar) yang selisih jaraknya terhadap dua titik tertentu besarnya tetap. Selanjutnya kedua titik tertentu itu disebut titik api atau fokus hiperbola.

Perhatikan Gambar 58.



Gambar 58. Hiperbola

Keterangan:

F_1 dan F_2 : fokus (titik api)

F_1F_2 : $2c$ (sumbu utama/sumbu transver)

A_1A_2 : $2a$ (sumbu *mayor*)

B_1B_2 : $2b$ (sumbu konjungsi/sumbu *minor*)

1. PERSAMAAN HIPERBOLA

Untuk memperoleh persamaan hiperbola yang paling sederhana maka ambilah hiperbola yang sumbu utamanya dan sumbu sekawannya adalah sumbu-sumbu koordinat dengan fokus $(c, 0)$ dan $(-c, 0)$, selisih jarak terhadap masing-masing fokus adalah $2a$.

Digital Repository Universitas Jember

Ambil sebarang titik pada hiperbola, misalkan $T(x,y)$ dan titik O sebagai pusat hiperbola. Berdasarkan definisi hiperbola diperoleh. (lihat Gambar 58)

$$\{T \,|\, |TF_2| - |TF_1| = 2a\}$$

$$\left\{(x,y) \,|\, \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a\right\}$$

$$\left\{(x,y) \,|\, \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right\}$$

$$\left\{(x,y) \,|\, (x+c)^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + ((x-c)^2 + y^2)\right\}$$

$$\left\{(x,y) \,|\, xc - a^2 = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right\}$$

$$\left\{(x,y) \,|\, x^2c^2 - 2xca^2 + a^4 = a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2)\right\}$$

$$\left\{(x,y) \,|\, c^2x^2 - a^2x^2 - a^2y^2 + a^4 - a^2c^2 = 0\right\}$$

$$\left\{(x,y) \,|\, (c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(-a^2 + c^2)\right\}$$

$$\left\{(x,y) \,|\, a^2 = x^2 - \frac{a^2y^2}{c^2 - a^2}\right\}$$

$$\left\{(x,y) \,|\, \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1\right\}$$

Karena

$$a^2 - c^2 < 0$$

Sehingga

$$c^2 - a^2 = b^2$$

Jadi diperoleh persamaan hiperbola yang fokusnya di $(c,0)$ dan $(-c,0)$ adalah

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Karena $T(x_1, y_1)$ sebarang titik yang diambil, maka setiap titik yang diambil akan memenuhi

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Digital Repository Universitas Jember

Catatan:

1. Pusat $(0,0)$
2. Titik fokus $F_1(-c,0)$ dan $F_2(c,0)$
3. Titik puncak $(-a,0)$ dan $(a,0)$
4. Panjang sumbu *mayor* $= 2a$
5. Panjang sumbu *minor* $= 2b$
6. Persamaan asimptot $y = \pm\frac{b}{a}x$
7. Persamaan direktriks : $x = \pm\frac{a^2}{c}$

Jika titik pusat hiperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ digeser ke titik (p,q) maka diperoleh persamaan hiperbola

$$\frac{(x-p)^2}{a} - \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1$$ **(Tunjukkan sebagai Latihan)**

Catatan:

1. Pusat (p,q)
2. Titik fokus $F_1(p-c,q)$ dan $F_2(p+c,q)$
3. Titik puncak $(p-a,q)$ dan $(p+a,q)$
4. Panjang sumbu *mayor* $= 2a$
5. Panjang sumbu *minor* $= 2b$
6. Persamaan asimptot $y - q = \pm\frac{b}{a}(x-p)$
7. Persamaan direktriks : $x = p \pm \frac{a^2}{c}$

Untuk menentukan garis arah (direktriks) dengan cara sebagai berikut.

Kita ambil sebarang titik $Q(x_1, y_1)$ pada hiperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, maka jarak Q terhadap fokus $F_1(c,0)$ adalah $|F_1Q| = \sqrt{(x_1-c)^2 + y_1^2}$ dan jarak Q terhadap fokus $F_2(-c,0)$ adalah $|F_2Q| = \sqrt{(x_1+c)^2 + y_1^2}$.

