Digital Repository Universitas Jember

PEWARNAAN LOKAL SISI *ANTIMAGIC* TOTAL PADA GRAF Bt_n dan HASIL OPERASI *SHACKLE* C_4, Bt_2, S_6, W_3

SKRIPSI

Oleh

Hanifah Husnul Umami

NIM 141810101009

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS JEMBER

2017

Digital Repository Universitas Jember

PEWARNAAN LOKAL SISI *ANTIMAGIC* TOTAL PADA GRAF Bt_n dan HASIL OPERASI *SHACKLE* C_4, Bt_2, S_6, W_3

SKRIPSI

diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat
untuk menyelesaikan Program Studi Matematika (S1)
dan mencapai gelar Sarjana Sains

Oleh

Hanifah Husnul Umami
NIM 141810101009

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER
2017

Digital Repository Universitas Jember

PERSEMBAHAN

Dengan menyebut nama Allah S.W.T yang maha pengasih lagi maha penyayang, serta sholawat atas Nabi Muhammad S.A.W., kupersembahkan sebuah kebahagiaan dengan teriring rasa terimakasihku yang terdalam kepada:

1. Kedua orang tuaku tercinta: Ibunda Wati Ningsih dan Ayahanda Moh. Sholihin yang selalu mencurahkan kasih sayangnya dan mendo'akan dengan tulus tanpa kenal lelah;
2. Nenekku tersayang yang telah memberi semangat dan mendo'akan dengan tulus;
3. Ibu Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si., Bapak Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D., Ibu Dr. Kristiana Wijaya, S.Si., M.Si., dan Bapak Kusbudiono S.Si., M.Si. yang dengan sabar tulus dan ikhlas membimbing sehingga skripsi ini terselesaikan;
4. Akhmad Shofyan Fernanda yang selalu mendampingi dengan penuh kesabaran;
5. Sahabat - sahabat terbaikku: Niya Liyani, Novi Intansari, Latifah Anggraini S. Partner terbaikku dalam mengerjakan skripsi: Enik Nur, Nofrian R, Gita Irawan dan seluruh teman-teman bidang TEORI GRAF;
6. Keluarga besar angkatan matematika 2014 (Extreme) yang selalu memberikan dukungan, semangat serta kenangan dan pengalaman indah yang tak terlupakan;
7. Alamamater tercinta Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Digital Repository Universitas Jember

MOTTO

"... Sesungguhnya Allah tidak akan merubah keadaan suatu kaum sehingga mereka merubah keadaan yang ada pada mereka sendiri..."

(Q.S Ar-radu:11)[1]

"Boleh jadi kamu membenci sesuatu, padahal ia amat baik bagi kamu. Dan boleh jadi kamu mencintai sesuatu, padahal ia amat buruk bagi kamu. Allah Maha mengetahui sedangkan kamu tidak mengetahui"

(Al-Baqarah:216)[2]

1

[1,2] Departemen Agama Republik Indonesia. 2004. *Al-Quran dan Terjemahannya*. Bandung: CV. Penerbit Diponegoro.

Digital Repository Universitas Jember

PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

nama : Hanifah Husnul Umami

NIM : 141810101009

menyatakan dengan sesungguhnya bawha karya ilmiah yang berjudul ”Pewarnaan Lokal Sisi *Antimagic* Total pada Graf Bt_n dan Hasil Operasi *Shackle* C_4, Bt_2, S_6, W_3” adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali kutipan yang sudah saya sebutkan sumbernya, belum pernah diajukan pada institusi manapun, dan bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa ada tekanan dan paksaan dari pihak manapun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, Januari 2018

Yang Menyatakan

Hanifah Husnul Umami

NIM 141810101009

Digital Repository Universitas Jember

SKRIPSI

PEWARNAAN LOKAL SISI *ANTIMAGIC* TOTAL PADA GRAF Bt_n dan HASIL OPERASI *SHACKLE* C_4, Bt_2, S_6, W_3

Oleh

Hanifah Husnul Umami
NIM 141810101009

Pembimbing :

Dosen Pembimbing Utama : Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si.
Dosen Pembimbing Anggota : Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D.

Digital Repository Universitas Jember

PENGESAHAN

Skripsi berjudul "Pewarnaan Lokal Sisi *Antimagic* Total pada Graf Bt_n dan Hasil Operasi *Shackle* C_4, Bt_2, S_6, W_3" telah diuji dan disahkan pada:

hari, tanggal :

tempat : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Tim Penguji:

Ketua,	Anggota I,
Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si.	Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D.
NIP. 198408012008012006	NIP. 196808021993031004
Anggota II,	Anggota III,
Dr. Kristiana Wijaya, S.Si., M.Si	Kusbudiono, S.Si., M.Si
NIP. 197408132000032004	NIP. 197704302005011001

Mengesahkan

Dekan Fakultas Matematikan dan Ilmu Pengetahuan Alam

Universitas Jember,

Drs. Sujito, Ph.D.

NIP. 196102041987111001

Digital Repository Universitas Jember

RINGKASAN

Pewarnaan Lokal Sisi *Antimagic* Total pada Graf Bt_n dan Hasil Operasi *Shackle* C_4, Bt_2, S_6, W_3 ; Hanifah Husnul Umami, 141810101009: 72 halaman; Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Jember.

Perkembangan graf yang sangat pesat adalah pelabelan dan pewarnaan graf. Pelabelan graf adalah suatu pemetaan yang memetakan beberapa himpunan elemen graf ke suatu bilangan (biasanya bilangan bulat positif) dengan suatu aturan tertentu. jika domain pemetaannya adalah himpunan titik dan sisi maka pelabelannya disebut pelabelan total, jika domain pemetaannya adalah titik maka disebut pelabelan titik sedangkan jika domain pemetaannya adalah sisi maka disebut pelabelan sisi. Setelah itu pelebelan berkembang menjadi pelabelan *antimagic*. Suatu graf G disebut *antimagic* (anti-ajaib) jika titik atau sisinya dilabeli sedemikian hingga bobot titik atau sisinya berbeda (graf yang memiliki bobot titik atau bobot sisi yang tidak sama).

Pewarnaan graf merupakan pemberian warna pada objek tertentu pada graf, objek tersebut berupa titik, sisi dan wilayah. Pewarnaan titik (*vertex coloring*) pada graf G adalah memberi warna pada semua titik graf G, dan setiap dua titik yang bertetangga mempunyai warna yang berbeda. Bilangan kromatik titik dari suatu graf G adalah banyaknya minimum warna yang dibutuhkan untuk pewarnaan titik graf G dan dinotasikan dengan $\chi(G)$. Pewarnaan sisi (*edge coloring*) pada graf G merupakan pemberian warna semua sisi graf G dan setiap dua sisi yang terkait pada titik yang sama memiliki warna yang berbeda. Bilangan kromatik sisi dari suatu graf G adalah banyaknya minimum warna yang digunakan untuk mewarnai sisi pada graf G disebut sebagai bilangan kromatik sisi graf G dan dinotasikan $\gamma(G)$. Pewarnaan wilayah (*region coloring*) pada graf G adalah memberikan warna pada setiap wilayah pada graf G sehingga wilayah yang bertetangga tidak memiliki warna yang sama.

