PENERAPAN TRANSFORMASI BIDANG PADA MODEL-MODEL TRALIS BANGUNAN

SKRIPSI

Diajukan Untuk Memenuhi Program Sarjana Sains
Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Jember

Oleh :

Nanik Herawati

NIM. 981810101081

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER
2003

PENERAPAN TRANSFORMASI BIDANG PADA MODEL-MODEL TRALIS BANGUNAN

SKRIPSI

Diajukan Untuk Memenuhi Program Sarjana Sains
Jurusan Matematika Fakultas Matematika Dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Jember

Oleh

Nanik Herawati
NIM. 981810101081

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER
2003

MOTTO

Katakanlah: " Kalau sekiranya lautan menjadi tinta untuk (menulis) kalimat-kalimat Tuhanku sesungguhnya habislah lautan itu sebelum habis (ditulis) kalimat-kalimat Tuhanku, meskipun Kami datangkan tambahan sebanyak itu (pula) ".

(Q.S. AL – KAHFI : 109)

PERSEMBAHAN

BISMILLAHIRRAHMAANIRRAHIIM

Dengan menyebut nama Allah yang Maha Pengasah lagi Maha Penyayang, serta syukur kepada Allah yang Maha Agung dan sholawat serta salam untuk Rosul Muhammad Saw, skripsi ini kupersembahkan kepada:

♡. Ayahku Harun Sucipto dan ibuku Ummiyati, kalian adalah guru terbaik sepanjang nyawaku, semoga Allah membalas segala budi baik kalian.

♡. Kedua adikku, Tutik Widayati dan Istiqomah Utami Ningsih, kalian adalah sahabat yang terbaik sepanjang nyawaku, semoga Allah membalas budi baik kalian terhadapku.

♡. Bapak dan ibu dosen yang telah dengan sabar dan ikhlas membimbingku dalam balajar di Universitas Jember ini, semoga Allah membalas segala jasa kalian terhadapku.

♡. Semua teman-temanku sekampus, semoga kalian mendapatkan keridhoan dari Allah SWT.

♡. Semua teman-teman kost yang telah mendukungku, semoga Allah membalas budi baik kalian terhadapku.

Amin

DEKLARASI

Skripsi ini berisi hasil kerja penelitian mulai bulan Pebruari 2002 sampai dengan bulan juni 2003 di jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam . Bersama ini saya menyatakan bahwa isi skripsi ini hasil pekerjaan saya sendiri, kecuali jika disebutkan sumbernya dan skripsi ini belum pernah di ajukan pada instansi yang lain.

Jember, juni 2003

Penulis

Nanik Herawati

ABSTRAK

Penerapan transformasi bidang pada model-model tralis bangunan, Nanik Herawati, Nim: 981810101081, Skripsi, Juni 2003, Jurusan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Jember.

Permasalahan yang akan dibahas dalam skripsi ini adalah, pertama merangcang model-model tralis bangunan dengan aksesoris lingkaran. Kedua didiskusikan tentang model-model tralis bangunan dengan aksesoris lingkaran dan segitiga. Akhirnya, diperkenalkan prosedur merancang model-model tralis bangunan dengan aksesoris lingkaran, segitiga, dan busur lingkaran. Hasil dari penelitian ini menunjukkan bahwa untuk merancang model-model tralis dengan aksesoris lingkaran antara lain dapat dilakukan dengan prosedur berikut. Pertama, menentukan dimensi bingkai tralis dengan panjang P satuan dan lebar L satuan. Kedua, membagi bingkai tralis menjadi beberapa unit kerangka isian dengan cara vertikal dan horisontal atau secara diagonal. Ketiga, membangun model-model aksesoris lingkaran dan keempat mengisi bingkai tralis dengan unit kerangka isian dari model aksesoris lingkaran dengan menggunakan transformasi bidang (refleksi dan translasi). Untuk merancang model-model tralis bangunan dengan aksesoris lingkaran dan sigitiga ataupun model-model tralis bangunan dari bentuk lingkaran, segitiga, dan busur lingkaran dapat dilakukan melalui prosedur seperti pada perancangan model-model tralis bangunan dari aksesoris lingkaran.

Kata kunci: Poligon, bingkai tralis, aksesoris, unit kerangka isian, simetris.

PENGESAHAN

Skripsi ini diterima oleh Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember pada:

Hari : JUM'AT

Tanggal : 20 JUN 2003

Tempat : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Tim Penguji

Ketua (Dosen Pembimbing Utama)	Sekretaris (Dosen Pembimbing Anggota)
(Drs. Kusno DEA Ph.D)	(Kosala Dwidja Purnomo. S.Si)
NIP: 131 592 357	NIP: 132 206 019
Anggota I	Anggota II
(Drs. Rusli Hidayat. Msc)	(Kiswara Agung Santoso. S.Si)
NIP: 132 048 321	NIP: 132 207 813

Mengesahkan

Dekan FMIPA UNEJ

Ir. Sumadi. M.S

NIP: 130 368 784

KATA PENGANTAR

Dengan mengucapkan Alhamdulillah, penulis telah diberi kemudahan untuk menyelesaikan skripsi ini.

Penulis menyampaikan terima kasih kepada Bapak Kusno dan Bapak Kosala yang telah dengan kesabaran dan keikhlasan membantu saya dalam menyelesaikan skripsi ini.

Skripsi ini, saya maksudkan untuk menjadi bahan perenungan oleh seluruh pembaca bahwa sesungguhnya apa yang telah saya tulis ini hanyalah secuil kecil sekali dari ilmu Allah dan jika mau maka masih panjang skripsi ini untuk ditulis lagi.

Semoga Allah selalu melimpahkan Ilmu – Nya kepada orang-orang yang beriman dan bertaqwa. Amin.

Jember, Juni 2003 Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

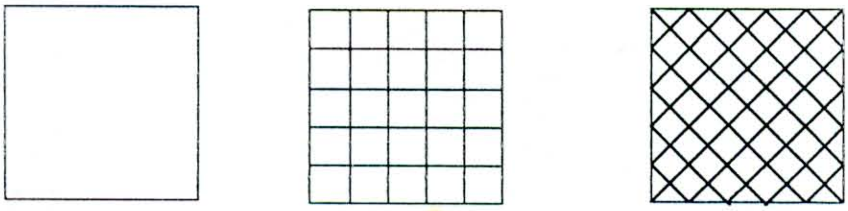
Rumah atau tempat tinggal merupakan salah satu kebutuhan pokok manusia. Dewasa ini orang membangun rumah tidak hanya dilihat dari segi kuat atau kokohnya bangunan tetapi juga melihat segi keindahan, kenyamanan, dan keamanan. Unsur keindahan bangunan tidak hanya dapat dilihat dari bentuk atau bahan bangunan itu sendiri, akan tetapi juga dilihat dari hiasan-hiasan yang dipergunakan. Diantara hiasan yang digunakan pada bangunan tersebut adalah tralis. Oleh sebab itu industri tralis sangat potensial untuk dikembangkan, seiring semakin bertambahnya kebutuhan tempat tinggal bagi manusia.

Model-model aksesoris bingkai tralis bangunan, kita temukan memiliki karakter-karakter geometri. Diantaranya ada yang berbentuk tabung, spiral, busur lingkaran, lingkaran, segitiga, persegi panjang, dan bujur sangkar. Dari bentuk-bentuk geometri diatas dapat dirangkai menjadi model-model bingkai tralis yang bagus dan simetris.

Dalam kenyataan di lapangan, model bingkai tralis yang digunakan masih terbatas dan monoton bentuknya. Ukuran dan strukturnya secara umum juga masih kurang bervariasi. Oleh sebab itu, untuk mendapatkan model-model tralis yang memenuhi unsur keindahan dan keamanan, kita tertarik untuk melakukan penelitian ini. Adapun persoalan yang akan dipecahkan dirumuskan sebagai berikut.

1.2 Rumusan Masalah

Misalkan diberikan bingkai tralis berbentuk persegi panjang (Gambar 1a). Bingkai tralis tersebut terisi kerangka yang setiap unit kerangkanya dalam bentuk persegi panjang (Gambar 1b dan gambar 1c).

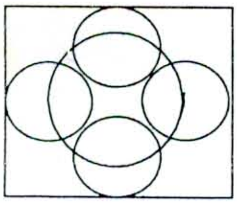


(a) (b) (c)

Gambar 1: Model bingkai dan kerangka tralis

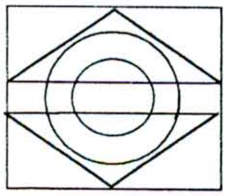
Masalah yang diajukan dalam penelitian ini adalah:

1. Mengisi setiap persegi panjang dalam kerangka tralis dengan beberapa lingkaran yang ukurannya tidak harus sama sehingga dalam setiap lubang kerangka tersebut terbangun bentuk simetri dari keluarga lingkaran.



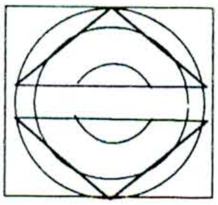
Gambar 2 : Contoh model tralis dengan aksesoris lingkaran

2. Mengisi persegi panjang dalam kerangka dengan beberapa segitiga dan lingkaran sehingga dalam satu bingkai terbangun bentuk simetri dari keluarga segitiga dan lingkaran.



