NILAI KETAKTERATURAN TOTAL -H PADA HASIL OPERASI SHAKEL BEBERAPA GRAF KHUSUS

SKRIPSI

Oleh

Tuhfatul Mazidah
NIM 131810101033

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER
2017

NILAI KETAKTERATURAN TOTAL -H PADA HASIL OPERASI SHAKEL BEBERAPA GRAF KHUSUS

SKRIPSI

diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan Program Studi Matematika (S1) dan mencapai gelar Sarjana Sains

Oleh

Tuhfatul Mazidah

NIM 131810101033

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS JEMBER

2017

PERSEMBAHAN

Dengan menyebut nama Allah yang Maha Pengasih lagi Maha Penyayang serta sholawat dan salam selalu terlimpahkan kepada Nabi Muhammad SAW, penulis persembahkan skripsi ini sebagai ungkapan kebahagiaan dan rasa terima kasih kepada:

1. keluarga besar saya, Bapak Abdul chamim dan Ibu Khoirodah, serta saudari Umi Kharismah yang telah mendukung dan memberikan doa, kasih sayang, motivasi, kepercayaan dan senyuman yang selalu menguatkan disetiap perjalanan hidup saya;
2. Suami saya tercinta, Eka Purmana Hendratno dan anak saya Keisha Aqilla Zahra yang selalu memberikan semangat tersendiri bagi saya;
3. Mertua saya, Bapak Budi Supriono dan Ibu Musriah yang selalu membimbing saya;
4. Ibu Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si selaku Dosen Pembimbing Utama dan Bapak Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D selaku Dosen Pembimbing Anggota yang senantiasa meluangkan waktu memberikan pengarahan dan bimbingan hingga terselesaikannya penulisan skripsi ini;
5. Bapak Kusbidiono, S.Si., M.Si selaku Dosen Penguji I dan Dr.Mohamad Fatekurohman, S.Si., M.Si selaku Dosen Penguji II yang telah memberikan kritik dan saran yang membangun dalam penyempurnaan skripsi ini;
6. seluruh guru dan dosen beserta almamater sekolah yang telah memberikan banyak ilmu dan suasana kekeluargaan disetiap masanya;
7. teman-teman pejuang graf yang tergabung dalam CGANT yang telah membagikan ilmu dan pengalaman berharga serta mengajarkan bahwa sebuah perbedaan bukanlah alasan untuk tidak saling membantu;
8. teman-teman seperjuangan ATLAS (angkatan 2013) yang selalu memberikan dukungan dan motivasi;
9. Almamater tercinta Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

MOTO

"Barang siapa yang menempuh suatu jalan untuk menuntut ilmu, Allah akan memudahkan baginya jalan ke surga"
(HR. At-Tirmidzi)[1]

"Allah akan meninggikan orang-orang yang beriman di antaramu dan orang-orang yang diberi ilmu pengetahuan beberapa derajat"
(QS. Al-Mujadalah:11)[2]

"Ilmu tanpa agama adalah lumpuh, agama tanpa ilmu adalah buta"
(Albert Einstein)[3]

[1]Syaikh Muhammad bin Kamal Khalid As-Suyuthi. 2005. Kumpulan Hadits yang Disepakati 4 Imam: Abu Daud, Tirmidzi, Nasa'i dan Ibnu Majah. Jakarta: Pustaka Azzam.
[2]Departemen Agama Republik Indonesia. 2002. *Al Qur'an: Terjemah dan Tafsir Per Kata*. Bandung: Penerbit Jabal.
[3]Albert Einstein, Seorang Ilmuan Fisika.

PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Tuhfatul Mazidah

NIM : 131810101033

menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang berjudul ”Nilai Ketakteraturan Total-H Pada Hasil Operasi Shakel Beberapa Graf Khusus” adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali kutipan yang sudah saya sebutkan sumbernya, belum pernah diajukan pada institusi mana pun, dan isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa ada tekanan dan paksaan dari pihak mana pun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, Juni 2017

Yang menyatakan,

Tuhfatul Mazidah

NIM 131810101033

SKRIPSI

NILAI KETAKTERATURAN TOTAL-H PADA HASIL OPERASI SHAKEL BEBERAPA GRAF KHUSUS

Oleh

Tuhfatul Mazidah
NIM 131810101033

Pembimbing

Dosen Pembimbing Utama	:	Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si
Dosen Pembimbing Anggota	:	Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D

PENGESAHAN

Skripsi berjudul ”Nilai Ketakteraturan Total-H Pada Hasil Operasi Shakel Beberapa Graf Khusus” telah diuji dan disahkan pada:
hari, tanggal :
tempat : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember

Tim Penguji :

Ketua,	Sekretaris,
Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si NIP.19840801 200801 2 006	Prof. Drs. Dafik, M.Sc, Ph.D NIP.19680802 199303 1 004
Dosen Penguji I,	Dosen Penguji II,
Kusbudiono, S.Si., M.Si NIP.19770430 200501 1 001	Dr. M. Fatekurohman, S.Si., M.Si NIP. 19690606 199803 1 001

Mengesahkan
Dekan,

Drs. Sujito, Ph.D
NIP. 19610204 198711 1 001

RINGKASAN

Nilai Ketakteraturan Total-H Pada Hasil Operasi Shakel Beberapa Graf Khusus; Tuhfatul Mazidah, 131810101033; 2017: 53 halaman; Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Pelabelan Graf merupakan salah satu kajian dalam teori graf. Salah satu jenis pelabelan graf adalah pelabelan total irregular. Pelabelan total irregular merupakan suatu pemetaan bijektif yang memetakan himpunan titik (*vertex*) dan himpunan sisi (*edge*) pada suatu himpunan bilangan bulat positif. Salah satu jenis pelabelan total irregular yaitu pelabelan total-H irregular. Pelabelan total-H irregular merupakan pemetaan himpunan titik dan himpunan sisi pada himpunan bilangan bulat positif $\{1, 2, 3, ..., k\}$ sedemikian hingga bobot setiap subgrafnya berbeda. Nilai minimum k pada pelabelan total-H irregular disebut dengan nilai ketakteraturan total-H atau *total-H irregularity strength* (*tHs*). Pelabelan total-H irregular pada suatu graf G didefinisikan sebagai $f : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, ..., k\}$ jika untuk setiap subgraf $H \subseteq G$ maka bobot total H yaitu $W(H) = \Sigma_{v \in V(H)} f(V) + \Sigma_{e \in E(H)} f(e)$ adalah berbeda.

Pada penelitian ini menggunakan beberapa graf khusus hasil operasi shakel. Graf yang digunakan pada penelitian ini yaitu; $shack(W_4, e, m), shack(SJ_2, e, m), shack(Wd_3^2, e, m), shack(BT_3, e, m), shack(BT_2, e, m), shacksubgraf(W_6, C_4, m)$, dan $shacksubgraf(F_1^6, C_4, m)$. Penelitian ini menggunakan metode deduktif aksiomatik dan pendektesian pola. Tujuan dari penelitian ini adalah menentukan nilai tHs *(total-H irregularity strength)* dari bebrapa graf khusus hasil operasi shakel. Pada penelitian ini dihasilkan 7 teorema baru, yaitu :