Pewarnaan graf mengalami perkembangan menjadi pewarnaan lokal sisi *antimagic* total. Pewarnaan lokal sisi *antimagic* total merupakan pengembangan dari pewarnaan lokal titik *antimagic* yang diperkenalkan oleh Arumugam pada tahun 2017. Pada tahun 2017, Agustin dkk. melakukan penelitian tentang pewarnaan lokal sisi *antimagic* total. Konsep pada penelitian ini berasal dari pelabelan *antimagic* dan

Digital Repository Universitas Jember

pewarnaan yang kemudian digabungkan menjadi pewarnaan lokal sisi *antimagic* total. Pelabelan yang digunakan adalah pelabelan total (titik dan sisi), sehingga suatu fungsi bijektif $f : V(G) \cup E(G) \longrightarrow \{1, 2, 3, ...|V(G)| + |E(G)|\}$ disebut pelabelan lokal sisi *antimagic* total jika untuk dua sisi yang saling bertetangga, misalkan sisi e_1 dan e_2. Bobot sisi total disimbolkan dengan $w_t(e)$ dimana $w_t(e_1) \neq w_t(e_2)$ dan $e = uv \in G$, $w_t(e) = f(u) + f(uv) + f(v)$, sehingga setiap pelabelan lokal sisi *antimagic* total merupakan pemberian warna ($w_t(e)$) pada sisi graf G. Banyaknya warna minimum untuk mewarnai sisi graf G pada pewarnaan lokal sisi *antimagic* total disebut dengan bilangan kromatik lokal sisi *antimagic* yang dinotasikan dengan $\gamma_{leat}(G)$. Pada penelitian pewarnaan lokal sisi *antimagic* total pada graf buku segitiga Bt_n, graf *shackle* siklus ($shack(C_4, v, n)$), graf *shackle* buku segitiga ($shack(Bt_2, v, n)$), graf *shackle* roda ($shack(W_3, v, n)$) dan graf *shackle* bintang ($shack(S_6, v, n)$) di dapatkan 5 teorema baru diantaranya:

1. **Teorema 4.1.** *Diberikan graf buku segitiga* (Bt_n)*, bilangan kromatik pewarnaan lokal sisi antimagic total pada graf* Bt_n *untuk* $n \geqslant 2$ *adalah* $\gamma_{leat}((Bt_n)) \leqslant n+2$, $\forall\, n$ *bilangan asli.*

2. **Teorema 4.2.** *Diberikan graf shack(*Bt_2, v, n*) adalah graf hasil operasi shackle titik dari graf buku segitiga* Bt_2*, bilangan kromatik pewarnaan lokal sisi antimagic total pada graf* $shack(Bt_2, v, n)$ *untuk* $n \geqslant 3$ *adalah* $\gamma_{leat}(shack(Bt_2, v, n)) = 6$, $\forall\, n$ *bilangan asli.*

3. **Teorema 4.3.** *Diberikan graf* $shack(S_6, v, n)$ *adalah graf hasil operasi shackle dari graf bintang* S_6*, bilangan kromatik pewarnaan lokal sisi antimagic total pada graf* $shack(S_6, v, n)$ *untuk* $n \geqslant 2$ *adalah* $\gamma_{leat}(shack(S_6, v, n)) = 6$, $\forall\, n$ *bilangan asli.*

4. **Teorema 4.4.** *Diberikan graf* $shack(C_4, v, n)$ *adalah graf hasil operasi shackle dari graf siklus* C_4*, bilangan kromatik pewarnaan lokal sisi antimagic total pada graf* $shack(C_4, v, n)$ *untuk* $n \geqslant 3$ *adalah* $\gamma_{leat}(shack(C_4, v, n)) = 4$, $\forall\, n$ *bilangan asli.*

5. **Teorema 4.5.** *Diberikan graf* $shack(W_3, v, n)$ *adalah graf hasil operasi shackle dari graf roda* W_3*, bilangan kromatik pewarnaan lokal sisi antimagic total pada*

Digital Repository Universitas Jember

graf $shack(W_3, v, n)$ ***untuk*** $n \geqslant 2$ ***adalah*** $\gamma_{leat}(shack(W_3, v, n)) \leqslant 7$***,*** $\forall$ n ***bilangan asli.***

Digital Repository Universitas Jember

PRAKATA

Puji syukur kehadirat Allah S.W.T atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul ”Pewarnaan Lokal Sisi *Antimagic* Total pada Graf Bt_n dan Hasil Operasi *Shackle* C_4, Bt_2, S_6, W_3”. Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan pendidikan strata satu (S1) pada Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Pada Kesempatan ini penulis mengucapkan terimakasih atas bantuan dan bimbingan dalam penyusunan skripsi ini, terutama kepada yang terhormat:

1. Drs. Sujito, Ph.D., selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
2. Kusbudiono, S.Si., M.Si., selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
3. Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si., selaku Dosen Pembimbing Utama, Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D., selaku Dosen Pembimbing Anggota, Dr. Kristiana Wijaya, S.Si., M.Si, selaku Dosen Penguji I dan Kusbudiono, S.Si., M.Si, selaku Dosen Penguji II, yang telah meluangkan waktu, pikiran, dan perhatian dalam penulisan skripsi ini;
4. Dosen dan karyawan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam;
5. Semua pihak yang telah membantu terselesaikannya skripsi ini.

Semoga bantuan, bimbingan dan dorongan beliau dicatat sebagai amal baik oleh Allah S.W.T dan mendapat balasan yang sesuai dari-Nya. Selain itu, penulis segala kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan skripsi ini. Akhirnya penulis berharap semoga skripsi ini dapat bermanfaat.

Jember, Januari 2018

Penulis

Digital Repository Universitas Jember

DAFTAR ISI

Halaman

Digital Repository Universitas Jember

Digital Repository Universitas Jember

DAFTAR GAMBAR

Digital Repository Universitas Jember

Digital Repository Universitas Jember

DAFTAR TABEL

Digital Repository Universitas Jember

BAB 1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Graf adalah salah satu pokok bahasan Matematika Diskrit yang telah lama dikenal dan banyak diaplikasikan pada berbagai bidang. Graf digunakan untuk merepresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan antar objek-objek tersebut. Graf merupakan representasi visual yang menyatakan objek sebagai titik *(vertex)* dan hubungan antar objek sebagai sisi *(edge)*. Awalnya graf hanya diciptakan untuk diterapkan dalam penyelesaian suatu kasus, namun pada saat ini graf telah mengalami perkembangan yang sangat luas didalam teori graf itu sendiri (Slamin, 2009).