Digital Repository Universitas Jember

Dari penjabaran di atas kita dapat menentukan panjang

$$|F_1Q|^2 - |F_2Q|^2 = (x_1 - c)^2 - (x_1 + c)^2$$

$$|F_1Q|^2 - |F_2Q|^2 = 2x_1c + 2x_1c$$

$$|F_1Q|^2 - |F_2Q|^2 = 4x_1c$$

Sedangkan

$$|F_2Q| - |F_1Q| = 2a$$

Dari $|F_1Q|^2 - |F_2Q|^2$ kita dapat menentukan nilai $|F_1Q| + |F_2Q| = \dfrac{2cx_1}{a}$.

Lebih jelasnya perhatikan Gambar 59.

Dengan mengeliminasi

$$\begin{array}{rl} -|F_1Q| + |F_2Q| = 2a & \\ |F_1Q| + |F_2Q| = \dfrac{2cx_1}{a} & + \\ \hline \end{array}$$

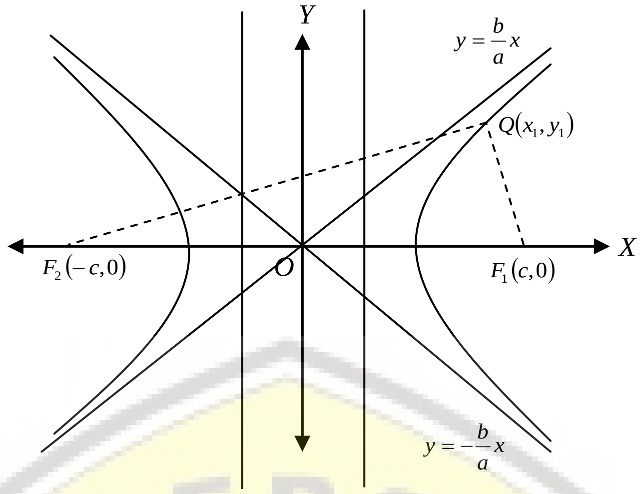
kita dapat menentukan

$|F_1Q| = \dfrac{c}{a}\left(x_1 - \dfrac{a^2}{c}\right)$ merupakan jarak Q ke garis $x = \dfrac{a^2}{c}$ dan,

$|F_2Q| = \dfrac{c}{a}\left(x_1 - \dfrac{a^2}{c}\right)$ merupakan jarak Q ke garis $x = -\dfrac{a^2}{c}$

Jadi garis-garis $x = \pm\dfrac{a^2}{c}$ merupakan garis-garis arah dari hiperbola

Digital Repository Universitas Jember



Gambar 59. Hiperbola dengan Asimptot

Contoh 43

Diketahui persamaan hiperbola $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$, tentukanlah koordinat titik fokus, koordinat titik puncak, persamaan asimptot dan persamaan direktriknya.

Penyelesaian

Dari persamaan parabola $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ diperoleh $a=4$ dan $b=3$ dan $c=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$, sehingga diperoleh

a. Koordinat titik fokus $(-5,0)$ dan $(5,0)$
b. Koordinat titik puncak $(-4,0)$ dan $(4,0)$
c. Persamaan asimptot $y=\pm\frac{3}{4}x$
d. Persamaan direktriks $x=\pm\frac{16}{5}$

Contoh 44

Diketahui persamaan hiperbola $-4x^2+3y^2-24x-18y+27=0$, tentukan:

a. Koordinat titik pusat
b. Koordinat titik puncak
c. Koordinat fokus

Digital Repository Universitas Jember

d. Persamaan asimptot
e. Persamaan direktriks

Penyelesaian

Persamaan hiperbola $-4x^2+3y^2-24x-18y+27=0$ dapat kita ubah menjadi

$$-4x^2+3y^2-24x-18y+27=0$$
$$-4x^2+3y^2-24x-18y=-27$$
$$-4\left(x^2+6x\right)+3\left(y^2-6y\right)=-27$$
$$-4(x+3)^2+3(y-3)^2=-27+27-36$$
$$\frac{(x+3)^2}{9}-\frac{(y-3)^2}{12}=1$$

Dari persamaan di atas dapat kita peroleh

$$p=-3, q=3, a=3, b=2\sqrt{3} \text{ dan } c=\sqrt{21}.$$

Sehingga kita dapat menentukan:

a. Koordinat titik pusat $(-3,3)$
b. Koordinat titik puncak $(-6,-3)$ dan $(0,-3)$
c. Koordinat titik fokus $F_1\left(-3-\sqrt{21},3\right)$ dan $F_2\left(-3+\sqrt{21},3\right)$
d. Persamaan asimptot $y-3=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}(x+3)$
e. Persamaan direktriks $x=-3\pm\frac{3}{7}\sqrt{21}$