Teorema 4.1 Misalkan $G = shack(W_4)$, dan H adalah subgraf G dengan $H \cong C_3$, maka

$$tHs(Shack(W_4, e, m)) = \lceil \tfrac{4n+1}{6} \rceil$$

Teorema 4.2 Misalkan $G = shack(SJ_2, e, m)$ dan H adalah subgraf G dengan $H \cong C_4$, maka

$$tHs(Shack(SJ_2, e, m)) = \lceil \tfrac{n+6}{8} \rceil$$

Teorema 4.3 Misalkan G adalah shakel dari graf Wd_3^2, dan subgraf dari graf G adalah C_3, maka

$$tHs(Shack(Wd_3^2, e, m)) = \lceil \frac{2n+3}{6} \rceil$$

Teorema 4.4 Misalkan G adalah shakel dari graf BT_3, dan subgraf dari graf G adalah C_3, maka

$$tHs(Shack(BT_3, e, m)) = \lceil \frac{3n+2}{6} \rceil$$

Teorema 4.5 Misalkan G adalah shakel dari graf BT_2, dan subgraf dari graf G adalah C_3, maka

$$tHs(Shack(BT_2, e, m)) = \lceil \frac{2n+3}{6} \rceil$$

Teorema 4.6 Misalkan G adalah shakel subgraf dari graf W_6 dimana subgraf sebagai penghubung pada operasi shakelnya adalah C_4, dan subgraf dari graf G adalah C_3, maka

$$tHs(\text{Shack subgraf}(W_6, C_4, m)) = \lceil \frac{4n+3}{6} \rceil$$

Teorema 4.7 Misalkan G adalah shakel subgraf dari graf F_1^6 dimana subgraf sebagai penghubung pada operasi shakelnya adalah C_4, dan subgraf dari graf G adalah C_3, maka

$$tHs(\text{Shack subgraf}(F_1^6, C_4, m)) = \lceil \frac{3n+4}{6} \rceil$$

PRAKATA

Puji syukur ke hadirat Allah SWT atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul ”Nilai Ketakteraturan Total-H Pada Hasil Operasi Shakel Beberapa Graf Khusus”. Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan pendidikan strata satu (S1) pada Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Penetahuan Alam Universitas Jember.

Penyusunan skripsi ini tidak lepas dari bantuan berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan terima kasih kepada:

1. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
2. Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
3. Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si. selaku Dosen Pembimbing Utama dan Prof. Drs. Dafik, M.Sc.,Ph.D. selaku Dosen Pembimbing Anggota yang telah meluangkan waktu, pikiran, dan perhatian dalam penulisan skripsi ini;
4. Kusbidiono, S.Si., M.Si selaku Dosen Penguji I dan Dr.Mohamad Fatekurohman, S.Si., M.Si selaku Dosen Penguji II yang telah memberikan kritik dan saran yang membangun dalam penyempurnaan skripsi ini;
5. Dian Anggraeni, S.Si., M.Si, selaku Dosen Pembimbing Akademik yang telah memberikan arahan selama perkuliahaan;
6. dosen dan karyawan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
7. semua pihak yang telah membantu terselesaikannya skripsi ini.

Penulis juga menerima segala kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan skripsi ini. Akhirnya penulis berharap, semoga skripsi ini dapat bermanfaat.

Jember, Juni 2017

Penulis

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR GAMBAR

Halaman

BAB 1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Semakin pesatnya perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi saat ini berdampak pula dengan semakin berkembangnya ilmu matematika dan juga aplikasinya dalam kehidupan. Saat ini ilmu matematika banyak digunakan dalam berbagai bidang seperti bidang kedokteran, teknik, ekonomi, psikologi, dan juga bidang ilmu alam seperti kimia, fisika, dan biologi. Cabang yang dimiliki ilmu matematika sendiri juga semakin luas diantaranya aljabar, geometri, statistika, matematika komputasi, matematika terapan, matematika ekonomi, dan matematika diskrit. Diantara cabang-cabang ilmu matematika tersebut, matematika diskrit dianggap memiliki peranan penting karena erat kaitannya dengan aplikasi pada bidang teknologi komputer yang saat ini sangatlah dibutuhkan dalam kehidupan. Salah satu kajian dalam bidang teknologi komputer adalah teori graf. Teori graf lahir pada abad ke-18 dan diperkenalkan oleh matematikawan swiss,Leonhard Euler. Pada saat itu Leonhard Eular menggunakan graf untuk menyelesaikan masalah jembatan Konigsberg. Leonhard Euler membuktikan bahwa perjalanan di kota Konigsberg dengan syarat melalui setiap jembatan tepat satu kali, tidak dapat dilaksanakan. Dalam pembuktiannya Euler menyederhanakan situasi jembatan Konigsberg itu menjadi suatu diagram.

Teori graf memiliki beberapa kajian, salah satunya adalah mengenai pelabelan graf. Pelabelan graf pertama kali diperkenalkan oleh Sedlacek (1964), kemudian Stewart (1966), Kotzig dan Rosa (1970). Pelabelan graf merupakan pemetaan dari elemen-elemen graf yaitu himpunan titik (*vertex*) atau himpunan sisi (*edge*) terhadap bilangan bulat positif. Pelabelan dari suatu graf dengan domain fungsinya adalah titik maka disebut pelabelan titik (*vertex labelling*), jika domain fungsinya adalah sisi maka disebut pelabelan sisi (*edge labelling*), sedangkan jika domain fungsinya adalah titik dan sisi maka disebut pelabelan total (*total labelling*).

Pada tahun 2007 , Martin Baca *et al* memperkenalkan jenis pelabelan baru yaitu pelabelan total irregular (*Irregular total labelling*). Pelabelan ini merupakan pemberian nilai bilangan bulat positif (dimana angkanya boleh berulang) pada himpunan titik dan himpunan sisi dari suatu graf G dimana bobot setiap titik atau sisinya tidak boleh sama (Baca *et al*., 2007). Pelabelan total irregular terdiri dari dua macam, yaitu pelabelan total titik irregular (*vertex irregular total labelling*) dimana bobot setiap titiknya berbeda dan pelabelan total sisi irregular (*edge irregular total labelling*) dimana bobot setiap sisinya berbeda. Saat ini terdapat pengembangan mengenai pelabelan total irregular yaitu pelabelan total-H irregular dimana H merupakan subgraf dari suatu graf G. Pelabelan ini diperkenalkan oleh Agustin dkk pada 2017. Pelabelan jenis ini merupakan pengembangan dari pelabelan total sisi irregular (*edge irregular total labelling*),dimana pada pelabelan total sisi iregular dicari nilai bilangan bulat positif minimum yang digunakan untuk melabeli setiap himpunan titik dan himpunan sisi sehingga bobot setiap sisinnya berbeda. Sedangkan pada pelabelan total-H irregular dicari nilai bilangan bulat positif minimum yang digunakan untuk melabeli setiap himpunan titik dan himpunan sisi sehingga bobot setiap subgraf dari suatu graf G berbeda.

Peneliti tertarik untuk melakukan penelitian dengan menggunakan kajian tentang pelabelan total-H irregular pada beberapa graf khusus hasil operasi. Pada penelitian ini digunakan beberapa graf khusus seperti graf kincir, graf roda, dan graf buku. Peneliti menggunakan operasi shackle pada beberapa graf khusus tersebut. Dalam penelitian ini akan dicari nilai bilangan bulat positif seminimal mungkin yang akan digunakan untuk melabeli setiap himpunan titik dan himpunan sisi sehingga bobot setiap subgrafnya berbeda. nilai minimum ini disebut dengan nilai ketakteraturan total-H atau *total*-H

irregularity strength dan dinotasikan dengan tHs.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan pemaparan latar belakang diatas, maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah:

a. berapa nilai tHs dari hasil operasi shakel graf W_4, SJ_2, Wd_3^2, BT_3, dan BT_2?
b. berapa nilai tHs dari hasil operasi shakel subgraf (W_6, C_4, m) dan (F_1^6, C_4, m)?