Salah satu perkembangan dari teori graf adalah pelabelan dan pewarnaan graf. Pelabelan graf pertama kali diperkenalkan oleh Kotziq dan Rosa pada tahun 1970-an. Pelabelan graf adalah suatu pemetaan yang memetakan beberapa himpunan elemen graf ke suatu bilangan (biasanya bulat positif) dengan suatu aturan tertentu. Pelabelan berdasarkan domainnya terdiri atas pelabelan titik, pelabelan sisi dan pelabelan total (titik dan sisi), kemudian pada tahun 1990-an Hartsfield dan Ringel memperkenalkan konsep pelabelan *antimagic*, mereka mendefinisikan bahwa suatu graf G disebut *antimagic* (anti-ajaib) jika titik atau sisinya dilabeli sedemikian hingga bobot titik atau sisinya berbeda (graf yang memiliki bobot titik atau bobot sisi yang tidak sama). Pewarnaan graf merupakan pemberian warna pada objek tertentu pada graf, objek tersebut berupa titik, sisi dan wilayah. Pewarnaan terdapat 3 jenis pewarnaan antara lain pewarnaan titik *(vertex coloring)*, pewarnaan sisi *(edge coloring)* dan pewarnaan wilayah *(region coloring)*. Penelitian yang baru berkembang saat ini adalah pewarnaan lokal *antimagic*. Macam-macam pewarnaan lokal *antimagic* yang dapat dikaji antara lain pewarnaan lokal titik *antimagic*, pewarnaan lokal titik *antimagic*

Digital Repository Universitas Jember

total, pewarnaan lokal sisi *antimagic*, pewarnaan lokal sisi *antimagic* total, pewarnaan lokal wilayah *antimagic*, pewarnaan lokal wilayah *antimagic* total.

Pada awal 2017 Arumugam dkk. melakukan penelitian tentang pewarnaan lokal titik *antimagic*. Arumugam dkk. (2017) meneliti bilangan kromatik pada graf pohon (T_n), graf lintasan (P_n), graf siklus (C_n), graf persahabatan $(\mathcal{F}_n)$, graf komplit (K_n), graf tangga (L_n), graf roda (W_n), graf (G_n). Penelitian selanjutnya dikembangkan oleh Agustin dkk. (2017) yang telah meneliti bilangan kromatik pada pewarnaan lokal sisi *antimagic* pada beberapa jenis graf khusus, graf hasil operasi *comb product* dan graf hasil operasi *corona*, graf hasil operasi *comb product* nya adalah graf $P_n \triangleright P_m$, graf $P_n \triangleright C_m$, graf $C_n \triangleright C_m$, graf $P_n \triangleright S_m$, graf $C_n \triangleright S_m$. Graf hasil operasi *corona* adalah graf $C_n \odot mK_1$ dan graf $G \odot mK_1$. Kemudian Agustin dkk. (2017) meneliti bilangan kromatik pada pewarnaan lokal sisi *antimagic* total pada graf lintasan P_n, graf persahabatan $(\mathcal{F}_n)$, graf siklus (C_n), graf lengkap (K_n), graf bintang (S_n), graf prisma Pr_n, graf tangga (Ln), graf ulat (C_n, m), graf $G \odot P_2$, graf $P_n \odot P_2$, graf $C_n \odot P_2$ dan graf $H \odot mK_1$, sedangkan Alfarisi dkk. (2017) meneliti bilangan kromatik pada pewarnaan lokal sisi *antimagic* total pada graf kipas (F_n), graf roda (W_n), graf gir $(j_{n,1})$ dan graf helm (H_n).

Berdasarkan uraian tersebut penulis tertarik untuk melakukan penelitian tentang pewarnaan lokal *antimagic*. Khususnya pada pewarnaan lokal sisi *antimagic* total pada graf hasil operasi. Penulis tertarik pada pewarnaan lokal sisi *antimagic* total, pada proses melabelinya menggunakan pelabelan total yaitu pelabelan titik dan sisi yang kemudian kita jumlahkan pada setiap 2 titik dan 1 sisi yang menghubungkan kedua titik tersebut. Operasi graf yang digunakan pada penelitian ini adalah operasi *shackle* dan graf yang digunakan adalah graf buku segitiga, graf siklus, graf bintang, graf roda, graf kincir sehingga peneliti mengambil judul tentang ”Pewarnaan Lokal Sisi *Antimagic* Total pada Graf Bt_n dan Hasil Operasi *Shackle* C_4, Bt_2, S_6, W_3”.

Digital Repository Universitas Jember

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka dapat dirumuskan masalah dalam penelitian ini adalah berapa bilangan kromatik pada pewarnaan lokal sisi *antimagic* total pada graf buku segitiga Bt_n, graf *shackle* siklus ($shack(C_4, v, n)$), graf *shackle* buku segitiga ($shack(Bt_2, v, n)$), graf *shackle* bintang ($shack(S_6, v, n)$) dan graf *shackle* roda ($shack(W_3, v, n)$).

1.3 Tujuan Penelitian

Sesuai dengan rumusan masalah dan latar belakang di atas, maka tujuan dari penelitian ini adalah menentukan bilangan kromatik pada pewarnaan lokal sisi *antimagic* total pada graf buku segitiga Bt_n, graf *shackle* siklus ($shack(C_4, v, n)$), graf *shackle* buku segitiga ($shack(Bt_2, v, n)$), graf *shackle* bintang ($shack(S_6, v, n)$) dan graf *shackle* roda ($shack(W_3, v, n)$).

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat yang didapatkan dari penelitian ini yaitu:

a. Menambah pengetahuan baru dalam bidang teori graf, khususnya dalam ruang lingkup pewarnaan lokal sisi *antimagic* total pada graf hasil operasi *shackle*;
b. Memberi motivasi pada peneliti lain untuk meneliti lebih lanjut tentang pewarnaan lokal sisi *antimagic* total pada graf hasil operasi yang lainnya.

1.5 Kebaharuan

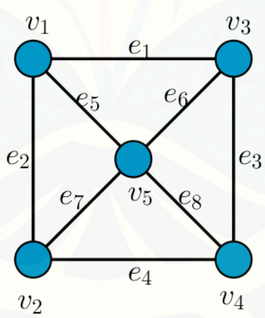
Peneliti sebelumnya telah meneliti pewarnaan lokal sisi *antimagic* total pada beberapa graf khusus dan graf hasil operasi *corona*. Sedangkan pada penelitian ini akan meneliti bilangan kromatik pada graf dasar dan graf hasil operasi. Operasi yang digunakan adalah operasi *shackle*.

Digital Repository Universitas Jember

BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Definisi dan Terminologi Dasar Graf

Sebuah graf G merupakan pasangan himpunan $(V(G), E(G))$ dimana $V(G)$ = $\{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$ merupakan himpunan berhingga tak kosong dari elemen yang disebut titik *(vertex)* dan $E(G)$ = $\{e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n\}$ merupakan himpunan (mungkin kosong) dari pasangan tak terurut $\{u, v\}$ dari titik-titik $u, v \in V(G)$ yang disebut sisi (Slamin, 2009). Sebuah graf dimungkinkan tidak memiliki sisi, tetapi harus memiliki titik minimal satu. *Order* dari sebuah graf merupakan banyaknya titik yang dimiliki oleh graf tersebut dan dinotasikan dengan $|V|$, Sedangkan *size* merupakan banyaknya sisi yang dimiliki sebuah graf dan dinotasikan sebagai $|E|$. Berikut merupakan contoh graf G.



Gambar 2.1 Graf G

Graf G diatas terdiri dari himpunan titik yang dinotasikan dengan $V(G)$= $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan himpunan sisi yang dinotasikan dengan $E(G)$= $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$. Gambar 2.1 memiliki $|V(G)|$ = 5 dan $|E(G)|$= 8.Misal v_1 dan v_2 titik pada graf G. Titik v_1 dikatakan tetangga *(adjacent)* v_2 jika ada sisi e yang menghubungkan titik v_1 dan v_2, yaitu e_2. Jika e_1 adalah sisi pada graf G maka e

Digital Repository Universitas Jember

dikatakan menempel *(incident)* pada titik v_1 dan v_3. Contohnya pada Gambar 2.1, titik v_1 adalah *adjacent* titik v_2, v_3 dan v_5 tetapi titik v_1 bukan *adjacent* titik v_4. Titik v_1 dan sisi e_1 adalah *incident* tetapi titik v_4 dan sisi e_1 bukan *incident*.

