NILAI KETAKTERATURAN JARAK TITIK PADA GRAF LOLLIPOP, GRAF CENTIPEDE DAN GRAF TADPOLE

SKRIPSI

Oleh

Citra Hadi Pratiwi
NIM 141810101022

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER
2018

NILAI KETAKTERATURAN JARAK TITIK PADA GRAF LOLLIPOP, GRAF CENTIPEDE DAN GRAF TADPOLE

SKRIPSI

diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat
untuk menyelesaikan studi pada Program Studi Matematika (S1)
dan mencapai gelar Sarjana Sains

Oleh

Citra Hadi Pratiwi
NIM 141810101022

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER
2018

PERSEMBAHAN

Dengan menyebut nama Allah yang Maha Pengasih lagi Maha Penyayang, serta sholawat atas Nabi Muhammad S.A.W. Skripsi ini saya persembahkan untuk:

1. Kedua orang tua tercinta, Ibunda Sri Hayati dan Ayahanda Hadi Karyono yang telah memberikan nasehat, motivasi, dan tetesan air mata dalam setiap doa-doa serta sujud kalian.;
2. Kedua kakakku tersayang, Septian Hadi Setiawan dan Radinal Hadinata yang mendukung dan memberi semangat.;
3. Segenap Keluarga Besarku yang tak henti mendukung dan mendoakanku.;
4. Bapak Hisyam Balya, Adik-adik, dan Keluarga Yayasan Ar-Roudhoh yang telah memberikan cinta kasih, motivasi dan doa-doa untukku.;
5. Guru-guru TK Al-Amien Jember, SDN Jember Lor 1, SMPN 2 Jember, SMAN 2 Jember dan segenap guru-guru yang telah membimbingku dari awal hingga sekarang.;
6. Almamater tercinta Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam.

MOTO

"Sesungguhnya sesudah kesulitan ada kemudahan. Maka apabila kamu telah selesai (dari sesuatu urusan), tetaplah bekerja keras (untuk urusan yang lain) dan hanya kepada Tuhanmulah hendakla kamu berharap"

(QS. Al-Insyirah,6-8)[1]

"Rahmat sering datang kepada kita dalam bentuk kesakitan, kehilangan dan kekecewaan. Namun jika kita bersabar, kita akan segera melihat bentuk aslinya"

(Joseph Addison)[2]

"Hai orang-orang yang beriman jadikanlah sabar dan sholat sebagai penolongmu, sesungguhnya Allah beserta orang-orang yang sabar"

(Al-Baqarah,153)[3]

---

[1] tafsirq.com

[2] istigosahkoe.blogspot.com

[3] wattpad.com

PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

nama : Citra Hadi Pratiwi

NIM : 141810101022

menyatakan dengan sesungguhnya bahwa karya ilmiah yang berjudul ”Nilai Ketakteraturan Jarak Titik pada Graf Lollipop, Graf Centipede, dan Graf Tadpole” adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali kutipan yang sudah saya sebutkan sumbernya, belum pernah diajukan pada institusi manapun, dan bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa ada tekanan dan paksaan dari pihak manapun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, Juli 2018

Yang menyatakan,

Citra Hadi Pratiwi

NIM 141810101022

SKRIPSI

NILAI KETAKTERATURAN JARAK TITIK PADA GRAF LOLLIPOP, GRAF CENTIPEDE DAN GRAF TADPOLE

Oleh

Citra Hadi Pratiwi
NIM 141810101022

Pembimbing:

Dosen Pembimbing Utama	: Dr. Kristiana Wijaya, S.Si., M.Si.
Dosen Pembimbing Anggota	: Kusbudiono, S.Si., M.Si.

PENGESAHAN

Skripsi berjudul "Nilai Ketakteraturan Jarak Titik pada Graf Lollipop, Graf Centipede, dan Graf Tadpole" telah diuji dan disahkan pada:

hari, tanggal :

tempat : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Tim Penguji:

Ketua,	Anggota I,
Dr. Kristiana Wijaya, S.Si., M.Si.	Kusbudiono, S.Si., M.Si.
NIP. 197408132000032004	NIP. 197704302005011001
Anggota II,	Anggota III,
Ikhsanul Halikin, S.Pd., M.Si.	Bagus Juliyanto, S.Si., M.Si.
NIP. 198610142014041001	NIP. 198007022003121001

Mengesahkan

Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Universitas Jember,

Drs. Sujito, Ph.D.

NIP. 196102041987111001

RINGKASAN

Nilai Ketakteraturan Jarak Titik pada Graf Lollipop, Graf Centipede, dan Graf Tadpole; Citra Hadi Pratiwi, 141810101022; 2018; 30 halaman; Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Pelabelan graf merupakan pemetaan dari himpunan titik, sisi, atau titik dan sisi ke himpunan (biasanya) bilangan bulat memenuhi syarat tertentu. Berdasarkan domainnya terdapat beberapa pelabelan graf yang sering digunakan, diantaranya pelabelan titik, pelabelan sisi, dan pelabelan total. Pelabelan titik merupakan pelabelan dengan domain himpunan titik *(vertex labelling)*, pelabelan sisi merupakan pelabelan dengan domain himpunan sisi *(edge labelling)*, dan pelabelan total merupakan pelabelan dengan domain himpunan titik dan sisi *(total labelling)*.

