



**NILAI KETIDAKTERATURAN TOTAL SELIMUT
PADA GRAF HASIL OPERASI *TOTAL COMB PRODUCT* DARI
GRAF-GRAF KHUSUS**

SKRIPSI

Oleh

Yessy Eki Fajar Reksi

NIM 131810101001

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS JEMBER

2017



**NILAI KETIDAKTERATURAN TOTAL SELIMUT
PADA GRAF HASIL OPERASI *TOTAL COMB PRODUCT* DARI
GRAF-GRAF KHUSUS**

SKRIPSI

diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan Program Studi Matematika (S1) dan mencapai gelar Sarjana Sains

Oleh

Yessy Eki Fajar Reksi

NIM 131810101001

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER**

2017

PERSEMBAHAN

Dengan menyebut nama Allah yang Maha Pengasih dan Maha Penyayang serta sholawat dan salam selalu tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW, penulis persembahkan skripsi ini sebagai ungkapan kebahagiaan dan rasa terima kasih kepada:

1. keluarga besar saya, Bapak Rudi Budiyanto dan Ibu Tri Pangestu, saudara Irdo Dwi Permana Reksi, kakek Syahiruddin, nenek Sustiyani yang telah memberikan doa, rasa cinta, kasih sayang, motivasi, serta kepercayaan sebagai energi luar biasa disetiap perjalanan hidup saya;
2. Bapak Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D selaku Dosen Pembimbing Utama dan Ibu Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si selaku Dosen Pembimbing Anggota yang senantiasa meluangkan waktu memberikan pengarahan dan bimbingan hingga terselesaikannya penulisan skripsi ini;
3. Bapak Kusbidiono, S.Si., M.Si selaku Dosen Penguji I dan Ibu Dian Anggraeni, S.Si., M.Si selaku Dosen Penguji II yang telah memberikan kritik dan saran yang membangun dalam penyempurnaan skripsi ini;
4. Dosen Fakultas Matematika dan Ilmu pengetahuan Alam yang telah memberikan ilmu dan membimbing dengan penuh kesabaran;
5. Sahabat RCM dan Hijratul Kamalia yang selalu memberikan semangat dan kebahagiaan yang tak terhingga serta teman-teman pejuang graf dan para pecinta graf lain yang tergabung dalam CGANT yang telah membagikan ilmu dan pengalaman berharga serta mengajarkan bahwa sebuah perbedaan bukanlah alasan untuk tidak saling membantu;
6. Teman-teman seperjuangan ATLAS (angkatan 2013) yang selalu memberikan kenangan dan pengalaman yang tak terlupakan;
7. Almamater tercinta Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

MOTO

"Never give up on what you really want to do. The person with big dream is more powerfull then the one with all facts"

(Albert Einstein)¹

"...Sesungguhnya Allah tidak akan merubah keadaan suatu kaum sehingga mereka merubah keadaan yang ada pada mereka sendiri..."

(Q.S Ar-ra'du:11)²

¹Albert Einstein. Seorang Ilmuan Fisika.

²Departemen Agama Republik Indonesia. 2004. *Al-Qur'an dan Terjemahannya*. Bandung: CV. Penerbit Diponegoro.

PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Yessy Eki Fajar Reksi

NIM : 131810101001

menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang berjudul "Nilai Ketidakteraturan Total Selimut pada Graf Hasil Operasi *Total Comb Product* dari Graf-Graf Khusus" adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali kutipan yang sudah saya sebutkan sumbernya, belum pernah diajukan pada institusi mana pun, dan isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa ada tekanan dan paksaan dari pihak mana pun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, Juni 2017

Yang menyatakan,

Yessy Eki Fajar Reksi

NIM 131810101001

SKRIPSI

**NILAI KETIDAKTERATURAN TOTAL SELIMUT PADA GRAF
HASIL OPERASI *TOTAL COMB PRODUCT* DARI GRAF-GRAF
KHUSUS**

Oleh

Yessy Eki Fajar Reksi

NIM 131810101001

Pembimbing

Dosen Pembimbing Utama : Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D

Dosen Pembimbing Anggota : Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si

PENGESAHAN

Skripsi berjudul "Nilai Ketidakteraturan Total Selimut pada Graf Hasil Operasi *Total Comb Product* dari Graf-Graf Khusus" telah diuji dan disahkan pada:

hari, tanggal :

tempat : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember

Tim Penguji :

Ketua,

Sekretaris,

Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D

NIP.19680802 199303 1 004

Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si

NIP.19840801 200801 2 006

Dosen Penguji I,

Dosen Penguji II,

Kusbudiono, S.Si., M.Si

NIP.19770430 200501 1 001

Dian Anggraeni, S.Si., M.Si

NIP. 19820216 200604 2 002

Mengesahkan

Dekan,

Drs. Sujito, Ph.D

NIP. 19610204 198711 1 001

RINGKASAN

Nilai Ketidakteraturan Total Selimut pada Graf Hasil Operasi *Total Comb Product* dari Graf-Graf Khusus; Yessy Eki Fajar Reksi, 131810101001; 2017: 49 halaman; Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Salah satu topik dalam teori graf adalah pelabelan graf. Pelabelan merupakan pemetaan yang memetakan himpunan titik dan himpunan sisi kesuatu bilangan asli yang disebut label. Salah satu jenis pelabelan total ketidakteraturan adalah pelabelan total ketidakteraturan selimut. Pelabelan total ketidakteraturan selimut merupakan pemetaan himpunan titik dan himpunan sisi pada himpunan bilangan bulat positif $\{1, 2, 3, \dots, k\}$ sedemikian hingga bobot setiap selimut berbeda. Nilai minimum k pada pelabelan total ketidakteraturan selimut *H-irregular total labelling* pada graf G disebut dengan *total H-irregularity strength* dinotasikan dengan $tHs(G)$ didefinisikan sebagai $f : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, k\}$ untuk sebarang selimut $H \subseteq G$, bobot total selimut $W(H) = \sum_{v \in V(H)} f(v) + \sum_{e \in E(H)} f(e)$ berbeda.

Pada penelitian ini menggunakan graf hasil operasi *total comb product* dari graf-graf khusus. Graf khusus yang digunakan pada penelitian ini yaitu : graf lintasan (*Path Graph*), graf siklus (*Cycle Graph*), graf roda (*Wheel Graph*), graf buku segitiga (*Triangular Book Graph*), graf semi jahangir (*Semi Jahangir Graph*), graf kipas (*Fan Graph*), dan graf timbunan buku (*Stacked Book Graph*). Pada operasi *total comb product* menggunakan graf lintasan (P_n) sebagai graf dasar G dan graf siklus (C_4), graf roda (W_6), graf buku segitiga (Bt_3), graf semi jahangir (SJ_2), graf kipas (F_4), graf timbunan buku ($B_{4,2}$) sebagai graf K dimana K merupakan subgraf dari graf G .

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode deduktif aksiomatik dan metode pendeteksian pola. Metode deduktif aksiomatik, yaitu dengan menurunkan aksioma atau teorema yang telah ada. Dengan metode tersebut diperoleh bahwa batas bawah nilai ketidakteraturan total selimut tHs pada graf hasil operasi *total comb product* adalah $tHs(G) \geq \lceil \frac{p_H + q_H + |H| - 1}{p_H + q_H} \rceil$. Metode pendeteksian pola, digunakan untuk merumuskan pola pelabelan titik dan pelabelan sisi secara umum sedemikian hingga setiap selimut memiliki bobot berbeda. Pelabelan titik

dan pelabelan sisi yang telah didapatkan digunakan untuk merumuskan nilai ketidakteraturan total selimut pada graf hasil operasi *total comb product*.

Tujuan dari penelitian ini adalah menentukan nilai tHs (*total H-irregularity strength*) dari beberapa graf hasil operasi *total comb product*. Pada penelitian ini dihasilkan 6 teorema baru, yaitu :

Teorema 4.1 Misal G adalah graf hasil operasi *total comb product* P_n dan Bt_3 dinotasikan dengan $(P_n \dot{\supseteq} Bt_3)$ dan $H = C_3$. Maka

$$tHs(P_n \dot{\supseteq} Bt_3) = \lceil \frac{6n+2}{6} \rceil$$

Teorema 4.2 Misal G adalah graf hasil operasi *total comb product* P_n dan C_4 dinotasikan dengan $(P_n \dot{\supseteq} C_4)$ dan $H = C_4$. Maka

$$tHs(P_n \dot{\supseteq} C_4) = \lceil \frac{2n+6}{8} \rceil$$

Teorema 4.3 Misal G adalah graf hasil operasi *total comb product* P_n dan W_6 dinotasikan dengan $(P_n \dot{\supseteq} W_6)$ dan $H = C_3$. Maka

$$tHs(P_n \dot{\supseteq} W_6) = 2n$$

Teorema 4.4 Misal G adalah graf hasil operasi *total comb product* P_n dan SJ_2 dinotasikan dengan $(P_n \dot{\supseteq} SJ_2)$ dan $H = C_4$. Maka

$$tHs(P_n \dot{\supseteq} SJ_2) = \lceil \frac{4n+5}{8} \rceil$$

Teorema 4.5 Misal G adalah graf hasil operasi *total comb product* P_n dan F_4 dinotasikan dengan $(P_n \dot{\supseteq} F_4)$ dan $H = C_3$. Maka

$$tHs(P_n \dot{\supseteq} F_4) = \lceil \frac{6n+2}{6} \rceil$$

Teorema 4.6 Misal G adalah graf hasil operasi *total comb product* P_n dan $B_{4,2}$ dinotasikan dengan $(P_n \dot{\supseteq} B_{4,2})$ dan $H = C_4$. Maka

$$tHs(P_n \dot{\supseteq} B_{4,2}) = \lceil \frac{8n+3}{8} \rceil$$

PRAKATA

Puji syukur ke hadirat Allah SWT atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "Nilai Ketidakteraturan Total Selimut pada Graf Hasil Operasi *Total Comb Product* dari Graf-Graf Khusus". Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan pendidikan strata satu (S1) pada Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Penyusunan skripsi ini tidak lepas dari bantuan berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan terima kasih kepada:

1. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
2. Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
3. Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D. selaku Dosen Pembimbing Utama dan Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si. selaku Dosen Pembimbing Anggota yang telah meluangkan waktu, pikiran, dan perhatian dalam penulisan skripsi ini;
4. Kusbidiono, S.Si., M.Si selaku Dosen Penguji I dan Dian Anggraeni, S.Si., M.Si selaku Dosen Penguji II yang telah memberikan kritik dan saran yang membangun dalam penyempurnaan skripsi ini;
5. Prof. Drs. Kusno, DEA., Ph.D., selaku Dosen Pembimbing Akademik yang telah memberikan arahan selama perkuliahan;
6. dosen dan karyawan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
7. semua pihak yang telah membantu terselesaikannya skripsi ini.

Penulis juga menerima segala kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan skripsi ini. Akhirnya penulis berharap, semoga skripsi ini dapat bermanfaat.

Jember, Juni 2017

Penulis

DAFTAR ISI

	Halaman
HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PERSEMBAHAN	ii
HALAMAN MOTO	iii
HALAMAN PERNYATAAN	iv
HALAMAN PEMBIMBINGAN	v
HALAMAN PENGESAHAN	vi
RINGKASAN	vii
PRAKATA	ix
DAFTAR ISI	x
DAFTAR GAMBAR	xii
BAB 1. PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang Masalah	1
1.2 Rumusan Masalah	3
1.3 Batasan Masalah	3
1.4 Tujuan Penelitian	3
1.5 Manfaat Penelitian	3
1.6 Kebaharuan	4
BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA	5
2.1 Definisi dan Terminologi Graf	5
2.2 Graf Khusus	7
2.3 Operasi Graf	10
2.4 Pelabelan Graf	13
2.5 Pelabelan Total Ketidakteraturan	13

2.6 Pelabelan Total Ketidakteraturan Selimut	15
BAB 3. METODE PENELITIAN	16
3.1 Metode Penelitian	16
3.2 Teknik Penelitian	16
BAB 4. HASIL DAN PEMBAHASAN	19
4.1 Nilai tH_s pada Graf Hasil Operasi <i>Total Comb Product</i>	20
4.2 Pembahasan	45
BAB 5. KESIMPULAN DAN SARAN	47
5.1 Kesimpulan	47
5.2 Saran	47
DAFTAR PUSTAKA	48

DAFTAR GAMBAR

	Halaman
2.1 Graf G	5
2.2 Graf Teratur.....	6
2.3 Graf Roda W_3	7
2.4 Graf Lintasan P_2 dan P_4	7
2.5 Graf Siklus C_5 dan C_7	8
2.6 Graf Buku Segitiga Bt_2 dan Bt_3	8
2.7 Graf Semi Jahangir SJ_4	9
2.8 Graf Kipas F_5	9
2.9 Graf Timbunan Buku $B_{3,2}$	10
2.10 Graf Operasi <i>Comb Product</i>	12
2.11 Graf Operasi <i>Edge Comb Product</i>	12
2.12 Graf Operasi <i>Total Comb Product</i>	13
3.1 Skema Penelitian	18
4.1 Notasi Graf $(P_4 \dot{\triangleleft} Bt_3)$	20
4.2 Pelabelan Graf $(P_4 \dot{\triangleleft} Bt_3)$	24
4.3 Notasi Graf $(P_6 \dot{\triangleleft} C_4)$	25
4.4 Pelabelan Graf $tHs(P_6 \dot{\triangleleft} C_4)$	27
4.5 Notasi Graf $(P_3 \dot{\triangleleft} W_6)$	28
4.6 Pelabelan Graf $tHs(P_3 \dot{\triangleleft} W_6)$	32
4.7 Notasi Graf $(P_4 \dot{\triangleleft} SJ_2)$	33
4.8 Pelabelan Graf $tHs(P_4 \dot{\triangleleft} Sj_2)$	36
4.9 Notasi Graf $(P_4 \dot{\triangleleft} F_4)$	37

4.10 Pelabelan Graf $tHs(P_4 \dot{\supseteq} F_4)$	40
4.11 Notasi Graf $(P_3 \dot{\supseteq} B_{4,2})$	41
4.12 Pelabelan Graf $tHs(P_3 \dot{\supseteq} B_{4,2})$	45



BAB 1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Teori graf pertama kali diperkenalkan oleh Leonhard Euler pada tahun 1736 dengan mempublikasikan masalah jembatan Konigsberg dan solusi atas permasalahan tersebut menggunakan teori graf. Graf merupakan pasangan himpunan titik dan himpunan sisi. Keterkaitan titik-titik pada graf membentuk sisi dan dipresentasikan pada gambar sehingga membentuk pola tertentu.