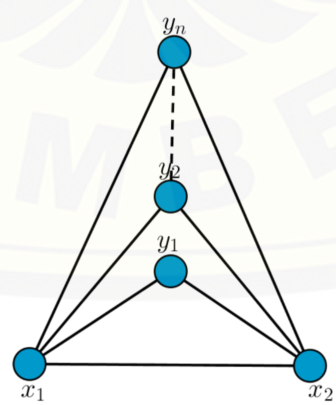
Derajat dari suatu titik v_i pada G, ditulis $der(v_i)$ merupakan banyaknya sisi dalam G yang menempel *(incident)* pada v (Harary, 1969). Derajat minumum pada suatu graf G dinotasikan dengan δ sedangkan derajat maksimum pada graf G dinotasikan dengan Δ. Jika sebuah titik memiliki derajat satu disebut dengan anting-anting *(pendant vertex)*, sedangkan suatu titik dengan derajat nol disebut sebagai titik terisolasi (*isolated vertex*). Graf pada gambar 2.1 memiliki $\Delta(G)$= 4 dan $\delta(G)$ = 3.

2.2 Jenis Graf

Berikut adalah jenis graf yang akan dijadikan sebagai objek penelitian.

a. Graf Buku Segitiga (*Triangular Book Graph*)

Graf buku segitiga (*triangular book graph*) adalah graf terhubung yang dinotasikan dengan Bt_n dengan himpunan sisi $V(Bt_n) = \{x_i, i = 1, 2\} \cup \{y_j, 1 \leq j \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(Bt_n) = \{x_1x_2\} \cup \{x_iy_j, i = 1, 2; 1 \leq j \leq n\}$ sehingga banyaknya titik $n + 2$ dan banyaknya sisi adalah $2n + 1$ (Dafik dkk., 2013).

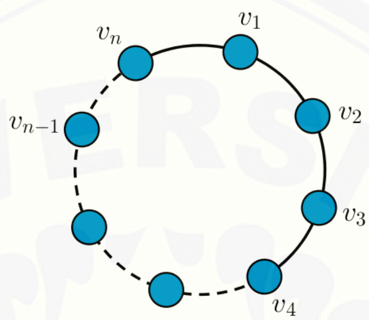


Gambar 2.2 Graf Buku Segitiga Bt_n

Digital Repository Universitas Jember

b. Graf Siklus (*Cycle Graph*)

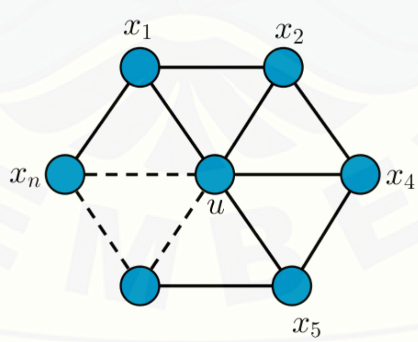
Graf siklus (*cycle graph*) dinotasikan dengan C_n, graf siklus merupakan graf dengan order n dan size n yang memiliki titik-titik yaitu $v_1, v_2, ...v_n$ dan sisi-sisinya adalah (v_{1,v_n}) dan $(v_i v_{i+1})$ untuk $i = 1, 2, ..n - 1$ (Chartrand, 2016).



Gambar 2.3 Graf Siklus C_n

c. Graf Roda (*Wheel Graph*)

Graf roda (*wheel graph*) dinotasikan dengan W_n untuk $n \geqslant 3$ adalah graf yang diperoleh dengan menambahkan sebuah titik pada graf lingkaran C_n untuk $n \geq 3$ dan menghubungkan titik baru tersebut pada setiap n titik pada C_n dengan sisi baru (Rosen, 2012).

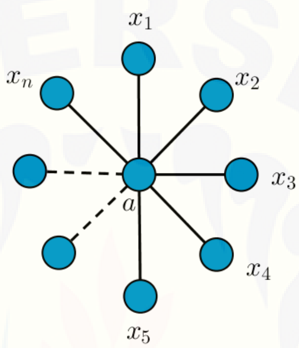


Gambar 2.4 Graf Roda W_n

Digital Repository Universitas Jember

d. Graf Bintang (*Star Graph*)

Graf Bintang (*star graph*) dinotasikan dengan S_n adalah sebuah graf yang berorder $n+1$ yang memiliki himpunan titik $V(S_n) = \{x_1, x_2, ...x_n\} \cup \{a\}$ dan himpunan sisi $E(S_n) = \{ax_i, 1 \leq i \leq n\}$. Titik a disebut dengan titik pusat yang bertetangga dengan setiap titik yang lain. Graf bintang memiliki derajat sebanyak n.



Gambar 2.5 Graf Bintang S_n

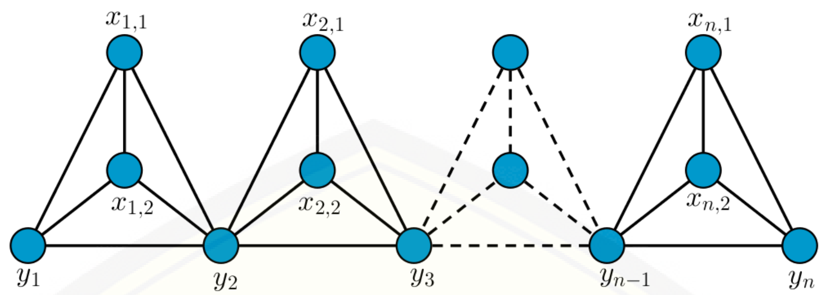
2.3 Operasi Graf

Operasi graf merupakan suatu cara untuk menghasilkan graf baru dengan cara mengoperasikan graf tersebut. Operasi graf yang digunakan dalam penelitian ini adalah operasi *shackle*.

Definisi 2.1. *Shackle dari suatu graf G dinotasikan dengan shack(G, v, k) adalah graf yang dibangun dari graf terhubung non trivial $G_1, G_2, ..., G_k$ sedemikian hingga G_s dan G_t tidak memiliki titik penghubung untuk setiap $1 \leq s$, $t \leq k$ dengan $|s-t| \geq 2$, dan untuk setiap $1 \leq i \leq k-1$, G_i dan G_{i+1} memiliki tepat satu titik yang sama v disebut dengan titik pengubung (vertex linkage) dan k - 1 titik penghubung semua berbeda (Maryati dkk., 2010).*

Contoh operasi *shackle* dapat dilihat pada Gambar 2.6.

