DIMENSI METRIK DENGAN *NON-ISOLATED RESOLVING SET* PADA GRAF HASIL OPERASI KORONA

TESIS

Oleh

Sih Muhni Yunika

NIM 151820101010

JURUSAN MAGISTER MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS JEMBER

2017

DIMENSI METRIK DENGAN *NON-ISOLATED RESOLVING SET* PADA GRAF HASIL OPERASI KORONA

TESIS

diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan Program Magister Matematika (S2) dan mencapai gelar Magister Sains

Oleh

Sih Muhni Yunika

NIM 151820101010

JURUSAN MAGISTER MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS JEMBER

2017

PERSEMBAHAN

Dengan menyebut nama Allah SWT yang maha pengasih dan maha penyayang, kupersembahkan sebuah kebahagiaan dalam perjalanan hidupku teriring rasa terima kasihku yang terdalam kepada :

1. Suamiku Priyo Sudarmo, S.Pd. yang telah sabar menemani dan memberikan motivasi kepadaku;
2. Ayahku Suyarni, Ibuku Bibit Binarsih, Adikku Galih Dwi Prasetyo dan Nenekku Ngilmilah, yang senantiasa mengalirkan rasa cinta dan kasih sayangnya serta doa yang tiada pernah putus yang selalu mengiringiku dalam meraih cita-cita;
3. Bapak Prof. Drs. Slamin, M.Comp.Sc., Ph.D dan Bapak Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D. selaku pembimbing tesis yang dengan sabar telah memberikan ilmu dan bimbingan selama menyelesaikan tesisku;
4. teman-teman angkatan 2015 Magister Matematika FMIPA yang telah membantuku dan menorehkan sebuah pengalaman indah yang tak terlupakan;
5. dosen Magister Matematika FMIPA Universitas Jember yang dengan sabar telah memberikan ilmunya kepadaku.

MOTTO

"Usaha tanpa do'a adalah kesombongan, dan do'a tanpa usaha adalah kebohongan."*

"Apa yang diperintahkan Rosul kepadamu maka laksanakanlah, dan apa yang dilarangnya maka tinggalkanlah."
(QS.Al-Hasyr :7)**

"Sesungguhnya Allah tidak akan mengubah keadaan suatu kaum sebelum mereka mengubah keadaan diri mereka sendiri".
(QS Ar-Ra'd:11)***

* www.motivasi-islami.com

** Departemen Agama Republik Indonesia. 2010. Al-*Qur'an* dan Terjemahannya. Jakarta.

*** Departemen Agama Republik Indonesia. 2010. Al-*Qur'an* dan Terjemahannya. Jakarta.

PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Sih Muhni Yunika

NIM : 151820101010

menyatakan dengan sesungguhnya bahwa tesis yang berjudul: "Dimensi Metrik dengan *Non-isolated Resolving Set* pada Graf Hasil Operasi Korona" adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali jika dalam pengutipan substansi disebutkan sumbernya, dan belum diajukan pada instansi manapun, serta bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa adanya tekanan dan paksaan dari pihak manapun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, Mei 2017

Yang menyatakan,

Sih Muhni Yunika

NIM. 151820101010

TESIS

DIMENSI METRIK DENGAN *NON-ISOLATED RESOLVING SET* PADA GRAF HASIL OPERASI KORONA

Oleh

Sih Muhni Yunika
NIM 151820101010

Dosen Pembimbing 1 : Prof. Drs. Slamin, M.Comp.Sc., Ph.D.
Dosen Pembimbing 2 : Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D.

PENGESAHAN

Skripsi berjudul "Dimensi Metrik dengan *Non-isolated Resolving Set* pada Graf Hasil Operasi Korona" telah diuji dan disahkan oleh Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember pada:

hari :

tanggal :

tempat : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember

Tim Penguji :

Ketua,	Sekretaris,
Prof. Drs. Slamin, M.Comp.Sc., Ph.D.	Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D.
NIP.19670420 199201 1 001	NIP.19680802 199303 1 004
Penguji I,	Penguji II,
Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si.	Prof. Drs. I Made Tirta, M.Sc., Ph.D.
NIP.19840801 200801 2 006	NIP. 19591220 198503 1 002

Mengetahui,
Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Jember

Drs. Sujito, Ph.D.
NIP. 19610204 198711 1 001

RINGKASAN

Dimensi Metrik dengan *Non-isolated Resolving Set* pada Graf Hasil Operasi Korona ; Sih Muhni Yunika, 151820101010; 2017: 82 halaman; Jurusan Magister Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Jember.

Teori graf termasuk dalam cabang ilmu matematika diskrit yang merepresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan antara objek-objek diskrit tersebut. Representasi visual dari graf tersebut adalah dengan menyatakan objek sebagai titik (*vertex*) dan hubungan antara objek sebagai sisi (*edge*). Beberapa aplikasi dari teori graf terdapat pada bidang sains, komputasi, dan rabotika.

Salah satu konsep teori graf yang dapat menyelesaikan permasalahan dalam kehidupan sehari-hari adalah dimensi metrik. Pada tahun 1975, konsep dimensi metrik diperkenalkan oleh Slater. Konsep tersebut muncul dari himpunan pembeda yang dikenal dengan istilah *locating set* (P.J Slater dalam Velazquez, 2014). Himpunan pembeda W didefinisikan sebagai himpunan titik-titk pada graf G sedemikian sehingga untuk setiap titik di G menghasilkan jarak yang berbeda terhadap setiap titik di W. Dimensi metrik adalah kardinalitas minimum dari himpunan pembeda yang dinotasikan dengan $dim(G)$ (Chartrand dalam Garijo, 2013). Kardinalitas minimum dari himpunan pembeda yang tak terisolasi pada suatu graf disebut dengan *non-isolated resolving number* yang dinotasikan dengan $nr(G)$ (Chitra dan Arumugam, 2015).

Pada penelitian ini menggunakan metode pendeteksian pola (*pattern recognition*) yaitu mencari pola untuk dilakukan konstruksi himpunan pembeda untuk mendapatkan nilai dimensi metrik sedemikian hingga didapatkan nilai kardinalitas minimum dengan koodinat titik yang berbeda. Kemudian dilakukan metode deduktif aksiomatik yaitu metode penelitian yang menggunakan prinsip-prinsip pembuktian deduktif yang berlaku dalam logika matematika dengan menggunakan aksioma atau teorema yang telah ada. Graf khusus yang digunakan adalah graf lengkap, lintasan dan lingkaran. Graf-graf khusus tersebut kemudian diop-

erasikan dengan operasi korona, yaitu lintasan korona lingkaran, lintasan korona graf lengkap, lintasan korona lintasan, graf lengkap korona lintasan, graf lengkap korona lingkaran, dan graf lengkap korona graf lengkap. Penelitian ini menghasilkan sebuah Lema dan 6 teorema, antara lain:

1. **Lema 1.** Jika G merupakan graf terhubung dengan *order* $|V(G)|$ dan H merupakan graf terhubung dengan *order* $|V(H)|$. Maka dimensi metrik dengan *non-isolated resolving set* dari $G \odot H$ adalah $nr(G \odot H) \geq |V(G)|(nr(K_1 + H))$ dengan $H \ncong K_1$.

2. **Teorema 1.** Untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 2$, dimensi metrik dengan *non-isolated resolving set* dari $K_n \odot P_m$ adalah $\mathrm{nr}(K_n \odot P_m) = n(\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1)$.

3. **Teorema 2.** Untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 2$, dimensi metrik dengan *non-isolated resolving set* dari $P_m \odot K_n$ adalah $\mathrm{nr}(P_m \odot K_n) = mn$.