Salah satu topik dalam teori graf adalah pelabelan graf yang diperkenalkan oleh Kotzig dan Rosa tahun 1970. Pelabelan merupakan pemetaan yang memetakan himpunan titik dan himpunan sisi kesuatu bilangan asli yang disebut label. Berdasarkan elemen-elemen yang terlabeli (daerah asal pemetaannya), pelabelan dapat dibedakan menjadi 3 jenis, yaitu pelabelan titik (*vertex labeling*), pelabelan sisi (*edge labeling*), dan pelabelan total (*total labeling*). Beberapa macam pelabelan graf yang telah dikaji diantaranya pelabelan Harmoni, pelabelan ajaib, dan pelabelan anti ajaib (Arafah *et al.*, 2015).

Chartrand *et al.*, tahun 1988 mulai mempelajari tentang irregular atau jaringan ketidakteraturan. Kemudian Dinitz *et al.*, mempelajari ketidakteraturan pada suatu graf pada tahun 1992. Selain itu, nilai ketidakteraturan juga diperkenalkan oleh Togni tahun 1992 dan Frieze *et al.*, tahun 2004. Ada beberapa jenis pelabelan graf, salah satu diantaranya adalah pelabelan total ketidakteraturan. Beberapa macam pelabelan total ketidakteraturan yakni pelabelan total ketidakteraturan titik dan pelabelan total ketidakteraturan sisi (Baca *et al.*, 2007).

Pada tahun 2016, Agustin *et al* mengembangkan kajian tentang pelabelan total ketidakteraturan yaitu pelabelan total ketidakteraturan selimut (*H-irregular*

total labelling) dimana H merupakan selimut dari suatu graf G . Pelabelan total ketidakteraturan selimut merupakan pengembangan dari pelabelan total ketidakteraturan sisi dimana pada pelabelan total ketidakteraturan sisi dicari nilai minimum dengan menerapkan $tes(G)$ (*total edge irregularity strength*) yang digunakan untuk melabeli setiap himpunan titik dan himpunan sisi sehingga bobot setiap sisinya berbeda. Sedangkan pada pelabelan total ketidakteraturan selimut dicari nilai bilangan positif minimum dengan menerapkan $tHs(G)$ (*total H-irregularity strength*) yang digunakan untuk melabeli setiap himpunan titik dan sisi sehingga bobot setiap selimut dari suatu graf G berbeda.

Peneliti tertarik untuk melakukan penelitian dengan bahan kajian tentang nilai ketidakteraturan total selimut (*total H-irregularity strength*) pada beberapa graf khusus hasil operasi. Pada penelitian ini menggunakan beberapa graf khusus seperti graf lintasan (*Path Graph*) (P_n), graf siklus (*Cycle Graph*) (C_n), graf roda (*Wheel Graph*) (W_n), graf buku segitiga (*Triangular Book Graph*) (Bt_n), graf semi jahangir (*Semi Jahangir Graph*) (SJ_n), graf kipas (*Fan Graph*) (F_n), dan graf timbunan buku (*Stacked Book Graph*) ($B_{m,n}$). Operasi graf adalah cara untuk menghasilkan suatu graf baru dengan mengoperasikan dua buah graf. Operasi *comb product* atau disebut juga *comb titik* merupakan salah satu operasi graf yang mengalami perkembangan menjadi *comb sisi* (*edge comb product*) dan *comb total* (*total comb product*). Berdasarkan uraian diatas belum ada penelitian tentang nilai ketidakteraturan total selimut pada graf khusus dengan pengembangan operasi *total comb product*. Oleh sebab itu peneliti tertarik untuk meneliti kajian tentang nilai ketidakteraturan total selimut pada graf khusus dengan operasi *total comb product*. Graf baru yang terbentuk dari hasil operasi *total comb product* akan dicari nilai bilangan positif seminimal mungkin dengan penerapan $tHs(G)$ atau nilai ketidakteraturan total selimut yang akan digunakan untuk melabeli setiap himpunan titik dan himpunan sisi sehingga bobot setiap selimut berbeda.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang, diperoleh rumusan masalah sebagai berikut:

- berapa kardinalitas titik dan sisi pada graf hasil operasi *total comb product* pada graf-graf khusus?
- berapa nilai ketidakteraturan total selimut tHs dari graf hasil operasi *total comb product* pada graf-graf khusus?

1.3 Batasan Masalah

Adapun batasan masalah dari penelitian ini adalah:

- operasi graf yang digunakan adalah operasi *total comb product*;
- graf-graf yang digunakan adalah $P_n, C_n, W_n, Bt_n, SJ_n, F_n, B_{m,n}$;
- graf dasar yang digunakan adalah graf lintasan.

1.4 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penelitian ini adalah:

- mengetahui kardinalitas titik dan sisi pada graf hasil operasi *total comb product* pada graf-graf khusus;
- mengetahui nilai ketidakteraturan total selimut tHs dari graf hasil operasi *total comb product* pada graf-graf khusus.

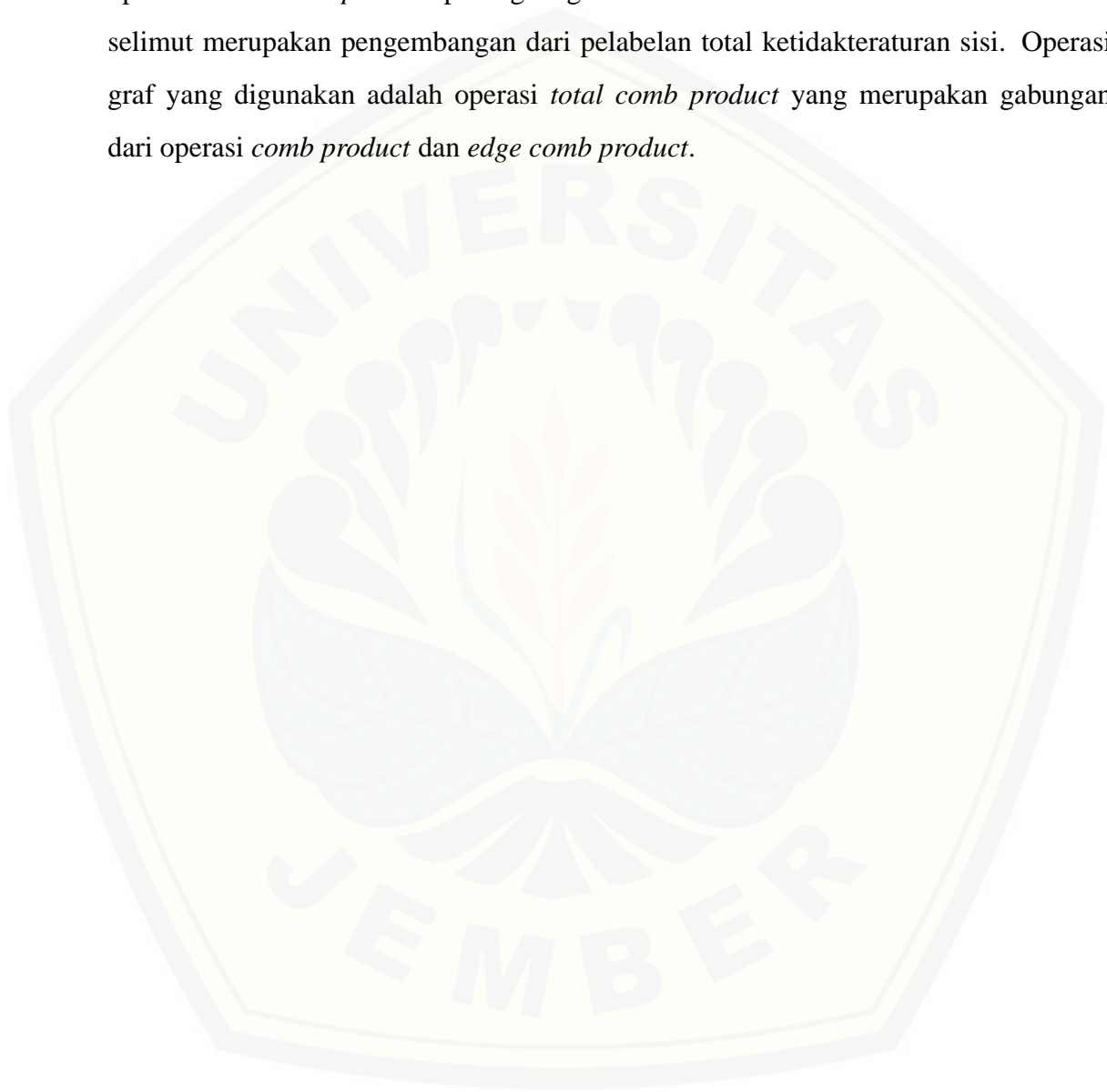
1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari penelitian ini diantaranya sebagai berikut :

- menambah pengetahuan baru dalam bidang teori graf, khususnya dalam ruang lingkup nilai ketidakteraturan total selimut;
- memberi motivasi pada peneliti lain untuk meneliti lebih lanjut tentang nilai ketidakteraturan total selimut pada graf khusus.

1.6 Kebaharuan

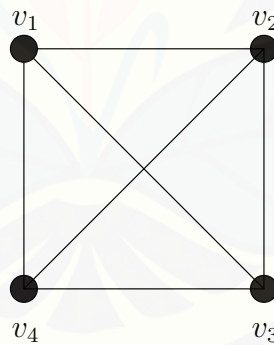
Kebaharuan pada penelitian ini adalah pelabelan yang digunakan adalah pelabelan total ketidakteraturan selimut dengan menentukan nilai tH_s dari graf hasil operasi *total comb product* pada graf-graf khusus. Pelabelan total ketidakteraturan selimut merupakan pengembangan dari pelabelan total ketidakteraturan sisi. Operasi graf yang digunakan adalah operasi *total comb product* yang merupakan gabungan dari operasi *comb product* dan *edge comb product*.



BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Definisi dan Terminologi Graf

Suatu graf $G = (V, E)$ didefinisikan sebagai pasangan himpunan V dimana $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ merupakan himpunan tidak kosong yang elemen-elemennya disebut titik (*vertex/node*) dan $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_n\}$ merupakan himpunan boleh kosong dan digambarkan garis-garis yang menghubungkan sepasang titik yang elemen-elemennya disebut sisi (*edge*). Secara geometri, graf dapat digambarkan sebagai sekumpulan titik di dalam bidang dua dimensi yang dihubungkan dengan sekumpulan sisi. Sebuah graf dimungkinkan tidak mempunyai sisi satu buah pun, tetapi harus ada minimal satu titik. Graf yang hanya memiliki satu buah titik tanpa sebuah sisi disebut graf trivial (Munir, 2009).



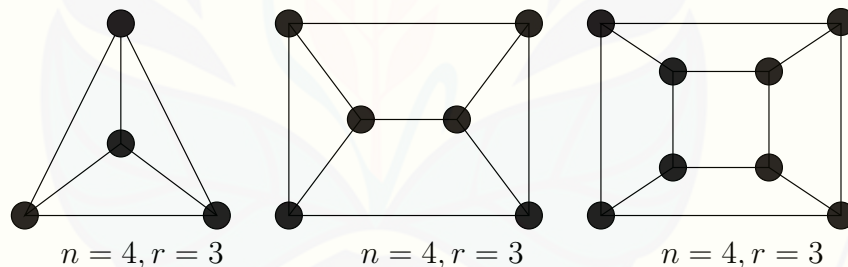
Gambar 2.1 Graf G

Jika suatu sisi menghubungkan satu titik ketitik itu sendiri, maka sisi tersebut disebut *loop*. Jika dua titik dihubungkan oleh lebih dari satu sisi maka sisi tersebut disebut sisi berganda (*multiple edges*). Berdasarkan ada tidaknya gelang atau sisi berganda dibagi menjadi dua jenis yaitu graf sederhana (*simple graph*) dan graf

tak-sederhana (*unsimple graph*). Graf sederhana merupakan graf yang tidak mengandung *loop* dan sisi berganda, sedangkan graf tak-sederhana merupakan graf yang mengandung *loop* dan sisi berganda (Manongga dan Yessica, 2013).

