PEWARNAAN LOKAL SISI *ANTIMAGIC* PADA KELUARGA GRAF POHON DAN GRAF HASIL OPERASI *SHACKLE*

SKRIPSI

Oleh

Nofrian Rohmatillah

NIM 141810101004

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS JEMBER

2018

PEWARNAAN LOKAL SISI *ANTIMAGIC* PADA KELUARGA GRAF POHON DAN GRAF HASIL OPERASI *SHACKLE*

SKRIPSI

diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan Program Studi Matematika (S1) dan mencapai gelar Sarjana Sains

Oleh

Nofrian Rohmatillah

NIM 141810101004

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER
2018

PERSEMBAHAN

Dengan menyebut nama Allah yang Maha Pengasih dan Maha Penyayang serta sholawat dan salam selalu tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW, penulis persembahkan skripsi ini sebagai ungkapan kebahagiaan dan rasa terima kasih kepada:

1. Ibunda Rohmatul Ummah, Ayahanda Harianto dan Wisnu yang telah mendukung dan memberikan doa, kasih sayang, motivasi, dan senyuman yang selalu menguatkan disetiap perjalanan hidup saya;
2. seluruh guru dan dosen beserta almamater sekolah yang telah memberikan banyak ilmu dan suasana kekeluargaan disetiap masanya;
3. teman-teman pejuang graf yang selalu berbagi suka maupun duka;
4. sahabat-sahabat terbaikku dalam keluarga besar matematika angkatan 2014 (Extreme) yang selalu memberi dukungan dan semangat;
5. almamater tercinta Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

MOTTO

"Barang siapa yang keluar untuk mencari ilmu maka ia berada di jalan Allah hingga ia pulang"
(HR. At-Tirmidzi)[1]

"Banyak kegagalan hidup terjadi karena orang-orang tidak menyadari betapa dekatnya kesuksesan ketika mereka menyerah"
(Thomas Alfa Edison)[2]

"Memulai dengan penuh keyakinan, Menjalankan dengan penuh keikhlasan, Menyelesaikan dengan penuh kegembiraan"[3]

[1]Syaikh Muhammad bin Kamal Khalid As-Suyuthi. 2005. Kumpulan Hadits yang Disepakati 4 Imam: Abu Daud, Tirmidzi, Nasa'i dan Ibnu Majah. Jakarta: Pustaka Azzam.
[2]www.bilikata.com
[3]www.posterina.blogspot.com

PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Nofrian Rohmatillah

NIM : 141810101004

menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang berjudul ”Pewarnaan Lokal Sisi *Antimagic* pada Keluarga Graf Pohon dan Graf Hasil Operasi *Shackle*” adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali kutipan yang sudah saya sebutkan sumbernya, belum pernah diajukan pada institusi mana pun, dan isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa ada tekanan dan paksaan dari pihak mana pun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, Januari 2018

Yang menyatakan,

Nofrian Rohmatillah

NIM 141810101004

SKRIPSI

PEWARNAAN LOKAL SISI *ANTIMAGIC* PADA KELUARGA GRAF POHON DAN GRAF HASIL OPERASI *SHACKLE*

Oleh

Nofrian Rohmatillah
NIM 141810101004

Pembimbing

Dosen Pembimbing Utama	:	Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si
Dosen Pembimbing Anggota	:	Ikhsanul Halikin, S.Pd., M.Si

PENGESAHAN

Skripsi berjudul ”Pewarnaan Lokal Sisi *Antimagic* pada Keluarga Graf Pohon dan Graf Hasil Operasi *Shackle*” telah diuji dan disahkan pada:
hari, tanggal :
tempat : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember

Tim Penguji :

Ketua,	Sekretaris,
Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si	Ikhsanul Halikin, S.Pd., M.Si
NIP.19840801 200801 2 006	NIP.19861014 201404 1 001
Dosen Penguji I,	Dosen Penguji II,
Dr. Kristiana Wijaya, S.Si., M.Si	Kusbudiono, S.Si., M.Si
NIP.19740813 200003 2 004	NIP. 19770430 200501 1 001

Mengesahkan
Dekan,

Drs. Sujito, Ph.D
NIP. 19610204 198711 1 001

RINGKASAN

Pewarnaan Lokal Sisi *Antimagic* pada Keluarga Graf Pohon dan Graf Hasil Operasi *Shackle*; Nofrian Rohmatillah, 141810101004; 2018: 37 halaman; Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Pelabelan dan pewarnaan graf merupakan kajian teori graf. Pelabelan graf G adalah sebuah pemetaan yang memetakan elemen-elemen graf G ke bilangan (biasanya bilangan bulat positif) dengan suatu aturan tertentu. Pelabelan graf berdasarkan domain pemetaannya terdiri dari pelabelan titik *(vertex labeling)*, pelabelan sisi *(edge labeling)*, dan pelabelan total *(total labeling)*. Penjumlahan dari label yang terdapat pada titik dan sisi dari suatu graf disebut bobot. Jika pelabelan menghasilkan bobot titik atau bobot sisi yang berbeda disebut pelabelan *antimagic*. Pelabelan *antimagic* ini diperkenalkan oleh Hartsfield dan Ringel pada tahun 1990-an.

Pewarnaan graf terdiri dari tiga jenis yaitu pewarnaan titik *(vertex coloring)*, pewarnaan sisi *(edge coloring)*, dan pewarnaan wilayah *(region coloring)*. Pewarnaan titik pada graf G adalah pemberian warna pada titik-titik graf G, satu warna untuk setiap titik, sedemikian hingga titik-titik yang bertetangga diwarnai dengan warna berbeda. Pewarnaan sisi pada graf G adalah pemberian warna pada sisi-sisi graf G, satu warna untuk setiap sisi, sedemikian hingga sisi-sisi yang bertetangga diwarnai dengan warna berbeda. Banyaknya minimum warna yang digunakan untuk pewarnaan sisi pada graf G disebut sebagai bilangan kromatik sisi graf G dan dinotasikan dengan $\gamma'(G)$. Pewarnaan wilayah pada graf G adalah pemberian warna pada setiap wilayah pada graf G sehingga wilayah bertetangga tidak memiliki warna yang sama.