Slamin (2014) memperkenalkan pelabelan ketakteraturan jarak titik yaitu pemasangan nilai pada setiap titik {1,2,3,...,k} (boleh berulang) dengan nilai yang minimum sehingga diperoleh bobot titik yang berbeda dengan menjumlahkan semua label titik yang bertetangga. Bobot dari sebuah titik *x* adalah penjumlahan dari semua label titik yang bertetangga dengan *x*. Bobot dari sebuah titik *x* dirumuskan dengan $wt(x) = \sum_{y \epsilon N(x)} \lambda(y)$. Nilai ketakteraturan jarak titik dari graf *G* yang dinotasikan dengan *dis(G)*. Menduga batas nilai *dis(G)* dari derajat terkecil λ dan derajat terbesar Δ, sehingga diperoleh *dis(G)* $\geq \left\lceil \frac{n+\delta-1}{\Delta} \right\rceil$. Dalam pelabelan ketakteraturan jarak titik terdapat beberapa graf yang tidak dapat digunakan. Suatu graf *G* tidak memiliki nilai *dis* jika titik u, v adalah titik yang berbeda tetapi titik u, v memiliki tetangga yang sama yaitu $N(u) = N(w)$.

Penelitian ini membahas lebih lanjut tentang mencari nilai ketakteraturan jarak pada graf lollipop $L_{n,1}$, graf centipede Ce_n dan graf tadpole $T_{n,1}$. Dari hasil penelitian didapatkan nilai *dis* dalam pelabelan ketakteraturan jarak titik pada graf lollipop yaitu $dis(L_{n,1})$= $n-1$, graf centipede yaitu $dis(Ce_n)$= n, dan graf tadpole yaitu $dis(T_{n,1}) =$

$dis(C_n) = \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil$ untuk $n \equiv 1, 5$ *mod 8*. Dari ketiga graf tersebut nilai *dis* yang tidak diperoleh dari batas bawah pada Lema 1, tetapi nilai *dis* lebih dari nilai batas bawah pada Lema 1.

PRAKATA

Puji syukur kehadirat Tuhan Yang Maha Esa atas segala kasih sayang-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir yang berjudul ”Nilai Ketakteraturan Jarak Titik pada Graf Lollipop, Graf Centipede, dan Graf Tadpole”. Penulisan tugas akhir ini dilakukan guna memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan studi pada Program Studi Matematika (S1) dan mencapai gelar Sarjana Sains pada Jurusan Matematika FMIPA Universitas Jember.

Pada kesempatan ini, dengan segala hormat penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Dr. Kristiana Wijaya, S.Si., M.Si. selaku dosen pembimbing utama dan Kusbudiono, S.Si., M.Si. selaku dosen pembimbing anggota;
2. Ikhsanul Halikin, S.Pd., M.Si. dan Bagus Juliyanto, S.Si., M.Si. selaku dosen penguji yang telah memberikan kritik dan saran yang membangun;
3. Dosen dan Karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
4. Sahabat-sahabatku Eka Safitri, Enik Nur Sa’adah, Ratna Safitri yang telah mendukungku, memberi semangat, dan menghiburku.;
5. Teman seperjuangan Ade Rizky Savitri yang telah berjuang bersama menyelesaikan skripsi dalam bidang teori graf.;
6. Kakak tingkat, teman, serta adek tingkat dari Keramat’11, Bathics’12, Atlas’13, Extreme’14, dan Sigma’15.;
7. HIMATIKA ”Geokompstat”;

8. serta semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu yang telah membantu dalam penyelesaian tugas ini.

Penulis menyadari bahwa penelitian ini masih jauh dari sempurna. Oleh karena itu penulis mengharap kritik dan saran demi kesempurnaan penelitian selanjutnya. Semoga tugas ini dapat bermanfaat bagi kita semua.

Jember, Juli 2018

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

Halaman

DAFTAR TABEL

BAB 1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori graf merupakan ilmu yang merepresentasikan suatu objek dan hubungan antar objek. Dalam representasi tersebut, objek direpresentasikan dengan titik dan sisi sedangkan garis digunakan sebagai hubungan antar objek. Beberapa pokok bahasan dalam teori graf, salah satunya adalah pelabelan graf. Pelabelan graf merupakan pemasangan nilai bilangan (biasanya bilangan bulat) ke setiap titik, sisi, atau keduanya dengan syarat kondisi tertentu. Berdasarkan domainnya terdapat beberapa pelabelan graf yang sering digunakan, diantaranya pelabelan titik, pelabelan sisi, dan pelabelan total. Pelabelan titik merupakan pelabelan dengan domain himpunan titik *(vertex labelling)*, pelabelan sisi merupakan pelabelan dengan domain himpunan sisi *(edge labelling)*, dan pelabelan total merupakan pelabelan dengan domain himpunan titik dan sisi *(total labelling)*.

Slamin (2014) memperkenalkan pelabelan ketakteraturan jarak titik yang dimotivasi dari pelabelan jarak ajaib, pelabelan total titik tidak teratur, dan pelabelan jarak anti ajaib. Menurut Miller *dkk* (2003) pelabelan jarak ajaib adalah pemasangan nilai bilangan bulat ke himpunan titik sedemikian sehingga nilai bobot yang diperoleh sama. Selanjutnya, Baca *dkk* (2007) menyatakan bahwa pelabelan total tidak teratur adalah pemasangan nilai bilangan bulat ke himpunan titik dan sisi sedemikian sehingga nilai bobot yang diperoleh berbeda. Arumugam *dkk* (2012) juga menyatakan bahwa pelabelan jarak anti ajaib adalah pemasangan nilai bilangan bulat ke himpunan titik sedemikian sehingga nilai bobot yang diperoleh berbeda.