Banyaknya titik pada graf G dinyatakan sebagai $|V|$ dan banyaknya sisi dinyatakan sebagai $|E|$. Jika $|V|$ berhingga, maka graf G disebut graf berhingga (*finite graph*), sedangkan jika $|V|$ tidak berhingga maka graf G disebut graf tidak berhingga (*infinite graph*). Dua titik u dan v pada suatu graf G dikatakan bertetangga (*adjacent/neighbors*) di G apabila $\{u,v\}$ adalah suatu sisi di G . Jika $e=\{u,v\}$ maka e dikatakan ada (*incident*) pada titik u dan v . Sisi e juga dikatakan terhubung pada titik u dan v (Rosen, 2003).

Derajat dari suatu titik v adalah jumlah sisi yang bersisian (*incident*) dengan titik tersebut. Derajat minimum dari suatu graf G dinyatakan dengan $\delta(G)$, sedangkan derajat maksimum dinyatakan dengan $\Delta(G)$. Jika $\delta = \Delta = r$, maka graf G disebut graf teratur berderajat r (*r-regular graph*) (Alishahi, 2011).



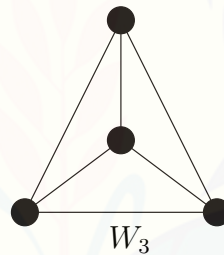
Gambar 2.2 Graf Teratur

Berdasarkan orientasi arah, graf dibedakan menjadi dua yaitu, graf berarah (*directed graph*) dan graf tidak berarah (*undirected graph*). Pada graf berarah, (u,v) dan (v,u) menyatakan dua buah sisi yang berbeda dengan titik u disebut titik asal dan titik v disebut titik terminal. Pada graf tak berarah, urutan pasangan titik yang dihubungkan oleh sisi tidak diperhatikan dengan $(u,v)=(v,u)$ adalah sisi yang sama (Purwanto *et al*, 2006).

2.2 Graf Khusus

Graf khusus adalah graf yang memiliki keunikan dan karakteristik bentuk khusus. Keunikan graf khusus adalah tidak isomorfis dengan graf lainnya, sedangkan karakteristik bentuknya dapat diperluas sampai order n dan tetap simetris. Berikut ini adalah beberapa contoh graf khusus : graf roda (*Wheel Graph*), graf lintasan (*Path Graph*), graf siklus (*Cycle Graph*), graf buku segitiga (*Triangular Book Graph*), graf semi jahangir (*Semi Jahangir Graph*), graf kipas (*Fan Graph*), dan graf timbunan buku (*Stacked Book Graph*).

Graf Roda (*Wheel Graph*) adalah suatu graf yang dibentuk dari graf lingkaran C_n dan satu titik sebagai titik tengah atau pusat yang dihubungkan oleh sisi pada setiap titik di C_n . Graf roda dinotasikan sebagai W_n dengan $n \geq 3$ (Gallian, 2011). Contoh dari Graf Roda dapat dilihat pada Gambar 2.3 Graf Roda W_3



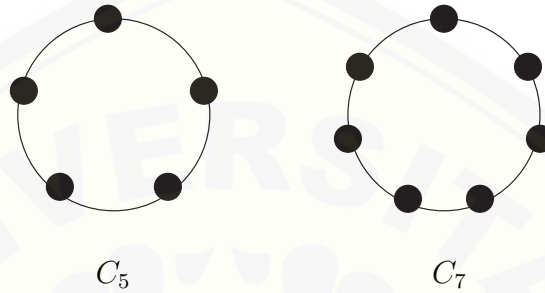
Gambar 2.3 Graf Roda W_3

Graf Lintasan (*Path Graph*) yang dinotasikan dengan P_n adalah graf sederhana yang terdiri dari satu lintasan. Graf lintasan dengan n titik dengan $n \geq 2$ (Damayanti, 2011). Contoh dari Graf Lintasan dapat dilihat pada Gambar 2.4 Graf Lintasan P_2 dan P_4



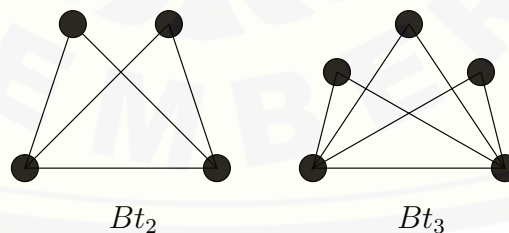
Gambar 2.4 Graf Lintasan P_2 dan P_4

Graf Siklus (*Cycle Graph*) adalah graf sederhana yang terdiri dari n titik dan setiap titiknya berderajat 2, serta memiliki jumlah sisi dan titik yang sama. Graf Siklus dinotasikan dengan C_n dimana $n \geq 3$ (Ardiansyah dan Darmaji, 2013). Contoh dari Graf Siklus dapat dilihat pada Gambar 2.5 Graf Siklus C_5 dan C_7



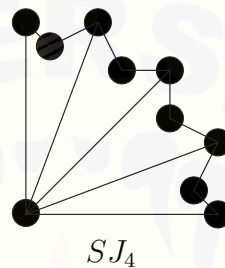
Gambar 2.5 Graf Siklus C_5 dan C_7

Graf Buku Segitiga (*Triangular Book Graph*) adalah graf terhubung yang dinotasikan dengan Bt_n dengan himpunan titik $V(Bt_n) = \{x_i; 1 \leq i \leq 2\} \cup \{y_j; 1 \leq j \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(Bt_n) = \{x_1x_2\} \cup \{x_1y_j, x_2y_j; 1 \leq j \leq n\}$, sehingga $|V(Bt_n)| = n + 2$ dan $|E(Bt_n)| = 2n + 1$ dengan $n \geq 2$ (Dafik *et al.*, 2013). Contoh dari Graf Buku Segitiga dapat dilihat pada Gambar 2.6 Graf Buku Segitiga Bt_2 dan Bt_3



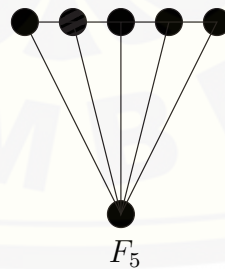
Gambar 2.6 Graf Buku Segitiga Bt_2 dan Bt_3

Graf Semi Jahangir (*Semi Jahangir Graph*) adalah graf terhubung yang dinotasikan dengan SJ_n dengan himpunan titik $V(SJ_n) = \{p, x_i, y_k; \text{untuk } 1 \leq i \leq n + 1, 1 \leq k \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(SJ_n) = \{px_i; 1 \leq i \leq n + 1\} \cup \{x_i y_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n\}$ (Hardiyantik, 2015). Contoh dari Graf Semi Jahangir dapat dilihat pada Gambar 2.7 Graf Semi Jahangir SJ_4



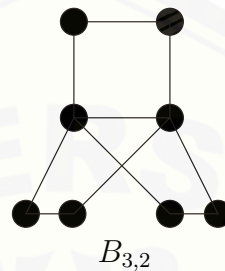
Gambar 2.7 Graf Semi Jahangir SJ_4

Graf Kipas (*Fan Graph*) dinotasikan F_n dimana $n \geq 2$. Graf kipas merupakan graf yang didapat dengan menghubungkan semua titik pada graf lintasan P_n pada satu titik pusat. Graf kipas memiliki $n + 1$ titik dan $2n - 1$ sisi (Mashitah, 2013). Contoh dari Graf Kipas dapat dilihat pada Gambar 2.8 Graf Kipas F_5



Gambar 2.8 Graf Kipas F_5

Graf Timbunan Buku (*Stacked Book Graph*) dinotasikan $B_{m,n}$ yang merupakan suatu graf bintang dan graf lintasan pada n titik. *Stacked Book Graph* digambarkan seperti graf *cartesian* $S_{(m+1)} \times P_n$ (Daoud, 2013). Contoh dari Graf Timbunan Buku dapat dilihat pada Gambar 2.9 Graf Timbunan Buku $B_{3,2}$



Gambar 2.9 Graf Timbunan Buku $B_{3,2}$

2.3 Operasi Graf

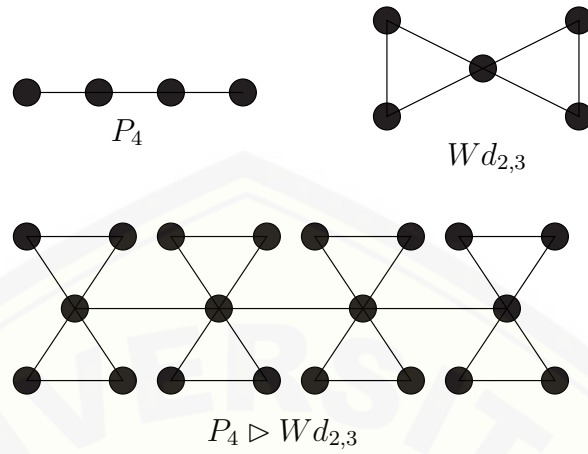
Operasi graf adalah cara untuk menghasilkan suatu graf baru dengan mengoperasikan duah buah graf. Macam-macam operasi graf antara lain yaitu *joint*, *cartesian product*, *tensor product*, *shackle*, *composition*, *amalgamation*. Operasi graf yang digunakan dalam penelitian ini adalah operasi graf *total comb product*. *Total Comb Product* merupakan perkembangan dari operasi comb titik dan comb sisi. Operasi comb titik merupakan operasi yang dihasilkan dari dua buah graf terhubung dengan graf G sebagai graf dasar dimana semua titik pada graf G direkatkan dengan graf K di titik cangkok pada graf G . Operasi comb sisi merupakan operasi yang dihasilkan dari dua buah graf terhubung dengan graf G sebagai graf dasar dimana semua sisi pada graf G direkatkan dengan graf K di sisi cangkok pada graf G .

Definisi 2.1. Misalkan G dan K adalah graf terhubung dan o adalah titik di K . Operasi comb titik (*Comb Product*) dari graf G dan K dinotasikan $G \triangleright K$, merupakan operasi graf yang diperoleh dengan mengambil salinan dari graf G dan $|V(G)|$ salinan

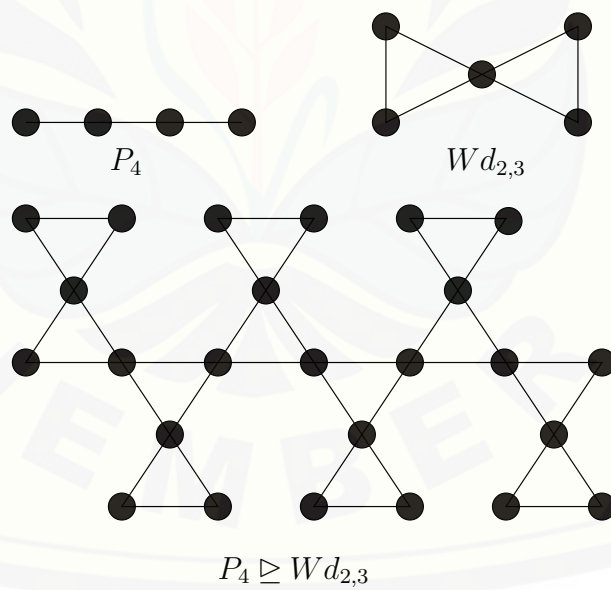
dari K dan merekatkan salinan ke- i dari graf K di titik cangkok o pada titik ke- i dari graf G . Dengan demikian, himpunan titik dan sisi dari graf $G \triangleright K$ adalah sebagai berikut : $V(G \triangleright K) = \{(a, v) \mid a \in V(G), v \in V(K)\}$ dan $(a, v)(b, w) \in E(G \triangleright K)$ jika $a = b$ dan $vw \in E(K)$ atau $ab \in E(G)$ dan $v = w = o$, sehingga $p = |V(G \triangleright K)| = p_1 p_2$ dan $q = |E(G \triangleright K)| = p_1 q_2 + q_1$ (Saputro *et al.*, 2013).

Definisi 2.2. Misalkan G dan K adalah graf terhubung dan e adalah sisi di K . Operasi comb sisi (*Edge Comb Product*) dari graf G dan K dinotasikan $G \trianglerighteq K$, merupakan operasi graf yang diperoleh dengan mengambil satu salinan graf G dan $|E(G)|$ salinan graf K dan merekatkan salinan ke- i dari graf K di sisi cangkok e pada sisi ke- i dari graf G . Dengan demikian, himpunan titik dan sisi graf $G \trianglerighteq K$ adalah sebagai berikut: $V(G \trianglerighteq K) = \{(a, v) \mid a \in V(G); v \in V(K)\} \cup \{(a, v, z) \mid a \in V(G); v, z \in V(K)\}$ dan jika $v = w$ dan $z = y$, $y = w$ maka $E(G \trianglerighteq K) = \{(a, v)(b, w, z) \mid a, b \in V(G); v, w, z \in V(K)\} \cup \{(b, w, z)(c, w, y) \mid b, c \in V(G); z, w, y \in V(K)\} \cup \{(c, w, y)(d, v) \mid c, d \in V(G); v, w, y \in V(K)\}$ jika $a = b$ maka $E(G \trianglerighteq K) = \{(a, v)(b, w) \mid a, b \in V(G); v, w \in V(K)\}$ sehingga $p = |V(G \trianglerighteq K)| = q_1(p_2 - 2) + p_1$ dan $q = |E(G \trianglerighteq K)| = q_1 q_2$ (Wardani, 2016).