4. **Teorema 3.** Untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 2$, dimensi metrik dengan *non-isolated resolving set* dari $P_n \odot P_m$ adalah $\mathrm{nr}(P_n \odot P_m) = n(\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1)$.

5. **Teorema 4.** Untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 3$, dimensi metrik dengan *non-isolated resolving set* dari $K_n \odot K_m$ adalah $\mathrm{nr}(K_n \odot K_m) = nm$.

6. **Teorema 5.** Untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 3$, dimensi metrik dengan *non-isolated resolving set* $P_n \odot C_m$ adalah

$$\mathrm{nr}(P_n \odot C_m) = \begin{cases} 3n \ , \ \text{untuk } 3 \leq m \leq 4 \\ n(\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1) \ , \ \text{untuk } m \geq 5, \ m \, \text{ganjil} \\ n\lfloor \frac{m}{2} \rfloor \ , \ \text{untuk } m \geq 5, \ m \, \text{genap} \end{cases}$$

7. **Teorema 6.** Untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 3$, dimensi metrik dengan *non-isolated resolving set* $K_n \odot C_m$ adalah

$$\mathrm{nr}(K_n \odot C_m) = \begin{cases} 3n \ , \ \text{untuk } 3 \leq m \leq 4 \\ n(\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1) \ , \ \text{untuk } m \geq 5, \ m \, \text{ganjil} \\ n(\lfloor \frac{m}{2})\rfloor \ , \ \text{untuk } m \geq 5, \ m \, \text{genap} \end{cases}$$

Berdasarkan hasil penelitian diatas, batas bawah dimensi metrik dengan *non-isolated resolving set* pada graf hasil operasi korona masih terdapat beberapa batasan yang belum ditemukan. Sehingga dalam penelitian ini diajukan masalah terbuka .

1. **Masalah terbuka 1.** Batas bawah dimensi metrik dengan *non-isolated resolving set* pada graf $G \odot H$ dengan G merupakan graf terhubung dan $H \cong K_1$.

2. **Masalah terbuka 2.** Batas bawah dimensi metrik dengan *non-isolated resolving set* pada graf $G \odot H$ dengan G merupakan graf terhubung dan H merupakan graf yang tidak terhubung.

KATA PENGANTAR

Puji syukur ke hadirat Allah Swt, atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tesis yang berjudul "Dimensi Metrik dengan *Non-isolated Resolving Set* pada Graf Hasil Operasi Korona ". Tesis ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat menyelesaikan pendidikan magister (S2) pada Jurusan Magister Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Penyusunan tesis ini tidak lepas dari bantuan berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan terima kasih kepada :

1. Drs. Sujito, Ph.D., selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember, yang telah memberikan fasilitas selama menjadi mahasiswa;
2. Dr. Alfian Futuhul Hadi, S.Si., M.Si., selaku Ketua Jurusan Magister Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember, yang telah memberikan fasilitas selama menjadi mahasiswa;
3. Prof. Drs. Slamin, M.Comp.Sc., Ph.D., selaku Dosen Pembimbing Utama, Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D., selaku Dosen Pembimbing Anggota, Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si., selaku dosen Penguji I, dan Prof. Drs. I Made Tirta, M.Sc., Ph.D., selaku dosen penguji II, yang telah meluangkan waktu, pikiran, dan perhatian selama penulisan tesis ini;
4. Prof. Drs. I Made Tirta, M.Sc., Ph.D., selaku Dosen Pembimbing Akademik yang telah membimbing penulis selama menjadi mahasiswa;
5. dosen dan karyawan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
6. semua pihak yang telah membantu terselesaikannya tesis ini.

Penulis juga menerima segala kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan tesis ini. Akhirnya penulis berharap, semoga tesis ini dapat bermanfaat.

Jember, Mei 2017

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

DAFTAR LAMBANG

G	=	Graf G
$G(V, E)$	=	Sebarang graf tak berarah dengan V adalah himpunan tak kosong dari semua titik dan E adalah himpunan sisi
v_n	=	Titik ke-n pada suatu graf
e_n	=	Sisi ke-n dari suatu graf
$\|V(G)\|$	=	Banyaknya titik dari graf G yang disebut *order*
$\|E(G)\|$	=	Banyaknya sisi dari graf G yang disebut ukuran (*size*)
W	=	himpunan pembeda
$dim(G)$	=	kardinalitas minimum dari himpunan pembeda
$nr(G)$	=	kardinalitas minimum dari himpunan pembeda dengan himpunan pembedanya terhubung
$\odot$	=	operasi korona pada graf
$+$	=	operasi join pada graf
$dist(u, v)$	=	jarak dari titik u ke titik v
$diam(G)$	=	jarak maksimum dari sebarang dua titik di graf G
$\delta(G)$	=	derajat terkecil di graf G
$\Delta(G)$	=	derajat terbesar di graf G
$\cong$	=	isomorfis
P_n	=	graf lintasan dengan *order* n
C_n	=	graf lingkaran dengan *order* n
K_n	=	graf lengkap dengan *order* n
S_n	=	graf bintang dengan *order* n

BAB 1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Teori graf termasuk dalam cabang ilmu matematika diskrit yang merepresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan antara objek-objek diskrit tersebut. Representasi visual dari graf tersebut adalah dengan menyatakan objek sebagai titik (*vertex*) dan hubungan antara objek sebagai sisi (*edge*). Graf adalah suatu himpunan titik dan sisi yang merupakan representasi dari titik dan garis (Chartrand, 1993). Secara umum, graf merupakan pasangan himpunan (V, E) dimana V adalah himpunan tidak kosong dari elemen yang disebut titik (*vertex*), dan E adalah himpunan (boleh kosong) dari pasangan tidak terurut dua titik (v_1, v_2) dimana $v_1, v_2 \in V$, yang disebut sisi (*edges*).

Teori graf pertama kali dikenalkan oleh seorang matematikawan Swiss yang bernama Leonard Euler pada tahun 1736 untuk menyelesaikan masalah jembatan Konigsberg. Pada jembatan Konigsberg ini apakah mungkin bila seseorang berjalan dimulai dari sebarang pulau dan melewati semua jembatan masing-masing tepat satu kali lalu kembali ke tempat semula. Dalam hal ini lokasi sepanjang kota yang dihubungkan oleh jembatan merupakan representasi titik, sedangkan jembatan yang menghubungkan antar lokasi merupakan representasi sisi. Sejak saat itulah teori graf berkembang untuk memecahkan masalah dalam kehidupan sehari-hari, seperti masalah pada jaringan komputer, navigasi robot, pencarian rute terpendek, permainan puzzle dan lain sebagainya.

Salah satu konsep teori graf yang dapat menyelesaikan permasalahan dalam kehidupan sehari-hari adalah dimensi metrik. Pada tahun 1975, konsep dimensi metrik diperkenalkan oleh Slater. Konsep tersebut muncul dari himpunan pembeda yang dikenal dengan istilah *locating set* (P.J Slater dalam Velazquez, 2014). Himpunan pembeda W didefinisikan sebagai himpunan titik-titk pada graf G sedemikian sehingga untuk setiap titik di G menghasilkan jarak yang berbeda terhadap setiap titik di W. Dimensi metrik adalah kardinalitas minimum dari himpunan pembeda yang dinotasikan dengan $dim(G)$ (Chartrand dalam Garijo, 2013). Kardinalitas minimum dari himpunan pembeda yang tak terisolasi pada suatu graf disebut dengan *non-isolated resolving number* yang dinotasikan dengan $nr(G)$ (Chitra dan Arumugam, 2015).