2. ASIMPTOT

Garis asimptot hiperbola adalah suatu garis yang melalui pusat hiperbola dan menyinggung hiperbola di titik jauh tak berhingga. Misalkan persamaan garis yang melalui pusat hiperbola dan memotong hiperbola yaitu $y=mx$, sehingga minimal terdapat satu titik pada hiperbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ yang memenuhi persamaan garis di atas. Akibatnya

Digital Repository Universitas Jember

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{(mx)^2}{b^2}=1$$

$$b^2x^2-a^2m^2x^2=a^2b^2$$

$$\left(b^2-a^2m^2\right)x^2=a^2b^2$$

$$x=\pm\sqrt{\frac{a^2b^2}{b^2-a^2m^2}}=\pm\frac{ab}{\sqrt{b^2-a^2m^2}}$$

Sehingga

$$y=\pm\frac{mab}{\sqrt{b^2-a^2m^2}}$$

Jadi koordinat titik potongnya adalah

$$\left(\frac{ab}{\sqrt{b^2-a^2m^2}},\frac{mab}{\sqrt{b^2-a^2m^2}}\right) \text{ dan } \left(\frac{ab}{\sqrt{b^2-a^2m^2}},\frac{mab}{\sqrt{b^2-a^2m^2}}\right)$$

Catatan:

1. Jika $b^2-a^2m^2>0$ maka terdapat dua titik potong yang berlainan
2. Jika $b^2-a^2m^2<0$ maka tidak ada titik potong
3. Jika $b^2-a^2m^2=0$ maka titik potongnya di jauh tak berhingga

Berdasarkan $b^2-a^2m^2=0$ diperoleh $m^2=\frac{b^2}{a^2}$ sehingga $m=\pm\frac{b}{a}$, maka garis $y=mx$ menyinggung hiperbola di jauh tak berhingga. Jadi dapat disimpulkan garis asimptot hiperbola adalah $y=\pm\frac{b}{a}x$.

Persamaan asimptot juga dapat dinyatakan sebagai

$$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0 \text{ atau } \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0$$

Sehingga persamaan asimptotnya adalah

Digital Repository Universitas Jember

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

3. GARIS SINGGUNG HIPERBOLA

Misalkan persamaan garis yang gradiennya m adalah $y = mx + n$ dan persamaan hiperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ atau $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$. Jika pesamaaan garis $y = mx + n$ disubstitusikan ke ke persamaan hiperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, maka diperoleh:

$$b^2x^2 - a^2(mx+n)^2 = a^2b^2$$

$$b^2x^2 - a^2(m^2x^2 + 2mnx + n^2) = a^2b^2$$

$$b^2x^2 - a^2m^2x^2 - 2a^2mnx - a^2n^2 = a^2b^2$$

$$(b^2 - a^2m^2)x^2 + (-2a^2mn)x + (-a^2n^2 - a^2b^2) = 0$$

Persamaan di atas merupakan persamaan kuadrat, sehingga kita dapat menentukan persamaan garis singgungnya dengan mengambil $D = 0$, sehingga diperoleh

$$(-2a^2mn)^2 - 4(b^2 - a^2m^2)(-a^2n^2 - a^2b^2) = 0$$

$$4a^4m^2n^2 - 4(-a^2b^2n^2 - a^2b^4 + a^4m^2n^2 + a^4b^2m^2) = 0$$

$$a^2b^2n^2 + a^2b^4 - a^4b^2m^2 = 0$$

$$a^2b^2(n^2 + b^2) = a^4b^2m^2$$

$$n^2 + b^2 = \frac{a^4b^2m^2}{a^2b^2}$$

$$n^2 = a^2m^2 - b^2$$

$$n = \pm\sqrt{a^2m^2 - b^2}$$

Jadi garis singgung hiperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ dengan gradien m adalah