1.3 Tujuan Penelitian

Sesuai dengan rumusan masalah dan pemaparan latar belakang diatas, adapun tujuan dari penelitian ini adalah:

a. menentukan nilai tHs dari hasil operasi shakel graf W_4, SJ_2, Wd_3^2, BT_3, dan BT_2;
b. menentukan nilai tHs dari hasil operasi shakel subgraf (W_6, C_4, m) dan (F_1^6, C_4, m).

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari hasil penelitian ini adalah:

a. menambah pengetahuan dalam bidang teori graf khususnya mengenai pelabelan total irregular ;
b. memberikan wawasan lebih dan pengembangan pengetahuan tentang *total-*H *irregularity strength* ;
c. memberikan motivasi kepada peneliti lain untuk melakukan pengembangan atau penelitian mengenai *total-*H *irregularity strength* pada graf lainnya.

1.5 Kebaharuan

Kebaharuan pada penelitian ini adalah pelabelan yang digunakan merupakan pelabelan total-H irregular dengan menentukan nilai tHs dari graf khusus hasil operasi shakel. Pelabelan total-H irregular merupakan pengembangan dari pelabelan total sisi irregular yang sebelumnya diperkenalkan oleh Baca *et al*. Pada pelabelan total-H irregular semua himpunan titik dan himpunan sisi dipetakan pada himpunan bilangan bulat positif $\{1, 2, 3, ..., k\}$ sedemikian hingga bobot setiap subgrafnya berbeda. Nilai minimum k pada label terbesar disebut dengan *total*-H *irregularity strength* atau tHs.

BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

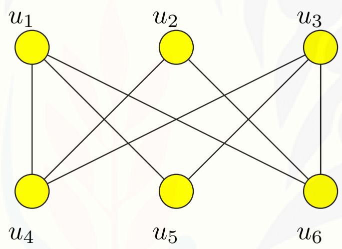
2.1 Terminologi Dasar Graf

Sebuah graf G merupakan pasangan himpunan (V,E) dimana $V(G) = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ adalah himpunan tidak kosong yang elemen-elemennya disebut titik *(vertex)*, dan $E(G) = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ adalah himpunan boleh kosong dari pasangan tak terurut dari dua titik *(*v_1, v_2*)* dimana $v_1, v_2 \in V$ yang disebut sisi *(edge)*. $V(G)$ disebut himpunan titik dari graf G dan $E(G)$ disebut himpunan sisi dari graf G (Slamin, 2009:11).

Berdasarkan penjelasan diatas diketahui bahwa dapat dibangun sebuah graf tanpa sisi atau hanya terdiri dari dua titik saja. Graf yang dibangun dari himpunan titik *(vertex)* tanpa adanya sisi *(edge)* disebut graf kosong *(nullgraph)* dan dinotasikan dengan N_n dimana n adalah jumlah titik pada graf. Graf yang hanya memiliki satu titik disebut graf trivial, sedangkan graf non-trivial adalah graf yang paling sedikit memiliki dua titik. Dua titik pada graf dikatakan saling berhubungan jika dua titik tersebut dihubungkan dengan sebuah sisi, sedangkan sebuah titik yang tidak dihubungkan oleh sebuah sisi disebut titik terasing.

Suatu sisi merupakan penghubung antara dua titik. Sisi merupakan pasangan tak terurut (u, v) dari dua titik u dan v dimana $u, v \in V$. Dengan kata lain dapat dituliskan $e = (v_i, v_j)$ yang berarti bahwa sisi tersebut menghubungkan titik v_i dan v_j. Banyaknya titik pada graf G disebut dengan kardinalitas titik dan dinotasikan dengan $|V(G)|$, sedangkan banyaknya sisi pada graf G disebut dengan kardinalitas sisi dan dinotasikan dengan $|E(G)|$. Suatu sisi pada graf yang menghubungkan satu titik ke dirinya sendiri disebut *loop* atau *self loop*. Apabila suatu graf memiliki dua sisi yang menghubungkan dua titik yang sama maka sisi tersebut disebut sisi ganda. Graf yang tidak mengandung *loop* dan sisi ganda disebut dengan graf sederhana *(simple graph)*, sedangkan graf yang mengandung *loop* dan sisi ganda disebut graf tak sederhana *(unsimple graph)*. Pada gambar 2.1 menunjukkan contoh graf sederhana (G_1).

Dua buah titik yang dihubungkan oleh satu sisi yang sama disebut titik yang bertetangga *(adjacent)*, sedangkan apabila sebuah titik merupakan titik ujung dari suatu sisi maka titik tersebut dikatakan bersisihan *(incident)*. Seperti pada gambar 2.1 menunjukkan bahwa titik u_1 bertetangga dengan titik u_4 karena terdapat sisi yang menghubungkan kedua titik tersebut. Jumlah titik pada suatu graf G disebut order *(order)* dari G dan dinotasikan dengan $|V(G)|$, sedangkan jumlah sisi pada graf G disebut size dan dinotasikan dengan $|E(G)|$. Jumlah titik dan jumlah sisi terkadang dinotasikan berbeda.



Gambar 2.1 Contoh Graf G_1

Derajat *(degree)* dari suatu titik v pada graf dinotasikan dengan d_v didefinisikan sebagai banyaknya sisi yang menempel pada titik tersebut. Derajat terkecil pada sebuah graf merupakan banyaknya sisi paling sedikit yang bersisihan dengan titik v. Derajat terkecil dari suatu graf G dinotasikan dengan $\delta(G)$. Derajat terbesar dari graf G merupakan banyaknya sisi paling banyak yang bersisihan dengan titik v. Derajat terbesar dari suatu graf G dinotasikan dengan $\Delta(G)$. Sebagai contoh dapat dilihat pada gambar 2.1 semua titik pada graf G_1 dab G_2 memiliki derajat yang sama yaitu 3. Apabila setiap titik pada graf memiliki derajat yang sama, maka graf tersebut dinamakan dengan graf reguler. Jika setiap titik derajatnya tidak sama, maka bukan graf reguler (non-reguler).

Sebuah jalan *(walk)* dari graf G merupakan barisan dari himpunan titik dan sisi terhingga dan bergantian yang diawali dan diakhiri dengan titik. Jika titik awal dan titik akhir yang dilalui sama, maka jalan tersebut dikatakan tertutup. Sedangkan apabila titik awal dan titik akhir berbeda maka dinamakan lintasan *(path)*. Panjang suatu jalan didefinisikan sebagai banyaknya sisi yang terdapat pada jalan tersebut. Jalan yang tertutup dengan barisan titik yang berbeda dinamakan *cycle*.

Berdasarkan orientasi arah, graf dibedakan menjadi dua yaitu graf berarah *(directed graph)* dan graf tidak berarah *(undirected graph)*. Graf berarah adalah graf yang sisinya memiliki arah, sedangkan graf tidak berarah adalah graf yang sisinya tidak memiliki arah. Pada graf berarah semua sisinya dapat direpresentasikan dengan dua titik yang dihubungkan oleh sisi tersebut, sedangkan pada graf tidak berarah semua sisinya tidak dapat direpresentasikan dengan dua titik yang dihubungkan oleh sisi tersebut. Misalkan dua titik yang berbeda pada graf berarah yaitu u_1 dan u_2 maka sisi yang menghubungkan dua titik tersebut dapat dituliskan sebagai pasangan sisi $e = (u_1, u_2)$ atau $e = (u_2, u_1)$ dimana $e = (u_1, u_2) \neq e = (u_2, u_1)$ (Purwanto *et al*,. 2006).