Penelitian metrik dimensi sebelumnya pernah dilakukan oleh Iswandi, dkk (2011) meneliti tentang *On the metric dimension of corona profuct of graph* yaitu $dim(G \odot H) = |G|(K_1 + H)$ dengan graf G merupakan graf terhubung $dan|H| \geq 2$. Pada tahun 2015 Susilowati, dkk melakukan penelitian *The similarity of metric dimension and local metric dimension of rooted product graph* dengan salah satu hasilnya adalah $dim_l(G) = dim(G) = n - 1$ jika dan hanya jika $G = K_n$ dan $dim_l(G) = dim(G) = 1$ jika dan hanya jika $G = P_n$. Pada tahun 2016 Marsidi, dkk melakukan penelitian tentang *On the local metrik dimension of line graph of special graph* dengan salah satu hasilnya adalah $ldim(L(P_n)) = 1$ untuk $n \geq 2$, graf khusus pada penelitian Marsidi meliputi graf lintasan, lingkaran, bintang, dan roda. Pada tahun 2017 Dafik, dkk melakukan penelitian tentang *On non-isolated resolving number some graph operations.* Penelitian yang dilakukan oleh Dafik menghasilkan batas bawah dan batas atas dari metrik dimensi dengan *non-isolated resolving number* pada operasi $shack(G; v_0; m)$, $G \trianglerighteq H$, dan $G + H$.

Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan sebelumnya, belum ada penelitian tentang matrik dimensi dengan *non-isolated resolving set* pada graf hasil operasi korona. Oleh karena itu, pada penelitian ini akan mengembangkan matrik dimensi dengan *non-isolated resolving set* pada graf hasil operasi korona. Graf hasil operasi korona yang disimbolkan dengan $G \odot H$ merupakan graf hasil salinan sebanyak n dari graf $H_1, H_2, \cdots, H_n$ dari H dan titik i dari G terhubung di titik H_i dengan $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$. Sehingga, penulis memilih judul "Dimensi Metrik dengan *Non-Isotated Resolving Set* pada Graf Hasil Operasai Korona".

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka dapat dirumuskan masalah dalam penelitian ini sebagai berikut:

a. berapa dimensi metrik dengan *non-isolated resolving set* pada graf hasil operasai korona?

b. berapa dimensi metrik dengan *non-isolated resolving set* pada beberapa graf khusus yang dioperasaikan dengan operasi korona?

1.3 Batasan Masalah

Untuk menghindari meluasnya permasalahan yang akan dipecahkan, maka dalam penelitian ini masalahnya dibatasi hanya pada :

a. graf khusus yang digunakan dalam penelitian ini adalah graf lingkaran C_n,lintasan P_n dan graf lengkap K_n;
b. operasi graf yang digunakan dalam penelitian ini adalah operasi korona .

1.4 Tujuan Penelitian

Sesuai dengan rumusan masalah dan latar belakang masalah, maka tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

a. menentukan dimensi metrik dengan *non-isolated resolving set* pada graf hasil operasai korona ;
b. menentukan dimensi metrik dengan *non-isolated resolving set* pada beberapa graf khusus yang dioperasaikan dengan operasi korona.

1.5 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat yang diharapkan dari hasil penelitian ini adalah sebagai berikut:

a. menambah wawasan baru dalam bidang teori graf, khususnya mengenai teori dimensi metrik dengan *non-isolated resolving set*;
b. memberikan motivasi pada peneliti lain untuk meneliti dimensi metrik dengan *non-isolated resolving set* pada operasi graf lainnya;
c. hasil penelitian ini diharapkan dapat digunakan sebagai pengembangan ilmu dan aplikasi dalam masalah dimensi metrik.

1.6 Kebaruan Penelitian

Kebaruan yang didapatkan dari penelitian ini adalah:

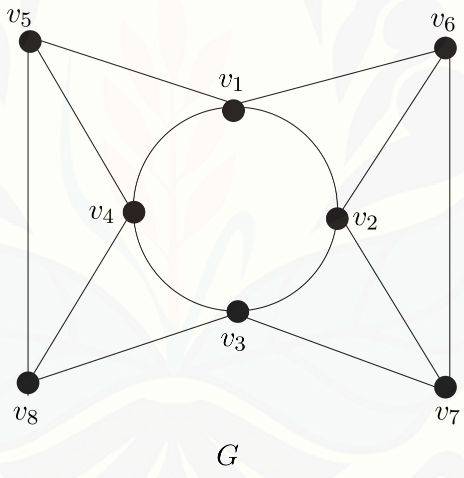
a. Dimensi metrik dengan *non-isolated resolving set* yang dikaji sementara ini adalah dimensi metrik dengan *non-isolated resolving set* pada $shack(G, v_0, m)$, $G + H$ dan $G \trianglerighteq H$. Sedangkan untuk dimensi metrik dengan *non-isolated resolving set* pada $G \odot H$ belum pernah dikaji ;

b. graf yang akan digunakan adalah beberapa graf khusus yang akan dioperasikan dengan operasi korona.

BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Terminologi Dasar Graf

Graf G adalah pasangan himpunan (V, E) dimana V adalah himpunan tidak kosong dari elemen yang disebut titik (*vertex*), dan E adalah himpunan (boleh kosong) dari pasangan tidak terurut dua titik (v_1, v_2) dimana $v_1, v_2 \in V$, yang disebut sisi (*edges*). V disebut himpunan titik dari G, dan E disebut himpunan sisi dari G). Seringkali kita menuliskan $V(G)$ adalah himpunan titik dari graf G dan $E(G)$ adalah himpunan sisi dari graf G. Jadi, sebuah graf dimungkinkan tidak mempunyai sisi satu buah pun, tetapi titiknya harus ada, minimal satu (Hartsfield dan Ringel, 1994). Contoh graf dapat dilihat pada Gambar 2.1.



Gambar 2.1 Contoh Graf Sederhana

Suatu graf dengan p buah titik dan q buah sisi ditulis dengan $G(p, q)$. Iswadi (2011) menyatakan bahwa banyaknya titik dari sebuah graf G disebut *order* dari G yang dinotasikan dengan p atau $|V(G)|$, sedangkan banyaknya sisi dari sebuah graf G disebut *size* dari G yang dinotasikan dengan q atau $|E(G)|$. Pada gambar 2.1, G adalah graf dengan $|V(G)| = 8$ dan $|E(G)| = 14$. Sebuah sisi dinamakan *loop* jika sisi tersebut berawal dan berakhir pada titik yang sama. Dalam sebuah graf, sebuah sisi dinamakan sisi ganda (*parallel*) apabila terdapat lebih dari satu sisi yang menghubungkan dua titik.

Misal u dan v adalah titik pada graf G. titik u pada graf G dikatakan bertetangga (*adjacent*) pada v, jika terdapat sisi e diantara u dan v ditulis $e = uv$. Dengan kata lain u dan v bersisian (*incident*) dengan sisi e. Sebagai contoh pada Gambar 2.1 ditunjukkan bahwa titik v_1 bertetangga dengan titik v_2, v_4, v_5 dan v_6, sedangkan titik v_1 bersisian dengan sisi v_1v_2, v_1v_4, v_1v_5 dan v_1v_6. Jarak dari titik u ke titik v dinotasikan dengan $dist(u, v)$ adalah panjang lintasan terpendek dari titik u ke titik v. Diameter dari sebuah graf G adalah jarak maksimum dari sebarang dua titik yang dinotasikan dengan diam $G = max\{e(v); v \in V\}$ (Siddiqui dan Imran, 2014).

