



**SUPER  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -ANTIMAGIC TOTAL COVERING ORDE DUA  
PADA GRAF HASIL OPERASI SHACKLE**

**SKRIPSI**

Oleh

**Rosanita Nisviasari  
NIM 131810101002**

**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS JEMBER**

**2017**



**SUPER  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -ANTIMAGIC TOTAL COVERING ORDE DUA  
PADA GRAF HASIL OPERASI SHACKLE**

**SKRIPSI**

diajukan guna memenuhi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan Program Studi Matematika (S1) dan mencapai gelar Sarjana Sains

Oleh

**Rosanita Nisviasari**  
**NIM 131810101002**

**JURUSAN MATEMATIKA**  
**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**  
**UNIVERSITAS JEMBER**

**2017**

## PERSEMBAHAN

Dengan menyebut nama Allah yang Maha Pengasih dan Maha Penyayang serta sholawat dan salam selalu tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW, penulis persembahkan skripsi ini sebagai ungkapan kebahagiaan dan rasa terima kasih kepada:

1. keluarga besar saya, bapak Samsul Bakuri dan ibu Siti Rohma, serta saudari Rosalita Hapsari yang telah mendukung dan memberikan doa, kasih sayang, motivasi, kepercayaan dan senyuman yang selalu menguatkan disetiap perjalanan hidup saya;
2. ibu Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si selaku Dosen Pembimbing Utama dan bapak Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D selaku Dosen Pembimbing Anggota yang senantiasa meluangkan waktu dalam memberikan pengarahan dan bimbingan hingga terselesaikannya penulisan skripsi ini;
3. bapak Kusbidiono, S.Si., M.Si selaku Dosen Penguji I dan ibu Dian Anggraeni, S.Si., M.Si selaku Dosen Penguji II yang telah memberikan kritik dan saran yang membangun dalam penyempurnaan skripsi ini;
4. seluruh guru dan dosen beserta almamater sekolah yang telah memberikan banyak ilmu dan suasana kekeluargaan disetiap masanya;
5. teman-teman pejuang graf dan para pecinta graf lain yang tergabung dalam CGANT yang telah membagikan ilmu dan pengalaman berharga serta mengajarkan bahwa sebuah perbedaan bukanlah alasan untuk tidak saling membantu;
6. teman-teman seperjuangan ATLAS (angkatan 2013) yang selalu memberikan dukungan dan motivasi, sahabat RCM yang selalu memberikan kebahagiaan;
7. Almamater tercinta Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

## MOTO

"Barang siapa yang keluar untuk mencari ilmu maka ia berada di jalan Allah hingga ia pulang"

(HR. At-Tirmidzi)<sup>1</sup>

"Allah akan meninggikan orang-orang yang beriman di antaramu dan orang-orang yang diberi ilmu pengetahuan beberapa derajat"

(QS. Al-Mujadalah:11)<sup>2</sup>

---

<sup>1</sup>Syaikh Muhammad bin Kamal Khalid As-Suyuthi. 2005. Kumpulan Hadits yang Disepakati 4 Imam: Abu Daud, Tirmidzi, Nasa'i dan Ibnu Majah. Jakarta: Pustaka Azzam.

<sup>2</sup>Departemen Agama Republik Indonesia. 2002. *Al Qur'an: Terjemah dan Tafsir Per Kata*. Bandung: Penerbit Jabal.

**PERNYATAAN**

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Rosanita Nisviasari

NIM : 131810101002

menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang berjudul "Super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -Antimagic Total Covering Orde Dua pada Graf Hasil Operasi *Shackle*" adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali kutipan yang sudah saya sebutkan sumbernya, belum pernah diajukan pada institusi mana pun, dan isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa ada tekanan dan paksaan dari pihak mana pun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, Juni 2017

Yang menyatakan,

Rosanita Nisviasari

NIM 131810101002

**SKRIPSI**

**SUPER  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -ANTIMAGIC TOTAL COVERING ORDE DUA  
PADA GRAF HASIL OPERASI SHACKLE**

Oleh

Rosanita Nisviasari

NIM 131810101002

Pembimbing

Dosen Pembimbing Utama : Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si

Dosen Pembimbing Anggota : Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D

**PENGESAHAN**

Skripsi berjudul "Super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -Antimagic Total Covering Orde Dua pada Graf Hasil Operasi *Shackle*" telah diuji dan disahkan pada:

hari, tanggal :

tempat : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember

Tim Penguji :

Ketua,

Sekretaris,

Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si  
NIP.19840801 200801 2 006

Prof. Drs. Dafik, M.Sc, Ph.D  
NIP.19680802 199303 1 004

Dosen Penguji I,

Dosen Penguji II,

Kusbudiono, S.Si., M.Si  
NIP.19770430 200501 1 001

Dian Anggraeni, S.Si., M.Si  
NIP. 19820216 200604 2 002

Mengesahkan

Dekan,

Drs. Sujito, Ph.D

NIP. 19610204 198711 1 001

## RINGKASAN

**Super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -Antimagic Total Covering Orde Dua pada Graf Hasil Operasi *Shackle***; Rosanita Nisviasari, 131810101002; 2017: 58 halaman; Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Pelabelan adalah salah satu kajian teori graf. Pelabelan pada suatu graf adalah suatu pemetaan bijektif yang memetakan elemen-elemen graf (titik dan sisi) ke himpunan bilangan asli berurutan. Pemetaan disebut fungsi bijektif jika setiap elemen pada graf dinomori dengan bilangan bulat positif yang berbeda. Suatu graf  $G$  dapat dikatakan sebagai  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic total orde dua apabila memiliki fungsi bijektif  $f : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, |V(G)| + |E(G)|\}$  untuk setiap subgraf  $G$  isomorfis terhadap  $\mathcal{H}$  dan bobot total selimutnya  $W(\mathcal{H}) = \sum_{v \in V(\mathcal{H})} f(v) + \sum_{e \in E(\mathcal{H})} f(e)$  membentuk barisan aritmatik orde dua  $\{a, a + d, a + 3d, a + 6d, \dots, a + (\frac{n^2-n}{2})d\}$ , dengan  $a$  dan  $d$  merupakan bilangan bulat positif dan  $n$  merupakan jumlah semua subgraf  $G$  yang isomorfis terhadap  $\mathcal{H}$ . Jika fungsi tersebut ada, maka  $f$  disebut sebagai suatu  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic total covering dari graf  $G$ . Suatu  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic total covering dengan fungsi  $f$  dikatakan super apabila  $f : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, |V(G)|\}$ .

Hasil utama dari penelitian yang akan dibahas terkait dengan pelabelan total super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic orde dua pada graf hasil operasi *shackle* yaitu lemma dan teorema. Teknik yang digunakan untuk pelabelan adalah teknik partisi, dimana himpunan bulat dikelompokkan ke dalam baris dan kolom. Terdapat beberapa lemma dan teorema baru yang ditemukan secara eksperimental dalam penelitian ini.

Sebagai contoh kasus, graf yang digunakan untuk pelabelan total super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic pada graf hasil operasi *shackle* yaitu saat  $H = W_s$ ,  $H = K_s$  dan  $H = H_s$ . Graf hasil operasi *shackle* dari sebarang graf memiliki himpunan titik  $V = \{x_j; 1 \leq j \leq n + 1\} \cup \{x_{ij}; 1 \leq i \leq p_H - 2, 1 \leq j \leq n\}$  dan himpunan sisi  $E = \{e_{ij}; 1 \leq i \leq q_H, 1 \leq j \leq n\}$ . Sedangkan jumlah titik  $p_G = |V(G)| = n + 1 + (p_H - 2)n = 1 + np_H + n - 2n = 1 + np_H - n$  dan jumlah sisi  $q_G = |E(G)| = nq_H$  dimana  $p_H$  dan  $q_H$  merupakan selimut saat  $\mathcal{H} \equiv H$  dengan jumlah selimut  $n$ .