Digital Repository Universitas Jember

$$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}$$

Selanjutnya, dengan cara menggeser pusat hiperbola dari $O(0,0)$ ke titik (p,q) diperoleh garis singgungnya adalah

$$y - q = m(x - p) \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}$$

Sehingga kita dapat menentukan persamaan garis singgung pada hiperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ di titik singgung (x_1, y_1) adalah

$$\frac{x_1x}{a^2} - \frac{y_1y}{b^2} = 1$$

Jika persamaan hiperbola $\frac{(x-p)^2}{a^2} - \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1$, maka persamaan garis singgung di titik (x_1, y_1) adalah

$$\frac{(x_1 - p)(x - p)}{a^2} - \frac{(y_1 - q)(y - q)}{b^2} = 1$$

Misalkan $T(x_1, y_1)$ sebarang titik pada hiperbola dan seperti pada elips, kita mempunyai dua garis singgung melalui satu titik T di luar elips, demikian juga pada hiperbola. Tanpa memperhatikan letak titik $T(x_1, y_1)$, persamaan $\frac{x_1x}{a^2} - \frac{y_1y}{b^2} = 1$ disebut persamaan **garis kutub** dari T terhadap hiperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Catatan:
1. Jika T **di luar** hiperbola maka garis kutub menjadi **tali busur** hiperbola
2. Jika T **pada** hiperbola maka garis kutub menjadi **garis singgung**
3. Jika T **di dalam** hiperbola maka garis kutub tidak memotong hiperbola.

Contoh 45

Tentukan persamaan garis singgung pada hiperbola $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = 1$ yang sejajar garis $10x - 5y + 20 = 0$.

Digital Repository Universitas Jember

Penyelesaian

Dari persamaan hiperbola $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = 1$ kita dapat menentukan nilai $a = 4$ dan $b = 5$. Gardien garis $10x - 5y + 20 = 0$ adalah $m = 2$, artinya gradient garis singgungnya adalah 2. Sehingga kita dapat menentukan persamaan garis singgung yaitu

$$y = 2x \pm \sqrt{16.4 - 25}$$

$$y = 2x \pm \sqrt{39}$$

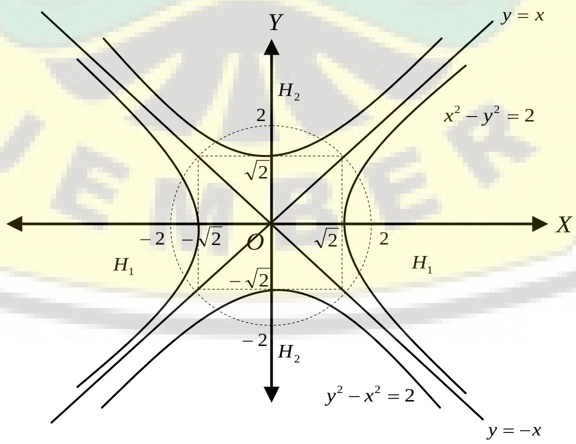
$$y = 2x + \sqrt{39} \text{ atau } y = 2x - \sqrt{39}$$

4. HIPERBOLA ORTHOGONAL

Hiperbola Orthogonal merupakan hiperbola yang kedua asimptotnya saling tegak lurus.

Berikut beberapa contoh Hiperbola Orthogonal.

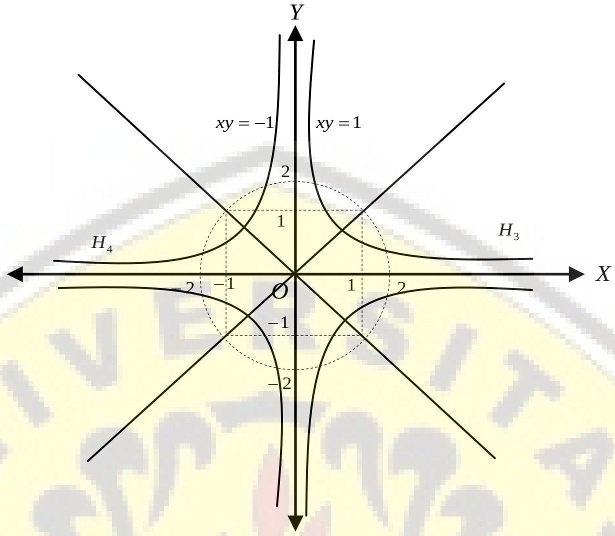
a. Hiperbola $H_1 : x^2 - y^2 = 2$ dan $H_2 : y^2 - x^2 = 2$ merupakan hiperbola Orthogonal karena kudua asimptotnya, garis $y = x$ dan $y = -x$ saling tegak lurus. Grafik hiperbola H_1 dan H_2 diperlihatkan pada Gambar 60.