Derajat (*degree*) sebuah titik v pada graf G adalah banyaknya sisi yang bersisian (*incident*) pada v, dengan kata lain jumlah sisi yang memuat v sebagai titik ujung. Titik dengan derajad nol disebut titik terisolasi (*isolated vertx*). Titik yang mempunyai derajat satu disebut titik akhir (*end vertex*) atau daun (*leaf*). Jika semua titik pada graf G mempunyai derajat yang sama d maka dikatakan *graf regular d*. Derajat suatu titik dibagi menjadi dua yaitu derajat terkecil dan derajat terbesar. Derajat terkecil yang dinotasikan dengan $\delta(G)$ adalah banyaknya minimal sisi yang *incident* pada titik v di graf G. Sedangkan derajat terbesar yang dinotasikan dengan $\Delta(G)$ adalah banyaknya maksimal sisi yang incident pada titik v di graf G (Hartsfield dan Ringel, 1994). Sebagai Contoh pada Gambar 2.1 memiliki $\delta(G) = 3$ dan $\Delta(G) = 4$

2.2 Graf - graf Khusus

Graf khusus adalah sebuah graf yang memiliki karakter dan keunikan tertentu. Terdapat beberapa graf khusus, diantaranya: graf lintasan, graf lingkaran, graf lengkap, graf tumpukan buku, graf bintang dan masih banyak graf lainnya.

a. Graf Lintasan

   Graf lintasan dinotasikan dengan P_n merupakan graf dengan barisan berselangseling antara titik dan sisi yang berbentuk $v_0, e_1, v_1, e_2, \cdots, v_{n-1}, e_n, v_n$ (Harsya, et al, 2014). Himpunan titik $V(P_n) = \{u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n\}$ dan himpunan sisi $E(P_n) = \{u_1u_2,\ u_2u_3, \ldots, u_{n-1}u_n\}$. Contoh graf lintasan dapat dilihat pada Gambar 2.2 (a).

b. Graf Bintang

Graf bintang (*star graph*) dinotasikan dengan S_n, adalah suatu graf terhubung yang mem- punyai satu titik berderajat $n-1$ yang disebut pusat dan $n-1$ titik berderajat satu yang bertetangga dengan titik pusat. Himpunan titik dan sisi pada S_n didefinisikan sebagai $V(S_n) = \{x\} \cup \{x_j; 1 \leq j \leq n\}$ dan $E(S_n) = \{xx_j; 1 \leq j \leq n\}$ sehingga jumlah titik dan sisi pada S_n yaitu $|V(S_n)| = n$ dan $|E(Sn)| = n-1$. Contoh graf bintang dapat dilihat pada Gambar 2.2 (b).

c. Graf Lingkaran

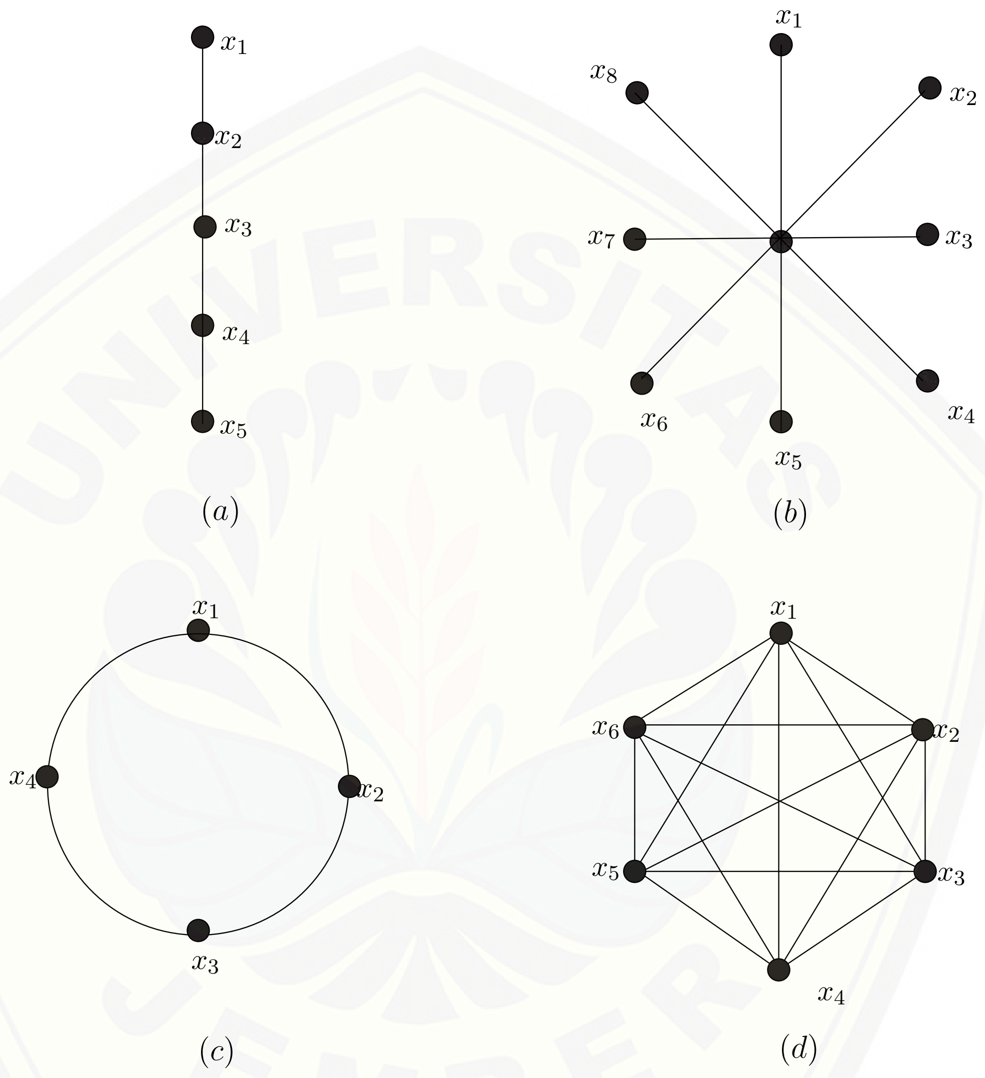
Graf lingkaran (*cycle graph*) dinotasikan dengan C_n dimana $n \geq 3$, merupakan graf yang memiliki himpunan titik $V(C_n) = V(P_n)$ dan himpunan sisi $E(C_n) = E(P_n) \cup \{u_nu_1\}$ (Harsya, et al, 2014). Contoh graf lingkaran dapat dilihat pada Gambar 2.2 (c).

d. Graf Lengkap

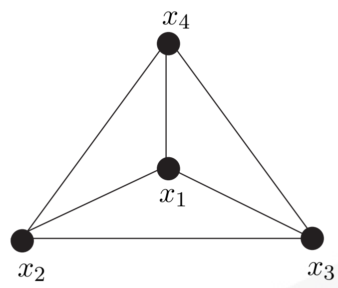
Graf lengkap (*complete graph*) adalah graf yang setiap titiknya terhubung dengan semua titik yang lain dengan hanya satu sisi (Wibisono, 2008:128). Graf lengkap dengan n buah titik dilambangkan dengan K_n. Dengan demikian, himpunan titik $V(K_n) = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ dan himpunan sisinya $E(K_n) = \{u_nu_1\}$. Pada K_n, $|V(K_n)| = n$ dan $|E(K_n)| = \frac{n(n-1)}{2}$. Contoh graf lengkap dapat dilihat pada Gambar 2.2 (d).

2.3 Matrik Ketetanggaan

Misal $V(G) = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ adalah himpunan titik pada graf G. Matriks ketetanggaan (*adjacency matrix*) graf G adalah matriks M berukuran $n \times n$ dengan entri $M_ij = 1$ untuk $v_iv_j \in E(G)$ dan $M_ij = 0$ untuk v_iv_j bukan elemen dari $E(G)$. Contoh graf dengan matrik ketetanggaannya dapat dilihat pada Gambar 2.3.