Penelitian tentang pewarnaan graf yang saat ini baru berkembang yaitu pewarnaan lokal sisi *antimagic* yang dikemukakan oleh Agustin *et al* (2017). Pewarnaan lokal sisi *antimagic* dapat didefinsikan sebagai berikut, sebuah bijeksi f: $V(g) \rightarrow \{1, 2, 3, ..., |\text{V(G)}|\}$ disebut pelabelan lokal sisi *antimagic* untuk dua sisi yang betetangga e_1 dan $e_2, w(e_1) \neq w(e_2)$, dimana $e = uv \in G, w(e) = f(u) + f(v)$. Dengan demikian, setiap pelabelan lokal sisi *antimagic* merupakan pewarnaan sisi pada graf G jika setiap sisi e ditentukan warna $w(e)$. Banyak warna yang minimum untuk mewarnai pada pelabelan lokal sisi *antimagic* pada graf G disebut dengan

bilangan kromatik lokal sisi *antimagic* yang dapat dinotasikan dengan $\gamma_{lea}(G)$.

Pewarnaan lokal sisi *antimagic* diterapkan pada keluarga graf pohon dan graf hasil operasi *shackle*. Adapun graf yang digunakan pada penelitian ini adalah graf bintang ganda (*Double Star Graph*), graf pohon pisang (*banana tree graph*), graf ulat teratur (*caterpilar graph*), graf kembang api (*firecracker graph*), dan graf bintang (*star graph*). Penelitian ini menggunakan metode deduktif dan pendeteksian pola. Pada penelitian ini dihasilkan 5 teorema baru yaitu bilangan kromatik pewarnaan lokal sisi *antimagic* pada graf bintang ganda ($S_{n,n}$), graf pohon pisang ($B_{2,n}$), graf ulat teratur ($C_{n,m}$), graf kembang api ($F_{n,m}$), dan *shackle* graf bintang (*shack*(S_n, v, m)).

PRAKATA

Puji syukur ke hadirat Allah SWT atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul ”Pewarnaan Lokal Sisi *Antimagic* pada Keluarga Graf Pohon dan Graf Hasil Operasi *Shackle*”. Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan pendidikan strata satu (S1) pada Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Penetahuan Alam Universitas Jember.

Penyusunan skripsi ini tidak lepas dari bantuan berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan terima kasih kepada:

1. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
2. Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
3. Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si. selaku Dosen Pembimbing Utama dan Ikhsanul Halikin, S.Pd., M.Si. selaku Dosen Pembimbing Anggota yang telah meluangkan waktu, pikiran, dan perhatian dalam penulisan skripsi ini;
4. Dr. Kristiana Wijaya, S.Si., M.Si selaku Dosen Penguji I dan Kusbidiono, S.Si., M.Si selaku Dosen Penguji II yang telah memberikan kritik dan saran yang membangun dalam penyempurnaan skripsi ini;
5. Kosala Dwija, S.Si., M.Si., selaku Dosen Pembimbing Akademik yang telah memberikan arahan selama perkuliahaan;
6. dosen dan karyawan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
7. keluarga saya Bapak Harianto dan Ibu Rohmatul Ummah, serta saudara-saudara saya yang selalu memberikan doa, semangat dan motivasi untuk tetap berjuang dalam penyelesaian skripsi ini;
8. sahabat saya para wanita hebat (Enik, Dini, Ade, Dita, dan Citra) yang selalu memberikan kasih sayang dan doa, teman-teman angkatan 2014 (Extreme) yang selalu memberikan dukungan dan motivasi, serta sahabat pufo (Nafa, Rosita, Farinsyah) yang selalu memberi semangat;
9. partner terbaik saya Sumbogo Wisnu yang selalu memberi kasih sayang, doa dan semangat dalam penyelesaian skripsi ini;

10. semua pihak yang telah membantu terselesaikannya skripsi ini.

Penulis juga menerima segala kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan skripsi ini. Akhirnya penulis berharap, semoga skripsi ini dapat bermanfaat.

Jember, Januari 2018

Penulis

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

BAB 1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Teori graf merupakan salah satu cabang dalam ilmu matematika diskrit. Bidang ini sering digunakan untuk membantu memecahkan persoalan dengan merepresentasikan objek diskrit dan hubungan antar objek tersebut. Teori graf memiliki keunikan tersendiri karena kesederhanaan objek yang diteliti yaitu berupa titik dan sisi. Representasi visual dari graf adalah dengan menyatakan objek sebagai titik, sedangkan hubungan antar objek tersebut dinyatakan dengan garis atau sisi.

Teori graf mengalami perkembangan yang sangat luas. Salah satu topik yang dikembangkan dalam teori graf dan menarik untuk diteliti adalah pelabelan dan pewarnaan graf. Pelabelan graf G adalah sebuah pemetaan yang memetakan elemen-elemen graf G ke bilangan (biasanya bilangan bulat positif) dengan suatu aturan tertentu. Pelabelan graf berdasarkan domain pemetaannya terdiri dari pelabelan titik *(vertex labeling)*, pelabelan sisi *(edge labeling)*, dan pelabelan total *(total labeling)*. Penjumlahan dari label yang terdapat pada titik dan sisi dari suatu graf disebut bobot. Jika pelabelan menghasilkan bobot titik atau bobot sisi yang berbeda disebut pelabelan *antimagic*. Pelabelan *antimagic* ini diperkenalkan oleh Hartsfield dan Ringel pada tahun 1990-an. Pewarnaan graf terdiri dari tiga jenis yaitu pewarnaan titik *(vertex coloring)*, pewarnaan sisi *(edge coloring)*, dan pewarnaan wilayah *(region coloring)*. Pada pewarnaan graf, permasalahannya bukan hanya memberikan warna berbeda untuk titik atau sisi yang bertetangga, tetapi bagaimana memberikan warna yang minimum, hal ini disebut sebagai bilangan kromatik.

Penelitian tentang pewarnaan graf yang saat ini baru berkembang yaitu pewarnaan lokal *antimagic*. Pada tahun 2017 Arumugam pertama kali memperkenalkan tentang pewarnaan lokal titik *antimagic*. Hasil penelitian tentang pewarnaan lokal titik *antimagic* yang dilakukan oleh Arumugam (2017) yaitu pada graf lintasan, graf lingkaran, graf lengkap, graf persahabatan, graf roda, graf bipartit, dan graf komplit bipartit. Kemudian Agustin *et al* (2017) mengemukakan tentang pewarnaan lokal sisi *antimagic*. Pewarnaan lokal sisi *antimagic* dapat didefinisikan sebagai pelabelan lokal sisi *antimagic*, yaitu jika dua sisi yang bertetangga e_1 dan e_2, bobot e_1 dan e_2 memiliki nilai yang berbeda, dimana bobot sisi e diperoleh dari penjumlahan nilai dari label titik yang berinsiden dengan sisi tersebut dan sisi e diberi warna bobot sisi e. Beberapa penelitian tentang pewarnaan lokal sisi *antimagic* yang dilakukan oleh Agustin *et al* (2017) yaitu pada graf lintasan, graf lingkaran, graf lengkap, graf persahabatan (*friendship graph*), graf bintang, graf tangga, graf roda, *prism graph*, graf $P_n \rhd P_m$, graf $P_n \rhd C_m$, graf $C_n \rhd P_m$, graf $C_n \rhd C_m$, graf $P_n \rhd S_m$, $G \odot mK_1$, graf $C_n \odot mK_1$, dan graf $C_n \rhd S_m$.

Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan sebelumnya, maka penulis tertarik untuk melakukan penelitian dengan kajian tentang pewarnaan lokal sisi *antimagic* pada keluarga graf pohon dan graf hasil operasi *shackle*. Peneliti tertarik melakukan penelitian dengan topik ini karena dalam mencari bilangan kromatik berbeda dengan bilangan kromatik pewarnaan pada umumnya yaitu terlebih dahulu mencari pelabelannya sedemikian hingga bobot sisi yang bertetangga berbeda dan diperoleh warna yang minimum. Pada penelitian ini digunakan keluarga graf pohon seperti graf pohon pisang (*banana tree graph*), graf bintang ganda (*Double Star Graph*), graf ulat (*caterpilar graph*), graf bintang (*star graph*), dan graf kembang api (*firecracker graph*).

1.2 Rumusan Masalah

Rumuskan masalah dalam penelitian ini adalah berapa bilangan kromatik pada pewarnaan lokal sisi *antimagic* pada keluarga graf pohon dan graf hasil operasi *shackle*?

1.3 Batasan Masalah

Untuk menghindari perluasan masalah pada penelitian ini, permasalahan difokuskan pada :

a. Keluarga graf pohon yang digunakan dalam penelitian ini adalah graf pohon pisang (*banana tree graph* ($B_{2,n}$)), graf bintang ganda (*Double Star Graph* ($S_{n,n}$)), graf ulat teratur (*caterpilar graph* ($C_{n,m}$)), graf kembang api (*firecracker graph* ($F_{n,m}$)), dan graf bintang (*star graph*(S_n)).
b. Operasi graf yang digunakan adalah operasi *shackle*.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah menentukan bilangan kromatik pada pewarnaan lokal sisi *antimagic* pada keluarga graf pohon dan graf hasil operasi *shackle*.

1.5 Manfaat Penelitian

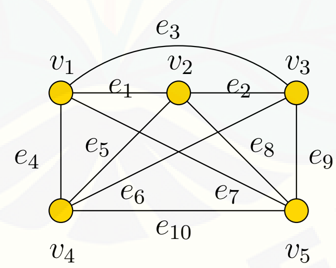
Manfaat yang diharapkan dari penelitian ini yaitu :

a. Menambah pengetahuan baru mengenai bilangan kromatik pada pewarnaan lokal sisi *antimagic* pada keluarga graf pohon dan graf hasil operasi *shackle*.
b. Memberi motivasi pada peneliti lain untuk memperluas penelitian tentang pewarnaan lokal sisi *antimagic*.

BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Terminologi Dasar Graf

Sebuah graf G didefinisiskan sebagai pasangan himpunan (V, E), dimana V adalah himpunan berhingga tak kosong, dan E adalah himpunan (mungkin kosong) dari pasangan tak terurut dari elemen V. Elemen dari V disebut dengan titik dari graf G dan elemen dari E disebut dengan sisi dari graf G (Hartsfield and Ringel, 1994). Sebuah graf dimungkinkan tidak memiliki sisi, tetapi harus memiliki titik minimal satu. Order dari sebuah graf merupakan banyaknya titik yang dimiliki oleh graf tersebut dan dinotasikan dengan $|V|$ (Slamin, 2009). Sedangkan *size* merupakan banyaknya sisi yang dimiliki sebuah graf dan dinotasikan sebagai $|E|$. Misalkan diberikan suatu graf G seperti Gambar 2.1, dari gambar tersebut diketahui jumlah titik $|\ V\ |$ = 5 dengan himpunan titik $V = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ dan $|\ E\ |$ = 10 dengan himpunan sisi $E = (e_1, e_2, e_3, ..., e_{10})$.



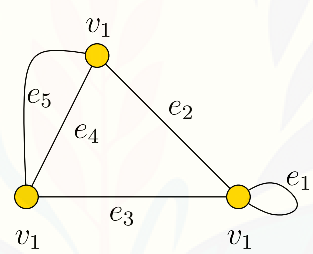
Gambar 2.1 Graf G

Dua titik u dan v pada graf G dikatakan bertetangga (*adjacent*) jika u dan v merupakan titik ujung dari sisi $e = uv$ pada graf G. Sehingga, sisi e dikatakan bersisihan (*incident*) dengan titik u dan v (Rosen, 2012). Titik v_1 dan v_4 pada Gambar

2.1 dikatakan bertetangga *(adjacent)* karena merupakan titik ujung dari sisi e_4. Dengan demikian, v_1 dan v_4 dikatakan bersisihan (*incident*) dengan sisi e_4.

Derajat sebuah titik v_i pada graf G yang dinotasikan dengan $der(v_i)$ adalah banyaknya sisi yang bersisihan dengan titik v_i tersebut (Harary, 1969). Titik terisolasi *(isolated vertex)* adalah titik yang mempunyai derajat nol. Derajat minimal pada suatu graf G dinotasikan dengan δ, sedangkan derajat maksimal pada graf G dinotasikan dengan Δ. Pada Gambar 2.1 graf G memiliki δ = 4 dan Δ = 4.

Sebuah sisi dalam graf G yang menghubungkan sebuah titik v dengan dirinya sendiri disebut *loop*. Dalam suatu graf, apabila terdapat lebih dari satu sisi yang menghubungkan dua titik yang sama, maka sisi-sisi tersebut dinamakan sisi rangkap (*multiple edge*). Sebagai contoh pada Gambar 2.2. e_1 adalah *loop* dan e_4, e_5 adalah sisi rangkap. Graf yang tidak memuat *loop* dan sisi rangkap dinamakan graf sederhana.