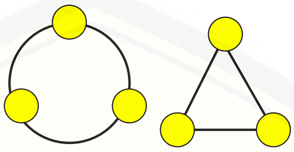
2.2 Graf Khusus

Graf khusus merupakan graf yang memiliki karakteristik tertentu. Graf khusus tidak isomorfis dengan graf lain dan karakteristik dari graf khusus dapat dilihat dari kesimetrisan graf khusus tersebut meskipun diperluas sampai n. Beberapa contoh graf khusus diantaranya adalah graf lingkaran, graf roda, graf timbunan buku, graf buku segitiga, graf kincir, dan graf kipas.

a. Graf Lingkaran

Graf Lingkaran *(Cycle Graph)* merupakan graf sederhana dimana setiap sisinya berderajat dua. Graf ini dinotasikan dengan C_n, untuk $n \geq 3$.

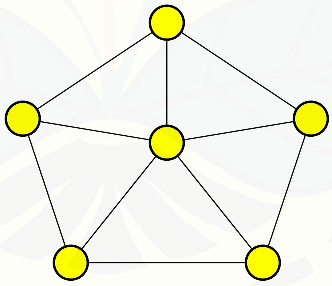
Jika titik-titik pada C_n adalah $v_1, v_2, v_3, ..., v_n$ maka sisi-sisinya adalah $(v_1, v_2), (v_2, v_3), ..., (v_{n-1}, v_n), (v_n, v_1)$ atau dengan kata lain terdapat sisi yang menghuubungkan titik terakhir dan titik v_1(Ardiansyah dan Darmaji, 2013). Gambar 2.2 merupakan contoh graf *cycle*.



Gambar 2.2 Contoh Graf Lingkaran C_3

b. Graf Roda

Graf Roda *(Wheel Graph)* merupakan graf yang didapat dengan menghubungkan semua titik dari graf lingkaran C_n dengan suatu titik yang disebut titik pusat. Graf Roda dinotasikan dengan W_n ($n \geq 3$). Graf Roda terdiri dari $n + 1$ titik dan $2n$ sisi (Agustin *et al*, 2014). Gambar 2.3 merupakan contoh graf Roda.

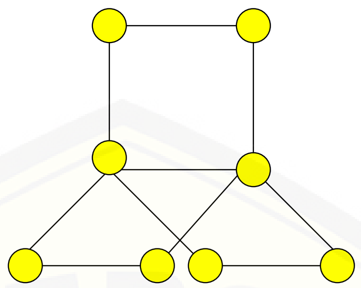


Gambar 2.3 Contoh Graf Roda W_5

c. Graf Timbunan Buku

Graf Timbunan Buku *(Stacked Book Graph)* dinotasikan dengan $B_(m, n)$ yang merupakan suatu graf bintang dan graf lintasan pada n titik. *Stacked Book*

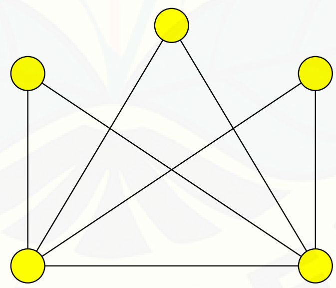
Graph digambarkan seperti graf cartesian $S_(m+1)P_n$ (Agustin *et al*, 2014). Gambar 2.4 merupakan contoh graf Timbunan Buku.



Gambar 2.4 Contoh Graf $B_{3,2}$

d. Graf Buku Segitiga

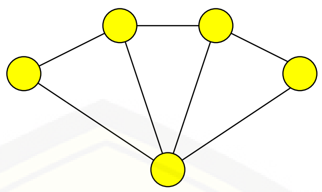
Graf Buku Segitiga *(Triangular Book Graph)* memiliki himpunan titik $V(BT_n) = \{x, y, z_i; 0 \leq i \leq n-1\}$ dan himpunan sisi $E(BT_n) = \{xy \cup \{xz_i; 0 \leq i \leq n-1\} \cup \{yz_i; 0 \leq i \leq n-1\}\}$. Dengan demikian kardinalitas titiknya sebanyak $n+2$ dan kardinalitas sisinya sebanyak $2n+1$ (Dafik *et al*, 2015). Gambar 2.5 merupakan contoh graf Buku Segitiga.



Gambar 2.5 Contoh Graf BT_3

e. Graf Kipas

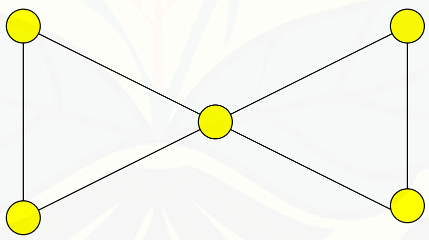
Graf kipas *(Fan Graph)* dinotasikan dengan F_n dimana $n \geq 2$. Graf kipas merupakan graf yang didapat dengan menghubungkan semua titik pada graf lintasan P_n pada satu tiitk pusat. Graf Kipas memiliki $n + 1$ titik dan $2n - 1$ sisi (Wijaya, 2010). Gambar 2.6 menunjukkan contoh dari graf kipas.



Gambar 2.6 Contoh Graf Kipas $F_{1,4}$

f. Graf Kincir

Graf Kincir *(Windmill Graph)* dinotasikan dengan WD_n^m. Graf kincir memiliki n titik dimana $n \geq 3$ dan m salinan dari graf lengkap K_n dimana $m \geq 2$. Graf kincir juga mempunyai titik pusat yang digunakan bersama oleh semua salinannya. Banyaknya sisi graf kincir yang memiliki $nm - m + 1$ titik adalah $\frac{nm(n-1)}{2}$ (Ardiansyah dan Darmaji, 2013). Gambar 2.7 menunjukkan contoh dari graf Kincir.



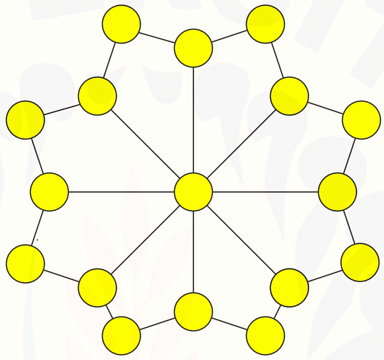
Gambar 2.7 Contoh Graf Wd_3^2

g. Graf Jahangir

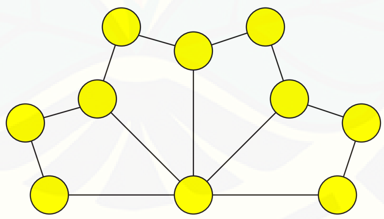
Graf Jahangir adalah generalisasi dari graf roda dengan menambahkan satu titik diantara dua titik yang bertetangga (kecuali titik pusat). Graf Jahangir dinotasikan dengan J_n (Indriati, 2016). Gambar 2.8 menunjukkan contoh graf jahangir.

h. Graf Semi Jahangir

Graf Semi Jahangir adalah graf yang terbentuk dari graf jahangir dengan menghilangkan satu titik yang berderajat dua. Graf semi jahangir dinotasikan dengan SJ_n dengan $n \geq 2$. Himpunan titik graf SJ_n adalah $V = \{p, x_i, y_k; 1 \leq i \leq n+1; 1 \leq k \leq n\}$ dan himpunan sisi $E = \{px_i; 1 \leq\ i \leq n+1\} \cup \{x_i y_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_{i+1} y_i; 1 \leq i \leq n\}$, sehingga kardinalitas $|V| = 2n+2$ dan kardinalitas sisi $|E| = 3n + 1$ (Indriati, 2016). Gambar 2.9 menunnukkan contoh graf semi jahangir.