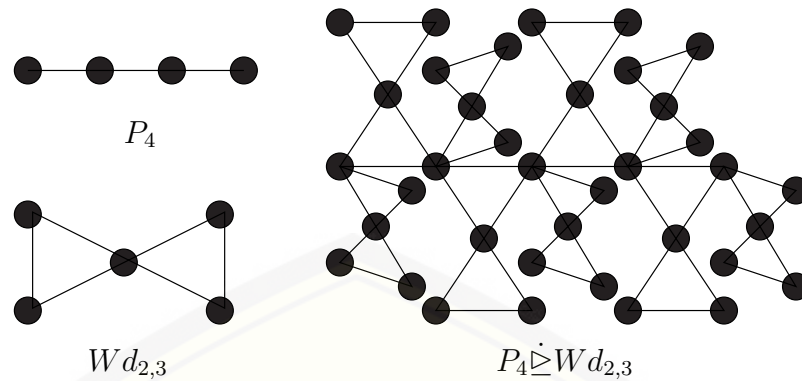
Berdasarkan **Definisi 2.1** dan **Definisi 2.2**, maka operasi comb total merupakan gabungan dari comb titik dan comb sisi dimana semua titik dan sisi pada graf G direkatkan dengan graf K di titik dan sisi cangkok pada graf G . Misalkan G dan K adalah graf terhubung dan $v \in V(K)$ dan $e \in E(K)$. Operasi *total comb product* dari graf G dan K yang dinotasikan $(G \dot{\trianglerighteq} K)$ merupakan operasi graf yang diperoleh dengan mengambil salinan satu graf G dan $|V(G)| + |E(G)|$ salinan K , kemudian merekatkan salinan ke- i dari graf K di titik cangkok v pada titik ke- i dari graf G dan merekatkan salinan ke- j dari graf K di sisi cangkok e pada sisi ke- j dari graf G (Agustin *et al.*, 2017).



Gambar 2.10 Graf Operasi *Comb Product*



Gambar 2.11 Graf Operasi *Edge Comb Product*

Gambar 2.12 Graf Operasi *Total Comb Product*

2.4 Pelabelan Graf

Pelabelan merupakan pemetaan yang memetakan himpunan titik atau himpunan sisi ke suatu bilangan asli yang disebut label. Pelabelan graf diperkenalkan oleh Kotzig dan Rosa tahun 1970. Berdasarkan elemen-elemen yang terlabeli (daerah asal pemetaannya), pelabelan dibagi menjadi tiga jenis, yaitu pelabelan titik (*vertex labelling*), pelabelan sisi (*edge labelling*), dan pelabelan total (*total labelling*). Pelabelan titik adalah pelabelan dengan domain himpunan titik, pelabelan sisi adalah pelabelan dengan domain sisi, dan pelabelan total adalah pelabelan dengan domain gabungan antara himpunan titik dan himpunan sisi. Beberapa macam pelabelan graf yang telah dikaji diantaranya pelabelan Harmoni, pelabelan ajaib, dan pelabelan anti ajaib (Arafah *et al.*, 2015).

2.5 Pelabelan Total Ketidakteraturan

Pelabelan total ketidakteraturan dibagi menjadi tiga jenis yaitu pelabelan total ketidakteraturan titik (*vertex irregular total labelling*), pelabelan total ketidakteraturan sisi (*edge irregular total labelling*), dan pelabelan total ketidakteraturan selimut (*H-irregular total labelling*).

a. Pelabelan Total Ketidakteraturan Titik (*Vertex Irregular Total Labelling*)

Pelabelan *k-total* merupakan pelabelan *k-total* tak teratur titik dari graf G jika untuk setiap titik x dan y yang berbeda maka $wt(x) \neq wt(y)$. *Total vertex irregularity strength* dari graf G atau $tvs(G)$ adalah nilai k minimum sedemikian sehingga terdapat pelabelan *k-total* tak teratur titik. Pelabelan total ketidakteraturan titik menerapkan nilai total $tvs(G)$

$$tvs(G) \geq \lceil \frac{n+r}{r+1} \rceil$$

b. Pelabelan Total Ketidakteraturan Sisi (*Edge Irregular Total Labelling*)

Pelabelan total ketidakteraturan sisi pada graf G merupakan pemberian nilai bilangan bulat positif dimana nilai yang digunakan boleh berulang pada himpunan titik dan sisi dengan bobot setiap sisinya berbeda seminimum mungkin. Pelabelan total ketidakteraturan sisi menerapkan nilai *total edge irregularity strength* $tes(G)$

$$\lceil \frac{|E|+2}{3} \rceil \leq tes(G) \leq |E|$$

(Baca *et al.*, 2007)

c. Pelabelan Total Ketidakteraturan Selimut (*H-irregular Total Labelling*)

Pelabelan total ketidakteraturan selimut pada graf G merupakan pemberian nilai bilangan positif minimum dimana nilai yang digunakan boleh berulang pada himpunan titik dan sisi sehingga bobot setiap selimut dari suatu graf G berbeda. Pelabelan total ketidakteraturan selimut menerapkan nilai *total H-irregularity strength* $tHs(G)$

$$tHs(G) \geq \lceil \frac{P_H+q_H+|H|-1}{P_H+q_H} \rceil$$

(Agustin *et al.*,2016)

2.6 Pelabelan Total Ketidakteraturan Selimut

Pelabelan total ketidakteraturan selimut merupakan hasil pengembangan dari pelabelan total ketidakteraturan sisi, dimana $H \subseteq G$ dengan kata lain H merupakan selimut dari suatu graf G . Dari pelabelan total ketidakteraturan sisi diketahui bahwa untuk suatu graf $G = (V, E)$ dapat didefinisikan suatu fungsi $f : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, k\}$ merupakan nilai ketakteraturan total sisi (total edge irregularity strength) jika untuk setiap dua sisi berbeda e dan f dari G masing-masing memiliki $\psi(e) \neq \psi(f)$ dimana bobot dari suatu sisi $e = \{u, v\}$ pada label v adalah $\psi(e) = v(u) + v(v) + v(e)$. Nilai minimum k pada graf G *total edge irregularity strength* pada G , dinotasikan dengan $tes(G)$. Sedangkan nilai minimum k pada pelabelan total ketidakteraturan selimut (*H-irregular total labelling*) pada G disebut dengan *total H-irregularity strength* dinotasikan dengan $tHs(G)$. Jika ada suatu label $f : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, k\}$ untuk sebarang selimut $H \subseteq G$, bobot total selimut $W(H) = \sum_{v \in V(H)} f(v) + \sum_{e \in E(H)} f(e)$ berbeda.

Lemma 2.1. *Misalkan $G, H \subset G$ adalah sebarang dua graf. Misalkan P_H, q_H merupakan masing-masing dari jumlah titik dan sisi dari H , maka total H-irregularity strength memenuhi*

$$tHs(G) \geq \left\lceil \frac{P_H + q_H + |H| - 1}{P_H + q_H} \right\rceil$$

(Agustin *et al.*, 2016)

BAB 3. METODE PENELITIAN

3.1 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut :

a. Metode Deduktif-aksiomatik

Metode deduktif-aksiomatik menggunakan prinsip-prinsip pembuktian deduktif yang berlaku dalam logika matematika dengan menggunakan aksioma atau teorema yang telah ada untuk memecahkan masalah. Teorema dasar yang digunakan dalam pelabelan total ketidakteraturan selimut, yaitu :

$$tHs(G) \geq \lceil \frac{P_H + q_H + |H| - 1}{P_H + q_H} \rceil$$

b. Metode Pendeteksian Pola

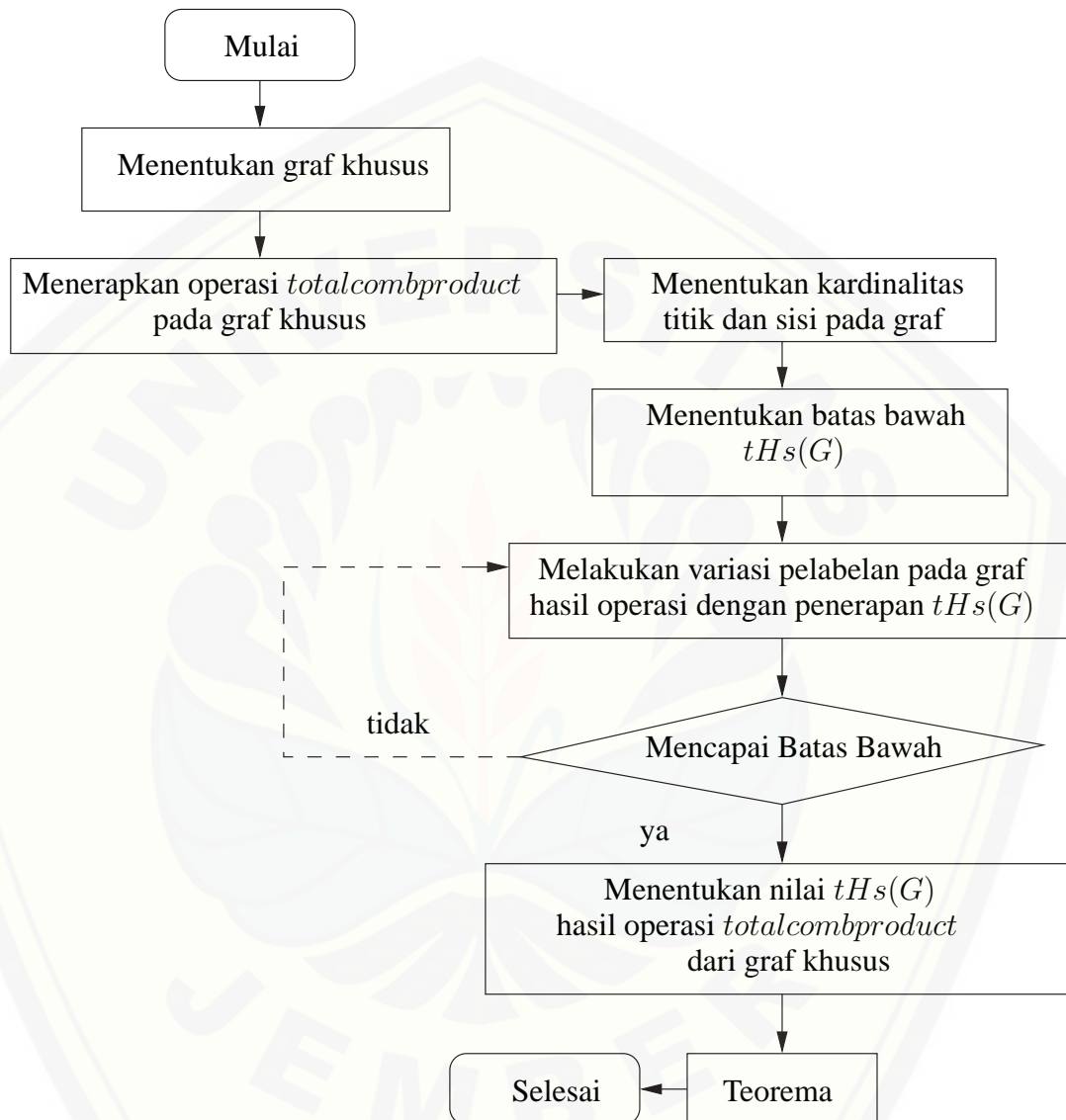
Proses penelitian ini menggunakan metode pendeteksian pola untuk merumuskan pola umumnya. Metode ini digunakan untuk merumuskan pola pelabelan titik dan pelabelan sisi secara umum, sehingga akan didapatkan perumusan nilai ketidakteraturan total selimut pada graf hasil operasi *total comb product*.