Berdasarkan ketiga pelabelan tersebut, diperoleh pelabelan ketakteraturan jarak titik. Pelabelan ketakteraturan jarak titik merupakan pemasangan nilai pada setiap titik

{1,2,3,...,k} (boleh berulang) dengan nilai yang minimum sehingga diperoleh bobot titik yang berbeda dengan menjumlahkan semua label titik yang bertetangga. Dalam mencari nilai ketakteraturan jarak titik pada suatu graf diperoleh beberapa istilah yaitu bobot dan jarak. Bobot titik adalah hasil penjumlahan dari label-label titik pada suatu graf sedangkan jarak adalah suatu panjang lintasan terpendek pada suatu titik ke titik yang lainnya. Pada pelabelan ketakteraturan jarak titik terdapat beberapa graf yang telah diteliti diantaranya graf lengkap K_n, graf lintasan P_n, graf lingkaran C_n, graf kipas ganda $F_{2,n}$, graf roda W_n, graf helm H_n, graf bunga Fl_n, graf friendship Fn_n, graf tangga L_n, graf tangga segitiga L_n, graf sarang laba-laba Sl_n, dan graf matahari M_n.

Berdasarkan penelitian tersebut, penulis ingin melanjutkan penelitian nilai ketakteraturan jarak titik pada graf lollipop $L_{n,1}$, graf centipede Ce_n dan graf tadpole $T_{n,1}$.

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah penelitian ini adalah bagiamana mencari nilai ketakteraturan jarak titik dalam pelabelan ketakteraturan jarak titik pada beberapa graf. Untuk menghindari perluasan masalah pada penelitian ini, permasalah dibatasi pada:

a. Graf yang akan diteliti diantaranya graf lollipop $L_{n,1}$, graf tadpole $T_{n,1}$, dan graf centipede Ce_n.

b. Penelitian pelabelan ketakteraturan jarak titik dilakukan dengan jarak satu.

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah menentukan nilai ketakteraturan jarak titik pada graf lollipop $L_{n,1}$, graf tadpole $T_{n,1}$, dan graf centipede Ce_n.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari hasil penelitian ini diantaranya adalah:

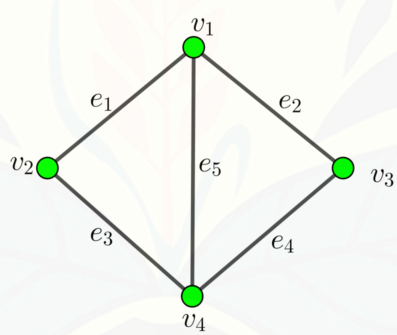
a. Menambah materi pelabelan graf mengenai nilai ketakteraturan jarak titik pada graf lollipop $L_{n,1}$, graf tadpole $T_{n,1}$, dan graf centipede Ce_n.

b. Agar pembaca maupun peneliti lain yang ingin mengembangkan penelitian ini mengetahui dalam mencari nilai ketakteraturan jarak titik dalam pelabelan ketakteraturan jarak titik pada graf lollipop $L_{n,1}$, graf tadpole $T_{n,1}$, dan graf centipede Ce_n.

BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Konsep Dasar Graf

Graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan $(V(G), E(G))$ dengan *V(G)* adalah himpunan tidak kosong yang unsur-unsurnya terdiri dari titik dan *E(G)* adalah himpunan yang mungkin kosong dari pasangan tak terurut *(u,v)* dari titik *u,v* di *V* yang disebut sisi. Banyaknya unsur di titik *V* disebut *order* dari *G* dan banyaknya unsur di *E* disebut *size* dari *G*. Gambar 2.1 adalah graf *G* yang terdiri dari 4 buah titik dan 5 buah sisi. Dua buah titik *u* dan *v* dikatakan bertetangga *(adjacent)* jika ada sisi



Gambar 2.1 Graf G dengan 4 buah titik dan 5 buah sisi

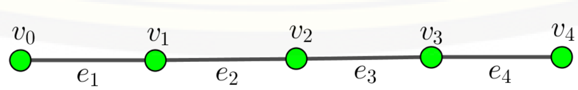
e=(u,v). Titik *v* juga dikatakan bersisihan *(incident)* dengan sebuah sisi *e* apabila titik *v* adalah titik ujung dari sebuah sisi *e* tersebut. Himpunan tetangga *(neighbours)* dari titik *v* di suatu graf *G* yang dinotasikan $N_G(v)$ atau $N_{(v)}$. Gambar 2.1 menunjukkan bahwa titik v_1 bertetangga dengan titik v_2, v_3 dan v_4, titik v_2 bertetangga dengan v_1 dan v_4, sedangkan titik v_3 bertetangga dengan v_1 dan v_4. Derajat dari sebuah titik *v* di *G* adalah banyaknya titik yang bersisihan dengan titik *v*, dinotasikan *d(v)*. Suatu titik yang berderajat nol disebut titik terisolasi *(isolated vertex)*. Suatu titik memiliki derajat satu disebut daun *(leaf)* atau titik *pendant*. Derajat terkecil dari suatu graf *G* dinotasikan $\delta(G)$ dan derajat terbesar dari suatu graf *G* dinotasikan $\Delta(G)$. Pada Gambar 2.1 diperoleh derajat terbesar $\Delta(G) = 3$ dan $\delta(G) = 2$. Sebuah jalan *(walk)* dalam suatu graf *G* adalah suatu barisan titik dan sisi secara bergantian yang diawali dan diakhiri dengan titik yaitu $\{v_0, e_1, v_1, e_2, ..., e_k, v_k\}$ dengan sisi $e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$. Suatu jalan dengan titik awal dan titik akhirnya sama $(v_0 = v_k)$ disebut jalan tertutup *(closed walk)*. Sedangkan suatu jalan dengan titik awal dan titik akhirnya tidak sama $(v_0 \neq v_k)$ disebut jalan terbuka *(open walk)*. Lintasan *(path)* adalah suatu jalan yang semua titik-titiknya berbeda. Jejak *(trail)* adalah jalan yang semua sisi berbeda. Sirkuit *(circuit)* adalah jejak tertutup dengan anggota yang tidak memiliki sisi berulang tetapi mungkin memiliki titik berulang. Jarak *(distance)* antara dua buah titik v_i ke titik v_j adalah panjang lintasan terpendek dari titik v_i ke titik v_j yang dinotasikan $d(v_i, v_j)$. Suatu graf *G* disebut graf terhubung *(connected graph)* jika setiap dua titik yang berbeda terhubung dalam suatu lintasan. Sebaliknya, graf tidak terhubung *(disconnected graph)* jika ada dua titik yang berbeda tidak terhubung dalam suatu lintasan.