Gambar 2.8 Contoh Graf Jahangir J_8



Gambar 2.9 Contoh Graf Semi Jahangir SJ_4

2.3 Fungsi

Fungsi merupakan suatu pemetaan dari suatu himpunan A ke himpunan B dan dinotasikan dengan $f : A \rightarrow B$ yang merupakan aturan korespondensi yang menghubungkan setiap $x \in A$ dengan tepat satu anggota pada himpunan B. HImpunan A disebut daerah asal *(domain)*, dan himpunan B disebut daerah kawan *(kodomain)*, sedangkan hasil pemetaan dari A ke B disebut dengan daerah hasil *(range)*. Notasi $f : A \rightarrow B$ menunjukkan bahwa f memetakan A ke B dimana A dan B adalah himpunan tak kosong. Jika $(a, b) \in f$, maka $b = f(a)$ untuk $(a, b) \in f$. Fungsi dapat dibedakan menjadi 3 jenis yaitu fungsi injektif, fungsi surjektif, dan fungsi bijektif.

2.3.1 Fungsi Injektif

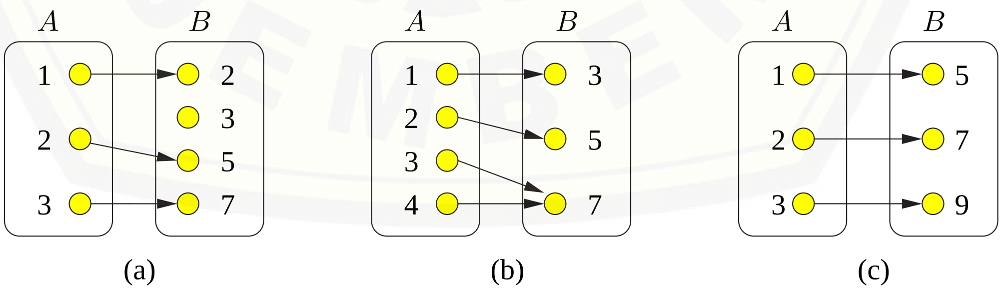
Fungsi injektif (fungsi satu-satu atau onto) adalah suatu pemetaan pada setiap elemen di daerah kodomain yang mempunyai tepat satu pasangan elemen di daerah domain. $\forall a_1$ dan $a_2 \in A, a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$.

2.3.2 Fungsi Surjektif

Fungsi $f : A \rightarrow B$ disebut fungsi surjektif $\Leftrightarrow \forall b \in B, \exists a \in A \Rightarrow f(a) = b$. Dengan kata lain setiap elemen kodomainnya berpasangan dengan elemen domainnya.

2.3.3 Fungsi Bijektif

Fungsi $f : A \rightarrow B$ disebut fungsi bijektif apabila fungsi tersebut memenuhi fungsi injektif dan fungsi surjektif. Gambar 2.10 menunjukkan fungsi injektif, surjektif, dan bijektif.

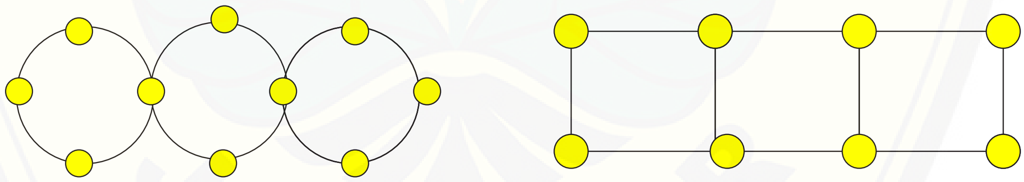


Gambar 2.10 (a) fungsi injektif (b) fungsi surjektif (c) fungsi bijektif

2.4 Operasi Graf

Operasi graf merupakan bebrapa cara yang dilakukan pada satu, dua atau lebih graf untuk menghasilkan graf baru. Jenis operasi Graf diantaranya adalah operasi *edge comb product*, *joint*, shakel, tensor, amalgamasi dan lain sebagainya. Penelitian ini menggunakan operasi shakel.

Menurut Maryati dkk (2010), graf belenggu atau yang sering disebut shakel dinotasikan dengan $shack(G_1, G_2, ..., G_n)$ sebagai sebuah graf yang dibentuk dari n graf terhubung nontrivial $G_1, G_2, ..., G_n$ sehingga untuk setiap $s, t \in [1, n]$ dengan $|s - t| \geq 2$ berlaku G_s dan $G_t$tidak mempunyai titik yang sama, dan untuk setiap $i \in [1, n-1]$, G_t dan G_{t+1} mempunyai tepat satu titik yang sama, disebut titik penghubung, dan $k - 1$ titik penghubung tersebut semuanya berbeda. Bila untuk setiap $i \in [1, n]$, G_i isomorfis dengan graf H, maka $shack(G_1, G_2, ..., G_n)$ dinamakan shakel dari graf H, dinotasikan $shack(H, n)$. Operasi shakel memiliki beberapa macam tergantung penghubungnya, jika penghubungnya berupa titik maka disebut shakel titik dan dinotasikan dengan $shack(H, v, n)$. Jika penghubungnya berupa sisi maka disebut shakel sisi dan dinotasikan dengan $shack(H, e, n)$. Gambar 2.11 menunjukkan contoh dari operasi shakel.

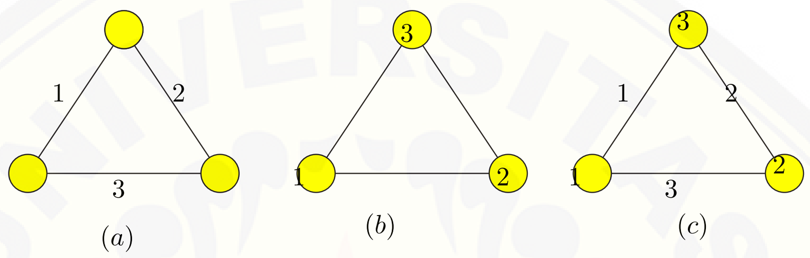


$(a) shack(C_4, v, 3)$ $(b) shack(C_4, e, 3)$

Gambar 2.11 (a) graf hasil operasi shakel titik (b) graf hasil operasi shakel sisi

2.5 Pelabelan Graf

Pelabelan graf merupakan salah satu topik dalam teori graf yang semakin berkembang baik secara teoritis maupun dalam aplikasi. Pelabelan graf pertama kali diperkenalkan oleh Sedlacek pada tahun 1963. Pelabelan graf didefinisikan sebagai suatu pemetaan yang memetakan himpunan bagian unsur-unsur dari graf ke suatu himpunan bilangan (umumnya himpunan bilangan bulat positif). Setiap unsur dari graf dapat dilabeli baik itu titik, sisi maupun keduanya (titik dan sisi). Apabila setiap titik pada graf yang dilabeli maka disebut pelabelan titik *(vertex labelling)*. Apabila setiap sisi pada graf yang dilabeli maka disebut pelabelan sisi *(edge lebelling)*. Sedangkan apabila setiap titik dan sisi yang dilabeli maka disebut pelabelan total *(total labelling)*.



Gambar 2.12 (a) pelabelan sisi (b) pelabelan titik (c) pelabelan total

2.6 Pelabelan Total Irregular

Pelabelan total irregular *(irregular total labelling)* diperkenalkan oleh Baca *et al* pada 2007. Pelabelan total irregular merupakan pemetaan bijektif himpunan titik dan himpunan sisi pada himpunan bilangan bulat positif $\{1, 2, 3, .., k\}$ Sebelumnya, pelabelan total irregular terbagi dalam dua jenis, yaitu pelabelan total titik irregular *(vertex irregular total labelling)* dan pelabelan total sisi irregular *(edge irregular total labelling)*, namun saat ini telah ditemukan mengenai pelabelan total-H irregular. Pelabelan ini diperkenalkan oleh Agustin dkk pada 2016.