Gambar 60. Hiperbola Orthogonal Karena Kudua Asimptotnya, Garis $y = x$ dan $y = -x$ Tegak Lurus

Digital Repository Universitas Jember

b. Hiperbola $H_3 : xy = 1$ dan $H_4 : xy = -1$ merupakan hiperbola Orthogonal karena kudua asimptotnya, sumbu x dan sumbu y saling tegak lurus. Grafik hiperbola H_3 dan H_4 diperlihatkan pada Gambar 61.



Gambar 61. Hiperbola Orthogonal Karena Kudua Asimptotnya, Sumbu x dan Sumbu y Saling Tegak Lurus

Contoh 46

Tentukan titik pusat, titik fokus dan asimptot hiperbola

$H_1 : 9x^2 - 4y^2 - 36x + 24y - 36 = 0$ dan $H_2 : 9x^2 - 4y^2 - 36x + 24y + 36 = 0$.

Penyelesaian

Kita akan merubah H_1 dan H_2 dalam bentuk kuadrat lengkap, sehingga diperoleh:

$$H_1 : 9x^2 - 4y^2 - 36x + 24y - 36 = 0$$

$$9x^2 - 36x + 36 - \left(4y^2 - 24y + 36\right) = 36$$

$$9(x-2)^2 - 4(y-3)^2 = 36$$

$$\frac{(x-2)^2}{2^2} - \frac{(y-3)^2}{3^2} = 1$$

$$a = 2, b = 3, \text{ dan } c = \sqrt{13}$$

Sehingga diperoleh

Digital Repository Universitas Jember

a. Titik pusat $(2,3)$
b. Titik fokus $\left(2-\sqrt{13},3\right)$ dan $\left(2+\sqrt{13},3\right)$

$$H_2 : 9x^2 - 4y^2 - 36x + 24y + 36 = 0$$
$$9x^2 - 36x + 36 - \left(4y^2 - 24y + 36\right) = -36$$
$$9(x-2)^2 - 4(y-3)^2 = -36$$
$$\frac{(y-3)^2}{9} - \frac{(x-2)^2}{4} = 1$$
$$a = 2, b = 3, \text{ dan } c = \sqrt{13}$$

Sehingga diperoleh
a. Titik pusat $(2,3)$
b. Titik fokus $\left(2,\ 3-\sqrt{13}\right)$ dan $\left(2,\ 3+\sqrt{13}\right)$

Hiperbola H_1 dan H_2 memiliki asimptot yang sama yaitu $\frac{(x-2)^2}{4} - \frac{(y-3)^2}{9} = 0$, dari sini diperoleh persamaan garis $y-3 = \frac{3}{2}(x-2)$ dan $y-3 = -\frac{3}{2}(x-2)$.

Jadi persamaan asimptot hiperbola $H_1 : 9x^2 - 4y^2 - 36x + 24y - 36 = 0$ dan $H_2 : 9x^2 - 4y^2 - 36x + 24y + 36 = 0$ adalah $y = \frac{3}{2}x$ dan $y = \frac{3}{2}x + 6$

B. BAHAN DISKUSI

Pilihlah sebarang hiperbola kemudian sketsalah pada bidang koordinat dilengkapi dengan unsur-unsurnya, selanjutnya tentukan salah satu persamaan garis singgungnya.

Digital Repository Universitas Jember

C. RANGKUMAN

1. Persamaan hiperbola dengan fokus $(c,0)$ dan $(-c,0)$ yaitu $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
2. Persamaan asimptot hiperbola yaitu $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$
3. Garis singgung hiperbola dengan pusat $(0,0)$ yaitu
$$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2-b^2}$$
4. Garis singgung hiperbola dengan pusat (p,q) yaitu
$$y-q = m(x-p) \pm \sqrt{a^2m^2-b^2}$$

D. TES FORMATIF

Pilihlah salah satu jawaban yang Anda anggap paling tepat!