2.2 Kelas-kelas Graf

Pada subbab ini akan dijelaskan beberapa jenis graf, yaitu :

a. Graf lintasan

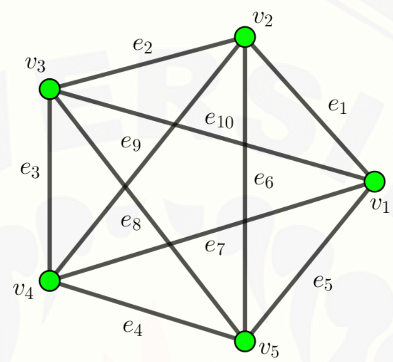
Graf lintasan yang dinotasikan P_n adalah graf terhubung sederhana yang memiliki n titik dalam satu lintasan dengan panjang $n - 1$. Gambar 2.2 adalah contoh graf lintasan dengan 5 titik.



Gambar 2.2 Graf lintasan P_5 memiliki 5 titik dan 4 sisi

b. Graf lengkap

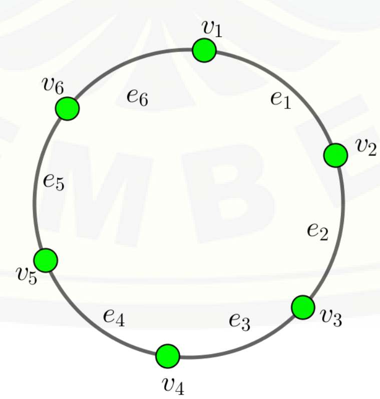
Graf lengkap yang dinotasikan K_n adalah graf dengan *n* titik yang setiap titiknya memiliki derajat $n-1$. Graf K_n memiliki $\dfrac{n(n-1)}{2}$ sisi. Gambar 2.3 adalah contoh graf lengkap dengan 5 titik.



Gambar 2.3 Graf lengkap K_5 dengan 5 titik

c. Graf lingkaran

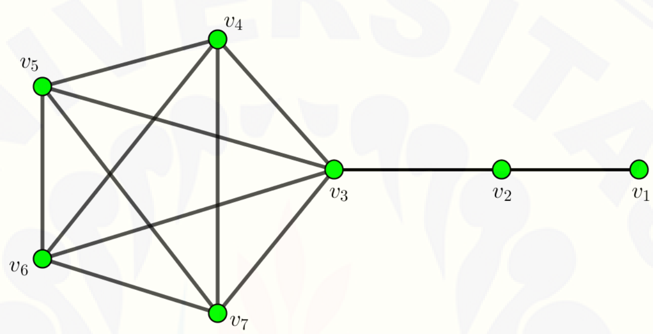
Graf lingkaran yang dinotasikan C_n adalah graf lintasan P_n yang ujung-ujungnya dihubungkan dengan sebuah sisi. Graf C_n untuk $n \geq 3$ memiliki *n* titik dan *n* sisi. Gambar 2.4 adalah contoh graf lingkaran dengan 6 titik.



Gambar 2.4 Graf lingkaran C_6 memiliki 6 titik dan 6 sisi

d. Graf lollipop

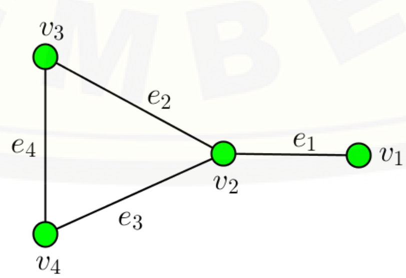
Graf lollipop adalah graf yang dibentuk dengan menghubungkan salah satu titik graf lengkap K_m dengan salah satu daun graf lintasan P_n dengan sebuah sisi, yang dinotasikan dengan $L_{m,n}$. Graf $L_{m,n}$ untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 1$ memiliki $m+n$ titik. (Vijayan dkk, 2015). Gambar 2.5 adalah contoh graf lollipop dengan 7 titik.



Gambar 2.5 Graf lollipop $L_{5,2}$ dengan 7 titik

e. Graf tadpole

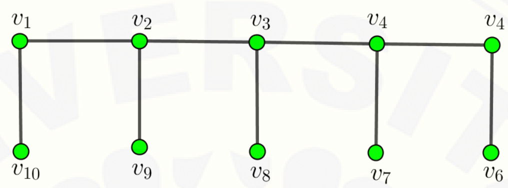
Graf tadpole yang dinotasikan $T_{m,n}$ adalah graf yang diperoleh dengan menghubungkan sebuah titik graf lingkaran C_m dengan sebuah daun graf P_n dengan sebuah sisi. Graf $T_{m,n}$ dengan $m \geq 3$ dan $n \geq 1$ memiliki $m+n$ titik. (DeMaio, 2014). Gambar 2.6 adalah contoh graf tadpole dengan 4 titik.