Digital Repository Universitas Jember



Gambar 2.6 *shack* (W_3, v, n)

2.4 Fungsi

Fungsi f dari himpunan A ke himpunan B, dinotasikan dengan $f : A \to B$, adalah aturan korespondensi yang menghubungkan setiap anggota A dengan tepat satu anggota B. Himpunan A disebut sebagai *domain* dari f dan himpunan B diartikan sebagai *kodomain* dari f. Jika $f(a) = b$, maka b disebut bayangan dari a, dan a disebut prabayangan dari b. *Range* R_f atau $f(A)$ merupakan himpunan semua bayangan dari elemen A (Bartle dan Sherbert, 2000). Berikut beberapa definisi dan teorema yang berkenaan dengan fungsi.

Definisi 2.2. *sebuah fungsi $f : A \to B$ adalah injektif jika dan hanya jika untuk setiap $x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$ mengakibatkan $f(x_1) \neq f(x_2)$.*

Definisi 2.3. *Sebuah fungsi $f : A \to B$ adalah surjektif jika dan hanya jika $f(A) = B$, yang berarti range dari f adalah kodomain dari f.*

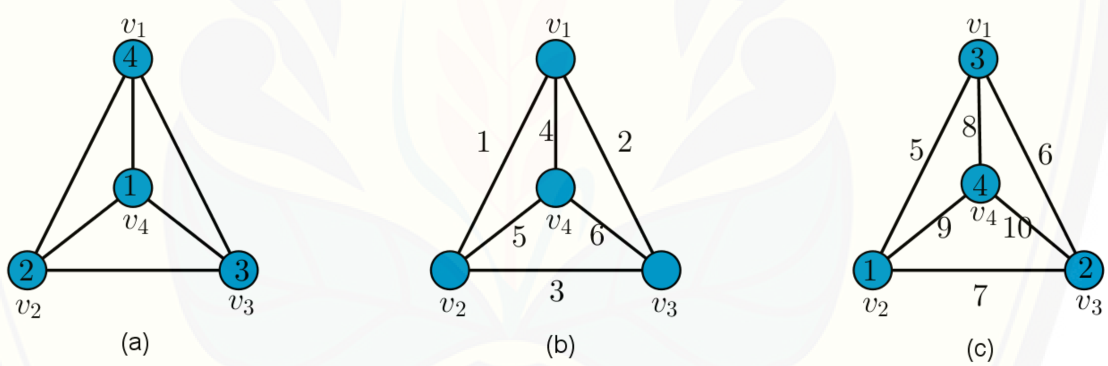
Definisi 2.4. *Sebuah fungsi $f : A \to B$ adalah bijektif jika dan hanya jika fungsi tersebut merupakan fungsi injektif sekaligus surjektif (Oberste-Vorth, 2012).*

$\diamondsuit$ **Teorema 2.1.** *Misalkan domain dan kodomain dari suatu fungsi f adalah himpunan berhingga yang memiliki kardinalitas sama, maka fungsi f injektif jika dan hanya jika fungsi f surjektif (Richmond, 2014).*

Digital Repository Universitas Jember

2.5 Pelabelan Graf

Pelabelan graf adalah suatu pemetaan yang memetakan beberapa himpunan elemen graf ke suatu bilangan (biasanya bilangan bulat positif) dengan suatu aturan tertentu. Pelabelan graf berdasarkan domain pemetaannya ada 3, jika domain pemetaannya adalah himpunan titik dan sisi maka pelabelannya disebut pelabelan total, jika domain pemetaannya adalah titik maka disebut pelabelan titik sedangkan jika domain pemetaannya adalah sisi maka disebut pelabelan sisi. Gambar 2.7 menunjukkan contoh pelabelan graf. Penjumlahan dari label sisi yang bersisian *(incident)* pada titik disebut bobot titik, penjumlahan dua label titik yang melekat pada suatu sisi disebut bobot sisi sedangkan penjumlahan dari label yang ada pada titik dan sisi dari suatu graf disebut bobot total (Wallis, 2013).



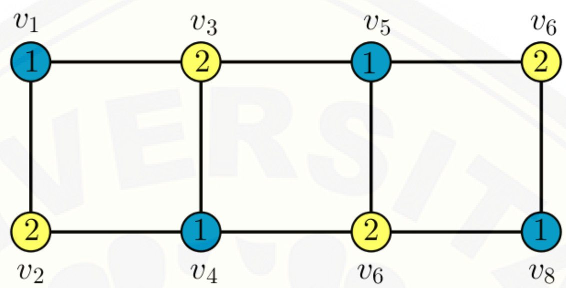
Gambar 2.7 (a) Pelabelan Titik (b) Pelabelan Sisi (c) Pelabelan Total

2.6 Pewarnaan Graf

Pewarnaan graf merupakan pemberian warna pada objek tertentu pada graf, objek tersebut berupa titik, sisi dan wilayah. Pewarnaan pada graf *(graph coloring)* terdapat tiga macam yaitu pewarnaan titik (*vertex coloring*), pewarnaan sisi (*edge coloring*) dan pewarnaan wilayah (*region coloring*). Pewarnaan titik (*vertex coloring*) pada graf G adalah memberi warna pada semua titik graf G, dan setiap dua titik yang bertetangga mempunyai warna yang berbeda. Bilangan kromatik titik dari suatu graf

Digital Repository Universitas Jember

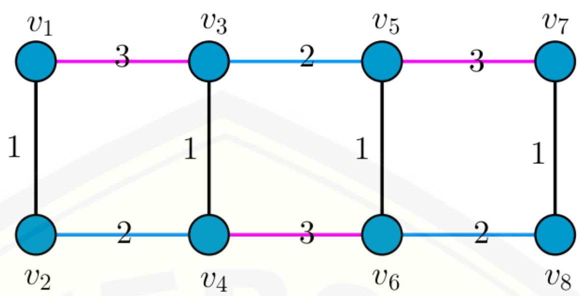
G adalah banyaknya minimum warna yang dibutuhkan untuk pewarnaan titik graf G dan dinotasikan dengan $\chi(G)$ (Hartsfield dan Ringel, 1994). Gambar 2.8 merupakan contoh pewarnaan titik pada graf L_3.



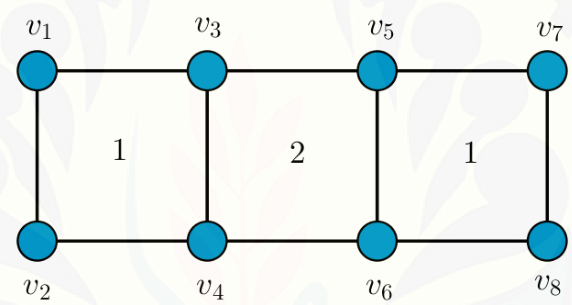
Gambar 2.8 Pewarnaan Titik

Pewarnaan sisi (*edge coloring*) pada graf G merupakan pemberian warna semua sisi graf G dan setiap dua sisi yang terkait pada titik yang sama memiliki warna yang berbeda. Bilangan kromatik sisi dari suatu graf G adalah banyaknya minimum warna yang digunakan untuk mewarnai sisi pada graf G disebut sebagai bilangan kromatik sisi graf G dan dinotasikan $\gamma(G)$. (Hartsfield dan Ringel, 1994). Contoh pewarnaan sisi dapat dilihat pada Gambar 2.9. Pewarnaan wilayah (*region coloring*) pada graf G adalah memberikan warna pada setiap wilayah pada graf G sehingga wilayah yang bertetangga tidak memiliki warna yang sama (Gross dan Yellen, 2006). Contoh pewarnaan wilayah dapat dilihat pada Gambar 2.10.