3.2 Teknik Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada graf-graf khusus dengan menerapkan operasi *total comb product*. Graf khusus yang akan digunakan dalam penelitian ini antara lain yaitu graf lintasan, graf siklus, graf roda, graf buku segitiga, graf semi jahangir, graf kipas, dan graf timbunan buku. Adapun teknik penelitian adalah sebagai berikut:

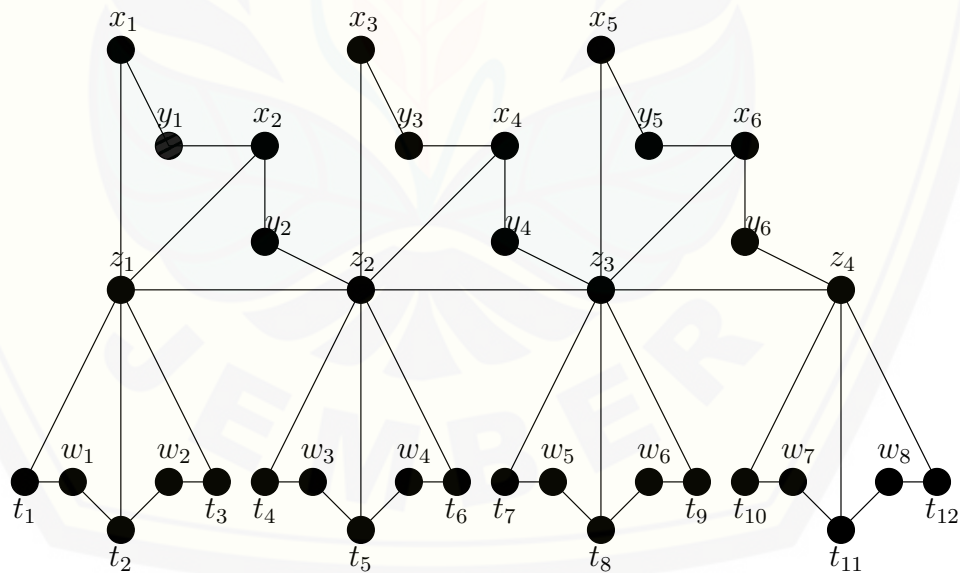
- a. Menentukan objek penelitian berupa graf khusus;
- b. Menerapkan operasi graf *total comb product* pada graf khusus yang telah ditentukan;
- c. Menentukan kardinalitas titik dan sisi graf baru yang telah dibentuk;
- d. Menentukan batas bawah $tHs(G)$ dengan mensubstitusikan jumlah sisi, jumlah titik dan jumlah selimut ke dalam Lemma 2.1;
- e. Melabeli graf baru yang telah dibentuk dengan bilangan bulat $1,2,\dots,k$ dengan menerapkan nilai $tHs(G)$;
- f. Memeriksa bobot selimut yang telah mencapai batas bawah, sedemikian hingga setiap selimut memiliki bobot yang berbeda;
- g. Menentukan formulasi akhir nilai $tHs(G)$ yang diperoleh dari graf hasil *total comb product* dari graf-graf khusus setelah menerapkan Lemma 2.1.

Secara umum, langkah-langkah penelitian di atas dapat juga dilihat dalam skema pada Gambar 3.1.



Gambar 3.1 Skema Penelitian

$$\begin{aligned}
 E(P_n \dot{\supseteq} SJ_2) &= \{x_{2i-1}z_i; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_{2i}z_i; 1 \leq i \leq n-1\} \\
 &\cup \{z_i z_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_i y_i; 1 \leq i \leq 2n-2\} \\
 &\cup \{x_{2i} y_{2i-1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{y_{2i} z_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \\
 &\cup \{z_i t_{3i-2}; 1 \leq i \leq n\} \cup \{z_i t_{3i-1}; 1 \leq i \leq n\} \\
 &\cup \{z_i t_{3i}; 1 \leq i \leq n\} \cup \{w_{2i-1} t_{3i-2}; 1 \leq i \leq n\} \\
 &\cup \{w_{2i-1} t_{3i-1}; 1 \leq i \leq n\} \cup \{w_{2i} t_{3i-1}; 1 \leq i \leq n\} \\
 &\cup \{w_{2i} t_{3i}; 1 \leq i \leq n\} \\
 |E(P_n \dot{\supseteq} SJ_2)| &= (n-1) + (n-1) + (n-1) + (2n-2) + (n-1) \\
 &\quad + (n-1) + n + n + n + n + n + n + n \\
 |E(P_n \dot{\supseteq} SJ_2)| &= 14n - 7
 \end{aligned}$$



Gambar 4.7 Notasi Graf ($P_n \dot{\supseteq} SJ_2$)

Dari Observasi 4.4 dan gambar 4.7, maka ditentukan nilai tHs (*total H-irregularity strength*) pada graf $(P_n \dot{\bowtie} SJ_2)$ yang disajikan dalam teorema berikut

Teorema 4.4. Misal G adalah graf hasil operasi total comb product P_n dan SJ_2 dinotasikan dengan $(P_n \dot{\bowtie} SJ_2)$ dan $H = C_4$. Maka

$$tHs(P_n \dot{\bowtie} SJ_2) = \lceil \frac{4n+5}{8} \rceil$$

Bukti. Dari observasi 4.4 graf $(P_n \dot{\bowtie} SJ_2)$ memiliki himpunan titik $V(P_n \dot{\bowtie} SJ_2) = \{x_i; 1 \leq i \leq 2n - 2\} \cup \{y_i; 1 \leq i \leq 2n - 2\} \cup \{z_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{w_i; 1 \leq i \leq 2n\} \cup \{t_i; 1 \leq i \leq 3n\}$ dan himpunan sisi $E(P_n \dot{\bowtie} SJ_2) = \{x_{2i-1}z_i; 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{x_{2i}z_i; 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{z_i z_{i+1}; 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{x_i y_i; 1 \leq i \leq 2n - 2\} \cup \{x_{2i} y_{2i-1}; 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{y_{2i} z_{i+1}; 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{z_i t_{3i-2}; 1 \leq i \leq n\} \cup \{z_i t_{3i-1}; 1 \leq i \leq n\} \cup \{z_i t_{3i}; 1 \leq i \leq n\} \cup \{w_{2i-1} t_{3i-2}; 1 \leq i \leq n\} \cup \{w_{2i-1} t_{3i-1}; 1 \leq i \leq n\} \cup \{w_{2i} t_{3i-1}; 1 \leq i \leq n\} \cup \{w_{2i} t_{3i}; 1 \leq i \leq n\}$. Jumlah titik $|V(P_n \dot{\bowtie} SJ_2)| = 10n - 4$ dan jumlah sisi $|E(P_n \dot{\bowtie} SJ_2)| = 14n - 7$. Berdasarkan Lemma 2.1 didefinisikan P_H adalah jumlah titik pada selimut H , q_H adalah jumlah sisi pada selimut H , dan $|H|$ adalah jumlah selimut pada graf $(P_n \dot{\bowtie} SJ_2)$ dimana selimut $H = C_4$ dan didapatkan jumlah selimut pada graf $(P_n \dot{\bowtie} SJ_2)$ adalah $|H| = 4n - 2$ sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} tHs(P_n \dot{\bowtie} SJ_2) &\geq \lceil \frac{P_H + q_H + |H| - 1}{P_H + q_H} \rceil \\ &= \lceil \frac{4 + 4 + (4n - 2) - 1}{4 + 4} \rceil \\ &= \lceil \frac{4n + 5}{8} \rceil \end{aligned}$$

Jadi, $tHs(P_n \dot{\bowtie} SJ_2) \geq \lceil \frac{4n+5}{8} \rceil$. Selanjutnya dilakukan pelabelan total ketidakteraturan selimut pada himpunan titik dan himpunan sisi sedemikian hingga bobot setiap selimut berbeda. Pada gambar 4.8 merupakan graf $tHs(P_5 \dot{\bowtie} SJ_2)$ yang telah dilabeli dengan bilangan bulat positif $\{1,2,3,\dots,k\}$ sehingga setiap selimut berbeda. Setelah dilakukan pelabelan total, maka ditentukan formulasi dari pelabelan total. Formulasi digunakan

untuk merumuskan pelabelan total secara umum dan menentukan label terbesar untuk dijadikan acuan nilai tHs .

$$\begin{aligned}
 f(x_i) &= \lceil \frac{i}{4} \rceil + 1; \quad 1 \leq i \leq 2n - 2 \\
 f(y_i) &= \begin{cases} 1 \\ \lceil \frac{i-1}{4} \rceil + 1; \text{ untuk } 2 \leq i \leq 2n - 2 \end{cases} \\
 f(z_i) = f(z_i t_{3i}) &= \begin{cases} 1 \\ \lceil \frac{i-1}{2} \rceil + 1; \text{ untuk } 2 \leq i \leq n \end{cases} \\
 f(w_i) &= \begin{cases} 1; i = 1, 2 \\ \lceil \frac{i-2}{4} \rceil + 1; \text{ untuk } 3 \leq i \leq 2n \end{cases} \\
 f(t_i) &= \begin{cases} 1; i = 1, 2 \\ \lceil \frac{i-2}{6} \rceil + 1; \text{ untuk } 3 \leq i \leq 3n \end{cases} \\
 f(x_{2i-1} z_i) = f(x_{2i} z_i) &= \lceil \frac{i}{2} \rceil + 1; \quad 1 \leq i \leq n - 1 \\
 f(z_i z_{i+1}) &= \begin{cases} 1 \\ \lceil \frac{i-1}{2} \rceil + 1; \text{ untuk } 2 \leq i \leq n - 1 \end{cases} \\
 f(x_i y_i) &= \begin{cases} 1; i = 1, 2 \\ \lceil \frac{i-2}{4} \rceil + 1; \text{ untuk } 3 \leq i \leq 2n - 2 \end{cases} \\
 f(x_{2i} y_{2i-1}) = f(y_{2i} z_{i+1}) &= \begin{cases} 1 \\ \lceil \frac{i-1}{2} \rceil + 1; \text{ untuk } 2 \leq i \leq n \end{cases} \\
 f(z_i t_{3i-2}) = f(z_i t_{3i-1}) = f(w_{2i-1} t_{3i-2}) &= \lceil \frac{i}{2} \rceil + 1; \quad 1 \leq i \leq n \\
 f(w_{2i-1} t_{3i-1}) = f(w_{2i} t_{3i-1}) = f(w_{2i} t_{3i}) &= \lceil \frac{i}{2} \rceil + 1; \quad 1 \leq i \leq n
 \end{aligned}$$

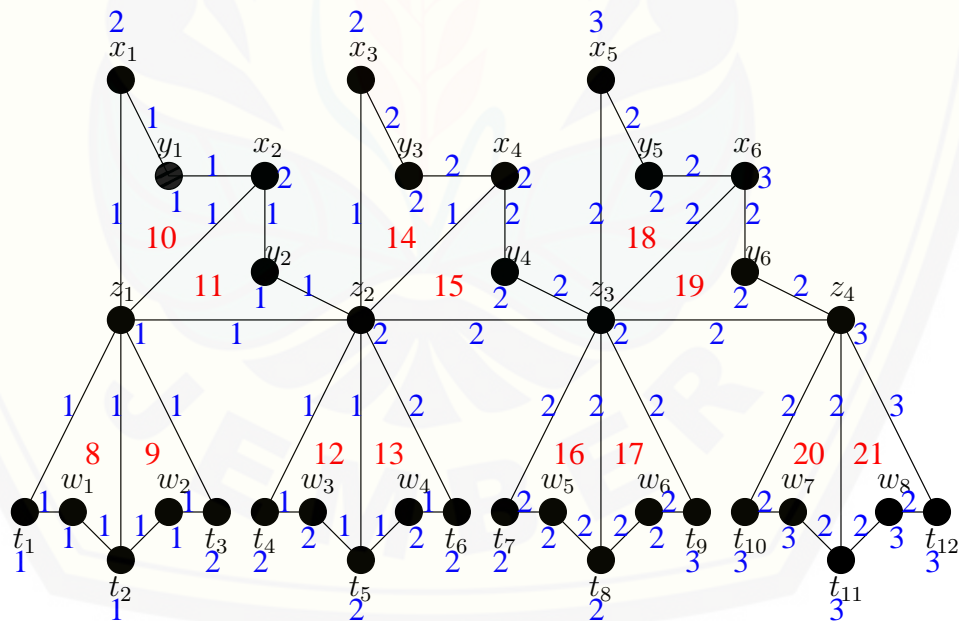
Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $tHs(P_n \dot{\supseteq} S J_2) \leq \lceil \frac{4n+5}{8} \rceil$. Pada pelabelan f , bobot total H adalah $W(H) = \sum_{v \in V(H)} f(v) + \sum_{e \in E(H)} f(e)$ adalah $W(H) = \{8, 9, \dots, 8 + (4n - 2)\}$ yang membentuk barisan yang berurutan. Pernyataan tersebut menunjukkan bahwa bobot H berbeda. Pada label f , minimum $tHs(P_n \dot{\supseteq} S J_2)$ dinyatakan sebagai berikut dimana label terbesar pada $(P_n \dot{\supseteq} S J_2)$ adalah $\lceil \frac{i-2}{4} \rceil + 1$ untuk $3 \leq i \leq 2n$ sehingga $i = 2n$

$$\begin{aligned}
 tHs(P_n \dot{\supseteq} SJ_2) &\leq \lceil \frac{i-2}{4} \rceil + 1 \\
 &= \lceil \frac{2n-2}{4} + \frac{4}{4} \rceil \\
 &= \lceil \frac{2n+2}{4} \rceil \\
 &= \lceil \frac{4n+4}{8} \rceil
 \end{aligned}$$

karena n merupakan bilangan bulat positif dan $\lceil \frac{a}{b} \rceil$ dimana $a \leq b$ dan $b \neq 0$ selalu 1 maka berlaku $\lceil \frac{4n+4}{8} \rceil = \lceil \frac{4n+5}{8} \rceil$