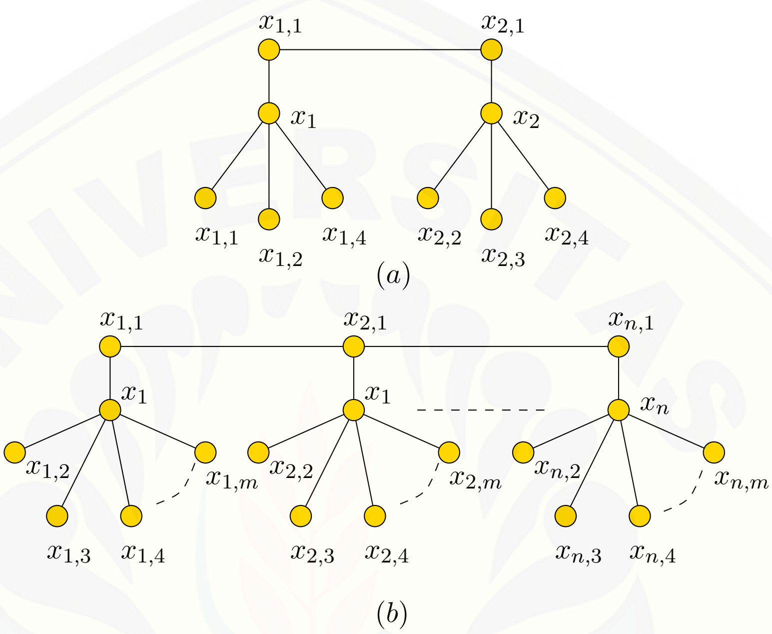
Gambar 2.2 Graf untuk mengilustrasikan *loop* dan sisi rangkap

2.2 Keluarga Graf Pohon

Graf pohon (*Tree*) adalah suatu graf terhubung yang tidak memuat siklus (Rosen, 2012). Sehingga yang dimaksud dengan keluarga graf pohon adalah graf-graf yang memiliki sifat sama dengan graf pohon. Pada graf pohon, sebuah titik yang memiliki derajat 1 disebut daun (Gross, 2006). Berikut ini beberapa contoh keluarga graf pohon, diantaranya:

a. Graf Kembang Api (*Firecracker Graph*)

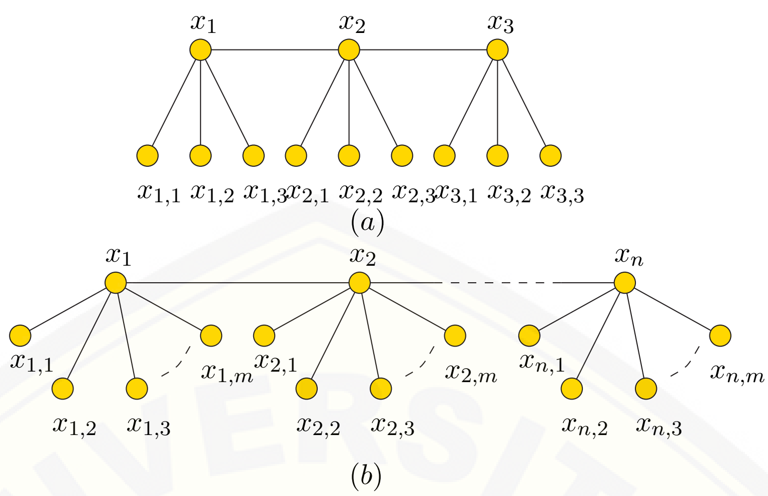
Graf kembang api $F_{n,m}$ adalah graf yang diperoleh dari n buah graf bintang S_m dengan cara menghubungkan sebuah daun dari setiap S_m melalui sebuah lintasan (Saputra, 2014). Contoh dari graf kembang api dapat dilihat pada Gambar 2.3.



Gambar 2.3 (a). Graf Kembang Api $F_{2,4}$, (b). Graf Kembang Api $F_{n,k}$

b. Graf Ulat Teratur (*Caterpillar Graph*)

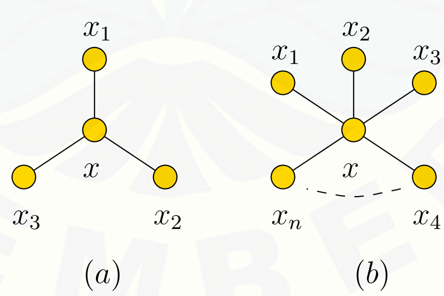
Graf ulat adalah graf yang didapat dari menghubungkan titik pusat x dari graf bintang secara berurutan. Lintasan yang menghubungkan titik pusat x dari barisan graf bintang disebut *backbone* dari graf ulat. Graf ulat dikatakan teratur jika banyaknya daun sama dan dinotasikan dengan $C_{n,m}$ dengan n adalah jumlah titik pada *backbone* dan m adalah jumlah daun pada setiap graf bintang (Darmawahyuni, 2016). Berikut adalah contoh dari graf ulat teratur pada Gambar 2.4.



Gambar 2.4 (a). Graf Ulat Teratur $C_{3,3}$, (b). Graf Ulat Teratur $C_{n,m}$

c. Graf bintang (Star Graph)

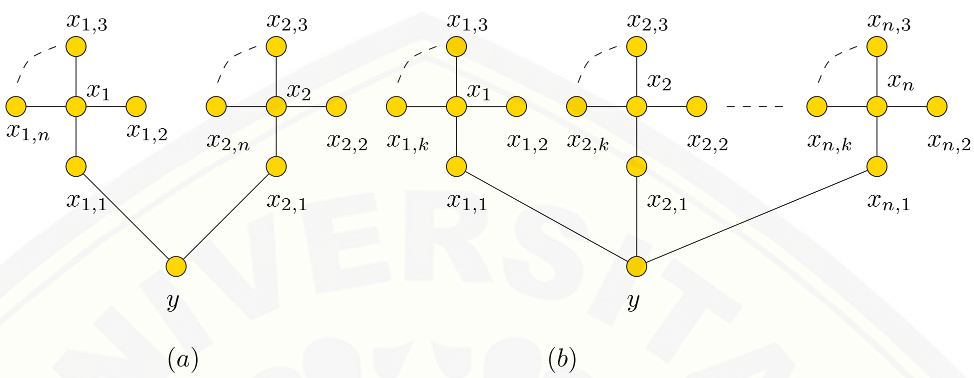
Graf bintang S_n merupakan graf berorder $n+1$ yang memiliki himpunan titik $V(S_n) = \{x_1, x_2, ..., x_n\} \cup \{x\}$ dan himpunan sisi $E(S_n) = \{xx_i, i = 1, 2, ..., n\}$. Titik x biasanya disebut dengan titik pusat yang bertetangga dengan setiap titik yang lain. Graf Bintang memiliki derajat sebanyak n. Contoh dari graf bintang dapat dilihat pada Gambar 2.5.