2.6.1 Pelabelan Total Titik Irregular (*Vertex Irregular Total Labelling*)

Pelabelan total titik irregular merupakan suatu pemetaan himpunan titik dan himpunan sisi suatu graf G pada himpunan bilangan bulat positif sedemikian hingga setiap bobot titiknya berbeda. Misalkan untuk setiap titik x dan y berbeda maka $wt(x) \neq wt(y)$. Pelabelan total titik irregular dapat didefinisikan sebagai $f : V(G) \cup E(G) \to \{1, 2, 3, ..., k\}$. Nilai minimum k disebut dengan nilai *total vertex irregularity strength (tvs).*

Definisi 2.1. Pelabelan total titik irregular pada sebuah graf $G(V, E)$ merupakan pemberian nilai bilangan bulat positif (dimana nilai yang digunakan boleh berulang) pada himpunan titik dan himpunan sisi. Sehingga bobot setiap titiknya berbeda yaitu $w(v) \neq w(v')$ untuk setiap titik $v \neq v'$ dimana $v, v' \in V$.

Definisi 2.2. Sebuah graf G dengan pelabelan total titik, nilai minimum pada label terbesar yang memuat graf G memiliki pelabelan total titik irregular disebut dengan *total vertex irregularity strength (tvs).*

Berdasarkan definisi 2.1 dan 2.2 maka nilai *tvs* pada sebuah graf berupa bilangan positif minimum yang terdapat pada label terbesar. Berikut ini adalah teorema dari *total vertex irregularity strength (tvs)* .

Teorema 2.1. *Misal $G(V, E)$ adalah graf dengan $|V|$ adalah jumlah titik dan $|E|$ adalah jumlah sisi dengan Δ derajat maksimum dan δ derajat minimum, maka :*

$$\lceil \frac{|V| + \delta}{\Delta + 1} \rceil \leq tvs(G) \leq |V| + \Delta - 2\delta + 1$$

2.6.2 Pelabelan Total Sisi Irregular (*Edge Irregular Total Labelling*)

Pelabelan total sisi irregular merupakan suatu pemetaan himpunan titik dan himpunan sisi suatu graf G pada himpunan bilangan bulat positif sedemikian hingga bobot setiap sisinya berbeda. Pelabelan total sisi irregular dapat didefinisikan sebagai $f : V \cup E \to \{1, 2, 3, ..., k\}$ dimana untuk setiap sisi e dan f berbeda maka $wt(e) \neq wt(f)$. Nilai minimum k disebut dengan nilai *total edge irregularity strength (tes).*

Definisi 2.3. Pelabelan total sisi irregular pada sebuah graf $G(V, E)$ merupakan pemberian nilai bilangan bulat positif (dimana nilai yang digunakan boleh berulang) pada himpunan titik dan himpunan sisi, sedemikian hingga bobot setiap sisinya berbeda, yaitu $w(e) \neq w(e')$ untuk setiap sisi $e \neq e'$ dimana $e, e' \in E$.

Definisi 2.4. Sebuah graf G dengan pelabelan total sisi, nilai minimum pada label terbesar yang membuat graf G memiliki pelabelan total sisi irregular disebut dengan *total edge irregularity strength (tes)*.

Berdasarkan definisi 2.3 dan 2.4 maka nilai *tes* sebuah graf G berupa bilangan bulat positif minimum pada label terbesar. Berikut ini adalah teorema yang berkaitan dengan *total edge irregularity strength (tes)*.

Teorema 2.2. *Misalkan $G = (V, E)$ adalah sebuah graf dengan himpunan titik V dan himpunan sisi E (yang tidak kosong), maka:*

$$\lceil \frac{|E| + 2}{3} \rceil \leq tes(G) \leq |E|$$

2.6.3 Pelabelan Total-H Irregular

Pelabelan total-H irregular merupakan hasil pengembangan dari pelabelan total sisi irregular, dimana $H \subseteq G$ atau dengan kata lain H merupakan subgraf dari suatu graf G. Dari Pelabelan total sisi irregular diketahui bahwa untuk suatu graf $G = (V, E)$ dapat didefinisikan suatu fungsi $f : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, ..., k\}$ merupakan nilai ketakteraturan total sisi *(total edge irregularity strength)* jika untuk setiap dua sisi berbeda e dan f dari G masing-masing memiliki $\psi(e) \neq \psi(f)$ dimana bobot dari suatu sisi $e = \{u, v\}$ pada label v adalah $\psi(e) = v(u)+v(v)+v(e)$. Nilai minimum k disebut dengan *total edge irregularity strength*. Sedangkan nilai minimum k pada pelabelan total-H irregular disebut dengan nilai ketakteraturan total-H atau *total-H irregularity strength*, dan dinotasikan dengan $tHs(G)$. Disebut *total-H irregularity strength* jika ada suatu label $f : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, ..., k\}$ untuk sebarang subgraf $H \subseteq G$, bobot total-H $W(H) = \Sigma_{v \in V(H)} f(V) + \Sigma_{e \in E(H)} f(e)$ berbeda. Himpunan dari bobot total-H sendiri adalah $W(H) = (pH + qH, pH + qH + 1, pH + qH + 2, ..., pH +$

$qH + |H| - 1)$ dimana pH adalah jumlah titik pada subgraf H, qH adalah jumlah sisi pada subgraf H, dan $|H|$ adalah jumlah subgraf H pada suatu graf G.

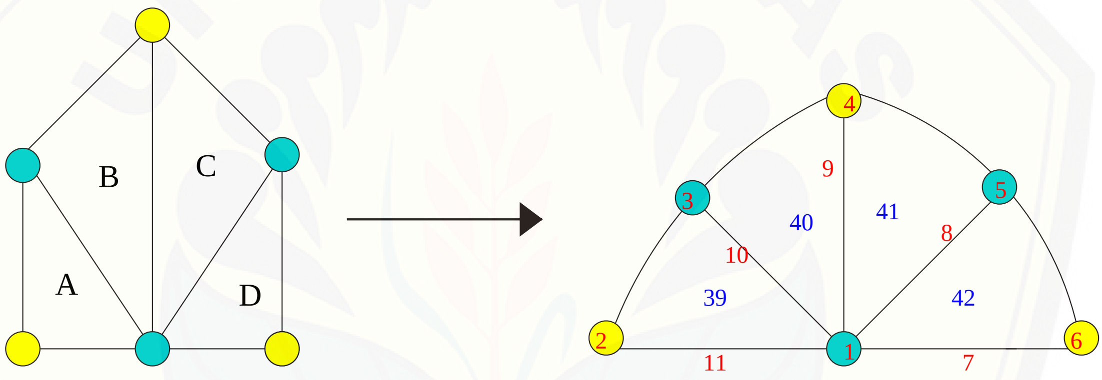
Lemma 2.1. *Misalkan $G, H \subset G$ adalah sebarang dua graf. Misalkan p_H, q_H merupaka masing-masing dari jumlah titik dan sisi dari H. maka* total-H irregularity strength *memenuhi*