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode deduktif aksiomatik, yaitu dengan menurunkan aksioma atau teorema yang telah ada.



Dengan metode tersebut diperoleh bahwa batas atas nilai beda  $d$  dari *super antimagic total covering* orde dua pada graf hasil operasi *shackle* adalah  $d \leq \frac{2[p_H^2 - p_H + q_H^2]}{n-2}$ .

Fungsi bijektif partisi untuk pelabelan berorde dua yang ditemukan adalah

a.

$$\mathcal{P}_{m,d_7}^{*n}(i, j) = \begin{cases} \frac{2mi - i^2 + i - 2j + 2}{2}; 1 \leq i \leq m, i + j \leq m + 1 \\ \frac{-2m^2 - 4m + 4mi + 4mj - i^2 + 3i - 2ij - j^2 + j}{2}; 1 \leq i \leq m, i + j > m + 1 \end{cases}$$

dan diperoleh  $\sum_{i=1}^m \mathcal{P}_{m,d_7}^{*n}(i, j) = \frac{2m^3 + 3m^2 + (3j^2 - 9j + 7)m}{6}$  membentuk barisan aritmatika orde dua dengan beda  $d_7 = m$ ;

b.

$$\mathcal{P}_{m,d_8}^{*n}(i, j) = \begin{cases} \frac{2m^2 - 2mi + i^2 - i + 2j}{2}; 1 \leq i \leq m, i + j \leq m + 1 \\ \frac{4m^2 + 4m - 4mi - 4mj - 3i - j + 2ij + i^2 + j^2 + 2}{2}; 1 \leq i \leq m, i + j > m + 1 \end{cases}$$

dan diperoleh  $\sum_{i=1}^m \mathcal{P}_{m,d_8}^{*n}(i, j) = \frac{4m^3 - 3m^2 - (3j^2 - 9j + 1)m}{6}$  membentuk barisan aritmatika orde dua dengan beda  $d_8 = -m$ .

Graf hasil operasi *shackle* yang dinotasikan dengan  $G = shack(H, v, n)$  memiliki pelabelan total selimut super  $(nm_1(m_1 - 1) + 3m_1 + \frac{m_3^3}{3} + \frac{m_2^2}{2} + \frac{m_2}{6} + \frac{nm_3}{2}(m_3 - 1) + m_3 + \frac{m_4}{2}(1 + m_4) + \frac{m_5}{4}(2nm_5 - n + 3) + \frac{2m_6^3}{3} - \frac{m_6^2}{2} + \frac{5m_6}{6} + \frac{nm_7}{2}(m_7 + 1) + \frac{m_8}{2}(2nm_8 - m_8 + 1) + (n + 1)(m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6 + m_7 + m_8 + m_9) + nm_2m_3 + nm_4(m_2 + m_3) + nm_5(m_2 + m_3 + m_4) + nm_6(m_2 + m_3 + m_4 + m_5) + nm_7(m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6) + nm_8(m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6 + m_7) + nm_9(m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6 + m_7 + m_8) + \frac{nc_1}{2}(c_1 - 1) + c_1 + \frac{c_2}{2}(c_2 + 1) + \frac{c_3}{4}(2nc_3 - n + 3) + \frac{nc_4}{2}(c_4 + 1) + \frac{c_5}{2}(2nc_5 - c_5 + 1) + \frac{c_6}{4}(2nc_6 + n + 1) + (np_H - n + 1)(c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 + c_6) + nc_1c_2 + nc_3(c_1 + c_2) + nc_4(c_1 + c_2 + c_3) + nc_5(c_1 + c_2 + c_3 + c_4) + nc_6(c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5), m_2 - m_6) - \mathcal{H}$ -antimagic orde dua dengan  $n \geq 2$  dimana  $m_1, m_2, \dots, m_9$  dan  $c_1, c_1, \dots, c_6$  merupakan banyaknya baris dalam variasi partisi yang digunakan pada pelabelan total selimut super antimagic orde dua dengan  $m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6 + m_7 + m_8 + m_9 = p_H - 2$  dan  $c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 + c_6 = q_H$  serta  $p_H$  dan  $q_H$  adalah banyaknya titik dan sisi pada graf  $H$  untuk mendapatkan variasi nilai  $d$ .

## PRAKATA

Puji syukur ke hadirat Allah SWT atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "Super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -Antimagic Total Covering Orde Dua pada Graf Hasil Operasi *Shackle*". Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan pendidikan strata satu (S1) pada Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Penyusunan skripsi ini tidak lepas dari bantuan berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan terima kasih kepada:

1. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
2. Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
3. Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si. selaku Dosen Pembimbing Utama dan Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D. selaku Dosen Pembimbing Anggota yang telah meluangkan waktu, pikiran, dan perhatian dalam penulisan skripsi ini;
4. Kusbidiono, S.Si., M.Si selaku Dosen Penguji I dan Dian Anggraeni, S.Si., M.Si selaku Dosen Penguji II yang telah memberikan kritik dan saran yang membangun dalam penyempurnaan skripsi ini;
5. Prof. Drs. Kusno, DEA., Ph.D., selaku Dosen Pembimbing Akademik yang telah memberikan arahan selama perkuliahan;
6. dosen dan karyawan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
7. semua pihak yang telah membantu terselesaikannya skripsi ini.

Penulis juga menerima segala kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan skripsi ini. Akhirnya penulis berharap, semoga skripsi ini dapat bermanfaat.

Jember, Juni 2017

Penulis

DAFTAR ISI

	Halaman
<b>HALAMAN JUDUL</b> .....	i
<b>HALAMAN PERSEMBAHAN</b> .....	ii
<b>HALAMAN MOTO</b> .....	iii
<b>HALAMAN PERNYATAAN</b> .....	iv
<b>HALAMAN PEMBIMBINGAN</b> .....	v
<b>HALAMAN PENGESAHAN</b> .....	vi
<b>RINGKASAN</b> .....	vii
<b>PRAKATA</b> .....	ix
<b>DAFTAR ISI</b> .....	x
<b>DAFTAR TABEL</b> .....	xii
<b>DAFTAR GAMBAR</b> .....	xiii
<b>BAB 1. PENDAHULUAN</b> .....	1
<b>1.1 Latar Belakang</b> .....	1
<b>1.2 Rumusan Masalah</b> .....	2
<b>1.3 Tujuan Penelitian</b> .....	2
<b>1.4 Manfaat Penelitian</b> .....	3
<b>1.5 Kebaharuan</b> .....	3
<b>BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA</b> .....	4
<b>2.1 Terminologi Dasar Graf</b> .....	4
<b>2.2 Graf Khusus</b> .....	6
<b>2.3 Operasi Graf</b> .....	8
<b>2.4 Fungsi dan Barisan Aritmatika Berorde Dua</b> .....	8
<b>2.5 Pelabelan Graf</b> .....	10
2.5.1 Definisi Pelabelan Graf .....	10
2.5.2 Pelabelan $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -Antimagic Total Covering Orde Dua.....	11