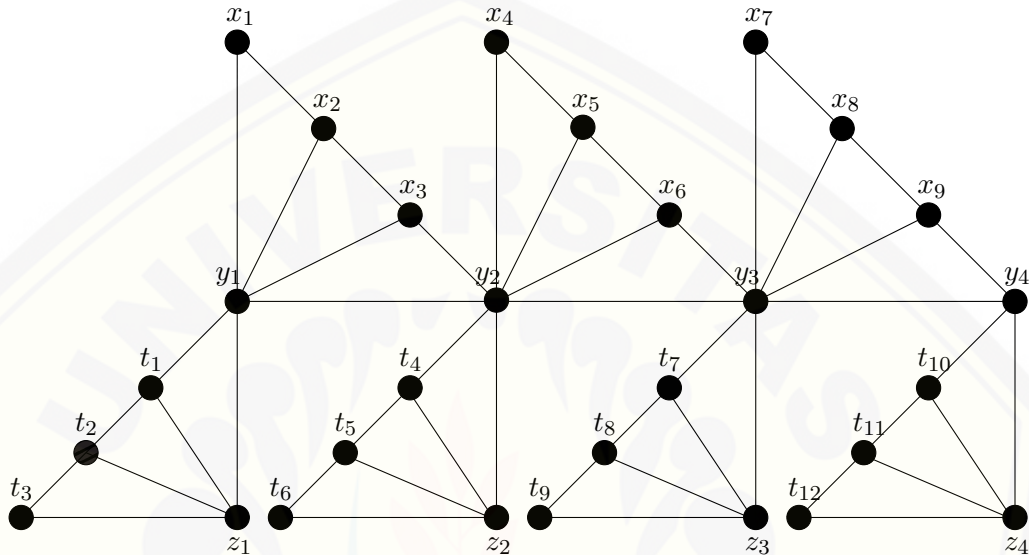
$$\begin{aligned}
 tHs(P_n \dot{\supseteq} SJ_2) &\leq \lceil \frac{4n+4}{8} \rceil \\
 &= \lceil \frac{4n+5}{8} \rceil
 \end{aligned}$$

Dari pembuktian diatas menunjukkan bahwa $tHs(P_n \dot{\supseteq} SJ_2) \geq \lceil \frac{4n+5}{8} \rceil$ dan $tHs(P_n \dot{\supseteq} SJ_2) \leq \lceil \frac{4n+5}{8} \rceil$ maka diperoleh $tHs(P_n \dot{\supseteq} SJ_2) = \lceil \frac{4n+5}{8} \rceil$. \square



Gambar 4.8 Pelabelan Graf $tHs(P_4 \dot{\supseteq} SJ_2)$

Observasi 4.5. Misalkan diketahui graf khusus lintasan (P_n) dioperasikan dengan graf kipas (F_4) dengan graf lintasan (P_n) sebagai graf dasar dan graf kipas (F_4) sebagai subgraf dari graf lintasan (P_n) menjadi graf hasil operasi *total comb product* ($P_n \dot{\supseteq} F_4$), berikut adalah kardinalitas titik dan kardinalitas sisi dari graf ($P_n \dot{\supseteq} F_4$).



Gambar 4.9 Notasi Graf ($P_4 \dot{\supseteq} F_4$)

Kardinalitas :

$$V(P_n \dot{\supseteq} F_4) = \{x_i; 1 \leq i \leq 3n - 3\} \cup \{y_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{w_i; 1 \leq i \leq 2n\} \\ \cup \{z_i; 1 \leq i \leq 2n\}$$

$$|V(P_n \dot{\supseteq} F_4)| = (3n - 3) + n + 2n + 2n$$

$$|V(P_n \dot{\supseteq} F_4)| = 8n - 3$$

$$E(P_n \dot{\supseteq} F_4) = \{x_{3i-2}x_{3i-1}; 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{x_{3i-1}x_{3i}; 1 \leq i \leq n - 1\} \\ \cup \{x_{3i}y_{i+1}; 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{x_{3i-2}y_i; 1 \leq i \leq n - 1\} \\ \cup \{x_{3i-1}y_i; 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{x_{3i}y_i; 1 \leq i \leq n - 1\} \\ \cup \{y_i y_{i+1}; 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{y_i t_{3i-2}; 1 \leq i \leq n\} \\ \cup \{t_{3i-2} t_{3i-1}; 1 \leq i \leq n\} \cup \{t_{3i-1} t_{3i}; 1 \leq i \leq n\}$$

$$\begin{aligned}
 &= \cup \{t_{3i}z_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{t_{3i-1}z_i; 1 \leq i \leq n\} \\
 &\quad \cup \{t_{3i-2}z_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_i z_i; 1 \leq i \leq n\} \\
 |E(P_n \dot{\supseteq} F_4)| &= (n-1) + (n-1) + (n-1) + (n-1) + (n-1) \\
 &\quad + (n-1) + (n-1) + n + n + n + n + n + n + n \\
 |E(P_n \dot{\supseteq} F_4)| &= 14n - 7
 \end{aligned}$$

Dari Observasi 4.5 dan gambar 4.9, maka ditentukan nilai tHs (*total H-irregularity strength*) pada graf $(P_n \dot{\supseteq} F_4)$ yang disajikan dalam teorema berikut

Teorema 4.5. Misal G adalah graf hasil operasi total comb product P_n dan F_4 dinotasikan dengan $(P_n \dot{\supseteq} F_4)$ dan $H = C_3$. Maka

$$tHs(P_n \dot{\supseteq} F_4) = \lceil \frac{6n+2}{6} \rceil$$

Bukti. Dari observasi 1 diketahui graf $(P_n \dot{\supseteq} F_4)$ memiliki himpunan titik $V(P_n \dot{\supseteq} F_4) = \{x_i; 1 \leq i \leq 3n-3\} \cup \{y_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{w_i; 1 \leq i \leq 2n\} \cup \{z_i; 1 \leq i \leq 2n\}$ dan himpunan sisi $E(P_n \dot{\supseteq} F_4) = \{x_{3i-2}x_{3i-1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_{3i-1}x_{3i}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_{3i}y_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_{3i-2}y_i; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_{3i-1}y_i; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_{3i}y_i; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{y_i y_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{y_i t_{3i-2}; 1 \leq i \leq n\} \cup \{t_{3i-2}t_{3i-1}; 1 \leq i \leq n\} \cup \{t_{3i-1}t_{3i}; 1 \leq i \leq n\} \cup \{t_{3i}z_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{t_{3i-1}z_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{t_{3i-2}z_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_i z_i; 1 \leq i \leq n\}$. Jumlah titik $|V(P_n \dot{\supseteq} F_4)| = 8n-3$ dan jumlah sisi $|E(P_n \dot{\supseteq} F_4)| = 14n-7$. Berdasarkan Lemma 2.1 didefinisikan P_H adalah jumlah titik pada selimut H , q_H adalah jumlah sisi pada selimut H , dan $|H|$ adalah jumlah selimut pada graf $(P_n \dot{\supseteq} F_4)$ dimana selimut $H = C_3$ dan didapatkan jumlah selimut pada graf $(P_n \dot{\supseteq} F_4)$ adalah $|H| = 6n-3$ sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
 tHs(P_n \dot{\supseteq} F_4) &\geq \lceil \frac{P_H + q_H + |H| - 1}{P_H + q_H} \rceil \\
 &= \lceil \frac{3 + 3 + (6n-3) - 1}{3 + 3} \rceil \\
 &= \lceil \frac{6n+2}{6} \rceil
 \end{aligned}$$

Jadi, $tHs(P_n \dot{\supseteq} F_4) \geq \lceil \frac{6n+2}{6} \rceil$. Selanjutnya dilakukan pelabelan total ketidakteraturan selimut pada himpunan titik dan himpunan sisi sedemikian hingga bobot setiap selimutnya berbeda. Pada gambar 4.10 merupakan graf $tHs(P_n \dot{\supseteq} F_4)$ yang telah dilabeli dengan bilangan bulat positif $\{1,2,3,\dots,k\}$ sehingga setiap selimut berbeda. Setelah dilakukan pelabelan total, maka ditentukan formulasi dari pelabelan total. Formulasi digunakan untuk merumuskan pelabelan total secara umum dan menentukan label terbesar untuk dijadikan acuan nilai tHs .

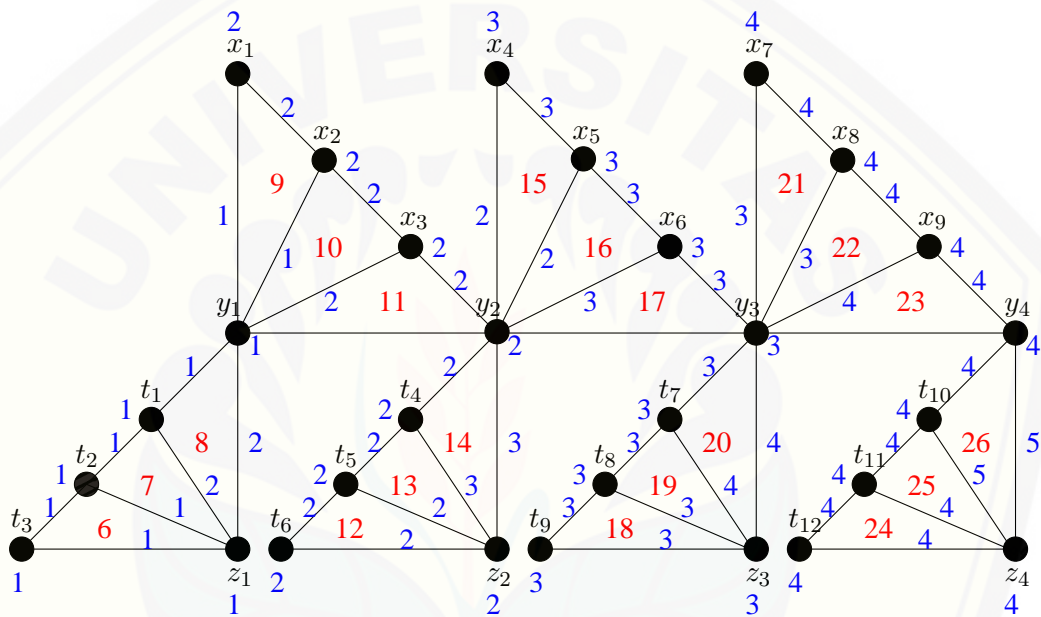
$$\begin{aligned}
 f(x_i) &= \lceil \frac{i}{3} \rceil + 1; & 1 \leq i \leq 3n - 3 \\
 f(y_i) = f(z_i) = f(y_i t_{3i-2}) = f(t_{3i-2} t_{3i-1}) &= i; & 1 \leq i \leq n \\
 f(t_{3i-1} t_{3i}) = f(t_{3i} z_i) = f(t_{3i-1} z_i) &= i; & 1 \leq i \leq n \\
 f(t_i) &= \lceil \frac{i}{3} \rceil; & 1 \leq i \leq 3n \\
 f(x_{3i-2} x_{3i-1}) = f(x_{3i-1} x_{3i}) = f(x_{3i} y_{i+1}) &= i + 1; & 1 \leq i \leq n - 1 \\
 f(x_{3i} y_i) = f(y_i y_{i+1}) &= i + 1; & 1 \leq i \leq n - 1 \\
 f(x_{3i-2} y_i) = f(x_{3i-1} y_i) &= i; & 1 \leq i \leq n - 1 \\
 f(t_{3i-2} z_i) = f(y_i z_i) &= i + 1; & 1 \leq i \leq n
 \end{aligned}$$

Sekarang akan ditunjukkan bahwa $tHs(P_n \dot{\supseteq} F_4) \leq \lceil \frac{6n+2}{6} \rceil$. Pada pelabelan f , bobot total H adalah $W(H) = \sum_{v \in V(H)} f(v) + \sum_{e \in E(H)} f(e)$ adalah $W(H) = \{6, 7, \dots, 6 + (6n - 3)\}$ yang membentuk barisan yang berurutan. Pernyataan tersebut menunjukkan bahwa bobot H berbeda. Pada label f , minimum $tHs(P_n \dot{\supseteq} F_4)$ dinyatakan sebagai berikut dimana label terbesar pada $(P_n \dot{\supseteq} F_4)$ adalah $\lceil \frac{i}{3} \rceil + 1$ untuk $1 \leq i \leq 3n - 3$ sehingga $i = 3n - 3$

$$\begin{aligned}
 tHs(P_n \dot{\supseteq} F_4) &\leq \lceil \frac{i}{3} \rceil + 1 \\
 &= \lceil \frac{3n - 3}{3} \rceil + 1 \\
 &= \lceil \frac{3n - 3}{3} + \frac{3}{3} \rceil \\
 &\leq \lceil \frac{3n}{3} \rceil
 \end{aligned}$$