Gambar 3 : Contoh model tralis dengan aksesoris segitiga dan lingkaran

3. Mengisi persegi panjang dalam kerangka dengan beberapa bentuk segitiga, busur lingkaran, dan lingkaran sehingga dalam satu bingkai terbangun bentuk simetri dari keluarga segitiga, busur lingkaran, dan lingkaran.



Gambar 4 : Contoh model tralis dengan aksesoris segitiga, lingkaran dan busur lingkaran

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah:

1. Mendapatkan algoritma untuk pemodelan aksesoris bingkai tralis bangunan dari bentuk lingkaran.
2. Mendapatkan algoritma untuk pemodelan aksesoris bingkai tralis bangunan dari bentuk segitiga dan lingkaran.
3. Mendapatkan algoritma untuk pemodelan aksesoris bingkai tralis bangunan dari bentuk segitiga, busur lingkaran, dan lingkaran.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat yang di harapkan dari hasil penelitian ini adalah:

1. Untuk merancang model-model tralis bangunan.
2. Untuk mengoptimalkan waktu operasi perancangan tralis bangunan.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Segitiga

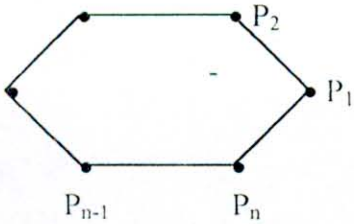
2.1.1 Pengertian dan Kekongruenan Poligon

Definisi, postulat, dan teorema di bawah ini diambil dari buku *Geometri Bidang* karangan Kusno (1988). Sebelum kita mendefinisikan tentang segitiga maka terlebih dahulu kita definisikan tentang pengertian dan kekongruenan poligon. Poligon menurut arti kata berarti segibanyak. Sedangkan secara geometri, poligon mempunyai pengertian sebagai berikut.

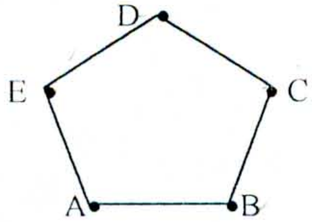
Definisi 1 : Poligon adalah gabungan himpunan titik-titik P_1, P_2, P_3, ..., P_{n-1}, P_n dengan ruas-ruas garis $\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_2P_3}$, ..., $\overline{P_{n-1}P_n}$, $\overline{P_nP_1}$ sedemikian hingga jika dua sebarang dari ruas garis berpotongan, titik potongnya adalah salah satu dari titik-titik P_1, P_2, P_3, ..., P_{n-1}, P_n dan tidak ada titik lain.

Titik-titik P_1, P_2, P_3, ..., P_{n-1}, P_n disebut titik sudut poligon (Lihat gambar 5a), sedang ruas-ruas $\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_2P_3}$, ..., $\overline{P_nP_1}$ disebut sisi-sisi poligon.

Suatu poligon diberi nama sesuai dengan titik-titik sudutnya secara berurutan dengan cara searah jarum jam Contoh : EDCBA, DCBAE, dan sebagainya (Lihat gambar 5b).



(a)



(b)

Gambar 5 : Contoh bentuk poligon

Poligon yang akan dipergunakan pada skripsi ini dibatasi pada poligon yang konveks. Adapun pengertian dari **poligon konveks** adalah poligon yang ukuran sudut-sudut dalam atau interior tidak lebih dari 180. Sedangkan **poligon tidak konveks** adalah poligon dengan ukuran sudut-sudut dalam atau interiornya lebih dari 180.

Pengertian kekongruenan pada dua poligon didefinisikan sebagai berikut:

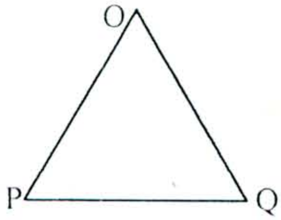
Definisi 2: Dua poligon adalah kongruen, jika ada korespondensi 1-1 diantara titik-titiknya sedemikian hingga :

1. Semua sisi yang berkorespondensi kongruen.
2. Semua sudut yang berkorespondensi kongruen.

2.1.2 Pengertian dan Kekongruenan Segitiga

Pengertian dari segitiga sebagai berikut.

Definisi 3 : Segitiga adalah poligon yang bersisi tiga.

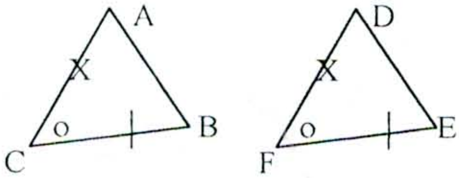


Gambar 6: Segitiga

Segitiga OPQ dinotasikan ΔOPQ, mempunyai tiga sisi yaitu $\overline{OP}$, $\overline{OQ}$, dan $\overline{PQ}$. Jumlah dua sisi segitiga yang bersisihan selalu lebih besar dari sisi yang ketiga (Kusno,1988). Dalam ΔOPQ jumlah ukuran $\overline{OP}$ dan ukuran $\overline{OQ}$ selalu lebih besar dari ukuran $\overline{PQ}$, disimbolkan $u\overline{OP} + u\overline{OQ} > u\overline{PQ}$. Jumlah ukuran semua sudut suatu segitiga sama dengan 180.

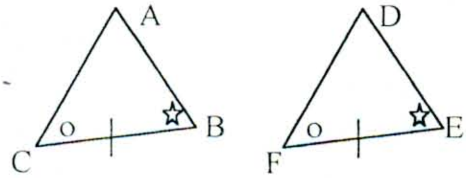
Kekongruenan dua segitiga dipostulatkan sebagai berikut.

Postulat 1 (sisi-sudut-sisi): Dua segitiga adalah kongruen jika ada suatu korespondensi diantara titik-titik sudutnya sedemikian hingga dua sisi dan sudut apitnya dari sebuah segitiga kongruen terhadap bagian-bagian yang berkorespondensi segitiga kedua.



Gambar 7: Postulat (sisi-sudut-sisi)

Postulat 2 (sudut-sisi-sudut): Dua segitiga adalah kongruen, jika ada suatu korespondensi diantara titik-titik sudutnya sedemikian hingga dua sudut dan sisi apitnya dari sebuah segitiga kongruen terhadap bagian-bagian yang berkorespondensi segitiga kedua.



Gambar 8: Postulat (sudut-sisi-sudut)

Teorema 1 (sisi-sisi-sisi): Dua segitiga adalah kongruen, jika ada korespondensi diantara titik-titik sudutnya, sedemikian hingga ketiga sisi pada sebuah segitiga kongruen terhadap sisi-sisi yang berkorespondensi pada segitiga lain.

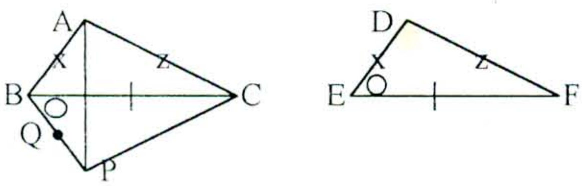
Diketahui : $\overline{AB} \cong \overline{DE}$

$\overline{BC} \cong \overline{EF}$

$\overline{AC} \cong \overline{DF}$

Buktikan : $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

Bukti :



Gambar 9 : Ilustrasi pembuktian teorema (sisi-sisi-sisi)

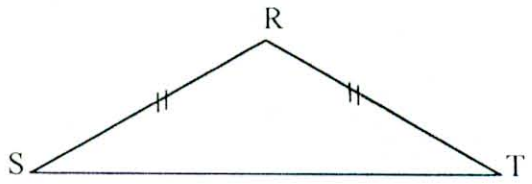
Pernyataan	Alasan
1. Titik B pada $\overline{BC}$, sedemikian hingga $\angle QBC \cong \angle DEF$	1. Postulat : jika suatu titik diketahui terletak pada suatu garis, ada sudut yang titik sudutnya adalah titik tadi sedemikian hingga sudut tersebut kongruen dengan sebarang sudut yang diketahui.
2. Perpanjang $\overline{BQ}$ sehingga $\overline{PB} \cong \overline{DE}$	2. Postulat garis: sebuah garis dapat diperpanjang dari ujung-ujungnya.
3. $\overline{PC}$ garis yang melalui titik P dan C	3. Postulat: ada tunggal garis yang melalui dua titik.
4. $\overline{BC} \cong \overline{EF}$	4. Diketahui
5. $\Delta DEF \cong \Delta PBC$	5. Postulat (sisi-sudut-sisi)
6. $\overline{PC} \cong \overline{DF}$	6. Akibat kekongruenan segitiga
7. $\overline{AC} \cong \overline{DF}$	7. Diketahui

Pernyataan	Alasan
8. $\overline{AC} \cong \overline{PC}$	8. Substitusi 6 ke 7 (sifat transitif)
9. $\overline{PA}$ garis yang melalui titik P dan A	9. Sama dengan no.3
10. $\angle CAP \cong \angle CPA$	10. Teorema: Jika dua sisi suatu segitiga kongruen, maka sudut-sudut dihadapan kedua sisi tersebut kongruen.
11. $\overline{AB} \cong \overline{DE}$	11. Diketahui
12 $\overline{AB} \cong \overline{PB}$	12. Substitusi 2 ke 11
13. $\angle BAP \cong \angle BPA$	13. Sama dengan no. 10
14. $\angle BAC \cong \angle BPC$	14. postulat penjumlahan sudut
15. $\Delta ABC \cong \Delta PBC$	15 Postulat (sisi-sudut-sisi)
16. $\therefore \Delta ABC \cong \Delta DEF$	16. Substitusi 5 ke 15

2.1.3 Macam-macam bentuk segitiga

a. Segitiga sama kaki

Definisi 4 : Segitiga sama kaki adalah segitiga dengan kedua sisinya kongruen.