Gambar 2.6 Graf tadpole $T_{3,1}$ dengan 4 titik

f. Graf centipede

Graf centipede yang dinotasikan Ce_n adalah graf yang diperoleh dengan menghubungkan *n* titik graf lintasan P_2 dengan sebuah sisi. Graf Ce_n memiliki 2_n titik dan 2_{n-1} sisi. (Sudha, 2013). Gambar 2.7 adalah contoh graf centipede dengan 5 titik.



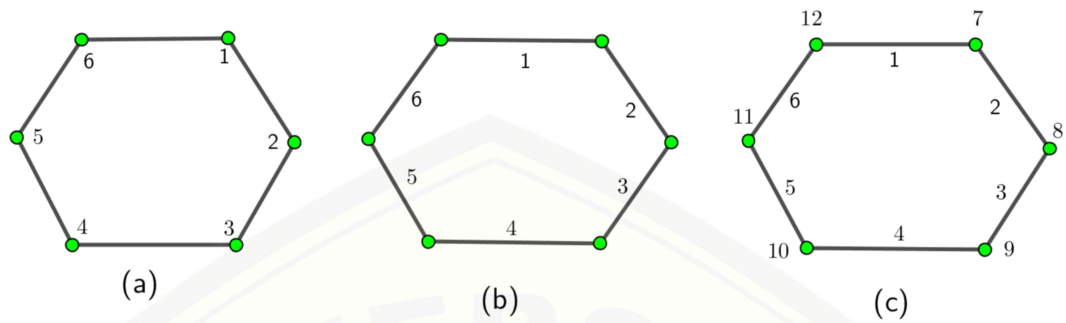
Gambar 2.7 Graf centipede Ce_5 dengan 10 titik

2.3 Pelabelan Graf

Pelabelan suatu graf adalah fungsi yang memasangkan titik atau sisi atau keduanya pada suatu bilangan (biasanya bilangan bulat positif) dengan suatu kondisi tertentu. Berdasarkan domainnya terdapat beberapa pelabelan yang sering digunakan yaitu pelabelan titik, pelabelan sisi dan pelabelan total. Pelabelan titik merupakan pelabelan dengan domain himpunan titik *(vertex labelling)*, pelabelan sisi merupakan pelabelan dengan domain himpunan sisi *(edge labelling)* dan pelabelan total merupakan pelabelan dengan domain himpunan titik dan himpunan sisi *(total labelling)*. Dalam pelabelan graf terdapat istilah bobot. Bobot pada suatu graf yang dinotasikan *(wt)* adalah hasil penjumlahan dari label titik dan sisi di graf. Penjumlahan dari label setiap titik pada suatu graf *G* merupakan bobot titik. Gambar 2.8 adalah contoh pelabelan titik, pelabelan sisi dan pelabelan total.

2.4 Pelabelan Ketakteraturan Jarak Titik

Slamin (2014) memperkenalkan konsep pelabelan baru yaitu pelabelan ketakteraturan jarak titik yang menghasilkan nilai ketakteraturan jarak titik. Dalam



Gambar 2.8 (a)pelabelan titik, (b) pelabelan sisi, dan (c) pelabelan total

penelitian ini, langkah yang dilakukan terlebih dahulu melakukan pelabelan di setiap titik dalam suatu graf sedemikian sehingga bobot titik berbeda. Bobot titik dalam pelabelan ini diperoleh dengan menjumlahkan semua label titik yang bertetangga. Nilai label terbesar yang minimum merupakan nilai ketakteraturan jarak titik.

Definisi 1. Suatu pelabelan ketakteraturan jarak titik dari graf *G* adalah sebuah pemetaan $\lambda : V \rightarrow \{1, 2, ..., k\}$ sedemikian sehingga bobot yang dihitung pada setiap titiknya adalah berbeda. Bobot dari sebuah titik *x* di *G* didefinisikan sebagai penjumlahan dari semua label titik yang bertetangga dengan *x* (jarak 1 dari *x*), yaitu :

$$wt(x) = \sum_{y \epsilon N(x)} \lambda(y) \qquad (2.1)$$

Nilai ketakteraturan jarak titik dari graf *G* yang dinotasikan dengan *dis(G)* adalah nilai label *k* minimum.

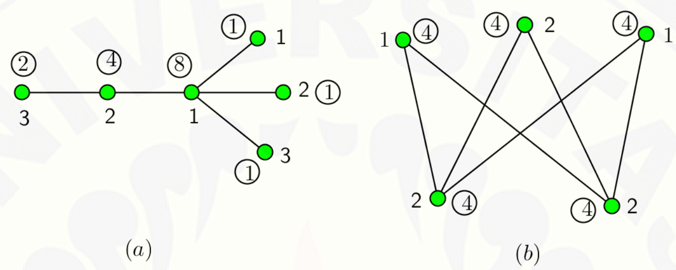
Observasi 1. Misalkan *u* dan *w* adalah titik yang berbeda dalam graf *G*. Jika *u* dan *w* mempunyai tetangga yang sama yaitu $N(u) = N(w)$, maka *G* tidak mempunyai pelabelan jarak tidak teratur. Beberapa contoh graf yang tidak mempunyai pelabelan ketakteraturan jarak titik adalah :

a. Graf bipartite lengkap $K_{m,n}$ untuk $m, n \geq 3$.

b. Graf multipartite lengkap $H_{m,n}$ untuk $m, n \geq 2$.

c. Graf pohon T_n untuk $n \geq 3$ yang mengandung titik dengan sedikitnya dua daun.

Gambar 2.9 merupakan contoh (a) graf pohon dan (b) graf bipartite lengkap yang tidak memiliki pelabelan ketakteraturan jarak titik. Pada Gambar 2.9 dapat dijelaskan bilangan di dalam lingkaran merupakan bobot titik dan bilangan di luar lingkaran merupakan label titik.