Gambar 2.5 (a). Graf Bintang S_3, (b). Graf Bitang S_n

d. Graf Pohon Pisang (*Banana Tree Graph*)

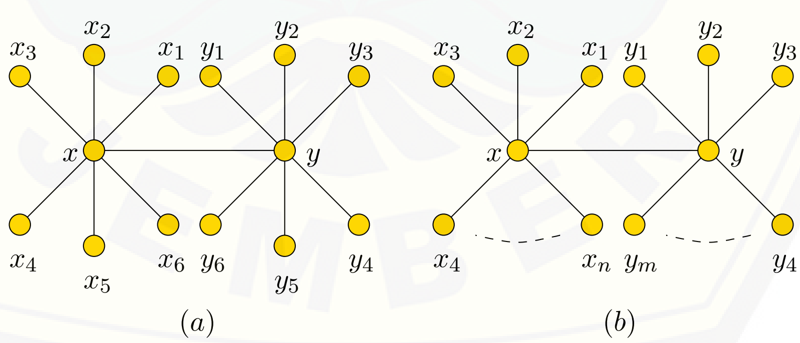
Graf pohon pisang $B_{m,n}$ adalah graf yang diperoleh dengan menghubungkan satu daun dari masing-masing m salinan n-graf bintang dengan satu titik baru yang disebut titik akar y (Ajmal *et al*, 2017). Berikut contoh dari graf bintang pada Gambar 2.6.



Gambar 2.6 (a). Graf Pohon Pisang $B_{2,n}$, (b). Graf Pohon Pisang $B_{m,n}$

e. Graf Bintang Ganda *(Double Star Graph)*

Graf bintang ganda $S_{n,m}$ adalah graf yang memiliki dua titik pusat yang bertetangga yaitu x dan y, dan terdapat n daun $x_1, x_2, ..., x_n$ yang bertetangga dengan x dan m daun $y_1, y_2, ..., y_m$ yang bertetangga dengan y (Wallis dan Marr, 2013). Contoh dari graf bintang ganda dapat dilihat pada Gambar 2.7.

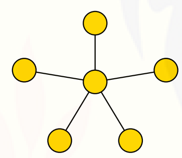


Gambar 2.7 (a). Graf Bintang Ganda $S_{6,6}$, (b). Graf Bintang Ganda $S_{n,m}$

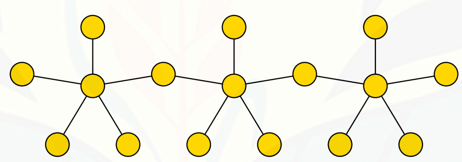
2.3 Operasi Graf

Operasi graf adalah metode yang digunakan untuk mendapatkan sebuah graf baru dengan cara mengkombinasikan dua graf. Pada penelitian ini akan menggunakan operasi *shackle*. Berikut definisi dari operasi *shackle* pada graf.

Definisi 2.3.1 *Shackle dari suatu graf G dinotasikan dengan* $\text{shack}(G, v, k)$ *adalah graf yang dibangun dari graf terhubung non trivial $G_1, G_2, ..., G_k$ sedemikian hingga G_s dan G_t tidak memiliki titik penghubung untuk setiap $1 \leq s, t \leq k$ dengan $|s - t| \geq 2$, dan untuk setiap $1 \leq i \leq k - 1$, G_i dan G_{i+1} memiliki tepat satu titik yang sama v disebut dengan titik pengubung (*vertex linkage*) dan k - 1 titik penghubung semua berbeda* (Maryati *et al*, 2010). Contoh operasi *shackle* dapat dilihat pada gambar 2.8.



(a)



(b)

Gambar 2.8 (a) Graf S_5, (b) $Shack(S_5, v, 3)$

2.4 Fungsi

Fungsi f dari himpunan A ke himpunan B, dinotasikan dengan $f : A \rightarrow B$, adalah aturan korespondensi yang menghubungkan setiap anggota A dengan tepat satu anggota B. Himpunan A disebut sebagai (*domain*) dari f dan himpunan B diartikan sebagai (*kodomain*) dari f. Jika $f(a) = b$, maka b disebut bayangan dari a, dan a disebut prabayangan dari b. *Range* yang disimbolkan dengan R_f atau $f(A)$ merupakan himpunan semua bayangan dari elemen A (Bartle dan Sherbet, 2000). Berikut beberapa definisi dan teorema berkenaan dengan fungsi.

Definisi 2.4.1 Sebuah fungsi $f : A \rightarrow B$ adalah injektif jika dan hanya jika untuk setiap $x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$ mengakibatkan $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Definisi 2.4.2 Sebuah fungsi $f : A \rightarrow B$ adalah surjektif jika dan hanya jika $f(A) = B$, yang berarti range dari f adalah kodomain dari f.

Definisi 2.4.3 Sebuah fungsi $f : A \rightarrow B$ adalah bijektif, jika dan hanya jika fungsi tersebut merupakan fungsi injektif sekaligus surjektif (Oberste-Vorth, 2012).

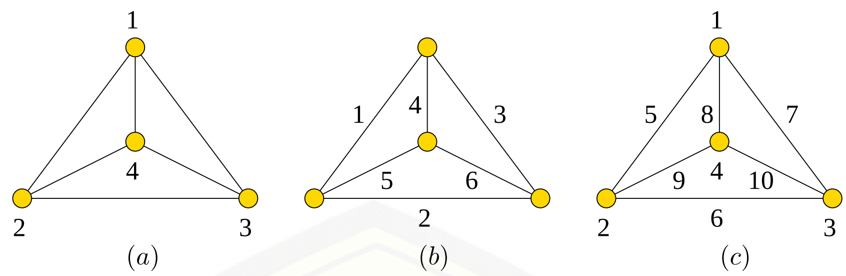
Teorema 2.4.1 *Misalkan domain dan kodomain dari suatu fungsi f adalah himpunan bergingga yang memiliki kardinalitas sama. Maka fungsi f injektif jika hanya jika fungsi f surjektif (Richmond, 2004).*

2.5 Pelabelan Graf

Pelabelan graf G adalah sebuah pemetaan yang memetakan elemen-elemen graf G ke bilangan (biasanya bilangan bulat positif) dengan suatu aturan tertentu. Jika domain pemetaannya adalah himpunan titik dan himpunan sisi maka pelabelannya disebut pelabelan total. Jika domain pemetaannya adalah himpunan titik maka pelabelannya disebut pelabelan titik, dan jika domain pemetaannya adalah himpunan sisi maka pelabelannya disebut pelabelan sisi (Wallis, 2013). Gambar 2.9 mengilustrasikan pelabelan titik, pelabelan sisi, dan pelabelan total pada graf. Penjumlahan dari label sisi yang bersisihan (*incident*) pada suatu titik disebut bobot titik. Penjumlahan dua label titik yang melekat pada suatu sisi disebut bobot sisi.