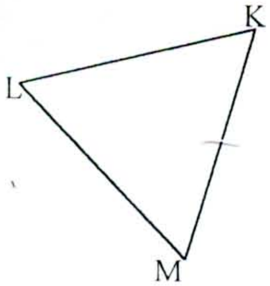
Gambar 10: Segitiga sama kaki

ΔRST adalah segitiga sama kaki dengan $\overline{RS} \cong \overline{RT}$.

b. Segitiga sama sisi

Pengertian dari segitiga sama sisi sebagai berikut.

Definisi 5 : Segitiga sama sisi adalah segitiga dengan ketiga sisinya kongruen.



Gambar 11: Segitiga sama sisi

ΔKLM adalah segitiga sama sisi dengan $\overline{KL} \cong \overline{KM} \cong \overline{LM}$. Akibat dari adanya segitiga sama sisi berlaku segitiga sama sudut, dimana berlaku :

Teorema 2 : Dua segitiga adalah kongruen, jika ada suatu korespondensi diantara titik sudut- titik sudutnya sedemikian hingga dua sudut dan satu sisi yang berhadapan pada segitiga yang satu kongruen terhadap bagian-bagian yang berkorespondensi dengan segitiga yang lain.

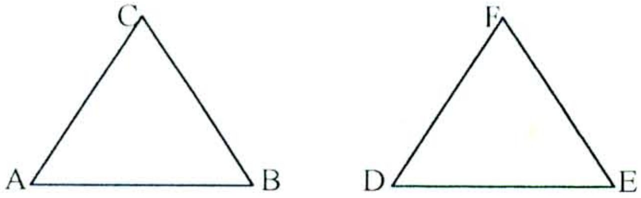
Diketahui : $\angle A \cong \angle D$

$\angle B \cong \angle E$

$\overline{AC} \cong \overline{DF}$

Dibuktikan : $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

Bukti :



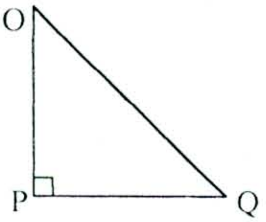
Gambar 12: Ilustrasi pembuktian Teorema 2

Pembuktian	Alasan
1. $\angle A \cong \angle D$	1. Diketahui
2. $\angle B \cong \angle E$	2. Diketahui
3. $\angle C \cong \angle F$	3. Teorema: Jika dua sudut pada suatu segitiga adalah kongruen terhadap dua sudut segitiga yang kedua, maka sudut yang ketiganya kongruen
4. $\overline{AC} \cong \overline{DF}$	4. Diketahui
5. $\Delta ABC \cong \Delta DEF$	5. Postulat (sudut-sisi-sudut)

C. Segitiga siku-siku

Pengertian dari segitiga siku-siku adalah :

Definisi 6 : Segitiga siku-siku adalah segitiga dengan ukuran salah satu sudutnya 90



Gambar 13: Segitiga siku-siku

ΔOPQ adalah segitiga siku-siku dengan $\angle OPQ$ sebagai sudut siku-siku. Semua sudut lancip pada segitiga siku-siku adalah komplemen. Pada segitiga siku-siku berlaku hal khusus tentang kekongruenan, yaitu:

> *Teorema 3* : Dua segitiga siku-siku kongruen, jika ada suatu korespondensi diantara titik sudut-titik sudutnya, hipotenosa dan satu kaki siku-siku segitiga yang satu kongruen dengan yang berkorespondensi pada segitiga yang lain.

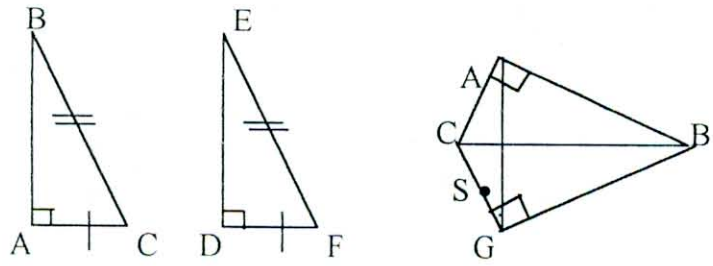
Diketahui : ΔABC dan ΔDEF masing-masing siku-siku di A dan D

$\overline{BC} \cong \overline{EF}$ (Hipotenosa)

$\overline{AC} \cong \overline{DF}$

Buktikan : $\Delta BAC \cong \Delta EDF$

Bukti :



Gambar 14: Ilustrasi pembuktian Teorema 3

Pernyataan	Alasan
1. Titik C pada $\overline{BC}$ dan buat titik S sehingga $\angle SCB \cong \angle DFE$	1. Postulat sudut

Pernyataan	Alasan
2. Perpanjang S sehingga $\overline{CG} \cong \overline{DF}$	2. Postulat garis
3. $\overline{BC} \cong \overline{EF}$	3. Diketahui
4. $\Delta BGC \cong \Delta EDF$	4. Postulat (sisi-sudut-sisi)
5. $\overline{AC} \cong \overline{DF}$	5. Diketahui
6. u $\angle CGB \cong$ u $\angle FDE = 90$	6. Akibat kekongruenan dua sigitiga
7. $\angle CGA \cong \angle CAG$	7. Teorema : Jika dua sisi suatu segitiga adalah kongruen maka sudut-sudut di hadapan kedua sisi tersebut kongruen.
8. u$\angle BGA = 90$ - u$\angle CGA$	8. Postulat pengurangan sudut
9. u$\angle BAG = 90$ - u$\angle CAG$	9. Postulat pengurangan sudut
10. u$\angle BGA \cong$ u$\angle BAG$	10. Definisi sifat transitif
11. $\angle BGA \cong \angle BAG$	11. Definisi kekongruenan dua sudut
12. $\overline{BG} \cong \overline{BA}$	12. Teorema : Jika dua sudut suatu segitiga adalah kongruen maka sisi-sisi di hadapan kedua sudut tersebut kongruen.
13. $\overline{BC} \cong \overline{BC}$	13. Definisi sifat refleksif
14. $\Delta BGC \cong \Delta BAC$	14. Teorema (sisi-sisi-sisi)
15. $\Delta BAC \cong \Delta EDF$	15. Definisi sifat transitif

2.1.4 Kesebangunan Segitiga

Pada definisi ini kita diskusikan tentang kesebangunan segitiga. Untuk itu pertama kita perlukan pengertian kesebangunan diantara poligon, selanjutnya diberikan teorema-teorema sehubungan dengan kesebangunan antara dua segitiga.

Definisi 7 : Dua poligon dikatakan sebangun jika terdapat korespondensi 1-1 diantara titik sudut-titik sudutnya sedemikian hingga:

1. Semua sudut yang berkorespondensi kongruen.
2. Semua rasio ukuran sisi-sisi yang berkorespondensi sama.

Pada definisi di atas yang dimaksud **rasio** adalah hasil bagi suatu ukuran dua kuantitas, jika kuantitas-kuantitas tersebut diukur dalam satuan sama. Berikut teorema tentang kesebangunan segitiga.

Teorema 4 : Kesebangunan segitiga :

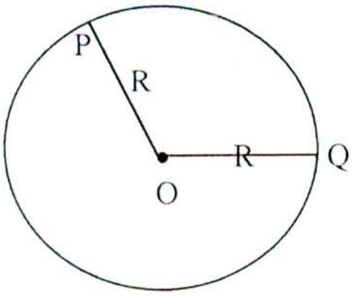
a. Dua segitiga adalah sebangun, jika ada suatu korespondensi diantara titik sudut titik sudutnya dengan sudut-sudutnya yang berkorespondensi kongruen.
b. Dua segitiga adalah sebangun, jika ada suatu korespondensi diantara titik sudut-titik sudutnya dengan dua pasang sudutnya yang berkorespondensi kongruen (Teorema : sudut-sudut, pada kesebangunan segitiga).
c. Dua segitiga adalah sebangun, jika ada suatu korespondensi diantara titik sudut-titik sudutnya dengan rasio-rasio ukuran-ukuran dua pasang sisinya yang berkorespondensi sama dan sudut apit masing-masing pasangan sisi adalah kongruen, (Teorema : sisi-sudut sisi, pada kesebangunan segitiga).
d. Dua segitiga adalah sebangun, jika ada suatu korespondensi diantara titik sudut-titik sudutnya dengan rasio-rasio ukuran sisi-sisinya yang berkorespondensi sama (Teorema : sisi-sisi-sisi, pada kesebangunan segitiga).

2.2 Lingkaran

2.2.1 Pengertian dan Kekongruenan Lingkaran.

Berikut diberikan beberapa definisi, postulat, dan teorema yang diambil dari buku *Geometri Bidang* karangan Kusno (1988), berikut diberikan definisi lingkaran yaitu:

Definisi 9 : Lingkaran adalah himpunan titik sedemikian hingga segmen garis-segmen garis yang ditarik dari masing-masing titik pada himpunan tersebut ke sebuah titik tetap adalah kongruen.