2.5.3	Batas Atas Nilai Beda $d$ Pelabelan Selimut Super $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -Antimagic Orde Dua .....	11
2.6	Teknik Partisi .....	12
2.7	Aplikasi Graf .....	14
2.8	Hasil Super $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -Antimagic Total Covering .....	17
<b>BAB 3.</b>	<b>METODE PENELITIAN</b> .....	19
3.1	Jenis Penelitian .....	19
3.2	Rancangan Penelitian .....	19
3.2.1	Penotasian Titik dan Sisi Graf .....	19
3.2.2	Indikator Pelabelan Graf .....	20
3.3	Teknik Penelitian .....	20
<b>BAB 4.</b>	<b>HASIL DAN PEMBAHASAN</b> .....	23
4.1	Kardinalitas dan Nilai Batas Atas Beda $d$ .....	24
4.2	Pengembangan Partisi dan Variasi Nilai Beda .....	26
4.3	Super $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -Antimagic Total Covering Orde Dua pada Graf Hasil Operasi <i>Shackle</i> .....	31
4.4	Hasil dan Pembahasan .....	54
<b>BAB 5.</b>	<b>KESIMPULAN DAN SARAN</b> .....	59
5.1	Kesimpulan .....	59
5.2	Saran .....	60
<b>DAFTAR PUSTAKA</b>	.....	61

DAFTAR TABEL

	Halaman
2.1 Partisi untuk Pelabelan Orde Dua.....	12
2.2 Tabel Substitusi Algoritma Kriptografi <i>Vigènere Cipher</i> .....	16
2.3 Proses Enkripsi $y_i = (x_i + k_i)(mod\ 26)$ .....	16
2.4 Proses Dekripsi $x_i = (y_i - k_i)(mod\ 26)$ .....	16
2.5 Hasil Super $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ - <i>Antimagic Total Covering</i> .....	17
4.1 Contoh Ilustrasi $\mathcal{P}_{6,6}^{*6}(i, j)$ .....	27
4.2 Contoh Ilustrasi $\mathcal{P}_{6,-6}^{*6}(i, j)$ .....	29
4.3 Contoh Ilustrasi $\mathcal{P}_{6,-6}^{*6}(i, j)$ .....	30
4.4 Contoh Ilustrasi $\mathcal{P}_{6,-6}^{*6}(i, j)$ .....	31
4.5 Label Titik, Label Sisi, dan Bobot Total Selimut dari Super (1830, 6)- $\mathcal{HATC}$ Orde Dua pada $Shack(W_8, v, 6)$ .....	38
4.6 Label Titik, Label Sisi, dan Bobot Total Selimut dari Super (1780, -6)- $\mathcal{HATC}$ Orde Dua pada $Shack(W_8, v, 6)$ .....	41
4.7 Label Titik, Label Sisi, dan Bobot Total Selimut dari Super (3064, 5)- $\mathcal{HATC}$ Orde Dua pada $Shack(K_8, v, 5)$ .....	44
4.8 Label Titik, Label Sisi, dan Bobot Total Selimut dari Super (3100, -5)- $\mathcal{HATC}$ Orde Dua pada $Shack(K_8, v, 5)$ .....	45
4.9 Label Titik, Label Sisi, dan Bobot Total Selimut dari Super (1283, 4)- $\mathcal{HATC}$ Orde Dua pada $Shack(H_5, v, 4)$ .....	51
4.10 Label Titik, Label Sisi, dan Bobot Total Selimut dari Super (1297, -4)- $\mathcal{HATC}$ Orde Dua pada $Shack(H_5, v, 4)$ .....	51

DAFTAR GAMBAR

	Halaman
2.1 Contoh Graf $G$ .....	4
2.2 Contoh Dua Graf yang Isomorfis .....	5
2.3 Contoh Graf dan Subgrafnya .....	6
2.4 Contoh Graf Sederhana ( $C_3$ ).....	6
2.5 Contoh Graf Khusus .....	7
2.6 Contoh Hasil Operasi <i>Shackle</i> .....	8
2.7 (a) Fungsi Injektif, (b) Fungsi Surjektif, dan (c) Fungsi Bijektif .....	9
2.8 Hasil Pelabelan Titik dan Sisi serta Bobot Total Selimut Graf $G =$ <i>Shack</i> ( $C_6, v, 4$ ) .....	15
3.1 Graf Hasil Operasi <i>Shackle</i> .....	20
3.2 Bagan Penelitian .....	22
4.1 Ilustrasi Graf Terhubung Hasil Operasi <i>Shackle</i> .....	23
4.2 Super (1830, 6)- $\mathcal{HATC}$ Orde Dua pada <i>Shack</i> ( $W_8, v, 6$ ) .....	39
4.3 Super (1780, -6)- $\mathcal{HATC}$ Orde Dua pada <i>Shack</i> ( $W_8, v, 6$ ) .....	40
4.4 Super (3064, 5)- $\mathcal{HATC}$ Orde Dua pada <i>Shack</i> ( $K_8, v, 5$ ).....	46
4.5 Super (3100, -5)- $\mathcal{HATC}$ Orde Dua pada <i>Shack</i> ( $K_8, v, 5$ ) .....	47
4.6 Super (1283, 4)- $\mathcal{HATC}$ Orde Dua pada <i>Shack</i> ( $H_5, v, 4$ ).....	52
4.7 Super (1297, -4)- $\mathcal{HATC}$ Orde Dua pada <i>Shack</i> ( $H_5, v, 4$ ).....	53

## BAB 1. PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Pelabelan adalah salah satu kajian teori graf. Pelabelan graf pertama kali diperkenalkan pada tahun 1970-an oleh Kotzig dan Rosa. Pelabelan merupakan suatu pemetaan satu-satu yang memetakan himpunan elemen bilangan bulat positif. Berdasarkan elemen-elemen yang dilabeli, pelabelan dapat dibedakan menjadi tiga jenis, yaitu pelabelan titik, pelabelan sisi, dan pelabelan titik dan sisi atau pelabelan total.

Pada tahun 2005, Gutiérrez dan Lladó memperkenalkan pelabelan selimut *magic* yang dikembangkan dari pelabelan total *magic*. Jika setiap garis pada graf  $G$ ,  $E(G)$  termuat dalam subgraf  $H$  dari  $G$  yang isomorfik dengan  $\mathcal{H}$  merupakan subgraf  $G$ , maka pelabelan tersebut disebut pelabelan  $\mathcal{H}$ -*magic covering*. Kemudian Inayah (2013) mengembangkan pelabelan  $\mathcal{H}$ -*antimagic covering* yaitu suatu pelabelan pada graf  $G$  yang memiliki sebuah fungsi bijektif sehingga terdapat jumlahan yang merupakan barisan aritmatika  $\{a, a + d, a + 2d, \dots, a + (s - 1)d\}$  dengan  $a$  adalah bobot selimut terkecil dengan beda  $d$ .