Gambar 2.9 (a) graf pohon dan (b) graf bipartite lengkap

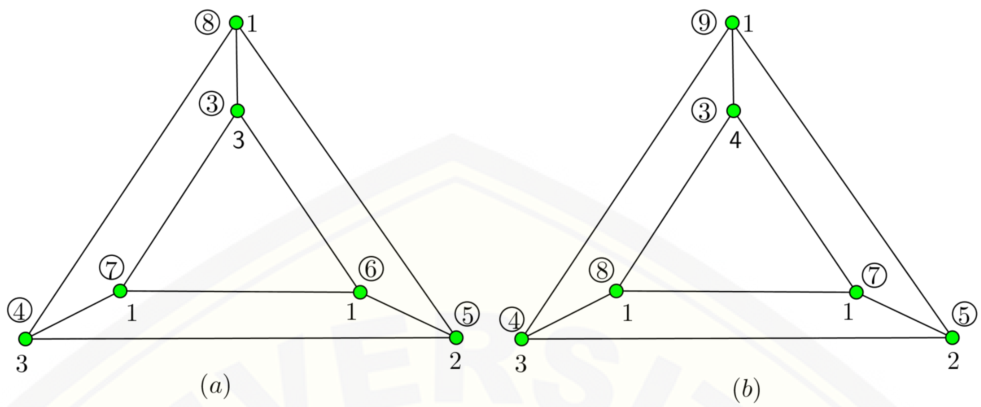
Observasi 2. Misalkan *u* dan *w* adalah dua titik yang bertetangga dalam sebuah graf terhubung *G*. Jika $N(u) - \{w\} = N(w) - \{u\}$, maka label *u* dan *w* harus berbeda sehingga $\lambda(u) \neq \lambda(w)$.

Lema 1. Misalkan *G* adalah sebuah graf yang terhubung pada titik *n* dengan derajat minimum δ dan derajar maksimum Δ dan tidak ada tititk yang mempunyai tetangga yang sama, maka :

$$dis(G) \geq \left\lceil \frac{n + \delta - 1}{\Delta} \right\rceil \quad (2.2)$$

Gambar 2.10 merupakan contoh pelabelan ketakteraturan jarak titik pada suatu graf *G*.

Pada Gambar 2.10 bilangan di dalam lingkaran merupakan bobot titik dan bilangan di luar lingkaran merupakan label titik. Gambar 2.10 (a) merupakan contoh pelabelan ketakteraturan jarak titik pada suatu graf *G* dengan label titik 3



Gambar 2.10 Pelabelan ketakteraturan jarak titik G dengan 6 titik

dan diperoleh semua bobot titiknya berbeda. Gambar 2.10 (b) merupakan contoh pelabelan ketakteraturan jarak titik pada suatu graf G dengan label titik 4 dan diperoleh semua bobot titiknya berbeda semua. Berdasarkan contoh Gambar 2.10 (a) dan (b) pelabelan ketakteraturan jarak titik, tetapi dari kedua gambar tersebut yang dapat dijadikan nilai ketakteraturan jarak titik adalah Gambar 2.10 (b) karena memiliki nilai labelnya paling minimum dan bobot titiknya berbeda.

2.5 Hasil-Hasil Pelabelan Ketakteraturan Jarak Titik

Pada penelitian sebelumnya diperoleh beberapa hasil pelabelan ketakteraturan jarak titik pada beberapa kelas graf. Slamin (2014) meneliti *dis* pada graf lengkap K_n dan graf lintasan P_n. Secara berturut-turut *dis* dari graf tersebut adalah $dis(K_n) = n$ dan $dis(P_n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$. Kemudian, Masyita dan Rizky (2015) meneliti *dis* pada graf sarang laba-laba Sl_n dan graf matahari M_n yaitu $dis(Sl_n) = n$ dan $dis(M_n) = n$. Pada tahun berikutnya, Novindasari (2016) meneliti beberapa graf lain yaitu graf tangga L_n dengan $dis(L_n) = n + 2$ dan graf tangga segitiga L_n dengan $dis(L_n) = n$. Slamin (2017) kembali meneliti *dis* pada graf kipas ganda $F_{2,n}$ dan graf helm H_n dengan $dis(F_{2,n}) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ dan $dis(H_n) = n$. Pada tahun yang sama, N.H Bong (2017) juga meneliti *dis* pada graf roda W_n dan graf lingkaran C_n yaitu $dis(W_n) = \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil$ dan

$dis(C_n) = \left\lceil \dfrac{n+1}{2} \right\rceil$ untuk $n = 0, 1, 2, 5$ mod 8, $dis(C_n) = \dfrac{n+3}{2}$ untuk $n \equiv 3, 7$ mod 8, dan $dis(C_n) = \lceil \dfrac{n+1}{2} \rceil$ untuk $n \equiv 4, 6$ mod 8. Adapun beberapa hasil penelitian sebelumnya dijelaskan pada Tabel 2.1.