2.6 Pewarnaan Graf

Pewarnaan graf (*graph coloring)* terdiri dari tiga macam yaitu, pewarnaan titik *(vertex coloring)*, pewarnaan sisi *(edge coloring)*, dan pewarnaan wilayah *(region coloring)* (Munir, 2016). Pewarnaan titik pada graf G adalah pemberian warna pada titik-titik graf G, satu warna untuk setiap titik, sedemikian hingga titik-titik yang

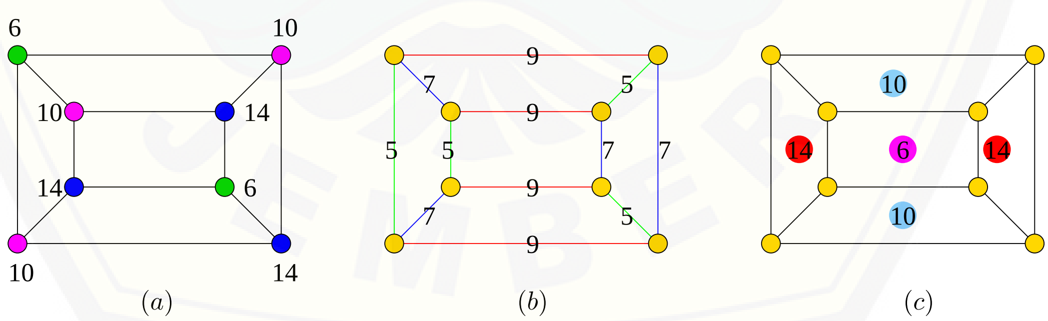


Gambar 2.9 (a) Pelabelan Titik, (b) Pelabelan Sisi, (c) Pelabelan Total

bertetangga diwarnai dengan warna berbeda (Chartrand dan Zhang, 2005). Contoh pewarnaan titik dapat dilihat pada gambar 2.10.

Pewarnaan sisi pada graf G adalah pemberian warna pada sisi-sisi graf G, satu warna untuk setiap sisi, sedemikian hingga sisi-sisi yang bertetangga diwarnai dengan warna berbeda (Chartrand dan Zhang, 2005). Banyaknya minimum warna yang digunakan untuk pewarnaan sisi pada graf G disebut sebagai bilangan kromatik sisi graf G dan dinotasikan dengan $\gamma'(G)$. Contoh pewarnaan sisi dapat dilihat pada gambar 2.10.

Pewarnaan wilayah pada graf G adalah pemberian warna pada setiap wilayah pada graf G sehingga wilayah bertetangga tidak memiliki warna yang sama (Gross dan Yellen, 2006). Contoh pewarnaan wilayah dapat dilihat pada gambar 2.10.

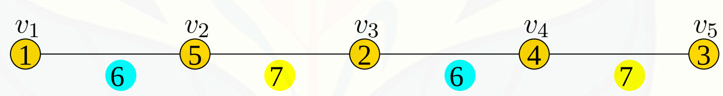


Gambar 2.10 (a). Pewarnaan titik, (b). Pewarnaan sisi, (c). Pewarnaan Wilayah

2.7 Pewarnaan Lokal Sisi *Antimagic*

Pada tahun 1994 Hartsfield dan Ringel memperkenalkan konsep pelabelan *antimagic* yang didefinisikan sebagai pelabelan pada sisi atau titik pada graf dengan bilangan bulat positif sehinga bobot sisi atau bobot titik berbeda. Pada tahun 2017 Agustin *et al* melakukan penelitian tentang pewarnaan lokal sisi *antimagic* yang didefinisikan sebagai berikut, sebuah bijeksi f : $V(g) \rightarrow \{1, 2, 3, ... \mid V(G) \mid\}$ disebut pelabelan lokal sisi *antimagic* jika pada dua sisi yang bertetangga e_1 dan e_2, $w(e_1) \neq w(e_2)$, dimana $e = uv \in G$, $w(e) = f(u) + f(v)$. Dengan demikian, setiap pelabelan lokal sisi *antimagic* merupakan pewarnaan sisi pada graf G jika setiap sisi e diberi warna $w(e)$. Banyak warna yang minimum untuk mewarnai pada pelabelan lokal sisi *antimagic* pada graf G disebut dengan bilangan kromatik lokal sisi *antimagic*. Bilangan kromatik pewarnaan lokal sisi *antimagic* dinotasikan dengan $\gamma_{lea}(G)$.

Teorema 2.7.1 *Jika $\Delta(G)$ adalah derajat maksimum dari graf G, maka diperoleh $\gamma_{lea}(G) \geq \Delta(G)$(*Agustin *et al, 2017).*



Gambar 2.11 Contoh pewarnaan lokal sisi *antimagic*

2.8 Hasil Penelitian Pewarnaan Lokal Sisi *Antimagic* Sebelumnya

Beberapa hasil pelitian sebelumnya, terkait pewarnaan lokal sisi *antimagic* yang dapat digunakan sebagai rujukan penelitian ini. Adapun beberapa hasil penelitian terdahulu dapat dilihat pada Tabel 2.1.