Gambar 2.2 (a) Graf P_5, (b) Graf S_8, (c) Graf C_4, (d) Graf K_6



$$M = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Gambar 2.3 Contoh graf dengan matrik ketetanggaannya

2.4 Keisomorfisan Graf

Dua graf G_1 dan G_2 dikatakan isomorfis jika ada suatu fungsi $\phi = V(G) \longrightarrow V(G)$ sedemikian hingga $uv \in E(G_1) \iff \phi(u)\phi(v) \in E(G_2)$. Fungsi ϕ dinamakan sebuah fungsi isomorfis. Jika dua graf G_1 dan G_2 isomorfis, maka dituliskan $G_1 \cong G_2$. Contoh graf isomorfis dapat dilihat pada Gambar 2.4.

2.5 Operasi Graf

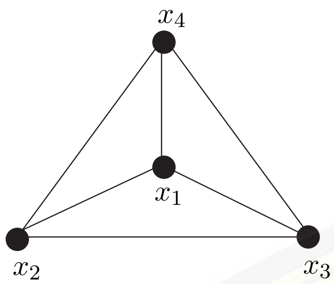
Operasi graf merupakan salah satu teknik mendapatkan suatu jenis graf baru dengan cara melakukan operasi terhadap dua atau lebih graf. Beberapa operasi graf, diantaranya :

a. Operasi Korona

   Misalkan G merupakan sebuah graf dengan $V|G| = n$ dan H merupakan sebuah graf dengan $V|H| \geq 2$. Sebuah graf G korona H didefinisikan sebagai graf hasil salinan sebanyak n dari graf $H_1, H_2, \cdots, H_n$ dari H dan titik i dari G terhubung di titik H_i dengan $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$. Graf hasil korona di simbulkan dengan $G \odot H$ (Yero, et al,2011).

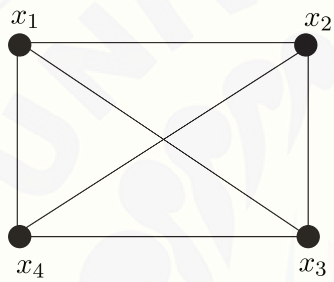
b. Operasi Join

   Graph hasil operasi join dinotasikan dengan $G + H$ merupakan sebuah graf yang diperoleh dari mengambil satu salinan di G dan satu salinan di H dimana setiap titik di G terhubung di H (Kuziak, et al , 2013). Graf $G + H$ adalah graf dengan $V(G + H) = V(G) \cup V(H)$ dan $E(G + H) = E(G) \cup$



$$A = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \atop \left[\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

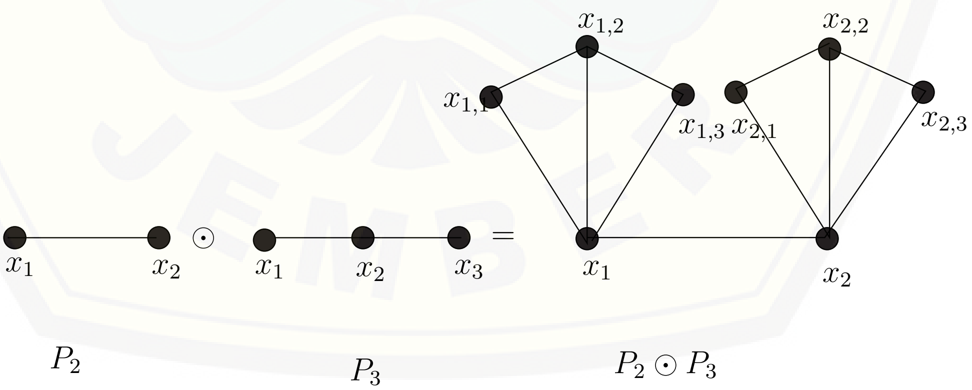
G_1



$$B = \begin{array}{c|cccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \hline x_1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ x_2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ x_3 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ x_4 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

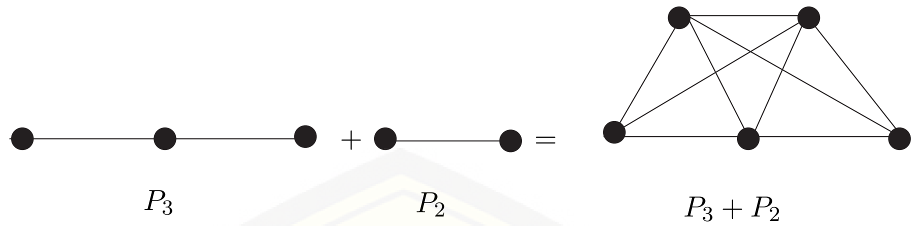
G_2

Gambar 2.4 Contoh graf $G_1 \cong G_2$



Gambar 2.5 Contoh graf hasil operasi korona $P_2 \odot P_3$

$E(H) \cup xy|x \in V(G), y \in V(H)$. Contoh operasi joint dapat dilihat pada Gambar 2.6



Gambar 2.6 Contoh graf hasil operasi jion $P_3 + P_2$

2.6 Dimensi Metrik dengan *Non-Isolated Resolving Set*

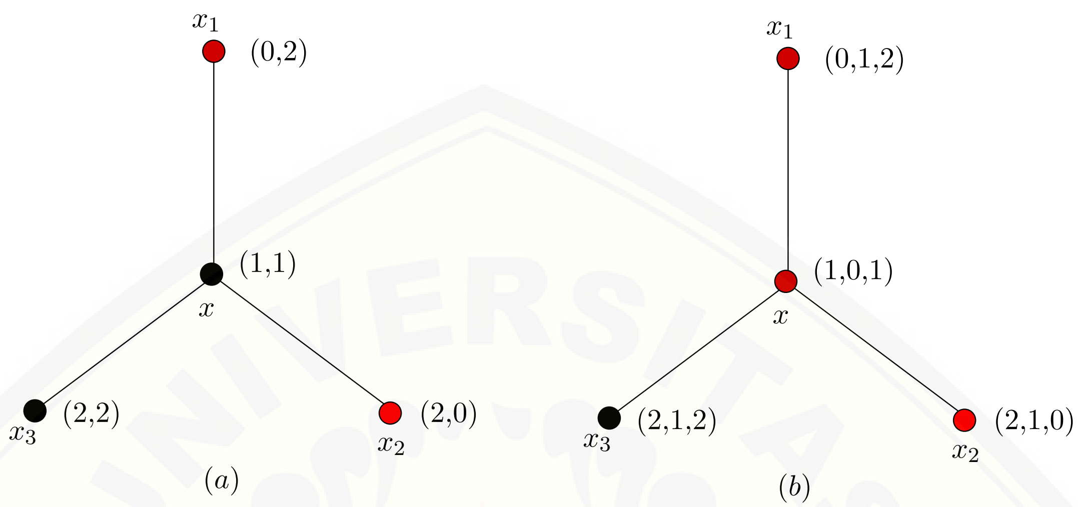
Menurut Harrary (dalam Dafik 2017), jarak pada graf terhubung G dengan titik u dan v, jarak $d(u,v)$ adalah panjang lintasan terpendek antara u dan v di G. Untuk himpunan terurut $W = \{w_1, w_2, w_3, ..., w_k\}$ dari himpunan titik di graf terhubung G dan sebuah titik v di G,k-tuple terurut $r(v|W) = (d(v,w_1), d(v,w_2), \ldots, (v,w_k))$ merupakan koordinat metrik dari v terhadap W. Himpunan W disebut himpunan pembeda untuk G jika setiap titik pada G memiliki koordinat titik yang berbeda. Minimum kardinalitas dari himpunan pembeda atau basis dari G disebut dimensi metrik yang dinotasikan dengan $\dim(G)$ (Harrary dan Melter dalam Iswandi, et al, 2010) .