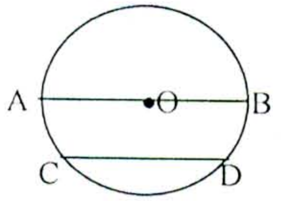
Gambar 15 : Lingkaran

Segmen garis-segmen garis yang dimaksudkan pada definisi di atas disebut jari-jari lingkaran dituliskan (R). Sedangkan yang dimaksudkan titik tetap adalah titik pusat lingkaran dituliskan (O). Untuk selanjutnya lingkaran yang berpusat pada titik O kita sebut dengan **lingkaran O**. Adapun pengertian dari jari-jari lingkaran diberikan oleh definisi berikut.

Definisi 10 : Jari-jari lingkaran adalah segmen garis yang ditarik dari sebarang titik pada lingkaran tersebut ke pusat lingkaran.

Semua jari-jari pada suatu lingkaran mempunyai ukuran panjang yang sama. Pada lingkaran terdapat talibusur, busur lingkaran, dan juga semi lingkaran. Pengertian masing-masing istilah di atas sebagai berikut.

Definisi 11 : Talibusur lingkaran adalah suatu segmen garis yang titik ujung-titik ujungnya adalah dua titik pada lingkaran.

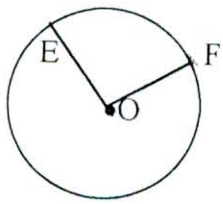


Gambar 16 : Segmen garis pada lingkaran O

Pada gambar 16, segmen CD adalah talibusur lingkaran O.

Definisi 12 : Diameter lingkaran adalah suatu talibusur sedemikian hingga sebuah dari titik-titiknya merupakan pusat lingkaran.

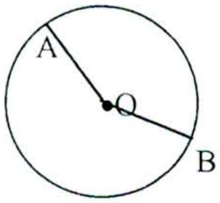
Segmen AB (Gambar 16) juga talibusur lingkaran O yang khusus melalui pusat lingkaran yang selanjutnya disebut sebagai *diameter lingkaran.*



Gambar 17 : Sudut pusat pada lingkaran O

Pada gambar 17, $\angle EOF$ merupakan sudut pusat dari lingkaran O. Dari pengertian sudut ini, selanjutnya dapat didefinisikan tentang busur lingkaran.

Definisi 13 : Suatu busur kecil AB dari lingkaran O dengan A, B suatu titik pada lingkaran, adalah gabungan titik-titik A dan B serta titik-titik pada lingkaran dalam interior sudut pusat AOB.



Gambar 18 : Busur AB pada lingkaran O

Pada gambar 18, busur AB pada lingkaran O dengan masing-masing titik berada di interior $\angle AOB$. Kedua titik A dan B termasuk titik dari busur kecil AB. Selanjutnya busur AB dinotasikan dengan $\overset{\frown}{AB}$

Definisi 14 : Busur besar AB dari lingkaran O dengan A, B suatu titik pada lingkaran adalah gabungan titik-titik A dan B serta titik-titik pada lingkaran yang terletak dalam eksterior sudut pusat AOB.

Definisi 15 : Semi lingkaran AB dari lingkaran O dengan A, B suatu titik ujung-titik ujung diameter lingkaran adalah gabungan dari titik-titik A, B dan titik-titik pada lingkaran di setengah bidang di satu sisi dari $\overleftrightarrow{AB}$.

Adapun pengertian dari lingkaran yang kongruen didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 16 : Lingkaran-lingkaran kongruen adalah lingkaran-lingkaran yang mempunyai jari-jari kongruen.

Definisi 17 : Busur-busur kongruen dalam lingkaran yang sama atau lingkaran-lingkaran yang kongruen adalah mempunyai ukuran sudut pusat dan panjang yang sama .

Teorema 5 : Beberapa teorema tentang kekongruenan pada lingkaran:

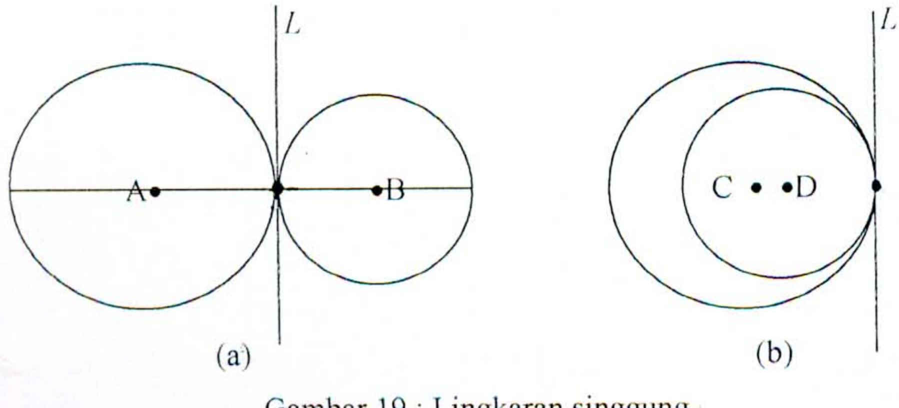
- Jika dua sudut pusat suatu lingkaran adalah kongruen, maka busur-busur perpotongannya kongruen.
- Jika dua busur suatu lingkaran adalah kongruen, maka sudut pusat perpotongan busur-busurnya adalah kongruen.
- Jika dalam suatu lingkaran dua tali busurnya kongruen, maka busur-busurnya yang berkorespondensi adalah kongruen.
- Jika dalam suatu lingkaran dua busurnya adalah kongruen, maka talibusur-talibusurnya adalah kongruen.

2.2.2 Pengertian garis singgung dan Lingkaran singgung

Pengertian dari garis singgung dan lingkaran singgung sebagai berikut.

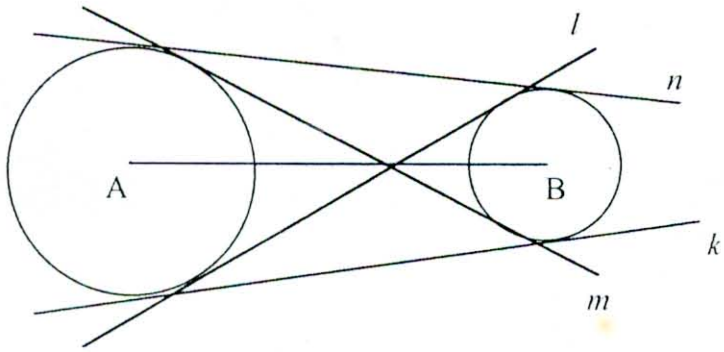
Definisi 18 : Garis singgung suatu lingkaran adalah garis yang hanya mempunyai sebuah titik persekutuan dengan lingkaran.

Definisi 19 : Lingkaran singgung adalah dua lingkaran dengan garis singgung pada garis yang sama di titik yang sama pada garis tersebut.



Gambar 19 : Lingkaran singgung

Dari (Gambar 19) diatas, jika dua lingkaran berpotongan dan mempunyai garis singgung persekutuan seperti gambar 19a, maka lingkaran-lingkaran tersebut disebut *lingkaran singgung luar*. Sedangkan gambar 19b, disebut *lingkaran singgung dalam*. Pada gambar berikutnya (Gambar 20) diperlihatkan dua gambar lingkaran, dimana ada empat garis singgung persekutuan dari lingkaran A dan B. Garis AB disebut garis pusat. Jika garis singgung-garis singgung persekutuannya memotong segmen garis AB, maka disebut *garis singgung persekutuan dalam* (yaitu garis *l* dan *m*), dan jika tidak memotong AB, disebut *garis singgung persekutuan luar* (yaitu garis *k* dan *n*).



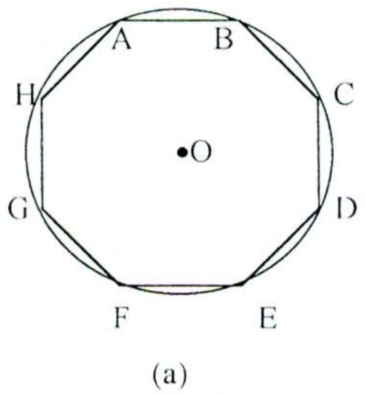
Gambar 20 : Lingkaran dan garis singgung

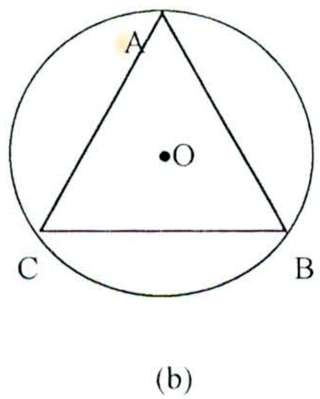
Postulat 3 : Di sebuah titik yang diketahui pada suatu lingkaran ada satu dan hanya satu garis singgung pada lingkaran tersebut.

2.2.3 Poligon dalam lingkaran dan Poligon luar lingkaran

Pengertian dari poligon dalam lingkaran dan poligon luar lingkaran sebagai berikut:

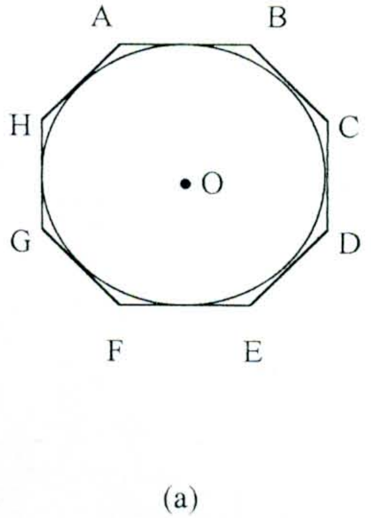
Definisi 20 : Poligon dalam lingkaran adalah suatu poligon yang titik sudut-titik sudut poligonnya pada lingkaran.