Pelabelan graf mengalami banyak perkembangan, adapun beberapa penelitian yang membahas tentang *covering* diantaranya adalah super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -*antimagic total selimut* pada graf *shackle* kipas  $F_n$  oleh Azizah dan Dafik (2014) menemukan bahwa  $\mathcal{SHATC}$  (super  $\mathcal{H}$  *antimagic total covering*) pada graf *shackle* kipas  $F_n$  dengan  $n \geq 4$  memiliki super  $(18n + 115, 3)$ ,  $(18n + 111, 8)$ ,  $(18n + 87, 24)$ , dan  $(18n + 82, 29)$ . Latifah dkk. (2015) telah menemukan  $\mathcal{SHATC}$  untuk amalgamasi graf kipas  $\text{Amal}(F_n, P_n, 2)$  memiliki pelabelan super  $(\frac{29n+32}{2}, 0)$  untuk  $n$  genap,  $(\frac{29n+25}{2}, 0)$  untuk  $n$  ganjil,  $(13n + 19, 1)$ , dan  $(11n + 23, 3)$  untuk  $n \geq 2$ . Pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -*antimagic total dekomposisi* pada graf *windmill* oleh Milasari dkk. (2015) menemukan bahwa  $\mathcal{SHATC}$  memiliki super  $(98n + 22, 0)$ ,  $(95n + 25, 6)$ ,

$(91n + 29, 14)$ ,  $(88n + 32, 20)$ ,  $(86n + 34, 24)$ ,  $(73n + 47, 50)$  dan  $(71n + 49, 54)$  untuk  $n \geq 2$ .

Pada beberapa penelitian sebelumnya, mengenai pelabelan banyak yang menggunakan pelabelan berorde satu. Oleh karena itu, pada penelitian ini mengembangkan pelabelan berorde dua. Operasi yang digunakan pada penelitian ini adalah operasi *shackle* pada graf sederhana, terhubung, dan tidak berarah. Graf  $H$  merupakan graf sederhana, terhubung, dan tidak berarah yang dioperasikan *shackle* sebanyak  $n$  graf dengan menghubungkan titik dapat dinotasikan sebagai  $shack(H, v, n)$ . Pada penelitian ini, dalam contoh kasusnya menggunakan graf roda ( $W_s$ ), graf lengkap ( $K_s$ ), dan graf helm ( $H_s$ ). Langkah awal yang dilakukan adalah penentuan kardinalitas titik dan sisi yang kemudian akan digunakan untuk menemukan batas atas nilai beda. Batas atas nilai beda digunakan untuk memberi batasan pada nilai beda  $d$  sehingga dalam mencari beberapa nilai beda akan selalu mendapatkan hasil. Kemudian menemukan fungsi bijektif partisi untuk pelabelan berorde dua. Setelah menemukan beberapa nilai beda  $d$  dan fungsi bijektif partisi untuk pelabelan berorde dua dilanjutkan dengan fungsi bijektif pelabelan orde dua.

## 1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan pemaparan latar belakang diatas, maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah:

- berapa batas atas nilai beda  $d$  dari *super antimagic total covering* orde dua pada graf hasil operasi *shackle*?
- bagaimana fungsi bijektif partisi untuk pelabelan berorde dua?
- bagaimana fungsi bijektif pelabelan *super*  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -*antimagic total covering* orde dua pada graf  $shack(H, v, n)$  untuk mendapatkan variasi nilai  $d$ ?

## 1.3 Tujuan Penelitian

Sesuai dengan rumusan masalah dan pemaparan latar belakang diatas, adapun tujuan dari penelitian ini adalah:

- menentukan batas atas nilai beda  $d$  dari *super antimagic total covering* orde



- dua pada graf hasil operasi *shackle*;
- b. menentukan fungsi bijektif partisi untuk pelabelan berorde dua;
  - c. menentukan fungsi bijektif pelabelan *super*  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -*antimagic total covering* orde dua pada graf *shack* $(H, v, n)$  untuk mendapatkan variasi nilai  $d$ .

#### 1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari hasil penelitian ini adalah:

- a. menambah pengetahuan baru dalam bidang teori graf mengenai *super*  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -*antimagic total covering* orde dua pada graf hasil operasi *shackle*;
- b. memberi motivasi kepada peneliti graf lain untuk memperluas penelitian tentang *super*  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -*antimagic total covering*;
- c. hasil dari penelitian ini diharapkan dapat digunakan sebagai pengembangan dan perluasan ilmu dari permasalahan *super*  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -*antimagic total covering*.

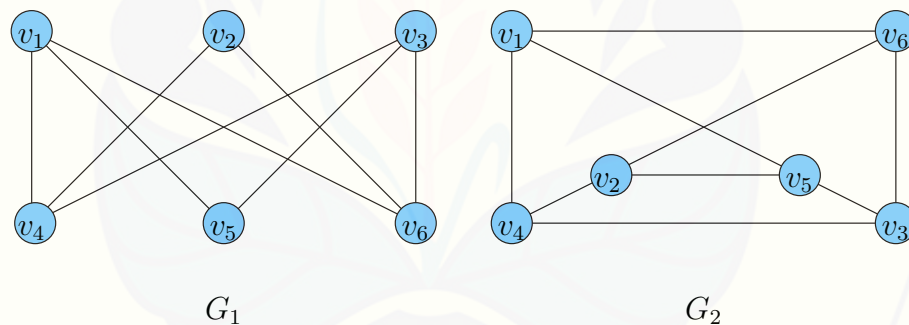
#### 1.5 Kebaharuan

Kebaharuan dalam penelitian ini adalah mendapatkan batas atas nilai beda  $d$  pada pelabelan yang berorde dua. Selain itu, teknik pelabelan yang digunakan pada penelitian ini yaitu menggunakan teknik partisi berorde dua. Hasil penelitian ini adalah menggeneralisasi pelabelan *super*  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -*antimagic total covering* orde dua pada graf hasil operasi *shackle*.



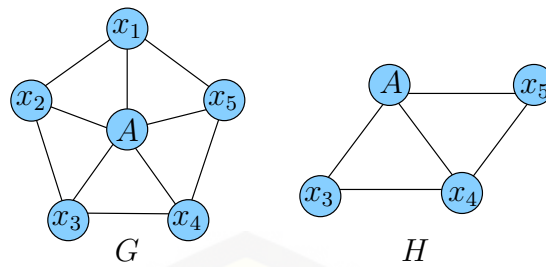
Sisi merupakan pasangan tak terurut  $(u, v)$  dari dua titik  $u$  dan  $v$  di  $V$ . Himpunan titik graf  $G$  dinotasikan dengan  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  dan himpunan sisi graf  $G$  dinotasikan dengan  $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  atau  $E(G) = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_{n-1}, v_n)\}$  dengan  $e = (v_i, v_j)$  yang berarti bahwa sisi tersebut menghubungkan titik  $v_i$  dan  $v_j$ . Banyaknya titik pada graf  $G$  disebut sebagai kardinalitas titik dinotasikan dengan  $|V(G)|$  sedangkan banyaknya sisi pada graf  $G$  disebut sebagai kardinalitas sisi dinotasikan dengan  $|E(G)|$  (Hartsfield dan Ringel, 1994).

Jika terdapat dua graf yang sama namun memiliki geometri yang berbeda, maka graf tersebut disebut sebagai graf isomorfis. Menurut Damayanti (2011), jika dua buah graf  $G_1$  dan  $G_2$  memiliki pemetaan satu-satu  $\phi$  antara  $V(G_1)$  pada  $V(G_2)$  sedemikian hingga misal  $uv \in E(G_1)$  jika dan hanya jika  $(\phi(u)\phi(v)) \in E(G_2)$ , maka  $G_1$  dan  $G_2$  tergolong graf isomorfis dan dapat ditulis  $G_1 \cong G_2$ .