$$tHs(G) \geq \lceil \frac{p_H + q_H + |H| - 1}{p_H + q_H} \rceil$$

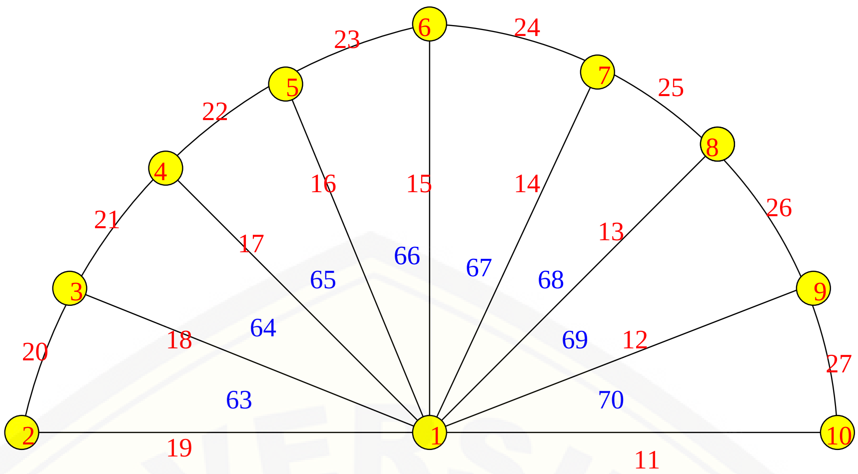
2.7 Aplikasi Graf

Teori Graf memiliki banyak manfaat dalam kehidupan sehari-hari. Teori graf memodelkan atau merepresentasikan suatu masalah menjadi titik dan sisi sehingga mudah untuk diselesaikan. Manfaat teori graf yang sering digunakan adalah pada jaringan komunikasi, salah satunya adalah komunilkasi antara agen CIA. Kemutakhiran sandi di kantor CIA sangat dibutuhkan. Teknik kodefikasi sandi tingkat tinggi diperlukan sehingga sandi yang dihasilkan merupakan sandi yang rumit dan kompleks. Suatu tugas tertentu harus diselesaikan bersama tiga orang agen rahasia dan dimungkinkan terdapat dua orang agen lainnya menyelesaikan tugas yang sama, atau dengan kata lain setiap satu dari tiga anggota agen rahasia CIA diharuskan mengirimkan kode rahasia pada dua anggota agen rahasia CIA yang lain. Data awal penyelesaian tugas dapat diakses/disimpan oleh anggota agen rahasia apabila tiga agen rahasia memasukkan kodenya sehingga total kode yang dimasukkan memiliki sifat yang unik, baik untuk tugas tertentu maupun untuk keseluruhan tugas, bila tidak maka tugas tidak dapat diselesaikan. Disamping itu kode harus dapat diperbaharui setiap saat oleh anggota agen rahasia CIA, agar rahasia sebuah tugas tidak mudah terungkap. Permasalahan utamanya adalah bagaimana membangun kode rahasia yang optimal.

Permasalahan ini dapat direpresentasikan kedalam teori graf dimana jaringan komunikasi antar anggota agen rahasia CIA dinyatakan sebagai suatu graf G. Seorang agen rahasia CIA dinyatakan sebagai titik dan relasi dari satu agen CIA ke agen CIA yang lain dinyatakan sebagai suatu sisi. Setiap kode yang dimiliki oleh seorang agen rahasia CIA dinyatakan sebagai bobot titik dan setiap kode rahasia yang dikirimkan dari satu anggota agen rahasia CIA ke anggota agen rahasia CIA yang lain dinyatakan sebagai bobot total sisi, sedangkan jumlah dari kode rahasia yang dimiliki anggota agen rahasia CIA dan kode rahasia yang dikirimkan pada setiap anggota agen rahasia CIA yang lain dinyatakan sebagai bobot total subgraf-H. Dengan menggunakan kajian pada pelabelan total-H irregular yaitu dengan mencari nilai ketakteraturan total-H atau tHs dapat dibangun suatu kode rahasia. Berikut ini adalah ilustrasi dari tiga orang agen rahasia CIA dengan tugas A,B,C,D.



Gambar 2.13 ilustrasi tiga anggota CIA dengan tugas A,B,C,D



Gambar 2.14 graf dari gambar 2.13 yang diperluas

Pada gambar 2.14 diketahui bahwap Pada setiap tugas terdapat 6 kode rahasia yang dapat disusun secara acak, artinya setiap tugas memiliki $6!$ atau 720 susunan kode rahasia. Berikut ini adalah beberapa susunan kode rahasia yang dapat dibangun dari tugas A.

$$A1 : 1 - 19 - 2 - 20 - 3 - 18$$

$$A2 : 19 - 2 - 20 - 3 - 18 - 1$$

$$A3 : 2 - 20 - 3 - 18 - 1 - 19$$

$$A4 : 20 - 3 - 18 - 1 - 19 - 2$$

$$A5 : 3 - 18 - 1 - 19 - 2 - 20$$

dan seterusnya sampai berjumlah 720 susunan kode rahasia yang dibangun secara acak dari tugas A. Begitu pula untuk kode rahasia yang dibangun secara acak dari tugas-tugas yang lain. Setiap tugas meiliki $6!$ atau 720 susunan kode rahasia, sehingga pada ilustrai 2.14 banyaknya susunan kode rahasia yang dapat dibangun adalah sebanyak $8x6!$ atau 5760 susunan kode rahasia.

BAB 3. METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut :

a. Metode Deduktif Aksiomatik

Metode deduktif aksiomatik menggunakan prinsip-prinsip pembuktian deduktif yang berlaku dalam logika matematika dengan menggunakan aksioma atau teorema yang telah ada.

b. Metode Pendeteksian Pola

Proses penelitian ini menggunakan metode pendeteksian pola untuk merumuskan pola umumnya. Metode ini digunakan untuk merumuskan pola pelabelan titik dan pelabelan sisi secara umum, sehingga akan didapatkan perumusan nilai total -H irregular pada graf hasil operasi shakel.

3.2 Indikator Penelitian

Pada Penelitian ini indikator yang digunakan adalah batas bawah dan batas atas dari nilai *total-H irregularity strength (tHs)* yaitu:

$$tHs(G) \geq \left\lceil \frac{p_H+q_H+|H|-1}{p_H+q_H} \right\rceil$$

3.3 Teknik Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada graf khusus dan graf hasil operasi *shackle*. Teknik penelitian yang digunakan adalah sebagai berikut:

a. menghitung kardinalitas titik dan kardinalitas sisi pada graf khusus hasil operasi shakel;

b. menentukan batas bawah dari tHs graf khusus dan graf hasil operasi shakel dengan menggunakan lemma 2.1;

c. menentukan pelabelan titik dan sisi pada graf khusus dan graf hasil operasi shakel dengan bilangan bulat $\{1, 2, .., k\}$, sedemikian hingga setiap subgraf nya memiliki bobot yang berbeda;