Tabel 2.1: Hasil Pewarnaan Lokal Sisi Antimagic Penelitian Terdahulu

Graf	Bilangan Kromatik lokal antimagic	Keterangan
Graf $P_n \triangleright P_m$ $n, m \geq 3$	$\gamma_{lea}(P_n \triangleright P_m) = 4$	Agustin *et al*, 2017
Graf $P_n \triangleright C_m$ $n \geq 3$ m bilangan bulat positif	$\gamma_{lea}(P_n \triangleright C_m) = 5$	Agustin *et al*, 2017
Graf $C_n \triangleright P_m$ $n, m \geq 3$	$\gamma_{lea}(C_n \triangleright P_m) = 5$	Agustin *et al*, 2017
Graf $C_n \triangleright C_m$ $n \geq 3$ m bilangan bulat positif	$\gamma_{lea}(C_n \triangleright C_m) = 6$	Agustin *et al*, 2017
Graf $P_n \triangleright S_m$ $n, m \geq 3$	$\gamma_{lea}(P_n \triangleright S_m) = 2 + m$	Agustin *et al*, 2017
Graf $C_n \triangleright S_m$ $n, m \geq 3$	$\gamma_{lea}(C_n \triangleright S_m) = 3 + m$	Agustin *et al*, 2017
Graf G	$\gamma_{lae}(G) \geq \Delta(G)$	Agustin *et al*, 2017
Graf Lintasan (P_n) $n \geq 3$	$\gamma_{lea}(P_n) = 2$	Agustin *et al*, 2017
Graf Lingkaran (C_n) $n \geq 3$	$\gamma_{lea}(C_n) = 3$	Agustin *et al*, 2017
Graf Persahabatan (F_n) $n \geq 2$	$\gamma_{lea}(F_n) = 2n + 1$	Agustin *et al*, 2017
Graf Tangga (L_n) $n \geq 2$	$\gamma_{lea}(L_n) = 3$	Agustin *et al*, 2017
Graf Bintang (S_n) $n \geq 3$	$\gamma_{lea}(S_n) = n$	Agustin *et al*, 2017
Graf Roda (W_n) $n \geq 2$	$\gamma_{lea}(W_n) = n + 2$	Agustin *et al*, 2017
Graf Lengkap (K_n) $n \geq 3$	$\gamma_{lea}(K_n) = \frac{n(n-1)}{2} - 1$	Agustin *et al*, 2017
Graf Prisma (Pr_n) $n \geq 3$	$\gamma_{lea}(Pr_n) = 5$	Agustin *et al*, 2017
Graf $C_n \bigodot mK_1$ $n \geq 3, m \geq 1$	$\gamma_{lea}(C_n \bigodot mK_1) = m + 3$	Agustin *et al*, 2017
Graf $G \bigodot mK_1$ $n \geq 3$	$\gamma_{lea}(G \bigodot mK_1) = \gamma_{lae}(G) + m$	Agustin *et al*, 2017
Graf Pohon (T_n) dengan l daun	$\chi_{la}(L_n) = l + 1$	Arumugam *et al*, 2017

Graf	Bilangan Kromatik lokal antimagic	Keterangan
$n \geq 2$		
Graf Lintasan (P_n) $n \geq 3$	$\chi_{la}(P_n) = 3$	Arumugam *et al*, 2017
Graf Lingkaran (C_n) $n \geq 3$	$\chi_{la}(C_n) = 3$	Arumugam *et al*, 2017
Graf Persahabatan (F_n) $n \geq 2$	$\chi_{la}(F_n) = 3$	Arumugam *et al*, 2017
Graf $(F_n - \{e\})$ $n \geq 2$	$\chi_{la}(F_n - \{e\}) = 3$	Arumugam *et al*, 2017
Graf Komplit (K_m, n) $m, n \geq 2$	$\chi_{la}(K_m, n) = 2$	Arumugam *et al*, 2017
Graf Bipartit Komplit (K_2, n) $n \geq 4$	$\chi_{la}(K_m, n) = 2$ jika n genap $\chi_{la}(K_m, n) = 3$ jika n ganjil	Arumugam *et al*, 2017
Graf Tangga (L_n) $n \geq 2$	$\chi_{la}(L_n) = n + 1$	Arumugam *et al*, 2017
Graf Roda (W_n) $m, n \geq 4$	$\chi_{la}(W_n) = 4$ jika $n \equiv 1, 3(mod4)$ $\chi_{la}(W_n) = 3$ jika $n \equiv 2(mod4)$	Arumugam *et al*, 2017
Graf (G_n) $n \geq 4$dan$H + G + K_2$ n genap	$\chi_{la}(G) + 1 \leq \chi_{la}(H)$ $\leq \chi_{la}(G) + 1$	Arumugam *et al*, 2017
Graf (G_n) $n \geq 4$dan$H + G + K_2$ n lainnya	$\chi_{la}(G) + 1 \leq \chi_{la}(H)$ $\leq \chi_{la}(G) + 2$	Arumugam *et al*, 2017

BAB 3. METODE PENELITIAN

3.1 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode deduktif aksiomatik. Metode deduktif adalah metode yang menggunakan prinsip-prinsip pembuktian deduktif yang berlaku dalam logika matematika dengan menggunakan aksioma atau teorema yang telah ada untuk memecakan suatu masalah yang akan diteliti. Pada penelitian ini akan didapatkan teorema-teorema ataupun definisi-definisi baru yang diperoleh dari hasil analisis lebih lanjut terhadap teorema-teorema ataupun definisi-definisi sebelumnya yang telah ada. Penelitian ini pada prosesnya juga menggunakan metode pendeteksian pola yaitu dengan merumuskan bagaimana pola pewarnaan lokal sisi *antimagic* sehingga diperoleh bentuk pola umumnya.

3.2 Data Penelitian

Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah graf pohon pisang (*banana tree graph* ($B_{2,n}$)), graf bintang ganda (*Double Star Graph* ($S_{n,n}$)), graf ulat teratur (*caterpilar graph* ($C_{n,m}$)), graf kembang api (*firecracker graph* ($F_{n,m}$)), dan *shackle* graf bintang (*shack*(S_n, v, m)).

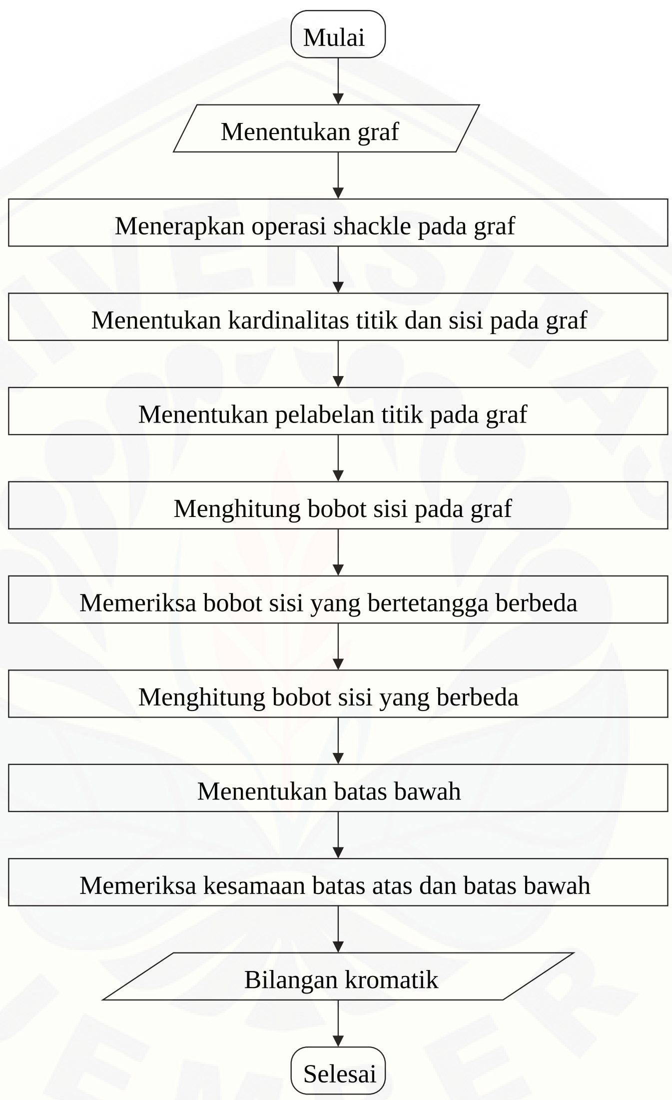
3.3 Rancangan Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada keluarga graf pohon dan graf hasil operasi *shackle*. Adapun rancangan penelitiannya adalah sebagai berikut:

a. Menentukan graf sebagai objek penelitian. Pada metode ini menentukan keluarga graf pohon sebagai objek dari penelitian seperti graf bintang (*star graph*), graf pohon pisang (*banana tree graph*), graf ulat (*caterpilar graph*), graf bintang ganda (*Double Star Graph*), dan graf kembang api (*firecracker graph*)

b. Menerapkan operasi *shackle* pada graf yaitu graf bintang.
c. Menotasikan titik dan sisi.
d. Menentukan kardinalitas sisi dan kardinalitas titik pada keluarga graf pohon dan graf hasil operasi.
e. Menentukan pelabelan titik pada keluarga graf pohon dan graf hasil operasi.
f. Menghitung bobot sisi pada keluarga graf pohon dan graf hasil operasi.
g. Memeriksa apakah bobot sisi yang bertetangga memiliki bobot yang berbeda.
h. Menghitung banyaknya bobot berbeda;
i. Menentukan batas bawah.
j. Memeriksa apakah batas bawah dan batas atas memiliki nilai yang sama.
k. Memperoleh bilangan kromatik.

Adapun skema dari rancangan penelitian ini dapat dilihat pada gambar 3.1.



Gambar 3.1 Skema Rancangan Penelitian

BAB 5. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa bilangan kromatik lokal sisi *antimagic* pada graf pohon pisang $B_{2,n}$ untuk $n \geq 3$ adalah $n \leq \gamma_{lea}(B_{2,n}) \leq n+1$, graf bintang ganda $S_{n,n}$ untuk $n \geq 3$ adalah $\gamma_{lea}(S_{n,m}) = n+1$, graf ulat teratur $C_{n,m}$ untuk $n = 2, m \geq 3$ adalah $\gamma_{lea}(C_{n,m}) = m+1$ dan untuk $n, m \geq 3$ adalah $\gamma_{lea}(C_{n,m}) = m+2$, graf kembang api $F_{n,m}$ untuk $n, m \geq 3$ adalah $m \leq \gamma_{lea}(F_{n,m}) \leq m+1$. Bilangan kromatik lokal sisi *antimagic* pada graf hasil operasi *shackle* yaitu *shack*(S_n, v, m) untuk $n, m \geq 3$ memiliki nilai yang sama dengan graf dasarnya (graf bintang S_n) yaitu $\gamma_{lea}(S_n) = \gamma_{lea} shack(S_n, v, m) = n$ sesuai $\Delta($*shack*$(S_n, v, m)) = n$.

5.2 Saran

Berdasarkan hasil penelitian mengenai bilangan kromatik pewarnaan lokal sisi *antimagic* pada keluarga graf pohon dan graf hasil operasi *shackle*, maka peneliti memberi saran kepada pembaca agar dapat mengembangkan pewarnaan lokal sisi *antimagic* pada graf $B_{n,m}$, $F_{n,m}$, dan keluarga graf pohon yang lain seperti graf , graf E, graf $lobster$, dan sebagainya, serta dengan operasi graf yang lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

Agustin, I. H., M. Hasan, Dafik, R. Alfarisi dan A. I. Kristiana. 2017. Local Edge Antimagic Coloring of Comb Product of Graphs, *Far East Journal of Mathematical Sciences*. Impressed.

Agustin, I. H., M. Hasan, Dafik, R. Alfarisi dan R.M. Prihandini. 2017. Local Edge Antimagic Coloring of Graphs, *Far East Journal of Mathematical Sciences*. Impressed.

Ajmal, M., W. Nazeer, W. Khalid, dan S.M Kang. 2017. Zagreb Polynomials and Multiple Zagreb Indices for the Line Graphs of Banana Tree Graph, Firecracker Graph and Subdivision Graphs. Global Journal of Pure and Applied Mathematics. 13:26592672.

Arumugam S, K. Premalatha, M. Baca dan Semanicova-Fenovcikova A. 2017. Local Antimagic Vertex Coloring of a Graph, *Graphs and Combinnatorics*, 33: 275-285.

Bartle, R.G dan D. R. Sherbet. 2000. *Introduction To Real Analysis, Third Edition*. USA: Hamilton Printing Company.

Chartrand, G. dan P. Zhang. 2005. *Introduction To Graph Theory*. New York: McGraw-Hill Companies,Inc.

Darmawahyuni, A., dan Narwen. 2016. Bilangan Kromatik Lokasi dari Graf Ulat. *Jurnal Matematika UNAND* 2016 (5):1.

Gross, J. L. dan J. Yellen. 2006. *Graph Theory and Its Aplications*, *Second Edition*. California: Chapman & Hall.

Harary, F. 1969. *Graph Theory*. London: Addison-Wesley Publishing Company,Inc.

Hartsfield, N. dan G. Ringel. 1994. *Pearls in Graph Theory*. USA: Academic Press,Inc.

Maryati, T. K., A. N. M. Salman, E. T. Baskoro, J. Ryan, M. Miller. 2010. On H-Supermagic Labellings for Certain Shackles and Amalgamations Of A Connected Graph. *Utilitas Math Bull*, (83): 333-342.

Munir, R. 2016. *Matematika Diskrit*. Bandung: Informatika Bandung.

Oberste-Vorth, R. W., Mouzakitis, A., dan Lawrence, B.A. 2012. *Bridge to Abstract Mathematics*. USA:MAA.

Richmond, B dan T. Richmond. 2004. *A Discrete Transition to Advanced Mathematics*. USA:American Mathematical Society.

Rosen, K. H. 2012.*Discrete Mathematics and Its Application, Seventh Edition*. New York: VAGA.

Saputra, A. 2014. Bilangan Kromatik Lokasi untuk Graf Kembang Api $F_{n,2}$ dan $F_{n,3}$. *Jurnal Matematika UNAND* 2014, (3):4.

Slamin. 2009. *Desain Jaringan: Pendekatan Teori Graf*. Jember: Universitas Jember.

Wallis, W. D. dan A. M. Marr. 2013. *Magic Graphs Second Edition*. Boston: Birkhauser.