1. Persamaan hiperbola yang mempunyai panjang sumbu transversal 10 dan eksentrisitas $\equiv e = 1,2$ adalah ...

   A. $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{11}=0$

   B. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{11}=1$

   C. $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{11}=1$

   D. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{11}=0$

   E. $\frac{x^2}{11}-\frac{y^2}{25}=1$

2. Persamaan garis singgung hiperbola $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{3}=1$ melalui titik $A(1,4)$ adalah .....

   A. $11x+19y-63=0$

   B. $11x-19y-63=0$

   C. $x-y+3=0$

   D. $11x+19y+63=0$

   E. $x-y-3=0$

Digital Repository Universitas Jember

3. Persamaan hiperbola yang fokusnya di $(7,2)$ dan koordinat kedua puncaknya adalah $(2,-2)$ dan $(6,2)$ adalah ....

   A. $\frac{(x-2)^2}{16}+\frac{(y-2)^2}{9}=1$

   B. $\frac{(x+2)^2}{16}-\frac{(y+2)^2}{9}=1$

   C. $\frac{(x-2)^2}{16}-\frac{(y-2)^2}{9}=1$

   D. $\frac{(x-2)^2}{9}-\frac{(y-2)^2}{16}=1$

   E. $\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y-2)^2}{16}=1$

4. Persamaan garis singgung hiperbola $\frac{(x-1)^2}{10}-\frac{(y+1)^2}{6}=1$ di titik $(6,2)$ yaitu ....

   A. $x=y+4$

   B. $x=y-4$

   C. $-x=y+4$

   D. $x=-y-4$

   E. $-x=-y-4$

5. Salah satu persamaan garis singgung hiperbola $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$ yang sejajar dengan garis $y=2x-1$ yaitu ...

   A. $y=-2x-4\sqrt{2}$

   B. $y=2x-4\sqrt{3}$

   C. $y=-2x-4\sqrt{3}$

   D. $y=2x-4\sqrt{2}$

   E. $y=-2x+4\sqrt{2}$

Digital Repository Universitas Jember

E. UMPAN BALIK

Setelah mengerjakan tes formatif, bandingkanlah jawaban Anda dengan kunci jawaban yang terdapat pada akhir bab ini. Jika Anda dapat menjawab dengan benar minimal 80%, maka Anda dinyatakan berhasil dengan baik dan silahkan berlanjut mempelajari materi berikutnya. Sebaliknya jika jawaban yang benar kurang dari 80%, maka silahkan Anda pelajari kembali uraian yang terdapat dalam bab sebelumnya, terutama bagian-bagian yang belum Anda kuasai dengan baik.

F. KUNCI JAWABAN TES FORMATIF

1. C
2. C
3. C
4. A
5. D

G. LATIHAN

1. Tentukan koordinat titik puncak, focus dan persamaan asimptot dari hiperbola berikut:

   a. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$ d. $\frac{(x-5)^2}{36}-\frac{(y-3)^2}{64}=1$

   b. $x^2-2y^2=8$ e. $3x^2-y^2=3$

   c. $\frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{16}=1$ f. $9x^2-16y^2-18x-96y+9=0$

2. Tentukan persamaan hiperbola dengan ketentuan sebagai berikut:

   b. Fokus $(8,0)$ dan $(-8,0)$

   Puncak $(5,0)$ dan $(-5,0)$

   c. Fokus $(0,5)$ dan $(0,-5)$

   Panjang sumbu *minor* $=4$

3. Garis $g:5y=3x-5$ memotong hiperbola $H:4x^2-25y^2=15$ di titik A dan B. Tentukan koordinat A dan B kemudian tentukan persamaan garis singgung pada hiperbola H di titik A dan B.