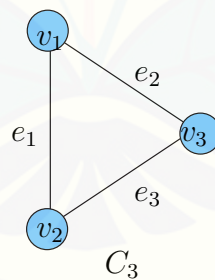
Gambar 2.2 Contoh Dua Graf yang Isomorfis

Dua graf atau lebih yang digabungkan dapat dinotasikan dengan  $mG$ , dapat diartikan sebagai gabungan saling lepas (*disjoint*) salinan graf  $G$  sebanyak  $m$  komponen. Suatu graf  $H$  disebut subgraf (graf bagian) dari graf  $G$  jika  $V(H) \subseteq V(G)$  dan  $E(H) \subseteq E(G)$  yang dinotasikan dengan  $H \subseteq G$ .



Gambar 2.3 Contoh Graf dan Subgrafnya

Pengelompokan graf dapat dikategorikan berdasarkan pada sudut pandang pengelompokannya. Berdasarkan titik yang terhubung pada suatu graf, terdapat graf terhubung. Graf  $G$  dikatakan terhubung (*connected*) jika untuk setiap dua titik yang berbeda, misal  $v_i$  dan  $v_j$  di  $G$  dihubungkan oleh lintasan (*path*). Berdasarkan orientasi arah pada suatu graf, terdapat graf tak berarah (*undirect graph*). Graf tak berarah adalah graf yang setiap sisinya tidak berorientasi pada arah. Berdasarkan ada tidaknya sisi ganda ataupun *loop* pada suatu graf, terdapat graf sederhana (*simple graph*). Graf sederhana merupakan graf yang tidak memiliki sisi ganda maupun *loop*.

Gambar 2.4 Contoh Graf Sederhana ( $C_3$ )

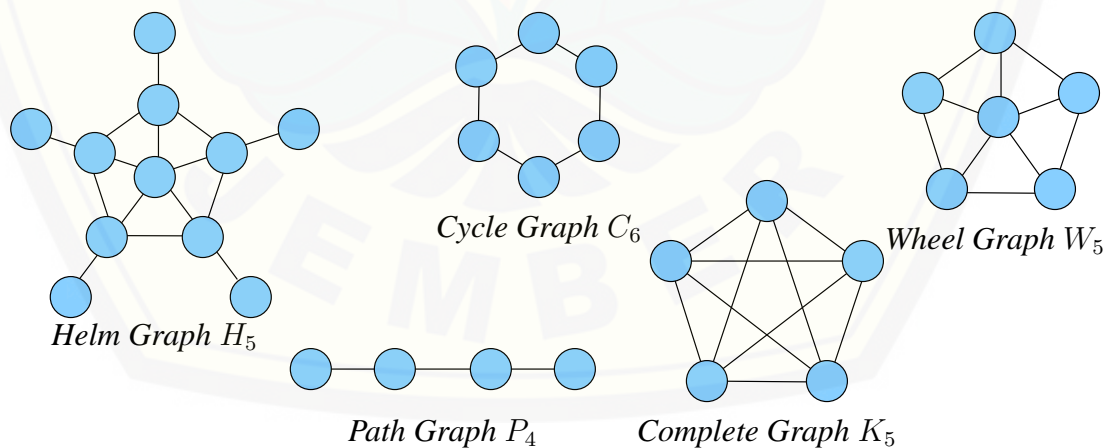
## 2.2 Graf Khusus

Suatu graf dapat disebut sebagai graf khusus apabila graf tersebut memiliki karakteristik dan keunikan tertentu. Karakteristik graf khusus dapat dilihat dari simetris atau tidak graf khusus tersebut meskipun diperluas sampai  $n$ . Keunikannya adalah graf khusus tersebut tidak isomorfis dengan graf yang lain.

Beberapa graf khusus diantaranya adalah graf lintasan, graf lingkaran dan graf roda.

Graf lintasan atau *path graph* adalah graf yang terdiri dari satu lintasan. Graf lintasan yang memiliki  $n$  titik dinotasikan dengan  $P_n$  dengan  $n \geq 2$ . Banyaknya sisi pada graf lintasan yang memiliki  $n$  titik adalah  $n - 1$  (Damayanti, 2011). Graf lingkaran atau *cycle graph* yaitu graf yang jumlah titik dan sisinya sama. Graf lingkaran dengan  $n$  titik dinotasikan dengan  $C_n$  dengan  $n \geq 3$  (Munir, 2010).

Graf roda atau *wheel graph* adalah graf yang dibentuk dari graf lingkaran  $C_n$  dan satu titik sebagai titik tengah atau pusat yang dihubungkan oleh sisi pada setiap titik di  $C_n$ . Graf roda dapat dinotasikan sebagai  $W_n$  dengan  $n \geq 3$ . Graf roda memiliki  $n + 1$  titik dan  $2n$  sisi (Gallian, 2011). Graf lengkap atau *complete graph* adalah graf sederhana yang setiap titiknya terhubung oleh sisi ke semua titik lainnya. Graf lengkap memiliki  $n$  titik dinotasikan sebagai  $K_n$  dengan  $n \geq 2$ . Banyaknya sisi graf lengkap yang memiliki  $n$  titik adalah  $n(\frac{n-1}{2})$  sisi (Damayanti, 2011). Graf helm atau *helm graph* yang dinotasikan dengan  $H_n$  adalah graf yang didapatkan dari sebuah graf roda  $W_n$  dengan menambahkan sisi anting-anting pada setiap titik pada lingkaran (Gallian, 2011)



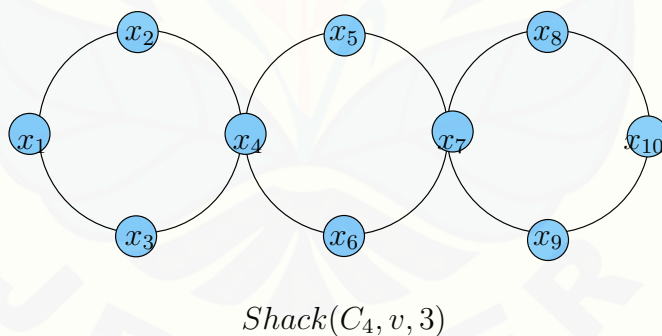
Gambar 2.5 Contoh Graf Khusus

### 2.3 Operasi Graf

Operasi graf merupakan suatu cara untuk mengoperasikan dua graf atau lebih sehingga menghasilkan graf baru. Terdapat beberapa macam operasi graf, salah satu diantaranya adalah operasi *shackle*. Dalam penelitian ini, operasi yang digunakan adalah operasi *shackle*.

Suatu graf hasil operasi *shackle* dibentuk dari graf terhubung  $G_1, G_2, \dots, G_k$  dengan  $k \geq 2$  sehingga untuk  $G_s$  dan  $G_t$  tidak mempunyai titik yang sama untuk setiap  $s, t \in [1, k]$  dengan  $|s - t| \geq 2$ , dan untuk setiap  $i \in [1, k - 1]$ ,  $G_i$  dan  $G_{i+1}$  mempunyai tepat satu titik sama yang disebut titik penghubung dan  $k - 1$  titik penghubung semuanya berbeda. Graf *shackle* dapat dinotasikan sebagai  $shack(G_1, G_2, \dots, G_k)$  (Maryati dkk., 2010).

Gambar 2.6 merupakan contoh dari hasil operasi *shackle* yang mengoperasikan *cycle graph* ( $C_4$ ) sebanyak tiga graf dengan titik sebagai penghubungnya. Graf hasil operasi tersebut dapat dinotasikan sebagai  $shack(C_4, v, 3)$ .