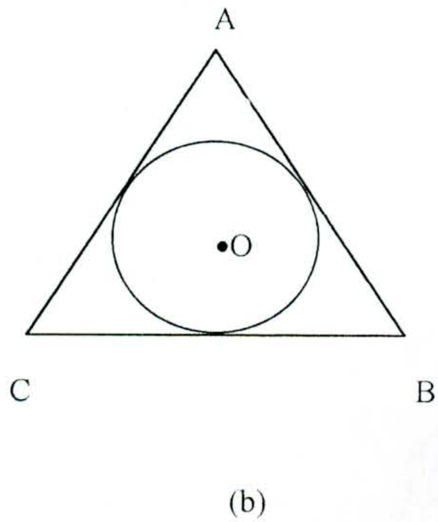




Gambar 21 : Poligon dalam lingkaran

Definisi 21 : Poligon luar lingkaran adalah suatu poligon yang sisi-sisinya menyinggung lingkaran.





Gambar 22 : Poligon luar lingkaran

2.3 Transformasi Titik di R^2

Transformasi linier F pada ruang R^n adalah perpasangan yang memetakan vektor $\mathbf{x}$ dari R^n ke suatu vektor $F(\mathbf{x})$ dari R^m, sehingga untuk semua vektor $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ dalam R^n dari semua skalar α_1 dan α_2 berlaku:

$$\left.\begin{array}{l} F(\alpha_1\mathbf{x}_1+\alpha_2\mathbf{x}_2)=\alpha_1F(\mathbf{x}_1)+\alpha_2F(\mathbf{x}_2) \\ F(\alpha_1\mathbf{x}_1)=\alpha_1F(\mathbf{x}_1);\ F(\alpha_2\mathbf{x}_2)=\alpha_2F(\mathbf{x}_2) \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Jika digunakan notasi matriks untuk vektor di R^m dan R^n, maka dapat didefinisikan sebuah fungsi $F\colon R^n \to R^m$ dengan $F(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, dimana A adalah matriks *m x n* sebagai matriks transformasi. Misalkan *u* dan *v* adalah matriks *n x 1* dan *k* adalah sebuah skalar, maka berlaku:

$$\left.\begin{array}{r} A(u+v)=Au+Av \\ A(k\mathrm{u})=k\,(\mathrm{Au}) \end{array}\right\} \qquad (2)$$

Jadi setiap transformasi linier dari R^n ke R^m adalah transformasi matriks, karena persamaan (1) ekivalen dengan persamaan (2).

Selanjutnya, kita akan mempelajari transformasi dari R^2 ke R^2. Transformasi ini terdiri dari translasi (pergeseran), rotasi (perputaran), dilatasi (penskalaan), dan refleksi (pencerminan).

2.3.1 Translasi (Pergeseran)

Sebagai elemen dasar, setiap titik di R^2 ditentukan oleh dua referensi, yaitu ke arah sumbu *X* (absis) dan ke arah sumbu *Y* (ordinat). Sehingga sebarang titik Q dinyatakan sebagai (x_Q,y_Q) dalam bentuk koordinat dan $(\mathbf{x}_Q,\mathbf{y}_Q)$ dalam bentuk vektor.

Translasi adalah perpindahan kedudukan sebarang titik dengan penambahan besaran pada arah sumbu *X* dan *Y*. Secara umum translasi dapat dinyatakan oleh persamaan Q = TP + *K*, dimana P adalah posisi awal, Q adalah posisi titik setelah ditranslasi. T adalah matriks identitas dan *K* menunjukkan besarnya pergeseran kearah sumbu *X* dan *Y*. Hasil translasi dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$(x_Q,y_Q) = (x_p + K_x\, ,\ y_p + K_y) \qquad (3)$$

Dalam bentuk matriks, notasi di atas dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} x_Q & y_Q \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Kx \\ Ky \end{bmatrix} \qquad (4)$$

Matrik T = $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ adalah matriks identitas yang bersesuaian dengan transformasi translasi.

2.3.2 Rotasi (Perputaran)

Apabila θ menunjukkan besarnya sudut rotasi dengan titik pangkal rotasi O(0,0), maka matriks rotasi pada R^2 dapat dituliskan dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} x_Q & y_Q \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \end{bmatrix} \qquad (5)$$

Secara umum rotasi dapat dituliskan dalam persamaan: Q = RP, dimana Q adalah posisi titik setelah dirotasi, R adalah matriks rotasi dan P adalah posisi titik sebelum dirotasi.

2.3.3 Dilatasi (Penskalaan)

Dilatasi adalah proses memperbesar atau memperkecil suatu objek. Dilatasi dapat dilakukan terhadap sumbu *X* atau sumbu *Y* saja atau kombinasi dari keduanya. Secara umum dilatasi dapat dinyatakan dalam persamaan: Q = SP, dimana Q adalah posisi titik setelah didilatasi, S adalah matriks transformasi dan P posisi titik awal. Hasil dilatasi dapat dinyatakan sebagai:

$$(x_Q, y_Q) = (S_x x_p, S_y y_p) \qquad (6)$$

dimana $S_x, S_y \in R$ dan keduanya tidak boleh bernilai 0 atau 1. Titik sebelum dan sesudah didilatasi terhadap sumbu *X* atau sumbu *Y* saja dengan $S_x \neq S_y$ mempunyai sifat tidak sebangun sedangkan titik sebelum dan sesudah didilatasi terhadap sumbu *X* dan sumbu *Y* secara bersamaan dengan $S_x = S_y$ memiliki sifat sebangun. Dalam bentuk matriks notasi di atas dapat dituliskan:

$$[x_Q \ \ y_Q]^T = \begin{bmatrix} Sx & 0 \\ 0 & Sy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \end{bmatrix} \quad \text{...(7)}$$

Matriks $S = \begin{bmatrix} Sx & 0 \\ 0 & Sy \end{bmatrix}$ adalah matrik koefisien yang bersesuaian dengan transformasi dilatasi.

2.3.4 Refleksi (Pencerminan)

Refleksi adalah transformasi sedemikian hingga sebuah garis (sebagai cermin) adalah bisektor tegak lurus terhadap segmen garis yang menghubungkan titik asal dengan titik hasil transformasi dan kedua titik tersebut mempunyai jarak yang sama terhadap garis cermin (garis refleksi). Dalam hal ini kita akan membahas refleksi terhadap sumbu *X*, sumbu *Y*, titik pusat, garis y = x dan garis y = -x. Matriks transformasi untuk refleksi dapat ditentukan sebagai berikut:

Persamaan untuk refleksi terhadap sumbu *X*

$$[x_Q \ \ y_Q]^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \end{bmatrix} \quad \text{...(8)}$$

Persamaan untuk refleksi terhadap sumbu *Y*

$$[x_Q \ \ y_Q]^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \end{bmatrix} \quad \text{...(9)}$$

Persamaan untuk refleksi terhadap titik pusat O

$$[x_Q \ \ y_Q]^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \end{bmatrix} \quad \text{...(10)}$$

Persamaan untuk refleksi terhadap garis y = x .

$$\begin{bmatrix} x_Q & y_Q \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \end{bmatrix} \qquad (11)$$

Persamaan untuk refleksi terhadap garis y = -x

$$\begin{bmatrix} x_Q & y_Q \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \end{bmatrix} \qquad (12)$$

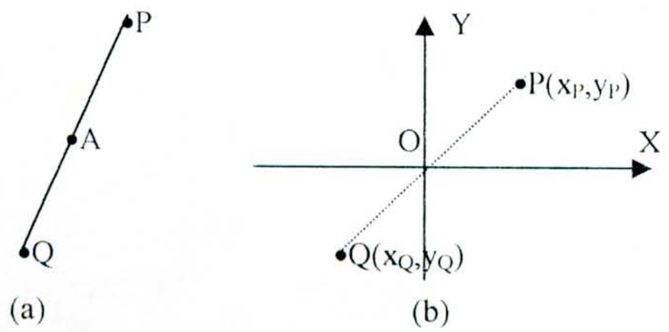
Secara umum refleksi dapat dirumuskan: Q = CP, dimana Q adalah posisi titik sesudah direfleksi, C adalah matriks transformasi dan P adalah posisi titik sebelum direfleksikan.

2.4 Kesimetrian

Pada bagian ini kita diskusikan tentang kesimetrian pada pencerminan titik dan garis. Untuk masing-masing jenis simetri tersebut secara detail dapat dijelaskan sebagai berikut.

2.4.1 Kesimetrian terhadap titik

Dua titik P dan Q dikatakan simetris (gambar 23a) dengan pusat simetri pada titik A, jika A adalah titik tengah dari segmen garis PQ (Mendelson,1985). Titik $P(x_P,y_P)$ simetris terhadap titik $Q(x_Q,y_Q)$ dengan pusat simetri titik asal (gambar 23b), dapat diperoleh dengan mencerminkan titik P terhadap titik O.