Sebuah himpunan pembeda W pada graf G dikatakan himpunan pembeda tak terisolasi (*non-isolated resolving set*) jika subgraf dari W diinduksi oleh titik tak terisolasi. Kardinalitas minimum dari himpunan pembeda tak terisolasi pada suatu graf disebut *non-isolated resolving number* dan dinotasikan dengan $nr(G)$ (Chitra dan Amurugam, 2015). Contoh dari dimensi metrik dan *non-isolated resolving number* dapat dilihat pada gambar 2.7.

Gambar 2.7 (a) merupakan contoh dari dimensi metrik yang memiliki $W = \{x_1, x_2\}$ dimana himpunan pembeda W tidak terhubung dan berbeda, sehingga $dim(G) = 2$. Titik berwarna merah sebagai $\in W$. Koordinat setiap titik $x_1, x_2 \in S_3$ terhadap W yaitu :

$r(x|W) \;= (1, 1)$

$r(x_1|W) = (0, 2)$
$r(x_2|W) = (2, 0)$
$r(x_3|W) = (2, 2)$



Gambar 2.7 (a) Graf S_3 yang mempunyai $dim(S_3) = 2$ dan (b) Graf S_3 mempunyai $nr(S_3) = 3$

Gambar 2.7 (b) merupakan contoh dari dimensi metrik dengan *nin isolated resolving number* yang memiliki $W = \{x, x_1, x_2\}$ dimana himpunan pembeda W terhubung dan berbeda, sehingga $nr(G) = 3$. Titik berwarna merah sebagai himpunan pembeda. Koordinat setiap titik $x, x_1, x_2 \in S_3$ terhadap W yaitu :

$r(x|W) = (1, 0, 1)$
$r(x_1|W) = (0, 1, 2)$
$r(x_2|W) = (2, 1, 0)$
$r(x_3|W) = (2, 1, 2)$

$\Diamond$ **Observasi 2.6.1.** *Misalkan dim(G) dan nr(G) adalah nilai dimensi metrik dan non-isolated resolving set pada graf terhubung G, maka nilai nr(G)≥dim(G).*

Bukti. Nilai $dim(G)$ merupakan kardinalitas minimum himpunan pembeda pada G. Sedangkan $nr(G)$ merupakan himpunan pembeda minimum ($dim(G)$) dengan syarat semua himpunan pembedanya harus saling terhubung. Sehingga syarat dari $nr(G)$ lebih kompleks dari $dim(G)$, dengan demikian $nr(G) \geq dim(G)$.

Lemma 2.6.1. *Untuk setiap titik u anggota himpunan pembeda W pasti memiliki representasi yang berbeda terhadap W.*

Bukti. Misalkan terdapat sebuah graf terhubung G dengan himpunan titik $V(G) = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ dan himpunan pembeda $Z = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ jika dilakukan analisis jarak setiap titik anggota pada himpunan pembeda maka diperoleh $r(u_1|W) = (0, p_2, p_3, p_4, \cdots, p_n)$, $r(u_2|W) = (p_1, 0, p_3, p_4 \cdots, p_n)$, $r(u_3|W) = (p_1, p_2, 0, p_4 \cdots, p_n)$, dan seterusnya pada $r(u_n|W) = (p_1, p_2, p_3, \cdots, 0)$. Sehingga representasi titik u anggota himpunan pembeda W memiliki representasi yang berbeda. □

Telah dilakukan penelitian sebelumnya mengenai dimensi metrik pada graf hasil operasi korona yang menghasilkan lemma dan teorema sebagai berikut:

Lemma 2.6.2. *(Iswandi, et al, 2011) Misalkan G merupakan graf terhubung dengan order n dan H merupakan graf yang mempunyai order lebih besar sama dengan 2.*

i) jika S adalah himpunan pembeda dari $G \odot H$ maka $V(H_i) \cap S \cdot \neq \varnothing$ untuk setiap $i \in \{1, ..., n\}$

ii) Jika B adalah basis dari $G \odot H$ maka $V(G) \cap B = \varnothing$

♢ **Teorema 2.6.1.** *(Iswandi, et al, 2011) Misalkan G merupakan graf terhubung dan H merupakan graf yang mempunyai order lebih besar sama dengan 2. Maka*

$$dim(G \odot H) = \begin{cases} |G|dim(H)\ , & \text{jika } H \text{ mengandung titik dominan} \\ |G|dim(K_1 + H), & \text{lainnya} \end{cases}$$

2.7 Fungsi Floor dan Ceiling

Fungsi flooring $f : R \to Z$, dimana $f(x)$ adalah bilangan bulat terbesar yang kurang dari atau sama dengan x, dinotasikan dengan $f(x) = \lfloor x \rfloor$. Sedangkan fungsi ceiling $f : R \to Z$, dimana $f(x)$ adalah bilangan bulat terkecil yang lebih dari atau sama dengan x, dinotasikan dengan $f(x) = \lceil x \rceil$. Berikut ini merukapan sifat-sifat dari fungsi flooring dan ceiling:

1. $\lfloor x \rfloor = n$ bila $n \leq x \leq n + 1$

2. $\lceil x \rceil = n$ bila $n - 1 < x < n$

3. $\lfloor x \rfloor = n$ bila $x - 1 < n < x$

4. $\lceil x \rceil = n$ bila $x \leq n \leq x + 1$

5. $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil < x + 1$

6. $\lceil -x \rceil = -\lfloor x \rfloor$

7. $\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil$

8. $\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$

9. $\lceil x + n \rceil = \lfloor x \rfloor + n$

2.8 Hasil Penelitian Dimensi Metrik dan *Non-isolated Resolving Number*

Pada bagian ini disajikan beberapa rangkuman terkait dimensi metrik dan *non-isolated resolving number* yang dapat digunakan sebagai rujukan. Beberapa hasil penelitian tersebut diantaranya dapat dilihat pada tabel 2.1.

Tabel 2.1 Hasil Dimensi Metrik dan *Non-isolated Resolving Number* dari Penelitian Terdahulu

Graf	Hasil	Keterangan
Graf P_n	$dim(P_n) = 1$; $n \geq 2$	Chartrand, et al, 2000
Graf K_n	$dim(K_n) = n - 1$; $n \geq 2$	Chartrand, et al, 2000
Graf $P_m \odot K_n$	$dim(P_m \odot K_n) = m(n-1)$; $m \geq 2$ dan $n \geq 2$	Iswandi, et al, 2011
Graf $P_m \odot C_n$	$dim(P_m \odot C_n) = m\lfloor \frac{2m+2}{5} \rfloor$; $m \geq 2$ dan $n \geq 7$	Iswandi, et al, 2011
Graf $P_m \odot S_n$	$dim(P_m \odot S_n) = mn$; $m \geq 2$ dan $n \geq 2$	Iswandi, et,al 2011

Graf	Hasil	Keterangan
Graf $C_{m,n}$	$dim(C_{m,n}) = m(n-1)$; $m \geq 1$ dan $n \geq 2$	Permana dan Darmaji. 2012
Graf $F_{m,n}$	$dim(F_{m,n}) = m(n-1)$; $m \geq 2$ dan $n \geq 2$	Permana dan Darmaji. 2012
Graf $B_{m,n}$	$dim(B_{m,n}) = m(n-2)$; $m \geq 2$ dan $n \geq 2$	Permana dan Darmaji. 2012
Graf P_n	$\text{nr}(P_n) = 1$; $n \geq 2$	Chitra dan Arumugam. 2015
Graf K_n	$\text{nr}(K_n) = n-1$; $n \geq 3$	Chitra dan Arumugam. 2015
Graf $K_{m,n}$	$\text{nr}(K_{m,n}) = m+n-2$; $m \geq 2$ dan $n \geq 2$	Chitra dan Arumugam. 2015
Graf $C_n \square K_2$	$\text{nr}(C_n \square K_2) = 3$; $n \geq 4$	Chitra dan Arumugam. 2015
Graf $C_n \trianglerighteq K_m$	$\text{nr}(C_n \trianglerighteq K_m) = n(m-2)-1$; $m \geq 3$ dan $n \geq 3$	Dafik, et al, 2017
Graf $P_n + C_m$	$\text{nr}(P_n + C_m) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$; $m \geq 7$ dan $n \geq 3$	Dafik, et al, 2017