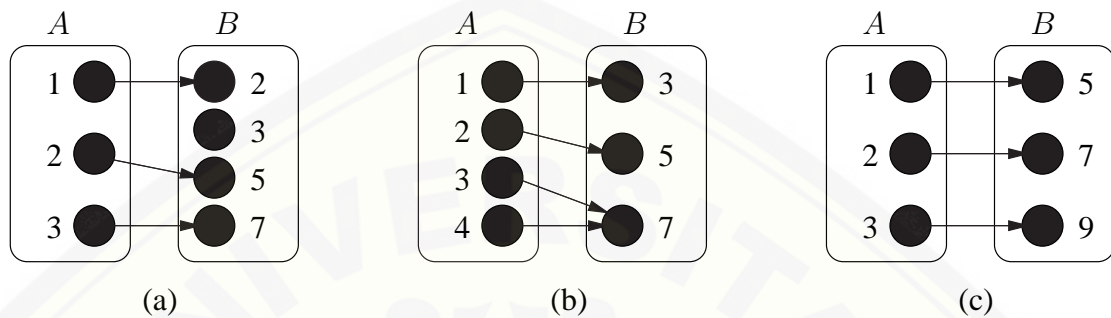


Gambar 2.6 Contoh Hasil Operasi *Shackle*

### 2.4 Fungsi dan Barisan Aritmatika Berorde Dua

Misalkan  $A$  dan  $B$  merupakan dua himpunan tak kosong. Pemetaan dari himpunan  $A$  ke himpunan  $B$  dapat dideskripsikan sebagai suatu relasi yang memasangkan setiap anggota himpunan  $A$  dengan tepat satu anggota himpunan  $B$ . Himpunan  $A$  disebut sebagai daerah asal pemetaan (*domain*) dan himpunan  $B$

diartikan sebagai daerah kawan pemetaan (*kodomain*). Sedangkan daerah hasil pemetaan disebut sebagai *range*. Pemetaan tersebut dapat dinotasikan sebagai  $f : A \rightarrow B$ . Notasi tersebut mempunyai arti bahwa fungsi  $f$  memetakan setiap anggota himpunan  $A$  dengan tepat satu pasangan anggota himpunan  $B$ .



Gambar 2.7 (a) Fungsi Injektif, (b) Fungsi Surjektif, dan (c) Fungsi Bijektif

Suatu fungsi dapat dibedakan menjadi beberapa jenis, diantaranya adalah fungsi injektif, fungsi surjektif, dan fungsi bijektif. Fungsi injektif (fungsi into atau fungsi satu-satu) adalah suatu fungsi yang elemen kodomainnya berpasangan dengan tepat satu elemen domainnya. Secara matematis fungsi  $f : A \rightarrow B$  dapat dikatakan sebagai fungsi injektif, jika dan hanya jika untuk sebarang  $a_1$  dan  $a_2$  anggota himpunan  $A$ , dimana  $a_1$  tidak sama dengan  $a_2$  maka berlaku  $f(a_1) \neq f(a_2)$ . Fungsi surjektif (fungsi onto) adalah suatu fungsi yang setiap elemen kodomainnya berpasangan dengan elemen domainnya. Secara matematis fungsi  $f : A \rightarrow B$  dapat dikatakan sebagai fungsi surjektif, jika dan hanya jika range  $f(R_f)$  sama dengan  $B$  (kodomain) atau  $\forall b \in B, \exists a \in A$  maka  $f(a) = b$ . Fungsi bijektif adalah suatu fungsi yang memenuhi fungsi injektif dan fungsi surjektif. Gambar 2.7 menunjukkan fungsi injektif, fungsi surjektif dan fungsi bijektif.

Barisan adalah suatu susunan bilangan yang dibentuk menurut suatu urutan tertentu. Bilangan-bilangan yang menyusun barisan tersebut disebut suku. Jika barisan yang suku berurutnya mempunyai beda bilangan yang sama maka barisan tersebut dikatakan sebagai barisan aritmatika. Barisan aritmatika juga ada yang

berorde dua. Barisan aritmatika berorde dua adalah barisan bilangan yang tidak memiliki beda yang tetap, tetapi jika beda tersebut dijadikan barisan bilangan akan ditemukan beda yang tetap. Dari uraian tersebut, barisan aritmatika berorde dua dapat dituliskan sebagai  $\{a, a + b, a + 2b + c, a + 3b + 3c, a + 4b + 6c, \dots, a + (n - 2)b + (\frac{(n-2)(n-3)}{2})c, a + (n - 1)b + (\frac{(n-1)(n-2)}{2})c\}$ . Jadi, rumus ke- $n$  dari suatu barisan aritmatika berorde dua adalah

$$U_n = a + (n - 1)b + \frac{(n - 1)(n - 2)c}{2} \quad (2.1)$$

dengan

$U_n$  = suku ke- $n$

$a$  = suku pertama orde ke-2

$b$  = suku pertama orde ke-1

$c$  = beda

## 2.5 Pelabelan Graf

### 2.5.1 Definisi Pelabelan Graf

Pelabelan pada suatu graf adalah suatu pemetaan bijektif yang memetakan elemen-elemen graf (titik dan sisi) ke himpunan bilangan asli berurutan. Pemetaan disebut fungsi bijektif jika setiap elemen pada graf dinomori dengan bilangan bulat positif yang berbeda (Wallis, 2001).

Suatu pemetaan satu-satu  $f$  dari  $V(G) \cup E(G)$  ke himpunan bilangan bulat  $\{1, 2, 3, \dots, p + q\}$  disebut pelabelan total  $(a, d)$ -sisi *antimagic* jika bobot sisinya  $w(uv) = f(u) + f(uv) + f(v)$  dengan  $uv \in E(G)$  adalah  $\{a, a + d, a + 2d, \dots, a + (q - 1)d\}$  untuk  $a > 0$  dan  $d \geq 0$ . Pelabelan total  $(a, d)$ -sisi *antimagic*  $f$  dikatakan super jika memiliki sifat bahwa titiknya dilabeli dengan bilangan bulat positif  $1, 2, \dots, p$  yang selalu bernilai lebih kecil dari label sisi graf  $G$  dan  $f(E(G)) = \{p + 1, p + 2, \dots, p + q\}$  (Bača dan Miller, 2008).

Terdapat sebuah kombinasi dari pelabelan total  $(a, d)$ -sisi *antimagic* dan *covering- $\mathcal{H}$*  yaitu pelabelan  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -*antimagic* total *covering*.



Menurut Dafik dkk. (2016) pelabelan  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -*antimagic total covering* graf  $G$  adalah pelabelan total  $\lambda$  dari  $V(G) \cup E(G)$  pada bilangan bulat  $\{1, 2, 3, \dots, |V(G) \cup E(G)|\}$ , untuk setiap subgraf  $H$  dari  $G$  yang isomorfik dengan  $\mathcal{H}$  dimana  $\sum \mathcal{H} = \sum_{v \in V(H)} \lambda(v) + \sum_{e \in E(H)} \lambda(e)$  merupakan barisan aritmatika. Graf  $G$  dikatakan memiliki pelabelan  $\mathcal{H}$  *antimagic super* jika  $\{\lambda(v)\}_{v \in V} = \{1, 2, \dots, |V|\}$ .