Digital Repository Universitas Jember



Gambar 2.9 Pewarnaan Sisi



Gambar 2.10 Pewarnaan Wilayah

2.7 Pewarnaan Lokal Sisi *Antimagic* Total

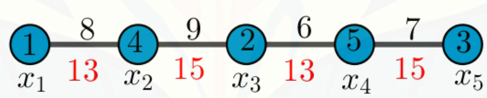
Hartsfield dan Ringel (1994) memperkenalkan konsep pelabelan *antimagic*, pelabelan tersebut merupakan pemberian bilangan bulat positif sehingga bobot pada setiap titik atau sisi berbeda. Pada tahun 2017, Agustin dkk. melakukan penelitian tentang pewarnaan lokal sisi *antimagic* total. Konsep pada penelitian ini berasal dari pelabelan *antimagic* dan pewarnaan yang kemudian digabungkan menjadi pewarnaan lokal sisi *antimagic* total. Pelabelan yang digunakan adalah pelabelan total (titik dan sisi), suatu fungsi bijektif $f : V(G) \cup E(G) \longrightarrow \{1, 2, 3, ...|V(G)| + |E(G)|\}$ disebut pelabelan lokal sisi *antimagic* total jika untuk dua sisi yang saling bertetangga, misalkan sisi e_1 dan e_2. Bobot sisi total disimbolkan dengan $w_t(e)$ dimana $w_t(e_1) \neq$

Digital Repository Universitas Jember

$w_t(e_2)$ dan $e = uv \in G$, $w_t(e) = f(u) + f(uv) + f(v)$. Sehingga setiap pelabelan lokal sisi *antimagic* total merupakan pemberian warna $(w_t(e))$ pada sisi graf G. Banyaknya warna minimum untuk mewarnai sisi graf G pada pewarnaan lokal sisi *antimagic* total disebut dengan bilangan kromatik lokal sisi *antimagic* yang dinotasikan dengan $\gamma_{leat}(G)$.

Definisi 2.5. *Misal $G(V, E)$ adalah graf dengan himpunan titik V dan himpunan sisi E. Semua graf $G(V, E)$ adalah graf terhingga, sederhana dan graf terhubung. Sebuah fungsi bijektif $f : V(G) \cup E(G) \longrightarrow \{1, 2, 3, ...|V(G)| + |E(G)|\}$ disebut lokal sisi antimagic total jika untuk dua sisi yang saling bertetangga e_1 dan e_2, $w_t(e_1) \neq w_t(e_2)$, dimana $e = uv \in G$, $w_t(e) = f(u) + f(uv) + f(v)$. (Agustin dkk., 2017).*

Lema 2.7.1. *Jika $\Delta(G)$ adalah derajat maksimum dari graf G, maka diperoleh $\gamma_{leat}(G) \geqslant \Delta(G)$ (Agustin dkk., 2017).*



Gambar 2.11 Pewarnaan Lokal Sisi *Antimagic* Total pada P_5

2.8 Hasil Pewarnaan Lokal *Antimagic* Sebelumnya

Pada penelitian sebelumnya didapatkan beberapa hasil pewarnaan lokal *antimagic* yang dapat digunakan sebagai rujukan penelitian ini. Hasil penelitian terdahulu mengenai pewarnaan lokal titik *antimagic*, pewarnaan lokal sisi *antimagic* dan pewarnaan lokal sisi *antimagic* total dapat dilihat pada tabel dibawah:

Digital Repository Universitas Jember

Tabel 2.1 Hasil Penelitian Pewarnaan Lokal *Antimagic* Sebelumnya

Graf	Bilangan Kromatik	Keterangan
Graf Pohon (T_n) dengan l daun $n \geq 2$	$\chi_{la}(T_n) = l + 1$	Arumugam dkk., 2017
Graf Lintasan (P_n) $n \geq 3$	$\chi_{la}(P_n) = 3$	Arumugam dkk., 2017
Graf Siklus (C_n) $n \geq 3$	$\chi_{la}(C_n) = 3$	Arumugam dkk., 2017
Graf Friendship $(\mathcal{F}_n)$ $n \geq 2$	$\chi_{la}(\mathcal{F}_n) = 3$	Arumugam dkk., 2017
Graf $(F_n - \{e\})$ $n \geq 2$	$\chi_{la}(F_n - \{e\}) = 3$	Arumugam dkk., 2017
Graf Komplit $(K_{m,n})$ $m, n \geq 2$	$\chi_{la}(K_{m,n}) = 2$	Arumugam dkk., 2017
Graf Komplit Bipartit $(K_{2,n})$ $n \geq 4$	$\chi_{la}(K_{m,n}) = 2$ jika n genap $\chi_{la}(K_{m,n}) = 3$ jika n ganjil	Arumugam dkk., 2017
Graf Tangga (L_n) $n \geq 2$	$\chi_{la}(L_n) = n + 1$	Arumugam dkk., 2017
Graf Roda (W_n) $n \geq 4$	$\chi_{la}(W_n) = 4$ jika $n \equiv 1, 3$ (mod 4) $\chi_{la}(W_n) = 3$ jika $n \equiv 2$ (mod 4)	Arumugam dkk., 2017
Graf (G_n) $n \geq 4$ dan $H + G + K_2$, n genap	$\chi_{la}(G) + 1 \leq \chi_{la}(H)$ $\leq \chi_{la}(G) + 1$	Arumugam dkk., 2017
Graf (G_n) $n \geq 4$ dan $H + G + K_2$, n lainnya	$\chi_{la}(G) + 1 \leq \chi_{la}(H)$ $\leq \chi_{la}(G) + 2$	Arumugam dkk., 2017

Digital Repository Universitas Jember

Graf	Bilangan Kromatik	Keterangan
Graf Lintasan (P_n) $n \geq 3$	$\gamma_{lea}(P_n) \geq \triangle(P_n) = 2$	Agustin dkk., 2017
Graf Siklus (C_n) $n \geq 3$	$\gamma_{lea}(C_n) = 3$	Agustin dkk., 2017
Graf Friendship $(\mathcal{F}_n)$ $n \geq 2$	$\gamma_{lea}(\mathcal{F}_n) = 2n + 1$	Agustin dkk., 2017
Graf Tangga (L_n) $n \geq 2$	$\gamma_{lea}(L_n) = \triangle(L_n) = 3$	Agustin dkk., 2017
Graf Bintang (S_n) $n \geq 3$	$\gamma_{lea}(S_n) = \triangle(S_n) = n$	Agustin dkk., 2017
Graf Roda (W_n) $n \geq 2$	$\gamma_{lea}(W_n) = n + 2$	Agustin dkk., 2017
Graf Lengkap (K_n) $n \geq 3$	$\gamma_{lea}(K_n) = (n(n-1)/2) - 1$	Agustin dkk., 2017
Graf Prisma (Pr_n) $n \geq 3$	$\gamma_{lea}(Pr_n) = 5$	Agustin dkk., 2017
Graf $C_n \odot mK_1$ $n \geq 3, m \geq 1$	$\gamma_{lea}(C_n \odot mK_1) = m + 3$	Agustin dkk., 2017
Graf $G \odot mK_1$ $n \geq 3$	$\gamma_{lea}(G \odot mK_1) = \gamma_{lea}(G) + m$	Agustin dkk., 2017
Graf $P_n \triangleright P_m$ $n, m \geq 3$	$\gamma_{lea}(P_n \triangleright P_m) = 4$	Agustin dkk., 2017
Graf $P_n \triangleright C_m$ $n \geq 3$	$\gamma_{lea}(P_n \triangleright C_m) = 5$	Agustin dkk., 2017
Graf $C_n \triangleright P_m$ $n, m \geq 3$	$\gamma_{lea}(C_n \triangleright P_m) = 5$	Agustin dkk., 2017
Graf $C_n \triangleright C_m$ $n \geq 3$	$\gamma_{lea}(C_n \triangleright C_m) = 6$	Agustin dkk., 2017
Graf $P_n \triangleright S_m$ $n, m \geq 3$	$\gamma_{lea}(P_n \triangleright S_m) = 2 + m$	Agustin dkk., 2017
Graf $C_n \triangleright S_m$ $n, m \geq 3$	$\gamma_{lea}(C_n \triangleright S_m) = 3 + m$	Agustin dkk., 2017