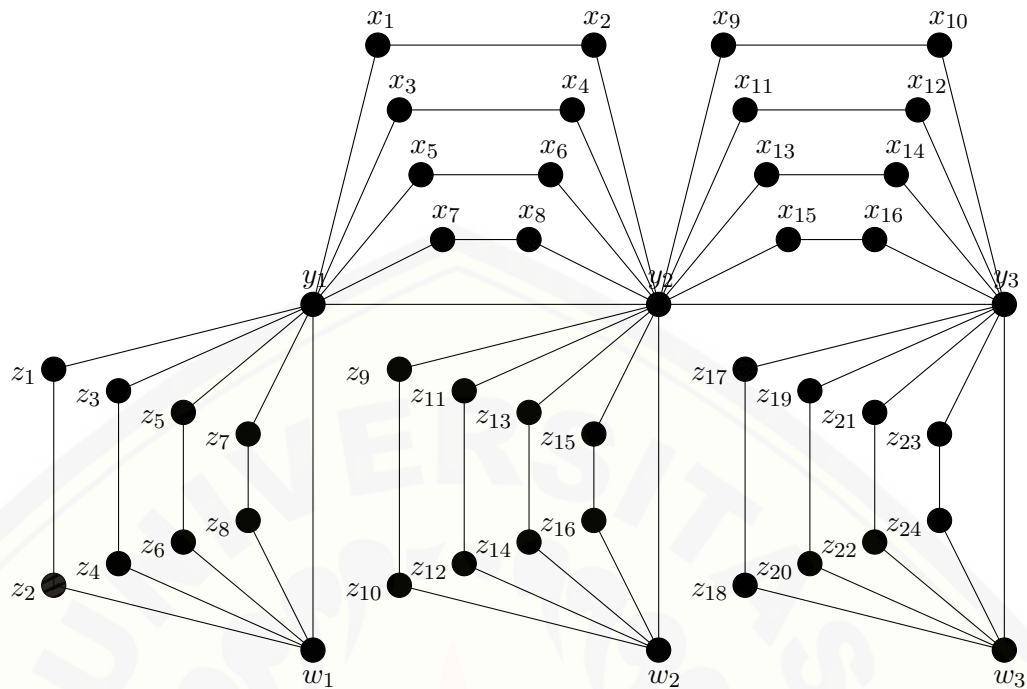
$$\begin{aligned}
 tHs(P_n \dot{\supseteq} F_4) &= \left\lceil \frac{3n}{3} + \frac{1}{3} \right\rceil \\
 &= \left\lceil \frac{3n+1}{3} \right\rceil \\
 &= \left\lceil \frac{6n+2}{6} \right\rceil
 \end{aligned}$$

Dari pembuktian diatas, menunjukkan bahwa $tHs(P_n \dot{\supseteq} F_4) \geq \left\lceil \frac{6n+2}{6} \right\rceil$ dan $tHs(P_n \dot{\supseteq} F_4) \leq \left\lceil \frac{6n+2}{6} \right\rceil$ maka diperoleh $tHs(P_n \dot{\supseteq} F_4) = \left\lceil \frac{6n+2}{6} \right\rceil$. \square



Gambar 4.10 Pelabelan Graf $tHs(P_4 \dot{\supseteq} F_4)$

Observasi 4.6. Misalkan diketahui graf khusus lintasan (P_n) dioperasikan dengan graf timbunan buku ($B_{4,2}$) dengan graf lintasan (P_n) sebagai graf dasar dan graf timbunan buku ($B_{4,2}$) sebagai subgraf dari graf lintasan (P_n) menjadi graf hasil operasi *total comb product* ($P_n \dot{\supseteq} B_{4,2}$), berikut adalah kardinalitas titik dan kardinalitas sisi dari graf ($P_n \dot{\supseteq} B_{4,2}$).



Gambar 4.11 Notasi Graf ($P_3 \dot{\geq} B_{4,2}$)

Kardinalitas :

$$V(P_n \dot{\geq} B_{4,2}) = \{x_i; 1 \leq i \leq 8n - 8\} \cup \{y_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{z_i; 1 \leq i \leq 8n\} \\ \cup \{w_i; 1 \leq i \leq n\}$$

$$|V(P_n \dot{\geq} B_{4,2})| = (8n - 8) + n + 8n + n$$

$$|V(P_n \dot{\geq} B_{4,2})| = 18n - 8$$

$$E(P_n \dot{\geq} B_{4,2}) = \{x_{2i-1}x_{2i}; 1 \leq i \leq 4n - 4\} \cup \{x_{8i-7}y_i; 1 \leq i \leq n - 1\} \\ \cup \{x_{8i-5}y_i; 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{x_{8i-3}y_i; 1 \leq i \leq n - 1\} \\ \cup \{x_{8i-1}y_i; 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{x_{8i-6}y_{i+1}; 1 \leq i \leq n - 1\} \\ \cup \{x_{8i-4}y_{i+1}; 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{x_{8i-2}y_{i+1}; 1 \leq i \leq n - 1\} \\ \cup \{x_{8i}y_{i+1}; 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{y_i y_{i+1}; 1 \leq i \leq n - 1\} \\ \cup \{y_i w_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{z_{2i-1}z_{2i}; 1 \leq i \leq 4n\} \\ \cup \{z_{8i-7}y_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{z_{8i-5}y_i; 1 \leq i \leq n\}$$

$$\begin{aligned}
 &= \cup\{z_{8i-3}y_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{z_{8i-1}y_i; 1 \leq i \leq n\} \\
 &\quad \cup\{z_{8i-6}w_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{z_{8i-4}w_i; 1 \leq i \leq n\} \\
 &\quad \cup\{z_{8i-2}w_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{z_{8i}w_i; 1 \leq i \leq n\} \\
 |E(P_n \dot{\supseteq} B_{4,2})| &= (4n - 4) + (n - 1) + (n - 1) + (n - 1) + (n - 1) \\
 &\quad + (n - 1) + (n - 1) + (n - 1) + (n - 1) + (n - 1) \\
 &\quad + n + 4n + n + n + n + n + n + n + n + n \\
 |E(P_n \dot{\supseteq} B_{4,2})| &= 26n - 13
 \end{aligned}$$

Dari Observasi 4.6 dan gambar 4.11, maka ditentukan nilai tHs (*total H-irregularity strength*) pada graf $(P_n \dot{\supseteq} B_{4,2})$ yang disajikan dalam teorema berikut

Teorema 4.6. Misal G adalah graf hasil operasi total comb product P_n dan $B_{4,2}$ dinotasikan dengan $(P_n \dot{\supseteq} B_{4,2})$ dan $H = C_4$. Maka

$$tHs(P_n \dot{\supseteq} B_{4,2}) = \lceil \frac{8n+3}{8} \rceil$$

Bukti. Dari observasi 4.6 diketahui graf $(P_n \dot{\supseteq} B_{4,2})$ memiliki himpunan titik $V(P_n \dot{\supseteq} B_{4,2}) = \{x_i; 1 \leq i \leq 8n - 8\} \cup \{y_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{z_i; 1 \leq i \leq 8n\} \cup \{w_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(P_n \dot{\supseteq} B_{4,2}) = \{x_{2i-1}x_{2i}; 1 \leq i \leq 4n - 4\} \cup \{x_{8i-7}y_i; 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{x_{8i-5}y_i; 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{x_{8i-3}y_i; 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{x_{8i-1}y_i; 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{x_{8i-6}y_{i+1}; 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{x_{8i-4}y_{i+1}; 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{x_{8i-2}y_{i+1}; 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{x_{8i}y_{i+1}; 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{y_i y_{i+1}; 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{y_i w_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{z_{2i-1}z_{2i}; 1 \leq i \leq 4n\} \cup \{z_{8i-7}y_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{z_{8i-5}y_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{z_{8i-3}y_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{z_{8i-1}y_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{z_{8i-6}w_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{z_{8i-4}w_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{z_{8i-2}w_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{z_{8i}w_i; 1 \leq i \leq n\}$. Jumlah titik $|V(P_n \dot{\supseteq} B_{4,2})| = 18n - 8$ dan jumlah sisi $|E(P_n \dot{\supseteq} B_{4,2})| = 26n - 13$. Berdasarkan Lemma 2.1 didefinisikan P_H adalah jumlah titik pada selimut H , q_H adalah jumlah sisi pada selimut H , dan $|H|$ adalah jumlah selimut pada graf $(P_n \dot{\supseteq} B_{4,2})$ dimana selimut $H = C_4$ dan didapatkan jumlah selimut pada graf $(P_n \dot{\supseteq} B_{4,2})$ adalah

$|H| = 8n - 4$ sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} tHs(P_n \dot{\supseteq} B_{4,2}) &\geq \left\lceil \frac{P_H + q_H + |H| - 1}{P_H + q_H} \right\rceil \\ &= \left\lceil \frac{4 + 4 + (8n - 4) - 1}{4 + 4} \right\rceil \\ &= \left\lceil \frac{8n + 3}{8} \right\rceil \end{aligned}$$

Jadi, $tHs(P_n \dot{\supseteq} B_{4,2}) \geq \left\lceil \frac{8n+3}{8} \right\rceil$. Selanjutnya dilakukan pelabelan total ketidakteraturan selimut pada himpunan titik dan himpunan sisi sedemikian hingga bobot setiap selimut berbeda. Pada gambar 4.12 merupakan graf $tHs(P_n \dot{\supseteq} B_{4,2})$ yang telah dilabeli dengan bilangan bulat positif $\{1,2,3,\dots,k\}$ sehingga setiap selimut berbeda. Setelah dilakukan pelabelan total, maka ditentukan formulasi dari pelabelan total. Formulasi digunakan untuk merumuskan pelabelan total secara umum dan menentukan label terbesar untuk dijadikan acuan nilai tHs .

$$\begin{aligned} f(x_i) &= \left\lceil \frac{i}{8} \right\rceil + 1; \quad 1 \leq i \leq 8n - 8 \\ f(y_i) = f(w_i) = f(z_{8i-7}y_i) &= i; \quad 1 \leq i \leq n \\ f(z_{8i-5}y_i) = f(z_{8i-3}y_i) = f(z_{8i-1}y_i) &= i; \quad 1 \leq i \leq n \\ f(z_{8i-6}w_i) = f(z_{8i-4}w_i) = f(z_{8i-2}w_i) &= i; \quad 1 \leq i \leq n \\ f(z_{8i}w_i) &= i; \quad 1 \leq i \leq n \\ f(z_i) &= \begin{cases} \left\lceil \frac{i}{8} \right\rceil; & \text{untuk } 1 \leq i \leq 3 \\ \left\lceil \frac{i-3}{8} \right\rceil + 1; & \text{untuk } 4 \leq i \leq 8n \end{cases} \\ f(x_{2i-1}x_{2i}) &= \begin{cases} 1 \\ \left\lceil \frac{i-1}{4} \right\rceil + 1; & \text{untuk } 2 \leq i \leq 4n - 4 \end{cases} \\ f(x_{8i-7}y_i) = f(x_{8i-5}y_i) = f(x_{8i-3}y_i) &= i; \quad 1 \leq i \leq n - 1 \\ f(x_{8i-6}y_{i+1}) = f(x_{8i-4}y_{i+1}) &= i; \quad 1 \leq i \leq n - 1 \\ f(x_{8i-1}y_i) = f(x_{8i-2}y_{i+1}) &= i + 1; \quad 1 \leq i \leq n - 1 \\ f(x_{8i}y_{i+1}) = f(y_i y_{i+1}) &= i + 1; \quad 1 \leq i \leq n - 1 \end{aligned}$$

$$f(z_{2i-1}z_{2i}) = \begin{cases} \lceil \frac{i}{4} \rceil; & \text{untuk } 1 \leq i \leq 3 \\ \lceil \frac{i-3}{4} \rceil + 1; & \text{untuk } 4 \leq i \leq 4n \end{cases}$$