Sehingga, dapat diartikan bahwa jika suatu graf  $G = (p_G, q_G)$  mempunyai pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -*antimagic total covering* dengan fungsi total  $f(V \cup E) = \{1, 2, 3, \dots, p_G + q_G\}$  maka himpunan bobot selimut graf tersebut merupakan barisan aritmatika  $\{a, a + d, a + 2d, \dots, a(s - 1)d\}$  dimana  $a$  merupakan bobot selimut terkecil dan  $d$  batas atas nilai beda.

### 2.5.2 Pelabelan $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -*Antimagic Total Covering* Orde Dua

Suatu graf  $G$  dapat dikatakan sebagai  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -*antimagic total* orde dua apabila memiliki fungsi bijektif  $f : V(G) \cup E(G) \longrightarrow \{1, 2, \dots, |V(G)| + |E(G)|\}$  untuk setiap subgraf  $G$  isomorfis terhadap  $\mathcal{H}$  dan bobot total selimutnya  $W(\mathcal{H}) = \sum_{v \in V(\mathcal{H})} f(v) + \sum_{e \in E(\mathcal{H})} f(e)$  membentuk barisan aritmatik orde dua  $\{a, a + d, a + 3d, a + 6d, \dots, a + (\frac{n^2-n}{2})d\}$ , dengan  $a$  dan  $d$  merupakan bilangan bulat positif dan  $n$  merupakan jumlah semua subgraf  $G$  yang isomorfis terhadap  $\mathcal{H}$ . Jika fungsi tersebut ada, maka  $f$  disebut sebagai suatu  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -*antimagic total covering* dari graf  $G$ . Suatu  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -*antimagic total covering* dengan fungsi  $f$  dikatakan super apabila  $f : V(G) \longrightarrow \{1, 2, \dots, |V(G)|\}$  (Agustin dkk., 2017).

### 2.5.3 Batas Atas Nilai Beda $d$ Pelabelan Selimut Super $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -*Antimagic* Orde Dua

Batas atas nilai beda  $d$  merupakan nilai beda  $d$  terbesar dalam pelabelan super *antimagic total* suatu graf. Batas atas nilai beda  $d$  pelabelan orde dua diperoleh dari pengembangan batas atas nilai beda  $d$  pelabelan orde satu. Lemma yang digunakan untuk menghitung batas atas  $d$  pada pelabelan orde dua adalah sebagai berikut.

**Lemma 2.1.** *Jika sebuah graf  $G(V, E)$  memiliki pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$*

*antimagic total covering* maka

$$d \leq \frac{(p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H}{\frac{s^2 - s}{2}}$$

untuk  $s = |H_i|$ ,  $p_G = |V|$ ,  $q_G = |E|$ ,  $p_H = |V'|$ ,  $q_H = |E'|$  (Agustin dkk., 2017).  $\square$

## 2.6 Teknik Partisi

Teknik partisi (*partition technique*) yang dapat dinotasikan dengan  $\mathcal{P}_{m,d}^n(i, j)$  merupakan suatu metode yang digunakan untuk membagi atau memecah fungsi berdasarkan selimutnya. Partisi dapat dinyatakan dalam bentuk sebuah matriks dengan  $m$  baris dan  $n$  kolom, yang jumlah masing-masing kolomnya membentuk barisan aritmatika dengan nilai beda  $d$  digunakan untuk mengkontruksi pelabelan  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic super pada graf. Hal ini berlaku untuk pelabelan berorde satu maupun berorde dua. Salah satu contoh partisi untuk pelabelan berorde dua adalah sebagai berikut.

Tabel 2.1: Partisi untuk Pelabelan Orde Dua.

$i \setminus j$	1	2	3	4	5
1	5	4	3	2	1
2	9	8	7	6	16
3	12	11	10	17	20
4	14	13	18	21	23
5	15	19	22	24	25
	55	55	60	70	85
		0	5	10	15
			5	5	5

Misal  $n$ ,  $m$ ,  $d$ ,  $i$  dan  $j$  merupakan bilangan bulat positif atau nol. Anggap bahwa partisi  $\mathcal{P}_{m,d}^n(i, j)$  dari himpunan  $\{1, 2, 3, \dots, mn\}$  dengan  $n \geq 2$ , sedemikian hingga nilai beda antara jumlah bilangan sebanyak  $m$  baris untuk masing-masing kolom dengan  $i = 1, 2, 3, \dots, m$  dan  $j = 1, 2, 3, \dots, n$  adalah konstan  $d$ . Jumlah bilangan pada  $\mathcal{P}_{m,d}^n(i, j)$  adalah  $\sum \mathcal{P}_{m,d}^n(i, j)$  dan untuk sebarang konstanta  $b$ , notasi  $\mathcal{P}_{m,d}^n(i, j) \oplus b$  adalah hasil operasi penjumlahan setiap bilangan pada  $\mathcal{P}_{m,d}^n(i, j)$  ditambahkan dengan  $b$  (Bača dkk, 2013). Berikut adalah beberapa Lemma yang

diperoleh dari bentuk umum partisi  $\mathcal{P}_{m,d}^n(i, j)$ .

**Lemma 2.2.** Misal  $n$  dan  $m$  adalah bilangan bulat positif, untuk  $j = 1, 2, 3, \dots, n$  jumlah dari  $\mathcal{P}_{m,d_1}^n(i, j) = (i - 1)n + j; 1 \leq i \leq m$  membentuk barisan aritmatika dengan beda  $d_1 = m$  (Dafik dkk., 2017).  $\square$

**Lemma 2.3.** Misal  $n$  dan  $m$  adalah bilangan bulat positif, untuk  $j = 1, 2, 3, \dots, n$  jumlah dari  $\mathcal{P}_{m,d_2}^n(i, j) = (j - 1)m + i; 1 \leq i \leq m$  membentuk barisan aritmatika dengan beda  $d_2 = m^2$  (Dafik dkk., 2017).  $\square$

**Lemma 2.4.** Misal  $n$  dan  $m$  adalah bilangan bulat positif dengan  $n \equiv 1(\text{mod}2)$  dan  $m \equiv 0(\text{mod}2)$ , untuk  $j = 1, 2, 3, \dots, n$  jumlah dari

$$\mathcal{P}_{m,d_3}^n(i, j) = \begin{cases} (i - 1)n + \frac{j+1}{2}; 1 \leq i \leq m, i \equiv 1(\text{mod}2) \\ \frac{j-n}{2} + in; 1 \leq i \leq m, i \equiv 0(\text{mod}2), j \equiv 1(\text{mod}2) \\ \frac{j+1-n}{2} + in; 1 \leq i \leq m, i \equiv 1(\text{mod}2) \\ (i - 1)n + \frac{j}{2}; 1 \leq i \leq m, i \equiv 0(\text{mod}2), j \equiv 0(\text{mod}2) \end{cases}$$

membentuk barisan aritmatika dengan beda  $d_3 = \frac{m}{2}$  (Dafik dkk., 2017).  $\square$

**Lemma 2.5.** Misal  $n$  dan  $m$  adalah bilangan bulat positif, untuk  $j = 1, 2, 3, \dots, n$  jumlah dari  $\mathcal{P}_{m,d_4}^n(i, j) = 1 + ni - j; 1 \leq i \leq m$  membentuk barisan aritmatika dengan beda  $d_4 = -m$  (Agustin dkk., 2016).  $\square$

**Lemma 2.6.** Misal  $n$  dan  $m$  adalah bilangan bulat positif, untuk  $j = 1, 2, 3, \dots, n$  jumlah dari  $\mathcal{P}_{m,d_5}^n(i, j) = mn + i - mj; 1 \leq i \leq m$  membentuk barisan aritmatika dengan beda  $d_5 = -m^2$  (Agustin dkk., 2016).  $\square$