Digital Repository Universitas Jember

Graf	Bilangan Kromatik	Keterangan
Graf Lintasan (P_n) n ganjil, $n \geq 3$ n genap, $n \geq 4$	$\gamma_{leat}(P_n) = 2$ $\gamma_{leat}(P_n) = 3$	Agustin dkk., 2017
Graf Siklus (C_n) $n \geqslant 3$	$\gamma_{leat}(C_n) = 3$	Agustin dkk., 2017
Graf Bintang (S_n) $n \geq 3$	$\gamma_{leat}(S_n) = n$	Agustin dkk., 2017
Graf Tangga (L_n) $n \geq 2$	$\gamma_{leat}(L_n) = 3$	Agustin dkk., 2017
Graf Ulat (C_n, m) $n \geq 3$	$\gamma_{leat}(C_n, m) = m + 2$	Agustin dkk., 2017
Graf $G \odot P_2$ $n \geq 3$	$\gamma_{leat}(G \odot P_2) = \gamma_{leat}(G) + 3$	Agustin dkk., 2017
Graf $P_n \odot P_2$ $n \geq 3$	$\gamma_{leat}(P_n \odot P_2) = 5$	Agustin dkk., 2017
Graf $C_n \odot P_2$ $n \geq 3$	$\gamma_{leat}(C_n \odot P_2) = 5$	Agustin dkk., 2017
Graf $H \odot mK_1$ $n \geq 3$	$\gamma_{leat}(H \odot mK_1) = \gamma_{leat}(H) + m$	Agustin dkk., 2017
Graf Kipas F_n $n \geq 3$	$\gamma_{leat}(F_n) = n + 2$ n ganjil $\gamma_{leat}(F_n) = n + 3$ n genap	Alfarisi dkk., 2017
Graf Roda W_n $n \geq 3$	$\gamma_{leat}(W_n) = n + 4$ n =4 $\gamma_{leat}(W_n) = n + 3$ $n \geqslant 3$ dan $n \neq 4$	Alfarisi dkk., 2017
Graf Gir $J_{n,1}$ $n \geq 3$	$\gamma_{leat}(J_{n,1}) = n + 3$	Alfarisi dkk., 2017
Graf Helm H_n $n \geq 3$	$\gamma_{leat}(H_n) = n + 4$ n ganjil $\gamma_{leat}(H_n) = n + 5$ n genap	Alfarisi dkk., 2017

Digital Repository Universitas Jember

BAB 3. METODE PENELITIAN

3.1 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini yaitu metode deduktif aksiomatik. Metode deduktif menggunakan prinsip-prinsip pembuktian deduktif yang berlaku dalam logika matematika dengan menggunakan aksioma dan teorema yang telah ada untuk memecahkan suatu masalah. Penelitian ini pada prosesnya menggunakan metode pendeteksian pola (*pattern recognition*), yaitu dengan merumuskan pola pelabelan titik dan pelabelan sisi secara umum sehingga pola pewarnaan lokal sisi *antimagic* total diperoleh bentuk pola umumnya.

3.2 Data Penelitian

Data dalam penelitian ini menggunakan data sekunder berupa jenis graf dan operasi graf. Jenis graf yang digunakan yaitu graf siklus *(cycle graph* (C_n)*)*, graf buku segitiga *(triangular book graph* (Bt_n)*)*, graf roda *(wheel graph* (W_n)*)* dan graf bintang *(star* (S_n)*)*. Sedangkan operasi yang digunakan yaitu operasi *shackel*.

3.3 Rancangan Penelitian

Rancangan penelitian untuk pewarnaan lokal sisi *antimagic* total pada graf hasil operasi *shackle* digambarkan dalam bagan yang diilustrasikan dalam gambar 3.1. Adapun uraian teknik penelitian adalah sebagai berikut:

a. menentukan jenis graf sebagai objek penelitian;
   menentukan jenis yang akan dijadikan objek penelitian, jenis graf yang dipilih adalah graf siklus *(cycle graph* (C_n)*)*, graf buku segitiga *(triangular book graph* (Bt_n)*)*, graf roda *(wheel graph* (W_n)*)* dan graf bintang *(star* (S_n)*)*;

Digital Repository Universitas Jember

b. menentukan operasi graf;

setelah ditentukan jenis graf yang akan digunakan, kemudian menerapkan operasi *shackle* pada jenis graf tersebut.

c. menotasikan titik dan sisi;

pada bagian ini dilakukan penotasian titik dan sisi.

d. menentukan kardinalitas titik dan kardinalitas sisi pada graf hasil operasi *shackle*;

graf hasil operasi *shackle* yang digunakan kemudian dicari kardinalitas titik dan kardinalitas sisinya.

e. menentukan pelabelan titik dan pelabelan sisi pada graf;

Pelabelan titik yang diterapkan adalah fungsi bijektif dari himpunan sisi ke bilangan bulat dari 1 sampai sejumlah titik pada graf yang diteliti. Pelabelan sisi yang diterapkan adalah fungsi bijektif dari himpunan sisi ke bilangan bulat dari jumlah titik ditambah 1 sampai sejumlah sisi pada graf yang diteliti.

f. menghitung bobot sisi total pada graf;

setelah memberi label selesai, kita hitung jumlah bobot sisi totalnya $w_t(e) = f(u) + f(uv) + f(v)$.

g. memeriksa apakah bobot sisi total bertetangga berbeda;

memeriksa apakah sisi yang saling bertetangga memiliki bobot sisi total yang sama, apabila sisi yang bertetangga tidak memiliki bobot sisi total yang sama maka dilanjut ke tahap selanjutnya, apabila sisi yang saling bertetangga masih memiliki bobot sisi total yang sama, maka akan kembali ke tahap sebelumnya yaitu menentukan pelabelan titik dan pelabelan sisi pada graf;

h. menentukan batas bawah;

setelah kita selesai mengitung bobot sisi totalnya kita tentukan batas bawahnya;