Table 2.1 Hasil-hasil pelabelan ketakteraturan jarak titik sebelumnya

Graf	Nilai Ketakteraturan Jarak	Keterangan
Graf Lengkap K_n $n \geq 3$	$dis(K_n) = n$	Slamin, 2014
Graf Lintasan P_n $n \geq 3$	$dis(P_n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$	Slamin, 2014
Graf Sarang Laba-laba Sl_n $n \geq 3$	$dis(Sl_n) = n$	Masyita, 2015
Graf Matahari M_n $n \geq 3$	$dis(M_n) = n$	Rizky, 2015
Graf Tangga L_n $n \geq 3$	$dis(L_n) = n + 2$	Novindasari, *dkk*, 2016

Graf	Nilai Ketakteraturan Jarak	Keterangan
Graf Tangga Segitiga L_n $n \geq 3$	$dis(L_n) = n$	Novindasari, *dkk*, 2016
Graf Kipas Ganda $F_{2,n}$ $n \geq 3$	$dis(F_{2,n}) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$	Slamin,*dkk*, 2017
Graf Helm H_n $n \geq 3$	$dis(H_n) = n$	Slamin, *dkk*, 2017
Graf Bunga Fl_n $n \geq 3$	$dis(Fl_n) = n$	Slamin, *dkk*, 2017
Graf Friendship Fn_n $n \geq 3$	$dis(Fn_n) = 2n$	Slamin, *dkk*, 2017
Graf Lingkaran C_n $n \geq 5$	$dis(C_n) = \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil$ untuk $n = 0, 1, 2, 5$ mod 8	N.H Bong, *dkk*, 2017
	$dis(C_n) = \frac{n+3}{2}$ untuk $n \equiv 3, 7$ mod 8	
	$dis(C_n) = \lceil \frac{n+1}{2} \rceil$ untuk $n \equiv 4, 6$ mod 8	
Graf Roda W_n $n \geq 5$	$dis(W_n) = \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil$	N.H Bong *dkk*, 2017

BAB 3. METODE PENELITIAN

Pada bab ini dibahas metode dan langkah-langkah untuk mencari nilai pelabelan ketakteraturan jarak titik pada graf lollipop, graf centipede dan graf tadpole. Langkah-langkah yang digunakan dalam penelitian ini yaitu melakukan penotasian titik dan sisi pada graf yang dilakukan. Kemudian, melakukan pembuktian dengan mengklaim *dis(G)* $= k$ dengan cara menunjukkan *dis(G)* $\geq k$ dan *dis(G)* $\leq k$.

Berikut langkah-langkah yang dilakukan peneliti dalam mencari nilai ketakteraturan jarak titik :

3.1 Penotasian Titik dan Sisi

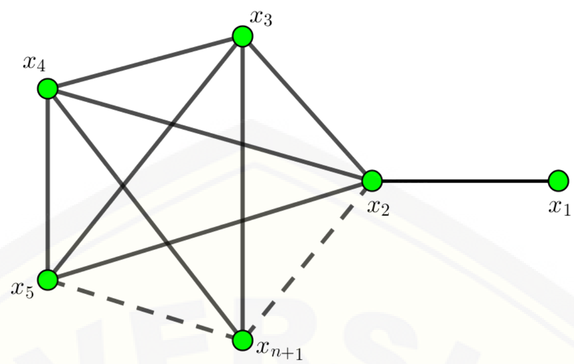
Berikut ini merupakan penotasian titik dan sisi dari graf lollipop $L_{n,1}$, graf centipede Ce_n dan graf tadpole $T_{n,1}$ yang digunakan sebagai penelitian:

a. Graf lollipop

Misalkan himpunan titik $V(L_{n,1}) = \{x_i|1 \leq i \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(L_{n,1}) = \{(x_ix_{i+1})|1 \leq i \leq n\} \cup \{(x_{n+1}x_i)|i = 2\}$. Graf lollipop $L_{n,1}$ memiliki $n + 1$ titik dengan sebuah titik berderajat 1, $d(x_1) = 1$, sebuah titik berderajat *n*, $d(x_2) = n$ dan n–1 titik berderajat n–1, $d(x_i) = n$–1 untuk $3 \leq i \leq n + 1$. Gambar 3.1 merupakan penotasian titik dan sisi graf *lollipop* $L_{n,1}$.

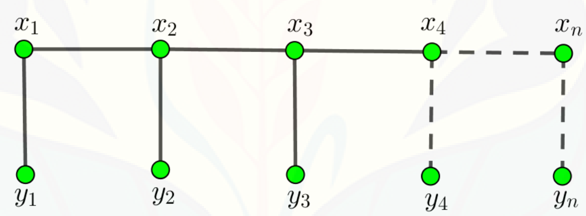
b. Graf centipede

Misalkan himpunan titik $V(Ce_n) = \{x_i|1 \leq i \leq n\} \cup \{y_i, 1 \leq i \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(Ce_n) = \{(x_ix_{i+1})|1 \leq i \leq n-1\} \cup \{(x_iy_i)|1 \leq i \leq n\}$. Graf centipede Ce_n memiliki $2n$ titik dengan n titik berderajat satu $d(y_i) = 1$



Gambar 3.1 Notasi titik dan sisi pada graf lollipop $L_{n,1}$

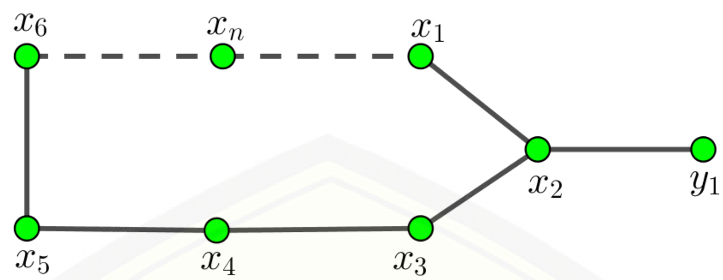
untuk $1 \leq i \leq n$, dua titik berderajat dua, $d(x_1) = d(x_i) = 2$ untuk $i = n$ dan $n-1$ titik berderajat 3, $d(x_i) = 3$ untuk $2 \leq i \leq n-1$. Gambar 3.2 merupakan penotasian titik dan sisi graf *centipede* Ce_n