Digital Repository Universitas Jember

4. Tentukan persamaan garis singgung di titik $A(x_1, y_1)$ pada hiperbola $H : xy = c^2$
5. Garis singgung hiperbola $9x^2 - y^2 = 36$ melalui titik $(0,6)$, tentukan titik dan persamaan garis yang dimaksud.
6. Tentukan persamaan hiperbola orthogonal yang pusatnya di $(0,0)$ dan melalui titik $(5,3)$.
7. Tentukan persamaan hiperbola orthogonal yang melalui titik $(0,3)$ dan persamaan asimptotnya $y = x + 1$ dan $x + y = 5$.
8. Tentukan persamaan hiperbola yang sumbu transversalnya (sumbu nyata) 8 dan fokusnya pada $(\pm 5,0)$.
9. Sebuah titik bergerak sedemikian sehingga selisih jaraknya dari (0,3) dan (0,-3) adalah 5.
10. Tentukan persamaan hiperbola yang pusatnya di origin, sumbu transversalnya sumbu-Y, panjang latus rectumnya 36, dan jarak antar fokusnya 24.
11. Tentukan persamaan hiperbola yang pusatnya pada origin, sumbunya sumbu koordinat, dan melalui titik (3,1) dan (9,5).
12. Tentukan persamaan hiperbola yang puncaknya di $(\pm 6,0)$ dan asimptotnya $y = \pm 7x$.
13. Tentukan tempat kedudukan titik-titik yang bergerak sedemikian sehingga selisih jaraknya dari titik (-6,-4) dan (2,-4) adalah 6.
14. Tentukan persamaan hiperbola yang pusatnya di *origin*, puncaknya di (3,0), dan salah satu persamaan asymptotnya $2x - 3y = 0$.
15. Sebuah titik bergerak sedemikian sehingga hasil kali koefisien arahnya ke titik (2,1) dan (4,5) adalah 3. Tentukan titik tersebut.

Digital Repository Universitas Jember

DAFTAR PUSTAKA

Abbott, P. 2009. *On the Perimeter of an Ellipse*. The Mathematica Journal 11:2. Wolfram Media, Inc.

Gopalan, M.A., Vidhyalakshmi, S., and Geetha, *T*. 2014. *On the Hyperbola* $ax^2-(a-1)y^2=a, a>1$. International Journal of Engineering Research-Online. http://ijoer.in/2.6.14/T.Geetha %20-143-146.pdf . Pp. 144-146. Diakses 20 desember 2014.

Habiba, Z and Sukaid, M. 2005. *Web-based Visualization of Conic and Arc/Conic Spirals*. International Journal of Computer Graphic and CAD/CAM (CGACC), Vol. 01. No. 1. Kagoshima University. Japan

Kindle, J. H. 1950. *Theory and Problems of Plane and Solid Analytic Geometry*. New York: Schaum Publishing Co.

Lipschutz, S. (1083). *Finite Mathematics*. Schaum Outline Series (Asian Student Edition). McGraw-Hill International Book Company. Singapore.

Meserve, B, E and Sobel, M, A. (1964). *Introduction to Mathematics*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J.

Purcell, E and Varberg, D. 1987. *Calculus with Analytic Geometry, 5th Edition*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J.

Schmid, C and Zisserman, A. 2000. *The Geometry and Matching of Lines and Curves Over Multiple Views*. International Journal of Computer Vision. Volume 40, number 3, pages 199-233.

Still, J. 2000. *The Four Pillars of Geometry*. Departement of Mathematics, University of San Fransisco, San Fransisco. Springer

Sukirman. 1994. *Geometri Analitik Datar*. Departemen Pendidikan dan Kebudayaan Direktorat Jenderal Pendidikan Dasar dan Menengah. Jakarta.

Sykora. S. 2007. *Approximations of Ellipse Perimeters and of the Complete Elliptic Integral E(x)*. www.ebyte.it/library/docs/math05a/EllipsePerimeterApprox05.html. Diakses 24 desember 2014.

Digital Repository Universitas Jember

Syväranta, Jari., Lensu, Anssi., Marjomäki, Timo., Oksanen, Sari., and Jones, Roger. 2013. *An Empirical Evaluation of the Utility of Convex Hull and Standard Ellipse Areas for Assessing Population Niche Widths from Stable Isotope Data. http://www.plosone.org/article/info%3Adoi%2F10.1371%2Fjournal.pone.0056094.* Diakses 20 desember 2014.

Toermoedy. 2010. *Cara Melukis Hiperbola*. Toermoedy.files. wordpress.com /2010/11/bab-vi-hiperbola.pdf. Diakses 13 Januari 2014.

Turan, M. and Ozcan, M. 2006. *General Equation for Chinese Checker Conics and Focus-Directrixs Chinese Checker Conics.* International Journal of Pure and Applied Mathematics. Volume 30 No. 3, pp:393-401. Turkey. http://ijpam.eu/contents/2006-30-3/9/9.pdf. Diakses 20 desember 2014.

Digital Repository Universitas Jember

INDEKS

Digital Repository Universitas Jember

Digital Repository Universitas Jember

Digital Repository Universitas Jember