BAB 3. METODE PENELITIAN

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode pendeteksian pola (*pattern recognition*) yaitu mencari pola untuk dilakukan konstruksi himpunan pembeda untuk mendapatkan nilai dimensi metrik sedemikian hingga didapatkan nilai kardinalitas minimum dengan koodinat titik yang berbeda. Kemudian dilakukan metode deduktif aksiomatik yaitu metode penelitian yang menggunakan prinsip-prinsip pembuktian deduktif yang berlaku dalam logika matematika dengan menggunakan aksioma atau teorema yang telah ada.

3.1 Data Penelitian

Data dalam penelitian ini adalah data sekunder yaitu berupa graf-graf khusus antara lain graf lengkap, lintasan, dan lingkaran.

3.2 Rancangan Penelitian

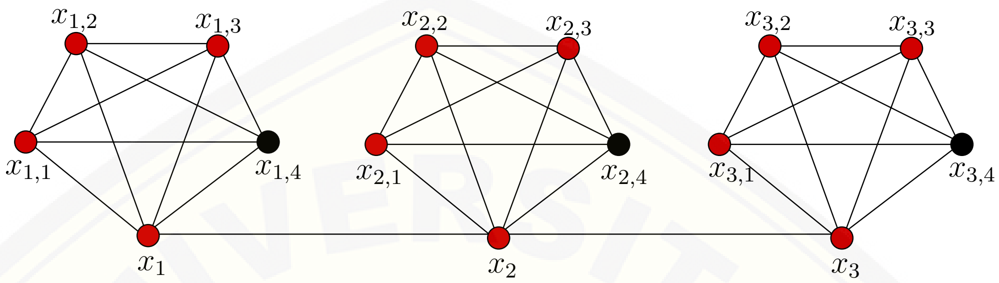
Rancangan penelitian untuk dimensi metrik dengan *non-isolated resolving set* pada graf hasil operasi korona digambarkan dalam bagan yang diilustrasikan oleh Gambar 3.2. Uraian dari rancangan penelitian ini adalah sebagai berikut :

a. menentukan graf-graf khusus sebagai objek penelitian;
b. menerapkan operasi korona pada graf-graf khusus yang telah ditentukan;
c. menentukan kardinalitas graf-graf hasil operasi korona dengan cara melihat karakteristik dari graf-graf hasil operasi korona;
d. menentukan dimensi metrik dengan *non-isolated resolving set* pada graf-graf hasil operasi korona;
e. melakukan konstruksi terhadap titik koordinat dari dimensi metrik dengan *non-isolated resolving set*
f. menentukan fungsi representasi titik terhadap himpunan pembeda pada graf yang diteliti;

g. menentukan teorema hasil penelitian dari analisis dimensi metrik dengan *non-isolated resolving set* pada graf hasil operasi korona.

3.3 Observasi Awal

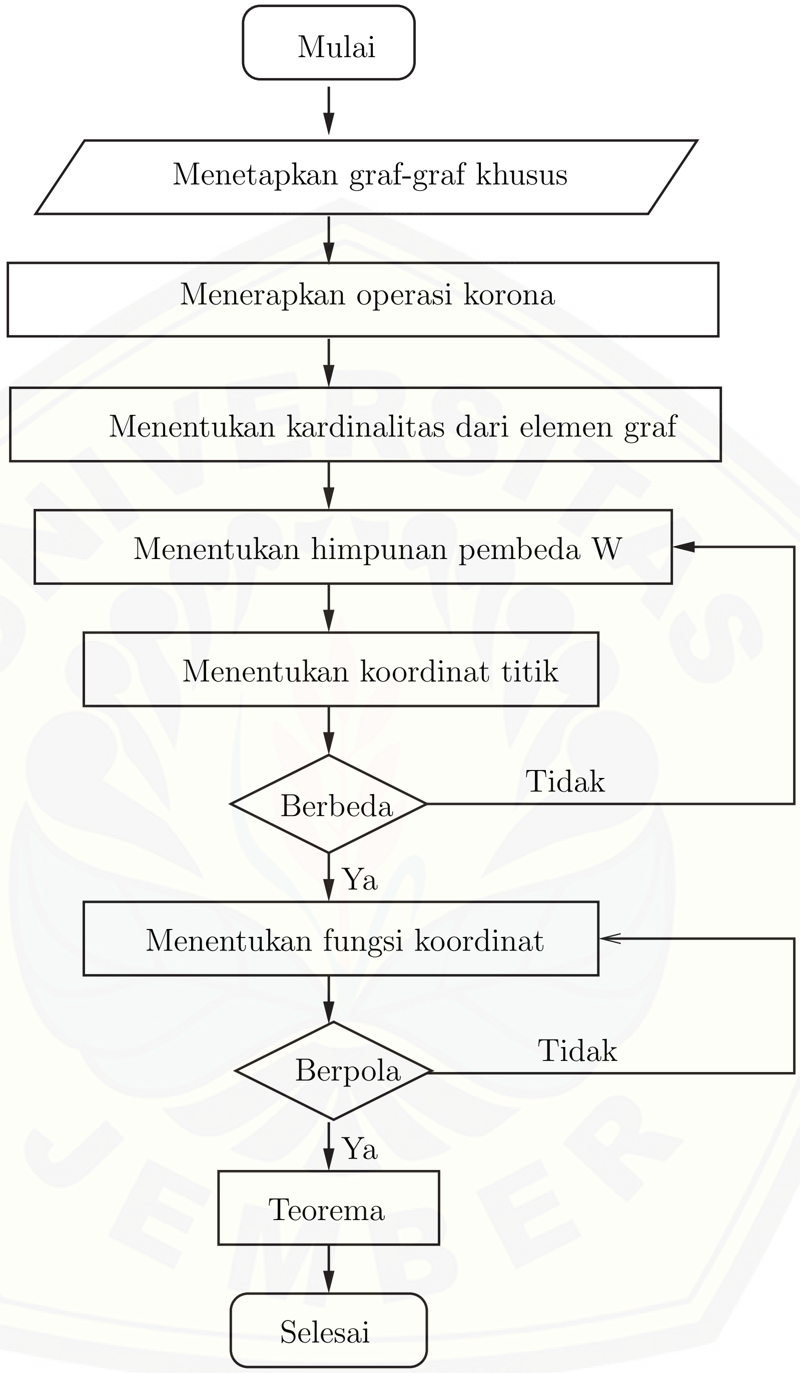
Penelitian awal mendapatkan hasil sebagai berikut:



Gambar 3.1 Contoh $nr(P_3 \odot K_4) = 12$, titik berwarna merah merupakan elemen dari W

Hasil perhitungan dimensi metrik dengan *non - isolated resolving set* pada graf $P_m \odot K_n$ adalah $nr(P_m \odot K_n) = mn$ untuk $m \geq 2$ dan $n \geq 3$. Dari gambar 3.1 didapat $nr(P_3 \odot K_4) = 12$ dengan himpunan pembeda $W = \{x_j, x_{i,j}; 1 \leq j \leq m; 1 \leq i \leq n-1\}$ maka diperoleh representasi titik $P_3 \odot K_4$ terhadap W sebagai berikut:

$r(x_1|W) = (0,1,1,1,1,2,2,2,2,3,3,3)$ $\quad r(x_{2,2}|W) = (2,3,3,3,1,1,0,1,2,3,3,3)$
$r(x_2|W) = (1,2,2,2,0,1,1,1,1,2,2,2)$ $\quad r(x_{2,3}|W) = (2,3,3,3,1,1,1,0,2,3,3,3)$
$r(x_3|W) = (2,3,3,3,1,2,2,2,0,1,1,1)$ $\quad r(x_{2,4}|W) = (2,3,3,3,1,1,1,1,2,3,3,3)$
$r(x_{1,1}|W) = (1,0,1,1,2,3,3,3,3,4,4,4)$ $\quad r(x_{3,1}|W) = (3,4,4,4,2,3,3,3,1,0,1,1)$
$r(x_{1,2}|W) = (1,1,0,1,2,3,3,3,3,4,4,4)$ $\quad r(x_{3,2}|W) = (3,4,4,4,2,3,3,3,1,1,0,1)$
$r(x_{1,3}|W) = (1,1,1,0,2,3,3,3,3,4,4,4)$ $\quad r(x_{3,3}|W) = (3,4,4,4,2,3,3,3,1,1,1,0)$
$r(x_{1,4}|W) = (1,1,1,1,2,3,3,3,3,4,4,4)$ $\quad r(x_{3,4}|W) = (3,4,4,4,2,3,3,3,1,1,1,1)$
$r(x_{2,1}|W) = (2,3,3,3,1,0,1,1,2,3,3,3)$



Gambar 3.2 Rancangan Penelitian

BAB 5. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dari pembahasan pada bab sebelumnya dapat disimpulkan bahwa didapatkan teorema batas bawah dimensi metrik dengan non-isolated resolving set pada graf hasil operasi korona dari graf G dan graf H yaitu $nr(G \odot H) \geq |V(G)|(nr(K_1 + H))$ dengan $H \ncong K_1$. Selain itu didapatkan juga beberapa teorema dari beberapa graf khusus yang dioperasikan dengan operasi korona yaitu graf lengkap dan lintasan yang mempunyai $nr(K_n \odot P_m) = n(\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1)$ dimana $n \geq 3$ dan $m \geq 2$, lintasan dan graf lengkap yang mempunyai $nr(P_m \odot K_n) = mn$ dimana $n \geq 3$ dan $m \geq 2$, lintasan dan lintasan yang mempunyai $nr(P_n \odot P_m) = n(\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1)$ dimana $n \geq 2$ dan $m \geq 2$, graf lengkap dan graf lengkap yang mempunyai $nr(K_n \odot K_m) = nm$ dimana $n \geq 3$ dan $m \geq 3$, lintasan dan lingkaran yang mempunyai $nr(P_n \odot C_m) = 3n$ dimana $3 \leq m \leq 4$, $nr(P_n \odot C_m) = n(\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1)$ dimana $m \geq 5$; m ganjil, $nr(P_n \odot C_m) = n\lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ dimana $m \geq 5$; m genap, dan graf lengkap dan lingkaran yang mempunyai $nr(K_n \odot C_m) = 3n$ dimana $3 \leq m \leq 4$, $nr(K_n \odot C_m) = n(\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1)$ dimana $m \geq 5$; m ganjil, $nr(K_n \odot C_m) = n\lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ dimana $m \geq 5$; m genap.

5.2 Saran

Berdasarkan hasil penelitian mengenai dimensi metrik pada dengan *non-isolated resolving number* pada graf hasil korona $(G \odot H)$ dan beberapa graf khusus yang dioperasikan dengan operasi kororna, maka peneliti memberikan saran kepada pembaca agar dapat mengembangkan analisa dimensi metrik dengan *non-isolated resolving number* pada operasi graf lainnya dan aplikasinya terhadap permasalahan di lingkungan sekitar.

DAFTAR PUSTAKA

Chartrand, G and Oellermann. 1993. *Applied and Algoritmic Graph Theory.* New York: MacGraw-Hill.

Chartrand, G., Eroha, L., Johnsonb, M. A., and Oellaremann, O. R. 2000. Resolvability in Graphs and The Metric Dimension of a Graph. *Discrete Applied Mathematics.* **105**: 99-103.

Chitra, P.J.B and Arumugan, S. 2015. Resolving Sets Without Isolated Vertices. *Procedia Computer Science* .**74** : 38-42.

Dafik, Agustin, I.H., Surahmat, Syafrizal, and Alfarisi, R. 2017. On Non-isolated Resolving Number Some Graph Operations. *Procedia Computer Science.* Submited.

Garijo,D., Gonzales, A., and Marquez, A. 2013. On The Metric Dimension, The Upper Dimension and The Resolving number of Graphs. *Discrete Applied Mathematics.* **161**: 1440-1447.

Harsya, A. Y., Agustin, I. H., dan Dafik. 2014. Bilangan Kromatik pada Pengoperasian Graf Lintasan dengan Graf Lingkaran. *Prosiding Seminan Nasional.* Submited

Hartsfield, N. and Ringel, G. 1994. *Pearls in Graph Theory.* London: Accademic Press Limited.

Hernando, C., Mora, Pelayo, and Seara1. 2005. On The Metric Dimension of Same Families of Graphs. *Electronic Notes in Discrete Mathematics.* **22**: 129-133.

Iswandi, H., Baskoro, E.T., Salman, A.N.M., and Simanjuntak R. 2010. The Metric Dimension of Amalgamation of Cycles. *Far East Journal of Mathematical Sciences (FJMS)*. **41** : 19-31.

Iswandi, H., Simanjuntak, and Baskoro. 2011. On the Metric Dimension of Corona Product of Graphs. *Prosiding Seminar Matematika dan Pendidikan Matematik*. **1** : 196-201.

Kuziak, D., Yero, I. G., and Velzquez, J. A. R.. 2013. On the Strong Metric Dimension of Corona Product Graphs and Join Graphs. *Discrete Applied Mathematics*. **161** : 1022-1027.

Marsidi, Dafik, Agustin, I. H., and Alfarisi, R. 2016. On the Local Metric Dimension of line of special Graphs. *Jurnal Matematika Murni dan Aplikasi*. **4** : 125-130.

Siddiqui, H.M.A., and Imran Muhmmmad. 2014. Computing The Metric Dimension of Wheel Related Graphs. *Applied Mathematics and Computation*. **242**: 624-632.

Susilowati, L., Slamin, Utoyo, M. I., and Estunungsih, N. 2015. The Similarity of Metric Dimension and Local Metric Dimension of Rooted Product Graph. *Far East Journal of Mathematical Sciences (FJMS)*. **97**: 841-856.

Susilowati, L., Utoyo, M. I., and Slamin. 2016. On Commutatif Chracterization of Generalized Comb and Corona Products of Graphs with Respect to the Local Metrik Dimension. *Far East Journal of Mathematical Sciences (FJMS)*. Submited.

Velazquez, J.A.R., Yero, I.G., Kuziak, D., and Oellermann, O.R. 2014. On The strong Metric Dimension of Cartesian and Direct Products of Graphs. *Discrete Mathematics*. **335** : 8-19.

Yero, I. G., Kuziak, D., and Velazquez, J. A. R. 2011. On the Metric Dimension of Corona Product Graphs. *Computers and Mathematics with Applications*. **61** : 2793-2798.

Yunika, S. M., Slamin, Dafik and Kusbudiono. 2017. On The Metric Dimension with Non-isolated Resolving Number of Some Exponential Graph. *IBSC*. Submited.