Gambar 3.2 Notasi titik dan sisi pada graf centipede Ce_n

c. Graf tadpole

Misalkan notasi titik graf tadpole $T_{n,1}$ adalah x_i untuk $1 \leq i \leq n$ dan y_i untuk $i = 1$. dengan demikian diperoleh himpunan titik $V(T_{n,1}) = \{x_i | 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_i | i = 1\}$ dan himpunan sisi $E(T_{n,1}) = \{(x_i x_{i+1}) | 1 \leq i \leq n\} \cup \{(x_1, x_i) | i = 1\} \cup \{(x_{i+1} y_i) | i = 1\}$. Graf tadpole $T_{n,1}$ memiliki $n+1$ titik dengan sebuah titik berderajat 1, $d(y_1) = 1$, sebuah titik berderajat 3, $d(x_2) = 3$ dan $n-1$ titik berderajat 2, $d(x_i) = 2$ untuk $1 \leq i \leq n$. Gambar 3.3 merupakan penotasian titik dan sisi graf *tadpole* $T_{n,1}$



Gambar 3.3 Notasi titik dan sisi pada graf tadpole $T_{n,1}$

3.2 Teknik Pendugaan Nilai *dis(G)*=k

Mengklaim nilai *dis(G)* adalah *k* dengan *k* merupakan nilai label terbesar. Pelabelan ketakteraturan jarak titik diperoleh dengan melabeli suatu graf *G* dengan menggunakan Lema 1. nilai *dis(G)* $\geq \left\lceil \frac{n+\delta-1}{\Delta} \right\rceil$ sebagai acuan batas bawahnya. Jika suatu graf *G* yang dilabeli setiap titiknya lebih dari Lema 1. nilai *dis(G)* $\geq \left\lceil \frac{n+\delta-1}{\Delta} \right\rceil$, maka ditambahkan satu sedemikian hingga bobot titik yang diperoleh berbeda. Setelah dilabeli terbentuk pola pelabelan sehingga dapat ditentukan formulasi pelabelan yaitu fungsi yang memetakan himpunan titik pada bilangan positif. Selanjutnya, memeriksa apakah semua bobot titik berbeda dengan formulasi fungsi bobot titik. Berikut ini adalah langkah langkah dalam teknik pendugaan nilai $dis(G) = k$:

a. Menduga nilai $dis(G) \geq k$

   Menentukan batas bawah dari $dis(G) \geq k$ terlebih dahulu berdasarkan Lema 1 yaitu :

$$\mathit{dis(G)} \geq \left\lceil \frac{n+\delta-1}{\Delta} \right\rceil$$

   Jika nilai $dis(G) \geq k$ terpenuhi, maka terbukti bahwa $dis(G)$ batas bawah dari suatu graf *G*.

b. Membuktikan nilai $dis(G) \leq k$

   Menentukan $dis(G)$ berdasarkan Lema 1 yaitu *dis(G)* $\geq \left\lceil \frac{n+\delta-1}{\Delta} \right\rceil$.

Selanjutnya, melakukan pelabelan pada suatu graf G yang memasangkan himpunan titik pada bilangan bulat positif. Jika graf G tidak dapat diberi label $\{(1, 2, 3, ..., dis(G))\}$, maka dilakukan pelabelan kembali dengan label $dis(G) + 1$.

BAB 5. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan pada bab 4 diperoleh kesimpulan terkait penelitian mencari nilai ketakteraturan jarak titik dalam pelabelan ketakteraturan jarak titik pada graf lollipop, graf centipede, dan graf tadpole ditinjau, nilai dis tidak diperoleh dari batas bawah pada Lema 1, tetapi nilai dis lebih dari nilai batas bawah pada Lema 1.

5.2 Saran

Berdasarkan hasil dari penelitian mengenai pelabelan ketakteraturan jarak titik pada beberapa graf tersebut masih terdapat beberapa permasalahan terbuka. Oleh karena itu peneliti memberi saran bagi pembaca untuk menemukan nilai ketakteraturan jarak titik pada graf lollipop dengan m lebih dari 1 dan graf tadpole untuk n genap, $n \equiv 3, 7$ *mod 8* dan m lebih dari 1. Selain itu juga mengembangkan penelitian pelabelan ketakteraturan jarak titik pada graf-graf dengan dioperasikan.

DAFTAR PUSTAKA

Arumugam, S. dan Kamatchi, N. 2012. On (a, d)-distance antimagic graphs. *Australasian Journal of Combinatorics*. 54: 279-287.

Baca M, Jendrol S, Miller, M dan Ryan, J. 2007. On irregular total labellings. *Discrete Math*. 307: 1378- 1388.

Chartrand, G dan Lesniak, L. 1996. *Graphs and Digraphs, Thrid Edition*. California: Chapman and Hall.

DeMaio, Joe dan Jacobson, John. 2014. Fibonacci Number of the Tadpole Graph. *Electronic Journal of Graph Theory and Applications*. 2(2): 129-138.

Diestel, R. 2005. *Graph Theory Electronic Edition*. Third Edition. New York: Graduate Texts in Mathematics.

Hartsfield, N. dan G. Ringel. 1994. *Pearls in Graph Theory: A Comprehensive Introduction*. America: Academic Press, Inc.

Miller, M., Rodger, C., dan Simanjuntak, R. 2003. Distance magic labellings of graphs. *Australasian Journal of Combinatorics*. 28: 305-315.

Slamin. 2014. On Distance Irregular Labelings of Graphs. Presented on *Graph Masters Workshop*. 102(5): 919-932.

Sudha, S dan Kanniga, V. 2013. Graceful Labeling on The Combination of Some Graphs. *Mathematical Sciences International Research Journal*. 2(2): 630-633.

Vijayan, A dan Nagarajan, T. 2015. Vertex- Edge Domination Polynomials of Lollipop Graphs. *International Journal of Scientific and Innovative Mathematical Research*. 3(4): 39-44.