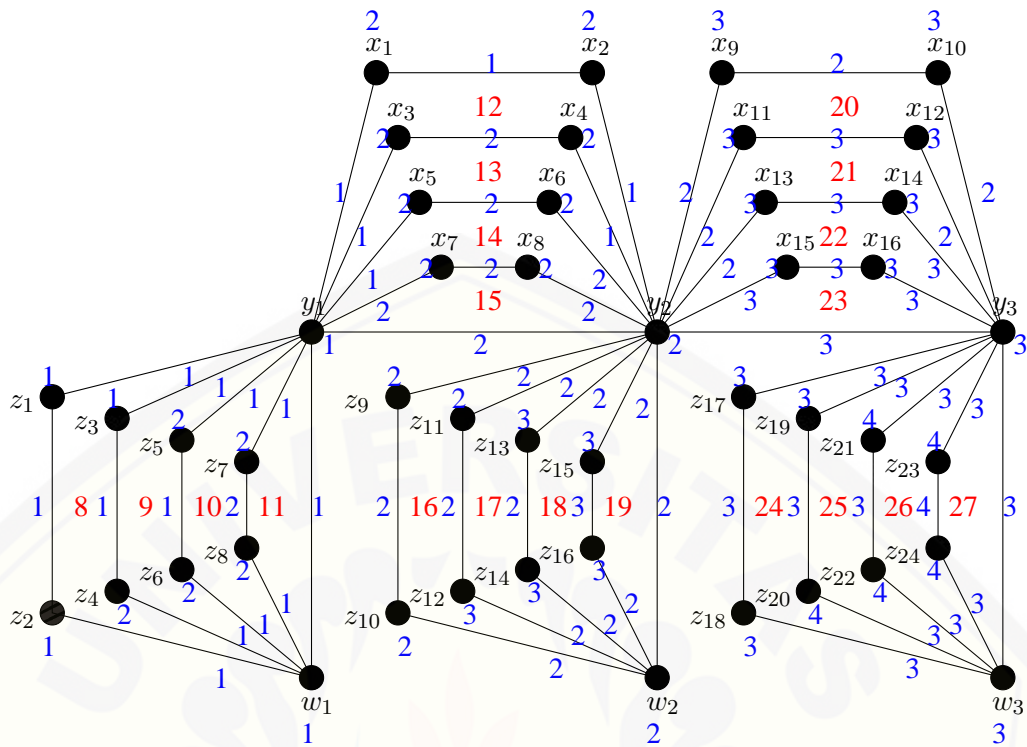
Sekarang akan ditunjukkan bahwa $tHs(P_n \dot{\succeq} B_{4,2}) \leq \lceil \frac{8n+3}{8} \rceil$. Pada pelabelan f , bobot total H adalah $W(H) = \sum_{v \in V(H)} f(v) + \sum_{e \in E(H)} f(e)$ adalah $W(H) = \{8, 9, \dots, 8 + (8n - 4)\}$ yang membentuk barisan yang berurutan. Pernyataan tersebut menunjukkan bahwa bobot H berbeda. Pada label f , minimum $tHs(P_n \dot{\succeq} B_{4,2})$ dinyatakan sebagai berikut dimana label terbesar pada $(P_n \dot{\succeq} B_{4,2})$ adalah $\lceil \frac{i-3}{4} \rceil + 1$ untuk $4 \leq i \leq 4n$ sehingga $i = 4n$

$$\begin{aligned} tHs(P_n \dot{\succeq} B_{4,2}) &\leq \lceil \frac{i-3}{4} \rceil + 1 \\ &= \lceil \frac{4n-3}{4} \rceil + 1 \\ &= \lceil \frac{4n-3}{4} + \frac{4}{4} \rceil \\ &= \lceil \frac{4n+1}{4} \rceil \\ &= \lceil \frac{8n+2}{8} \rceil \end{aligned}$$

karena n merupakan bilangan bulat positif dan $\lceil \frac{a}{b} \rceil$ dimana $a \leq b$ dan $b \neq 0$ selalu 1 maka berlaku $\lceil \frac{8n+2}{8} \rceil = \lceil \frac{8n+3}{8} \rceil$

$$\begin{aligned} tHs(P_n \dot{\succeq} B_{4,2}) &\leq \lceil \frac{8n+2}{8} \rceil \\ &= \lceil \frac{8n+3}{8} \rceil \end{aligned}$$

Dari pembuktian diatas, menunjukkan bahwa $tHs(P_n \dot{\succeq} B_{4,2}) \geq \lceil \frac{8n+3}{8} \rceil$ dan $tHs(P_n \dot{\succeq} B_{4,2}) \leq \lceil \frac{8n+3}{8} \rceil$ maka diperoleh $tHs(P_n \dot{\succeq} B_{4,2}) = \lceil \frac{8n+3}{8} \rceil$. \square



Gambar 4.12 Pelabelan Graf $tHs(P_3 \dot{\triangle} B_{4,2})$

4.2 Pembahasan

Operasi graf yang digunakan pada penelitian ini adalah operasi *total comb product* dengan graf lintasan (P_n) sebagai graf dasar. Hasil graf yang didapatkan adalah $(P_n \dot{\triangle} Bt_3)$, $(P_n \dot{\triangle} C_4)$, $(P_n \dot{\triangle} W_6)$, $(P_n \dot{\triangle} SJ_2)$, $(P_n \dot{\triangle} F_4)$, $(P_n \dot{\triangle} B_{4,2})$. Berdasarkan hasil penelitian tentang kajian mengenai nilai tHs *total H-irregularity strength* pada graf hasil operasi *total comb product*, didapatkan 6 teorema baru. Beberapa hasil pelabelan total selimut irregular pada hasil graf hasil operasi *total comb product* didapatkan nilai $|H|$ yang berbeda yaitu pada hasil operasi *total comb product* $(P_n \dot{\triangle} Bt_3)$ didapatkan $|H| = 6n - 3$, pada hasil operasi *total comb product* $(P_n \dot{\triangle} C_4)$ didapatkan $|H| = 2n - 1$, pada hasil operasi *total comb product* $(P_n \dot{\triangle} W_6)$ didapatkan $|H| = 12n - 6$, pada hasil operasi *total comb product* $(P_n \dot{\triangle} SJ_2)$

didapatkan $|H| = 4n - 2$, pada hasil operasi *total comb product* $(P_n \dot{\supseteq} F_4)$ didapatkan $|H| = 6n - 3$, pada hasil operasi *total comb product* $(P_n \dot{\supseteq} B_{4,2})$ didapatkan $|H| = 8n - 4$. Berdasarkan Lemma 2.1 nilai $|H|$ yang telah diperoleh didapatkan 6 teorema diantaranya sebagai berikut

Teorema 1 Misal G adalah graf hasil operasi *total comb product* P_n dan Bt_3 dinotasikan dengan $(P_n \dot{\supseteq} Bt_3)$ dan $H = C_3$. Maka

$$tHs(P_n \dot{\supseteq} Bt_3) = \lceil \frac{6n+2}{6} \rceil$$

Teorema 2 Misal G adalah graf hasil operasi *total comb product* P_n dan C_4 dinotasikan dengan $(P_n \dot{\supseteq} C_4)$ dan $H = C_4$. Maka

$$tHs(P_n \dot{\supseteq} C_4) = \lceil \frac{2n+6}{8} \rceil$$

Teorema 3 Misal G adalah graf hasil operasi *total comb product* P_n dan W_6 dinotasikan dengan $(P_n \dot{\supseteq} W_6)$ dan $H = C_3$. Maka

$$tHs(P_n \dot{\supseteq} W_6) = 2n$$

Teorema 4 Misal G adalah graf hasil operasi *total comb product* P_n dan SJ_2 dinotasikan dengan $(P_n \dot{\supseteq} SJ_2)$ dan $H = C_4$. Maka

$$tHs(P_n \dot{\supseteq} SJ_2) = \lceil \frac{4n+5}{8} \rceil$$

Teorema 5 Misal G adalah graf hasil operasi *total comb product* P_n dan F_4 dinotasikan dengan $(P_n \dot{\supseteq} F_4)$ dan $H = C_3$. Maka

$$tHs(P_n \dot{\supseteq} F_4) = \lceil \frac{6n+2}{6} \rceil$$

Teorema 6 Misal G adalah graf hasil operasi *total comb product* P_n dan $B_{4,2}$ dinotasikan dengan $(P_n \dot{\supseteq} B_{4,2})$ dan $H = C_4$. Maka

$$tHs(P_n \dot{\supseteq} B_{4,2}) = \lceil \frac{8n+3}{8} \rceil$$

BAB 5. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa:

- a. Kardinalitas titik dan sisi dari graf hasil operasi *total comb product* yang telah diperoleh antara lain yaitu $|V(P_n \dot{\triangle} Bt_3)| = 8n - 3$ dan $|E(P_n \dot{\triangle} Bt_3)| = 14n - 7$, $|V(P_n \dot{\triangle} C_4)| = 6n - 2$ dan $|E(P_n \dot{\triangle} C_4)| = 8n - 4$, $|V(P_n \dot{\triangle} W_6)| = 12n - 5$ dan $|E(P_n \dot{\triangle} W_6)| = 24n - 12$, $|V(P_n \dot{\triangle} SJ_2)| = 10n - 4$ dan $|E(P_n \dot{\triangle} SJ_2)| = 14n - 7$, $|V(P_n \dot{\triangle} F_4)| = 8n - 3$ dan $|E(P_n \dot{\triangle} F_4)| = 14n - 7$, $|V(P_n \dot{\triangle} B_{4,2})| = 18n - 8$ dan $|E(P_n \dot{\triangle} B_{4,2})| = 26n - 13$.
- b. Nilai ketidakteraturan total selimut *tHs* pada graf hasil operasi *total comb product* yang telah diperoleh antara lain yaitu $tHs(P_n \dot{\triangle} Bt_3) = \lceil \frac{6n+2}{6} \rceil$, $tHs(P_n \dot{\triangle} C_4) = \lceil \frac{2n+6}{8} \rceil$, $tHs(P_n \dot{\triangle} W_6) = 2n$, $tHs(P_n \dot{\triangle} SJ_2) = \lceil \frac{4n+5}{8} \rceil$, $tHs(P_n \dot{\triangle} F_4) = \lceil \frac{6n+2}{6} \rceil$, $tHs(P_n \dot{\triangle} B_{4,2}) = \lceil \frac{8n+3}{8} \rceil$.

5.2 Saran

Pembahasan mengenai pelabelan ketidakteraturan total selimut masih terbuka bagi peneliti lain untuk melanjutkan penelitian ini dan bisa juga melakukan penelitian yang sejenis dengan jenis graf yang berbeda atau operasi yang berbeda.

DAFTAR PUSTAKA

- Agustin, I.H. dan Dafik. 2017. Super (a,d)-edge antimagic total covering of total comb product of graph. In preparation.
- Agustin, I.H., Dafik, Marsidi, dan Riski E.A. 2016. On The Total H -irregularity Strength of Graphs: A new notion. *Submitted* on ICMETA 2016.
- Alishahi, M. 2011. On the dynamic coloring of graphs. *Discrete Applied Mathematics*: 159:152-156.
- Arafah, N.N., Rismawati, R., Arief, F.H. 2015. Pelabelan *Super Graceful* pada Graf *Caterpillar*. *Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Sunan Gunung Djati Bandung*, **1**(1):1-11.
- Ardiansyah, R., dan Darmaji. 2013. Bilangan Kromatik Graf Hasil Amalgamasi Dua Buah Graf. *Jurnal Sains dan Seni Pomits*, **2**(1):2337-3520.
- Baca, M., Jendrol., Miller, M. dan Ryan, J. 2007. *On Irregular Total Labellings Discreates Mathematics*. **307**(1) : 1378-1388.
- Chartrand G., Jacobson M.S., Lehel J., Oellermann O.R., Ruiz S., Saba F. 1988. Irregular Networks, *Congressus Numerantium* **64**, 187-192.
- Dafik, Slamain, F.R. Eka, dan L. Sya'diyah. 2013. Super Antimagicness of Triangular Book and Diamond Ladder Graphs. *Proceeding of International Conference on Mathematics and Its Applications (IICMA)*. 1-8.
- Dafik dan I.H. Agustin. 2017. Analysis super (a,d)-edge antimagic total of order two of some graph operations. In preparation.
- Damayanti, R.T. 2011. *Automorfisme Graf Bintang dan Graf Lintasan*. *CHAUCHY* **2**(1):35-40.
- Daoud, Salama N. 2013. *Complexity of Stacked Book Graph and Cone Graph*. *Journal of Taibah University for Science* **7** 162-172.
- Dinitz J.H., Garnick D.K., dan Gyrfas A. 1992. On the Irregularity Strength of the $m \times n$ grid. *J. Graph Theory*. **16**:355-374.

- Frieze A., Gould R.J., Karonski M., dan Pfender F. 2004. On Graph Irregularity Strength. *J. Graph Theory*. **41**:120-137.
- Gallian, J. A. 2011. A Dynamic Survey of Graph Labeling. *The Electronic Journal of Combinatorics* **18**:1-256.
- Hardiyantik, D., Hesti I.A., dan Dafik. 2015. *Super (a, d)- \mathcal{H} -Antimagic Total Covering of Connected Semi Jahangir Graph*. *CGANT UNEJ* 3-10.
- Hussen, S., Rizki E.A., Dafik, dan I.H. Agustin. 2016. On The Total H -irregularity Strength of Some Special Graph. *Submitted on ICMETA 2016*.
- Kotzig, A. dan Rosa. 1970. Magic Valuations of Finite Graphs. *Canadian Mathematical Bulletin* 13:451-461.
- Manongga, D. dan Yessica. 2013. *Matematika Diskrit*. Salatiga: Kencana Prenada Media Grup.
- Mashitah, Lioni. 2013. Defisiensi Sisi-Ajaib Super Dari Graf Kipas. *Jurusan Matematika FMIPA UNAND* **3(2)**:121-125.
- Munir, R. 2009. *Matematika Diskrit Edisi 3*. Bandung:Informatika Bandung.
- Purwanto, H., Indriani, G., dan Dayanti, E. 2006. *Matematika Diskrit*. Jakarta:PT.Ercontara Rajawali.
- Rosen,K.H. 2003. *Discrete Mathematics and Its Application (3rd ed.)*. New York : McGraw-Hill.
- Saputro,S.W.,Mardiana, N., dan Purwasih, I.A. 2013. *The Matric Dimension of Comb Product Graphs*. *Graph Theory Conference in honor of Egawa's 60th Birthday* :1-2.
- Togni O. 1997. Irregularity Strength of The Toroidal Grid. *Discrete Math.* **165/166** 609-620.
- Wardani,D.A.R. 2016. Analisis Pewarnaan Total r -dinamis pada Graf Hasil Operasi Comb Sisi. *Tesis*. Jember: Universitas Jember.