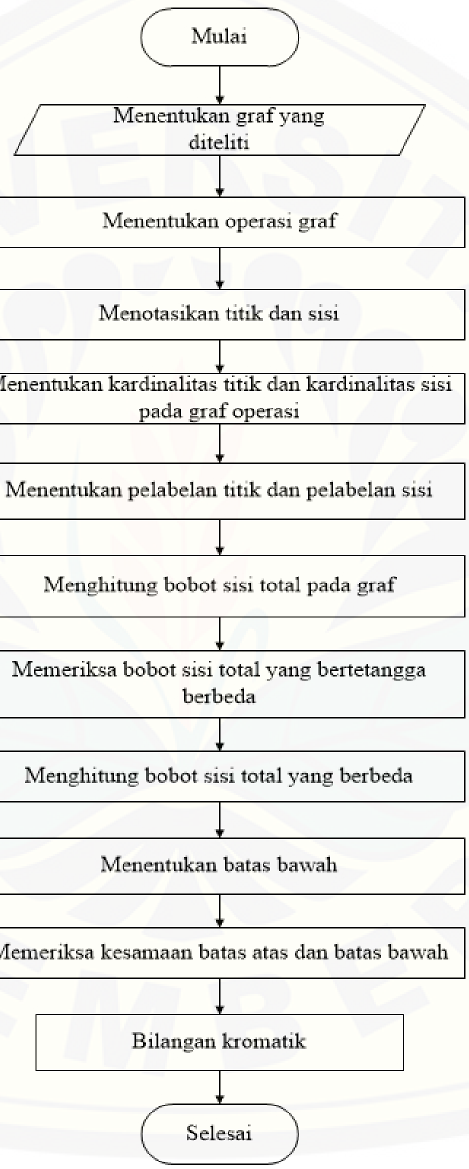
i. memeriksa apakah batas bawah dan batas bawah sudah sama;

setelah kita mendapatkan batas bawahnya setelah itu kita cek apakah sudah sama dengan batas atasnya.

Digital Repository Universitas Jember

j. Memperoleh bilangan kromatik.

Adapun skema dari rancangan penelitian ini dapat dilihat pada gambar 3.1.



Gambar 3.1 Skema Rancangan Penelitian

Digital Repository Universitas Jember

BAB 5. PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan diperoleh kesimpulan bahwa bilangan kromatik pada pewarnaan lokal sisi *antimagic* total pada graf buku segitiga, *shackle* graf buku segitiga*shackle* graf bintang, graf siklus dan *shackle* graf roda adalah $\gamma_{leat}(Bt_n) \leqslant n + 2$, $\gamma_{leat}(shack(Bt_2, v, n)) = 6$, $\gamma_{leat}(shack(S_6, v, n)) = 6$, $\gamma_{leat}(shack(C_4, v, n)) = 4$ dan $\gamma_{leat}(shack(W_3, v, n)) \leqslant 7$, setelah kita peroleh bilangan kromatik tersebut hasil dari bilangan kromatik graf dasar dan graf hasil operasi *shackle*nya adalah $\gamma_{leat}(S_6) = \gamma_{leat}(shack(S_6, v, n))$, $\gamma_{leat}(C_4) \leqslant \gamma_{leat}(shack(C_4, v, n))$, $\gamma_{leat}(Bt_2) \leqslant \gamma_{leat}(shack(Bt_2, v, n))$, $\gamma_{leat}(W_3) \leqslant \gamma_{leat}(shack(W_3, v, n))$.

5.2 Saran

Berdasarkan hasil dari penelitian mengenai pewarnaan lokal sisi *antimagic* total pada graf buku segitiga Bt_2, graf *shackle* siklus $(shack(C_4, v, n))$, graf *shackle* buku segitiga $(shack(Bt_2, v, n))$, graf *shackle* roda $(shack(W_3, v, n))$, graf *shackle* bintang $(shack(S_6, v, n))$ maka peneliti memberikan saran kepada pembaca untuk mengembangkan pewarnaan lokal sisi *antimagic* total pada graf hasil operasi yang lain meliputi *comb* titik, *comb* sisi, amalgamasi, *join*, cartesian, *crown* dsb.

Digital Repository Universitas Jember

DAFTAR PUSTAKA

Agustin, I. H., M. Hasan., Dafik., R. Alfarisi., R. M. Prihandini. 2017. Local Edge Antimagic Coloring of Graphs. *Far East Journal of Mathematical Sciences*. Impressed.

Agustin, I. H., Dafik., Slamin., R. Alfarisi., R. M. Prihandini. 2017. The Construction of Super Local Edge Antimagic Total Coloring By Using an EAVL Technique. (Accepted).

Agustin, I. H., M. Hasan., Dafik., R. Alfarisi., A. I. Kristiana. 2017. Local Edge Antimagic Coloring of Comb Product of Graphs. *Far East Journal of Mathematical Sciences*. Impressed.

Alfarisi, R. dafik. Ika, H. A. Arika, I. K. 2017. The Local Edge Antimagic Total Coloring of Some Wheel Related Graphs. *Far East Journal of Mathematical Sciences*. Impressed.

Ardiyansah, R. dan Darmaji. 2013. Bilangan Kromatik Graf Hasil Amalgamasi Dua Buah Graf. *Sains dan Seni Pomits*, 2(1): 2337-3520.

Arumugam S, K. Premalatha, M. Baca dan A. Semanicova- Fenovcikova. 2017. Local Antimagic Vertex Coloring Of a graph. *Graphs and Combinnatorics*, 33: 275-285.

Bartle, R.G dan D.R. Sherbert. 2000. *Introduction to Real Analysis, Third Edition*. USA:Hamilton Printing Company.

Chartrand, G, L. Lesniak, dan P. Zhang. 2016. *Graphs and Digraphs, Sixth Edition*. California: Chapman and Hall.

Dafik, Slamin, F.R. Eka, dan L. Syadiyah. 2013. Super Antimagicness of Triangular

Digital Repository Universitas Jember

Book and Diamond Ladder Graphs. *Proceeding of International Conference on Mathematics and Its Aplications (IICMA)*. 1-8.

Gross, J. L. dan J. Yellen. 2006. *Graph Theory and its Aplications second Edition*. California : Chapman and Hall.

Gross, J. L. dan J. Yellen. 2003. *Handbook of Graph Theory*. New York : CRC Press.

Harary, F. 1969. *Graph Theory*. London: Addison-Wesley Publishing Company, Inc.

Hartsfield, N. dan Ringel, G. 1994. *Pearls in Graph Theory*. Australia: Academic press.

Maryati, T. K., Salman, A., Baskoro, E. T., Ryan, J. Miller, M 2010. On H Super Magic Labellings for Certain Shackles and Amalgamations Of A Connected Graph Antimagic Total Labellings for Shackles A Connected Graph . *Utilitas Math Bull*, (83): 333-342.

Oberste-Vorth, R. W., Mouzakitis, A., dan Lawrence, B. A. 2012. *Bridge to abstract Mathematics*. USA: MAA.

Richmond, B dan T. Richmond. 2004. *A Discrete Transition to Advanced Mathematics*. USA: American Mathematical Society.

Rosen, Kenneth H. 2012. *Discrete Mathematics and Its Application, Seventh Edition*. New York : VAGA.

Slamin. 2009. *Desain Jaringan : Pendekatan Teori Graf*. Jember : Universitas Jember.

Wallis, W. D. dan A. M. Marr. 2013. *Magic Graphs Second Edition*. Boston: Birkhauser.