Gambar 23

Dengan demikian, jika $Q(x_Q,y_Q)$ adalah hasil pencerminan $P(x_P,y_P)$ terhadap titik O, maka berlaku

$$x_Q = -x_P = -x_P + 0y_P$$

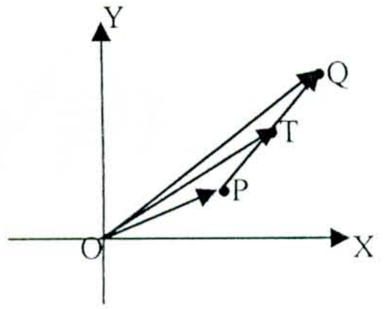
$$y_Q = -y_P = 0x_P - y_P$$

atau

$$\begin{bmatrix} x_Q \\ y_Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \end{bmatrix}$$

Matriks $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ disebut matriks koefisien pencerminan terhadap titik O.

Untuk menentukan sebuah titik Q yang simetris dengan P terhadap pusat simetri $T(x_T,y_T)$ dapat dihitung sebagai berikut :



Gambar 24

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ}$$

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + 2\overrightarrow{PT}$$

$$\begin{bmatrix} x_Q \\ y_Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} x_T - x_P \\ y_T - y_P \end{bmatrix}$$

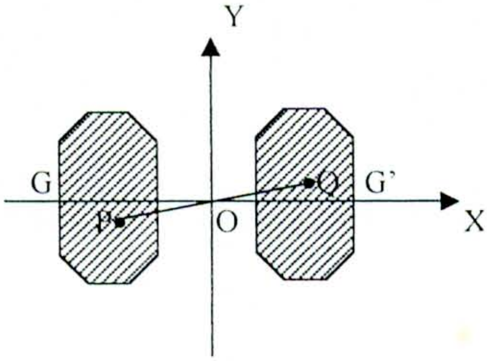
$$= \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2x_T - 2x_P \\ 2y_T - 2y_P \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2x_T - 2x_P + x_P \\ 2y_T - 2y_P + y_P \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2x_T - x_P \\ 2y_T - y_P \end{bmatrix}$$

$$= 2\begin{bmatrix} x_T \\ y_T \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \end{bmatrix}$$

Simetri grafik dengan pusat simetri titik O didefinisikan sebagai berikut. Jika untuk setiap titik P pada grafik G, ada titik Q yang terletak pada G' sehingga POQ segaris dan $\overline{OP} \cong \overline{OQ}$ (Mendelson,1985).



Gambar 25

Misal $P_1, P_2, P_3,\dots, P_n$ (titik-titik pada grafik G) simetris dengan $Q_1, Q_2, Q_3,\dots, Q_n$ (titik-titik pada G') terhadap pusat simetri titik O (gambar 25), maka berlaku

* $x_{Q_1} = -x_{P_1} = -x_{P_1} + 0\,y_{P_1}$

$y_{Q_1} = -y_{P_1} = 0\,x_{P_1} - y_{P_1}$

atau

$$\begin{bmatrix} x_{Q_1} \\ y_{Q_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{P_1} \\ y_{P_1} \end{bmatrix}$$

* $x_{Q_2} = -x_{P_2} = -x_{P_2} + 0\,y_{P_2}$

$y_{Q_2} = -y_{P_2} = 0\,x_{P_2} - y_{P_2}$

atau

$$\begin{bmatrix} x_{Q_2} \\ y_{Q_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{P_2} \\ y_{P_2} \end{bmatrix}$$ dengan cara yang sama diperoleh

* $x_{Q_n} = -x_{P_n} = -x_{P_n} + 0\,y_{P_n}$

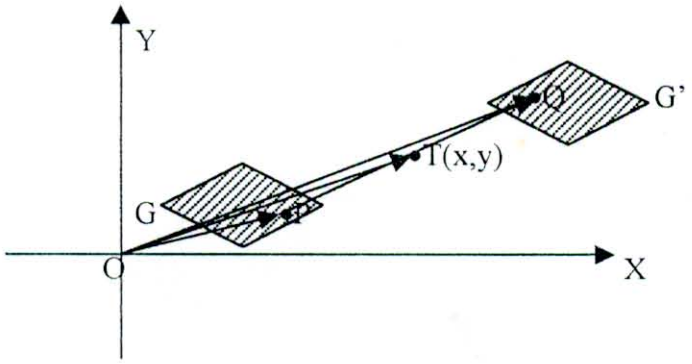
$y_{Q_n} = -y_{P_n} = 0\,x_{P_n} - y_{P_n}$

atau

$$\begin{bmatrix} x_{Q_n} \\ y_{Q_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{P_n} \\ y_{P_n} \end{bmatrix}$$

Matriks $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ disebut matriks koefisien pencerminan terhadap titik O.

Sedangkan untuk menentukan titik-titik $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots, Q_n$ (titik-titik pada G') simetris dengan $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$ (titik-titik pada grafik G) terhadap pusat simetri $T(x_T, y_T)$, dapat ditentukan dengan prosedur:



Gambar 26

$$* \quad \overrightarrow{OQ_1} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{P_1Q_1}$$

$$\overrightarrow{OQ_1} = \overrightarrow{OP_1} + 2\overrightarrow{P_1T}$$

$$\begin{bmatrix} x_{Q_1} \\ y_{Q_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{P_1} \\ y_{P_1} \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} x_T - x_{P_1} \\ y_T - y_{P_1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_{P_1} \\ y_{P_1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2x_T - 2x_{P_1} \\ 2y_T - 2y_{P_1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2x_T - x_{P_1} \\ 2y_T - y_{P_1} \end{bmatrix}$$

$$= 2 \begin{bmatrix} x_T \\ y_T \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_{P_1} \\ y_{P_1} \end{bmatrix}$$ dengan cara yang sama diperoleh

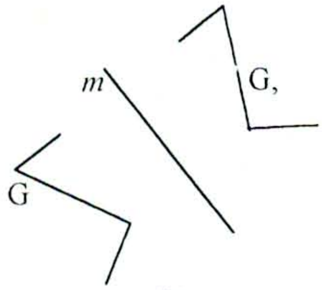
$$* \quad \begin{bmatrix} x_{Q_2} \\ y_{Q_2} \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} x_T \\ y_T \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_{P_2} \\ y_{P_2} \end{bmatrix}$$

* untuk Q_n

$$\begin{bmatrix} x_{Q_n} \\ y_{Q_n} \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} x_T \\ y_T \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_{P_n} \\ y_{P_n} \end{bmatrix}$$

2.4.2 Kesimetrian terhadap garis

Dua titik P dan Q dikatakan simetris terhadap pusat simetri garis l (Gambar 27a), jika P dan Q saling merupakan bayangan terhadap cermin l sehingga $\overline{PQ}$ tegak lurus pada l di titik A dan $\overline{PA} \cong \overline{QA}$ (Mendelson,1985).



Gambar 27

Sebuah grafik G dikatakan simetris dengan G' (gambar 27b) terhadap pusat simetri garis m jika untuk semua titik P pada grafik G terdapat titik Q pada grafik G' yang simetris dengan titik P. Garis l dan m kemudian disebut sebagai sumbu simetri grafik (Mendelson,1985).

Beberapa kesimetrian titik dan grafik dengan pusat simetri berupa garis dapat diterangkan sebagai berikut.

1. Sumbu Y sebagai pusat simetri

   Jika titik $Q(x_Q,y_Q)$ simetris dengan titik $P(x_P,y_P)$ terhadap pusat simetri sumbu Y, maka diperoleh

   $x_Q = -x_P = -x_P + 0y_P$

   $y_Q = y_P = 0x_P + y_P$

   atau

$$\begin{bmatrix} x_Q \\ y_Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_P \\ y_P \end{bmatrix}$$

Matriks $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ disebut matriks koefisien pencerminan terhadap sumbu Y.

Jika titik-titik $Q_1, Q_2, Q_3,..., Q_n$ (titik-titik pada grafik G') simetris terhadap $P_1, P_2, P_3,..., P_n$ (titik-titik pada grafik G) terhadap pusat simetri sumbu Y, maka diperoleh

* $x_{Q_1} = -x_{P_1} = -x_{P_1} + 0y_{P_1}$

$y_{Q_1} = y_{P_1} = 0x_{P_1} + y_{P_1}$

atau

$\begin{bmatrix} x_{Q_1} \\ y_{Q_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{P_1} \\ y_{P_1} \end{bmatrix}$ dengan cara yang sama diperoleh

* $\begin{bmatrix} x_{Q_2} \\ y_{Q_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{P_2} \\ y_{P_2} \end{bmatrix}$

* untuk Q_n

$\begin{bmatrix} x_{Q_n} \\ y_{Q_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{P_n} \\ y_{P_n} \end{bmatrix}$

Matriks $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ disebut matriks koefisien pencerminan terhadap sumbu Y.

2. Sumbu X sebagai pusat simetri

Jika titik $Q(x_Q,y_Q)$ simetris dengan titik $P(x_P,y_P)$ terhadap pusat simetri sumbu X, maka berlaku

$x_Q = x_P = x_P + 0y_P$

$y_Q = -y_P = 0x_P - y_P$

atau

$\begin{bmatrix} x_Q \\ y_Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \end{bmatrix}$

Matriks $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ disebut matriks koefisien pencerminan terhadap sumbu X.