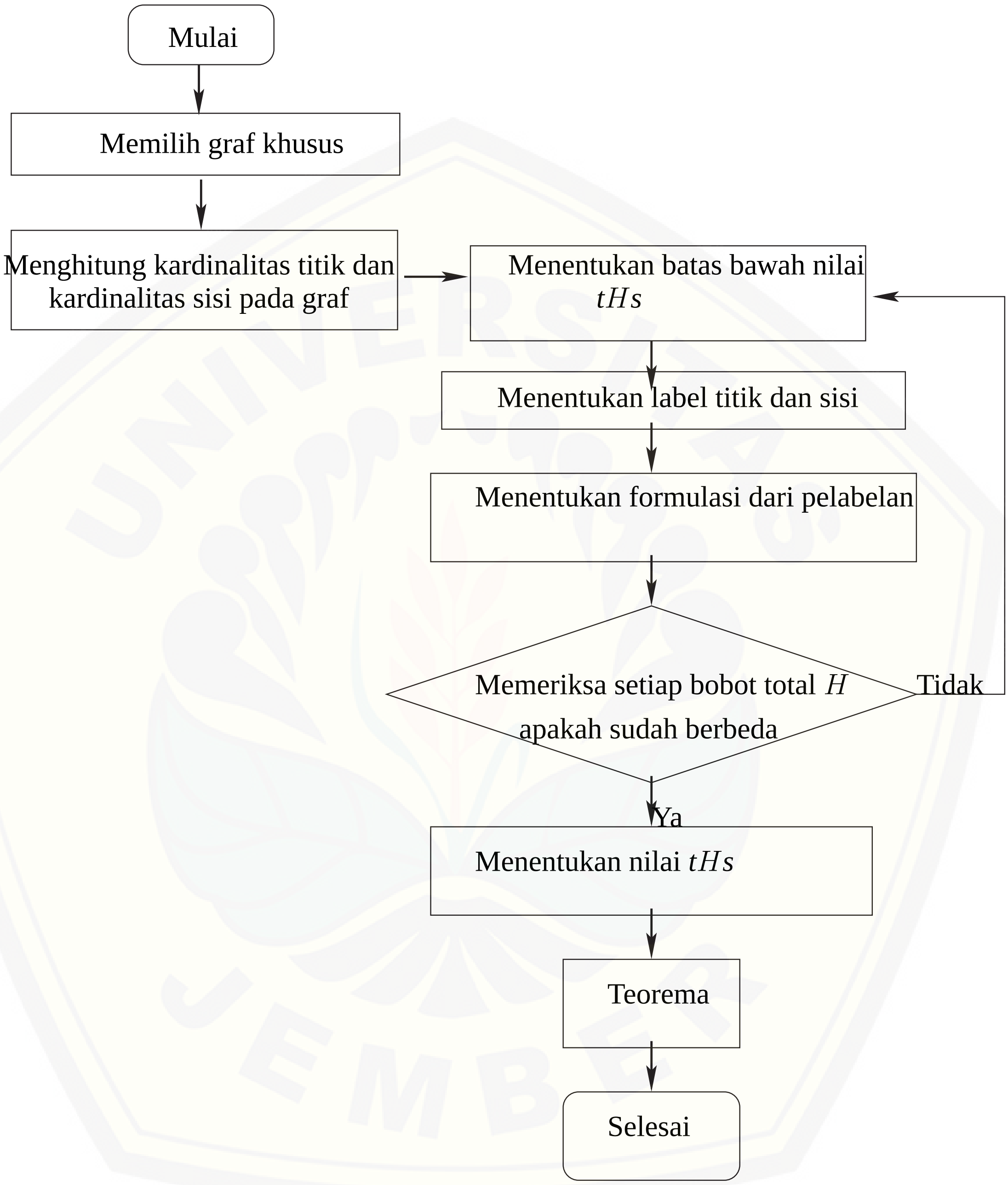
d. menentukan formulasi dari pelabelan graf khusus dan graf hasil operasi shakel yang sudah dilakukan, formulasi ini berupa fungsi yang memetakan himpunan titik dan himpunan sisi pada bilangan bulat positif;

e. memeriksa kembali bobot setiap subgraf yang ada dengan formulasi yang sudah ditentukan;

f. menentukan nilai tHs dari graf khusus dan hasil operasi shakel dengan menggunakan batas bawah yang sudah diperoleh;

g. menemukan teorema.

Adapun skema dari teknik penelitian ini dapat dilihat pada gambar 3.1.



Gambar 3.1 Skema Penelitian

BAB 5. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dari pembahasan dapat diperoleh kedimpulan sebagai berikut.

a. Nilai tHs (*total-H irregularity strength*) dari hasil operasi shakel $W_4 = \lceil \frac{4n+1}{6} \rceil$, nilai tHs (*total-H irregularity strength*) dari hasil operasi shakel $SJ_2 = \lceil \frac{n+6}{8} \rceil$, nilai tHs (*total-H irregularity strength*) dari hasil operasi shakel $Wd_3^2 = \lceil \frac{2n+3}{6} \rceil$, nilai tHs (*total-H irregularity strength*) dari hasil operasi shakel $BT_3 = \lceil \frac{3n+2}{6} \rceil$, dan nilai tHs (*total-H irregularity strength*) dari hasil operasi shakel $BT_2 = \lceil \frac{2n+3}{6} \rceil$.

b. Nilai tHs (*total-H irregularity strength*) dari hasil operasi shakel subgraf $(W_6, C_4, m) = \lceil \frac{4n+3}{6} \rceil$, dan Nilai tHs (*total-H irregularity strength*) dari hasil operasi shakel subgraf $(F_1^6, C_4, m) = \lceil \frac{3n+4}{6} \rceil$.

5.2 Saran

Berdasarkan penelitian mengenai pelabelan total-H irregularity strength dalam mencari nilai tHs (*total-H irregularity strength*) pada hasil operasi shakel beberapa graf khusus, maka peneliti memberikan saran kepada peneliti lain untuk melakukan penelitian mengenai pelabelan total-H irregular pada graf-graf khusus lainnya dengan menggunakan operasi yang berbeda.

DAFTAR PUSTAKA

Agustin, I. H., Dafik, Marsidi, dan Albirri, E.R. 2016. *On The Total H-Irregularity Strength Of Graphs: A new notion.Submitted* on ICMETA 2016.

Agustin, I. H., Hardiyantik, D. 2016. *The Connected and Disjoint Union of Semi Jahangir Graph Admit a Cycle-Super(a,d) Antimagic Total Labelling*.*Journal of Physics: Conference Series*.

Agustin, I. H.,Muharromah. A., dan Dafik. 2014. Graf-Graf Khusus dan Bilanganj Dominasinya.Prosiding Seminar Matematika dan Pemdidikan Matematika.

Anholcer, M., Palmer, C., 2012. *Irregular Labelling Of Circulant Graphs*.*Discreate Mathematics*, (312): 3461-3486.

Ardiansyah, R dan Darmaji. 2013. Bilangan Kromatikb Graf Hasil Amalgamasi Dua Buah Graf. Jurnal Sains dan Seni Pomits. 2(1):2337-3520.

Baca, M., Jendrol., Miller, M., dan Ryan, J. 2007. *On Irreguer Total Labellings*.*Discreates Mathematics*. 307(1). 1378-1388

Dafik. 2007. *Structural Properties and Labeling of Graphs*. School of Information Technology and Mathematical Sciences University of Ballarat, Australia, Ph.D. Thesis, November:1-139.

Dafik, Agustin. I. H., dan Rizky. H.P. 2015. Pengembangan Total Selimut Super Pada Graf Shackle Triangular Book. Proceeding of International Workkshop on Mathematics UAD.

Dafik, Kristiana. A. I., Setiawani. S., dan Azizah. K.M.F. 2016. *Generalized Shackled of Fan is a Super(a,d)-edge-antimagic Total Graph*. Journal Of Graph Labelling. India.

Damayanti, R. T. 2011. Automorfisma Graf Bintang dan Graf Lintasan. *CHAUCHY*, 2(1):35-40.

Indriarti, D., Widodo, Wijayanti, I.E., Sugeng, K.A. 2015. *On Total Irregularity Strength Of Double Star and Related Graph*.*Procedia Computer Science*. (74): 118-123.

Indriati, D. 2016. *Total Labelling Of The Edge Irregular, Vertex Irregular and Totally Irregular On Graphs*. Yogyakarta : Universitas Gadjah Mada.

Maryati, T. K., Salman, A., Baskoro, E. T., Ryan, J. Miller, M. 2010. *On H Supermagic Labellings for Certain Shackles and Amalgamations Of A Connected Graph Antimagic Total Labellings for Shackle A Connected Graph*. Utilitas Math Bull, (83), 333-342.

Munir, R. 2010. *Matematika Diskrit*. *Matematika Diskrit*. Bandung: Penerbit Informatika.

Purwanto, H., Indriani, G., dan Dayanti, E. 2006. *Matematika Diskrit*.Jakarta : PT.Ercontara Rajawali.

Slamin. 2009. *Desain Jaringan: Pendekatan Teori Graf*. Jember: Universitas Jember.

Wijaya, W. 2010. Pelabelan Elegan Pada Graf Kipas, Graf Matahari dan Graf Bunga Matahari. Jurusan Matematika FMIPA. Universitas Jember