Jika titik-titik $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots, Q_n$ (titik-titik pada grafik G') simetris dengan $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$ (titik-titik pada grafik G) terhadap pusat simetri sumbu X, maka diperoleh

* $x_{Q_1} = x_{P_1} = x_{P_1} + 0y_{P_1}$

$y_{Q_1} = -y_{P_1} = 0x_{P_1} - y_{P_1}$

atau

$\begin{bmatrix} x_{Q_1} \\ y_{Q_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{P_1} \\ y_{P_1} \end{bmatrix}$ dengan cara yang sama diperoleh

* $\begin{bmatrix} x_{Q_2} \\ y_{Q_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{P_2} \\ y_{P_2} \end{bmatrix}$

* untuk Q_n

$\begin{bmatrix} x_{Q_n} \\ y_{Q_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{P_n} \\ y_{P_n} \end{bmatrix}$

Matriks $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ disebut matriks koefisien pencerminan terhadap sumbu X.

3. Garis $y = a$ sebagai pusat simetri

Jika titik $Q(x_Q, y_Q)$ simetris dengan titik $P(x_P, y_P)$ terhadap pusat simetri garis $y = a$ maka berlaku

$x_Q = x_P = x_P + 0y_P$

$y_Q = y_P + 2(a - y_P)$, misal $a - y_P = d$

$= 0x_P + y_P + 2d$

atau

$\begin{bmatrix} x_Q \\ y_Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2d \end{bmatrix}$

Matriks $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ disebut matriks identitas pencerminan terhadap garis $y = a$.

Jika titik-titik $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots, Q_n$ (titik-titik pada grafik G') simetris dengan P_1, $P_2, P_3, \ldots, P_n$ (titik-titik pada grafik G) terhadap pusat simetri garis y = a, maka diperoleh

* $x_{Q_1} = x_{P_1} = x_{P_1} + 0y_{P_1}$

$y_{Q_1} = y_{P_1} + 2d_1 = 0x_{P_1} + y_{P_1} + 2d_1$

dengan $d_1 = a - y_{P_1}$

atau

$$\begin{bmatrix} x_{Q_1} \\ y_{Q_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{P_1} \\ y_{P_1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2d_1 \end{bmatrix}$$ dengan cara yang sama diperoleh

*
$$\begin{bmatrix} x_{Q_2} \\ y_{Q_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{P_2} \\ y_{P_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2d_2 \end{bmatrix}$$

* untuk Q_n

$$\begin{bmatrix} x_{Q_n} \\ y_{Q_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{P_n} \\ y_{P_n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2d_n \end{bmatrix}$$

Matriks $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ disebut matriks identitas pencerminan terhadap garis y = a.

4. Garis x = b sebagai pusat simetri

Jika titik $Q(x_Q, y_Q)$ simetris dengan titik $P(x_P, y_P)$ terhadap pusat simetri garis x = b maka berlaku

$x_Q = x_P + 2(b - x_P)$, misal $b - x_P = d$

$= x_P + 2d + 0y_P$

$y_Q = y_P = 0x_P + y_P$

atau

$$\begin{bmatrix} x_Q \\ y_Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2d \\ 0 \end{bmatrix}$$

Matriks $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ disebut matriks identitas pencerminan terhadap garis x = b.

Jika titik-titik $Q_1, Q_2, Q_3,\dots, Q_n$ (titik-titik pada grafik G') simetris dengan $P_1, P_2, P_3,\dots, P_n$ (titik-titik pada grafik G) terhadap pusat simetri garis x = b, maka diperoleh

* $x_{Q_1} = x_{P_1} + 2d_1 = x_{P_1} + 2d_1 + 0y_{P_1}$

dengan $d_1 = b - x_{P_1}$

$y_{Q_1} = y_{P_1} = 0x_{P_1} + y_{P_1}$

atau

$$\begin{bmatrix} x_{Q_1} \\ y_{Q_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{P_1} \\ y_{P_1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2d_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$ dengan cara yang sama diperoleh

*
$$\begin{bmatrix} x_{Q_2} \\ y_{Q_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{P_2} \\ y_{P_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2d_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

* untuk Q_n

$$\begin{bmatrix} x_{Q_n} \\ y_{Q_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{P_n} \\ y_{P_n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2d_n \\ 0 \end{bmatrix}$$

Matriks $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ disebut matriks koefisien pencerminan terhadap garis x = b.

5. Garis y = x sebagai pusat simetri

Jika titik $Q(x_Q,y_Q)$ simetris dengan titik $P(x_P,y_P)$ terhadap pusat simetri garis y = x, maka berlaku

$x_Q = y_P = 0x_P + y_P$

$y_Q = x_P = x_P + 0\,y_P$

atau

$$\begin{bmatrix} x_Q \\ y_Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \end{bmatrix}$$

Matriks $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ disebut matriks koefisien pencerminan terhadap garis y = x.

Jika titik-titik $Q_1, Q_2, Q_3,\dots, Q_n$ (titik-titik pada grafik G') simetris dengan $P_1, P_2, P_3,\dots, P_n$ (titik-titik pada grafik G) terhadap pusat simetri garis y = x maka diperoleh

$$* \; x_{Q_1} = y_{P_1} = 0x_{P_1} + y_{P_1}$$

$$y_{Q_1} = x_{P_1} = x_{P_1} + 0y_{P_1}$$

atau

$$\begin{bmatrix} x_{Q_1} \\ y_{Q_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{P_1} \\ y_{P_1} \end{bmatrix}$$ dengan cara yang sama diperoleh

$$* \begin{bmatrix} x_{Q_2} \\ y_{Q_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{P_2} \\ y_{P_2} \end{bmatrix}$$

* untuk Q_n

$$\begin{bmatrix} x_{Q_n} \\ y_{Q_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{P_n} \\ y_{P_n} \end{bmatrix}$$

Matriks $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ disebut matriks koefisien pencerminan terhadap garis y = x.

6. Garis y = -x sebagai pusat simetri

Jika titik $Q(x_Q,y_Q)$ simetris dengan titik $P(x_P,y_P)$ terhadap pusat simetri garis y = -x maka berlaku

$$x_Q = -y_P = 0x_P - y_P$$

$$y_Q = -x_P = -x_P + 0\,y_P$$

atau

$$\begin{bmatrix} x_Q \\ y_Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \end{bmatrix}$$

Matriks $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ disebut matriks koefisien pencerminan terhadap garis y = -x.

Jika titik-titik Q_1, Q_2, Q_3,..., Q_n (titik-titik pada grafik G') simetris dengan P_1, P_2, P_3,..., P_n (titik-titik pada grafik G) terhadap pusat simetri garis y = -x maka diperoleh

$* \; x_{Q_1} = -y_{P_1} = 0x_{P_1} - y_{P_1}$

$y_{Q_1} = -x_{P_1} = -x_{P_1} + 0y_{P_1}$

atau

$\begin{bmatrix} x_{Q_1} \\ y_{Q_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{P_1} \\ y_{P_1} \end{bmatrix}$ dengan cara yang sama diperoleh

$* \; \begin{bmatrix} x_{Q_2} \\ y_{Q_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{P_2} \\ y_{P_2} \end{bmatrix}$

* untuk Q_n

$\begin{bmatrix} x_{Q_n} \\ y_{Q_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{P_n} \\ y_{P_n} \end{bmatrix}$

Matriks $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ disebut matriks koefisien pencerminan terhadap garis y = -x.

7. Garis y = x + a sebagai pusat simetri

   Jika titik $Q(x_Q,y_Q)$ simetris dengan titik $P(x_P,y_P)$ terhadap pusat simetri garis l: y = x + a maka dapat dihitung sebagai berikut:

   1. Menentukan garis g melalui titik $P(x_P,y_P)$ dengan gradien $m_g = -\frac{1}{m_l}$ sebagai berikut :

      garis l: y = x + a mempunyai gradien $m_l = 1$ maka $m_g = -\frac{1}{m_l} = -\frac{1}{1} = -1$

      garis g: $y - y_P = m_g\,(x - x_P)$

      $y - y_P = -1\,(x - x_P)$

      $y - y_P = -x + x_P$

      jadi garis g: $y + x - y_P - x_P = 0$

   2. Menghitung titik perpotongan garis *l* dan *g*, misal titik potong tersebut adalah titik $A(x_A,y_A)$ dapat diperoleh dari pensubstitusian garis *l*: y = x + a ke garis *g*: $y + x - y_P - x_P = 0$ yaitu:

      $x + a + x - y_P - x_P = 0$

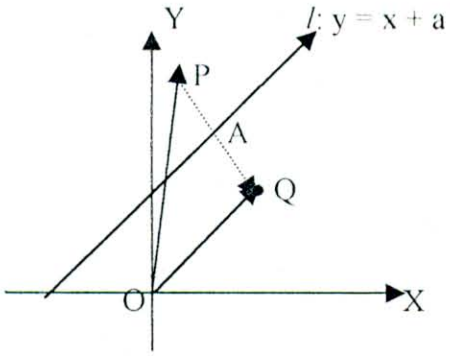
      $\Leftrightarrow \quad 2x + a - y_P - x_P = 0$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{y_P + x_P - a}{2} \quad \textit{dan di dapatkan}$$

$$y = \frac{y_P + x_P + a}{2}$$

sehingga diperoleh titik A $\left(\frac{y_P + x_P - a}{2}, \frac{y_P + x_P + a}{2}\right)$

3. Menentukan titik $Q(x_Q, y_Q)$ dengan cara sebagai berikut:



Gambar 28

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ}$$

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + 2\overrightarrow{PA}$$

$$\begin{bmatrix} x_Q \\ y_Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} \frac{y_P + x_P - a}{2} - x_P \\ \frac{y_P + x_P + a}{2} - y_P \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_P + x_P - a - 2x_P \\ y_P + x_P + a - 2y_P \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_P - x_P - a \\ -y_P + x_P + a \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} y_P - a \\ x_P + a \end{bmatrix}$$

Jika titik-titik $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots, Q_n$ (titik-titik pada grafik G') simetris dengan $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$ (titik-titik pada grafik G) terhadap pusat simetri garis y = x + a maka diperoleh

$$\overrightarrow{OQ_1} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{P_1Q_1}$$

$$\overrightarrow{OQ_1} = \overrightarrow{OP_1} + 2\overrightarrow{P_1A_1}$$, A_1 adalah titik tengah dari P_1 dan Q_1

$$\begin{bmatrix} x_{Q_1} \\ y_{Q_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{P_1} \\ y_{P_1} \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} x_{A_1} - x_{P_1} \\ y_{A_1} - y_{P_1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_{P_1} \\ y_{P_1} \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} \dfrac{y_{P_1} + x_{P_1} - a}{2} - x_{P_1} \\ \dfrac{y_{P_1} + x_{P_1} + a}{2} - y_{P_1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_{P_1} \\ y_{P_1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_{P_1} + x_{P_1} - a - 2x_{P_1} \\ y_{P_1} + x_{P_1} + a - 2y_{P_1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} y_{P_1} - a \\ x_{P_1} + a \end{bmatrix}$$ dengan cara yang sama diperoleh

* $\begin{bmatrix} x_{Q_1} \\ y_{Q_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{P_2} - a \\ x_{P_2} + a \end{bmatrix}$

* untuk Q_n

$$\begin{bmatrix} x_{Q_n} \\ y_{Q_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{P_n} - a \\ x_{P_n} + a \end{bmatrix}$$

8. Garis y = -x + a sebagai pusat simetri

Jika titik $Q(x_Q,y_Q)$ simetris dengan titik $P(x_P,y_P)$ terhadap pusat simetri garis l: y = -x + a maka dapat dihitung sebagai berikut:

1. Menentukan garis g melalui titik $P(x_P,y_P)$ dengan gradien $m_g = -\dfrac{1}{m_l}$ sebagai berikut :

   garis l: y = -x + a mempunyai gradien m_l =-1 maka $m_g = -\dfrac{1}{m_l} = \dfrac{-1}{-1} = 1$

   garis g: $y - y_P = m_g\,(x - x_P)$

   $y - y_P = 1\,(x - x_P)$

   $y - y_P = x - x_P$

   jadi garis g: $y - x - y_P + x_P = 0$

2. Menghitung titik perpotongan garis l dan g, misal titik potong tersebut adalah titik $A(x_A,y_A)$ dapat diperoleh dari pensubstitusian garis l: y = -x + a ke garis g: $y - x - y_P + x_P = 0$ yaitu:

$$-x + a - x - y_P + x_P = 0$$

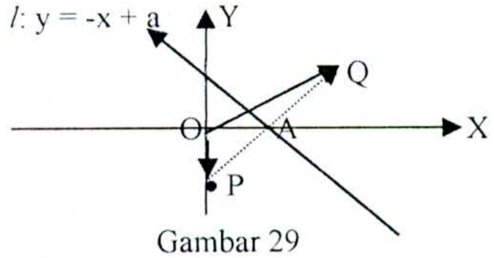
$$\Leftrightarrow \quad -2x = y_P - x_P - a$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{x_P - y_P + a}{2} \text{ } \textit{dan di dapatkan}$$

$$y = \frac{-x_P + y_P + a}{2}$$

sehingga diperoleh titik $A\left(\dfrac{x_P - y_P + a}{2}, \dfrac{-x_P + y_P + a}{2}\right)$

3. Menentukan titik $Q(x_Q, y_Q)$ dengan cara sebagai berikut:



Gambar 29

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ}$$

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + 2\overrightarrow{PA}$$

$$\begin{bmatrix} x_Q \\ y_Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} x_A - x_P \\ y_A - y_P \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} \dfrac{x_P - y_P + a}{2} - x_P \\ \dfrac{-x_P + y_P + a}{2} - y_P \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_P - y_P + a - 2x_P \\ -x_P + y_P + a - 2y_P \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -x_P - y_P + a \\ -x_P - y_P + a \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -y_P + a \\ -x_P + a \end{bmatrix}$$

Jika titik-titik Q_1, Q_2, Q_3,..., Q_n (titik-titik pada grafik G') simetris dengan P_1, P_2, P_3,..., P_n (titik-titik pada grafik G) terhadap pusat simetri garis y = -x + a maka diperoleh

$$\overrightarrow{OQ_1} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{P_1Q_1}$$

$$\overrightarrow{OQ_1} = \overrightarrow{OP_1} + 2\overrightarrow{P_1A_1},$$ A_1 adalah titik tengah dari P_1 dan Q_1

$$\begin{bmatrix} x_{Q_1} \\ y_{Q_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{P_1} \\ y_{P_1} \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} x_{A_1} - x_{P_1} \\ y_{A_1} - y_{P_1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_{P_1} \\ y_{P_1} \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} \dfrac{x_{P_1} - y_{P_1} + a}{2} - x_{P_1} \\ \dfrac{-x_{P_1} + y_{P_1} + a}{2} - y_{P_1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_{P_1} \\ y_{P_1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_{P_1} - y_{P_1} + a - 2x_{P_1} \\ -x_{P_1} + y_{P_1} + a - 2y_{P_1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_{P_1} \\ y_{P_1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -x_{P_1} - y_{P_1} + a \\ -x_{P_1} - y_{P_1} + a \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -y_{P_1} + a \\ -x_{P_1} + a \end{bmatrix}$$

dengan cara yang sama diperoleh

* $$\begin{bmatrix} x_{Q_2} \\ y_{Q_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y_{P_2} + a \\ -x_{P_2} + a \end{bmatrix}$$

* untuk Q_n

$$\begin{bmatrix} x_{Q_n} \\ y_{Q_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y_{P_n} + a \\ -x_{P_n} + a \end{bmatrix}$$

BAB IV
KESIMPULAN DAN SARAN

4.1 Kesimpulan

Dari pembahasan pada Bab III dapat disimpulkan sebagai berikut:

1. Untuk merancang model-model tralis dengan aksesoris lingkaran dapat dilakukan melalui prosedur:
   a. Menentukan dimensi bingkai tralis dengan ukuran panjang P satuan dan lebar L satuan.
   b. Membagi bingkai tralis antara lain dengan cara vertikal dan horisontal atau secara diagonal sehingga menjadi beberapa unit kerangka isian.
   c. Membangun model-model aksesoris lingkaran pada unit kerangka isian.
   d. Mengisikan unit kerangka isian hasil perlakuan c pada bingkai tralis dengan menggunakan transformasi (translasi dan refleksi) sehingga diperoleh model-model tralis bangunan yang simetris dari keluarga lingkaran.
2. Untuk merancang model-model tralis bangunan dengan aksesoris lingkaran dan segitiga antara lain dapat dilakukan melalui prosedur:
   a. Menentukan dimensi bingkai tralis dengan ukuran panjang P satuan dan lebar L satuan.
   b. Membagi bingkai tralis antara lain secara vertikal dan horisontal atau secara diagonal sehingga menjadi beberapa unit kerangka isian.
   c. Membangun mode-model aksesoris lingkaran dan segitiga pada unit kerangka isian
   d. Mengisikan unit kerangka isian pada bingkai tralis dengan menggunakan transformasi (translasi dan refleksi) sehingga diperoleh model-model tralis bangunan yang simetris dari keluarga segitiga dan lingkaran.
3. Untuk merancang model-model tralis dengan aksesoris lingkaran, segitiga, dan busur lingkaran antara lain dapat dilakukan melalui prosedur berikut:

a. Menentukan dimensi bingkai tralis dengan ukuran panjang P satuan dan lebar L satuan.

b. Membagi bingkai tralis antara lain secara vertikan dan horisontan atau secara diagonal sehingga menjadi beberapa unit kerangka isian.

c. Membangun model-model aksesoris lingkaran, segitiga, dan busur lingkaran pada unit kerangka isian.

d. Mengisikan unit kerangka isian pada bingkai tralis dengan menggunakan transformasi (translasi dan refleksi) sehingga diperoleh model-model tralis bangunan dari keluarga lingkaran, segitiga, dan busur lingkaran.

4.2 Saran

Bagi pembaca atau peneliti lain masih terbuka luas untuk mengembangkan skripsi ini. Misal dengan merancang model-model tralis bangunan dengan kerangka atau bingkai dasar selain persegi panjang misal lingkaran, segitiga, segilima, dan lain-lain. Peneliti lain dapat pula merancang model-model tralis bangunan dengan aksesoris lingkaran, segitiga, dan busur lingkaran misal tabung, spiral, ellips dan lain-lain.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Anton Howard, 1988, *Elementary Linear Algebra with Applications.* Terjemah oleh P. Silahan dan I Nyoman Susila, Erlangga, Jakarta.

[2] Kusno, 1988, *Geometri Bidang*, FKIP Universitas Jember, Jember.

[3] Negoro, ST. dkk, 1990, Matematika (*Rumus-Rumus, Sifat-Sifat Tabel Matematika serta Bimbingan dan Contoh*), Ghalia indonesia, Jakarta.

[4] Elliot Mendelson, 1985, *Theory and Problems of Beginning Calculus*, McGraw-Hill Inc., New York.