**Lemma 2.7.** Misal  $n$  dan  $m$  adalah bilangan bulat positif dengan  $n \equiv 1(\text{mod}2)$  dan  $m \equiv 0(\text{mod}2)$ , untuk  $j = 1, 2, 3, \dots, n$  jumlah dari

$$\mathcal{P}_{m,d_6}^n(i, j) = \begin{cases} ni - \frac{j}{2} + \frac{1}{2}; 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n, i \equiv 1(\text{mod}2), j \equiv 1(\text{mod}2) \\ ni - \frac{n}{2} - \frac{j}{2} + 1; 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n, i \equiv 0(\text{mod}2), j \equiv 1(\text{mod}2) \\ ni - \frac{n}{2} - \frac{j}{2} + \frac{1}{2}; 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n, i \equiv 1(\text{mod}2), j \equiv 0(\text{mod}2) \\ ni - \frac{j}{2} + 1; 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n, i \equiv 0(\text{mod}2), j \equiv 0(\text{mod}2) \end{cases}$$

membentuk barisan aritmatika dengan beda  $d_6 = -\frac{m}{2}$  (Agustin dkk., 2016).  $\square$

## 2.7 Aplikasi Graf

Perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi berkembang semakin pesat. Perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi tersebut tidak lepas dari peranan matematika yang sangat penting. Cabang ilmu matematika juga ikut berkembang salah satunya adalah teori graf. Teori graf dapat digunakan dalam menyelesaikan permasalahan dalam kehidupan sehari-hari. Salah satu contohnya adalah penerapan pelabelan total selimut super antimagic dalam penyampaian pesan rahasia (*ciphertext*) dalam kriptografi.

Kriptografi adalah pengkodean suatu pesan yang bersifat rahasia melalui proses enkripsi dan dekripsi. Proses enkripsi adalah proses mengolah pesan yang akan dikirim (*plaintext*) menjadi suatu pesan rahasia (*ciphertext*), sementara proses dekripsi adalah proses mengolah *ciphertext* menjadi *plaintext*. Kedua proses tersebut membutuhkan suatu kunci rahasia untuk mengatur kedua proses tersebut. Kunci dalam proses tersebut dapat berupa pelabelan total selimut super antimagic orde dua pada suatu graf. Inilah peran graf dalam proses penyampaian pesan rahasia.

Langkah-langkah untuk proses enkripsi dan dekripsi yang kuncinya berupa pelabelan total selimut super antimagic orde dua pada suatu graf adalah sebagai berikut.

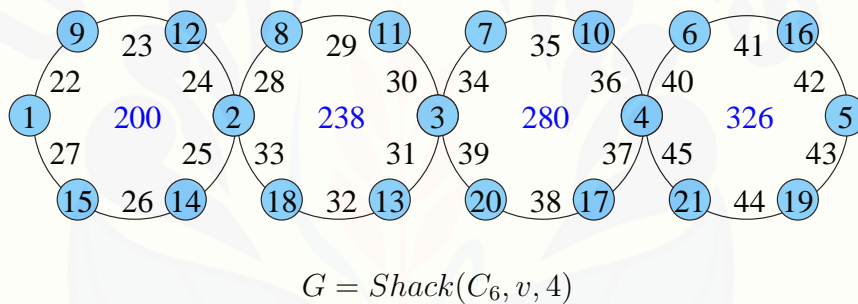
- a. menentukan dan memilih graf yang memiliki jumlah titik dan sisi lebih dari atau sama dengan banyaknya *plaintext*;
- b. melabeli titik dan sisi dengan pelabelan total selimut super antimagic orde dua;
- c. hasil pelabelan tersebut merupakan kunci yang digunakan dalam proses enkripsi dan dekripsi dengan urutan kuncinya dimulai dari selimut pertama dengan nilai label titik dan sisinya dari yang kecil ke yang besar dan dilanjutkan ke selimut berikutnya dengan aturan yang sama dan seterusnya;
- d. setelah kunci diperoleh, maka proses enkripsi dan dekripsi dapat dilakukan

sesuai dengan metode yang digunakan.

Penelitian ini menggunakan aturan *vigènere cipher* sebagai contohnya.

Dalam proses enkripsi fungsi yang digunakan yaitu  $y_i = (x_i + k_i)(\text{mod } 26)$  sementara untuk proses dekripsinya adalah  $x_i = (y_i - k_i)(\text{mod } 26)$ .

Misal, pesan yang akan disampaikan adalah "UNIVERSITAS JEMBER" dengan mengabaikan spasi. Kemudian kalimat tersebut akan dienkripsi dengan graf hasil operasi *shackle* ( $G = \text{shack}(C_6, v, 4)$ ) sebagai kuncinya. Setelah mengetahui *plaintext* dan kuncinya, dibangunlah pelabelan total selimut super antimagic orde dua graf  $G = \text{shack}(C_6, v, 4)$  dan lengkapi lebel titik dan sisinya hingga bobot total selimutnya membentuk barisan aritmatika orde dua dengan beda  $d = 4$ , seperti pada Gambar 2.8.



Gambar 2.8 Hasil Pelabelan Titik dan Sisi serta Bobot Total Selimut Graf  $G = \text{Shack}(C_6, v, 4)$

Dari pelabelan titik dan sisi tersebut, diperoleh tabel partisi yang berisi label graf yang berpola dengan jumlah masing-masing kolom membentuk barisan aritmatika orde dua dengan nilai beda  $d$ . Tabel partisi tersebut adalah sebagai berikut.

Kemudian *plaintext* tersebut dienkripsi dengan mengabaikan spasi dan tanda baca yang merujuk pada aturan *vigènere cipher* yaitu dengan teknik substitusi angka menggunakan sistem (mod 26) yang menukarkan huruf dengan angka.

Tabel 2.2: Tabel Substitusi Algoritma Kriptografi *Vigènere Cipher*

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Hasil operasi enkripsi mengubah *plaintext* "UNIVERSITASJEMBER" menjadi *ciphertext* "VPRHSGOFRZSKGPJPE". Sementara untuk hasil proses dekripsi mengubah *ciphertext* "VPRHSGOFRZSKGPJPE" menjadi *plaintext* "UNIVERSITASJEMBER". Proses enkripsi dan dekripsi secara lengkap tercantum pada Tabel 2.3 dan Tabel 2.4.

Tabel 2.3: Proses Enkripsi  $y_i = (x_i + k_i)(mod\ 26)$

<i>Plaintext</i>	$x_i$	$k_i$	$x_i + k_i$	$y_i$	<i>Ciphertext</i>
U	20	1	21	21	V
N	13	2	15	15	P
I	8	9	17	17	R
V	21	12	33	7	H
E	4	14	18	18	S
R	17	15	32	6	G
S	18	22	40	14	O
I	8	23	31	5	F
T	19	24	43	17	R
A	0	25	25	25	Z
S	18	26	44	18	S
J	9	27	36	10	K
E	4	2	6	6	G
M	12	3	15	15	P
B	1	8	9	9	J
E	4	11	15	15	P
R	17	13	30	4	E

Tabel 2.4: Proses Dekripsi  $x_i = (y_i - k_i)(mod\ 26)$

<i>Ciphertext</i>	$y_i$	$k_i$	$y_i - k_i$	$x_i$	<i>Plaintext</i>
V	21	1	20	20	U
P	15	2	13	13	N
R	17	9	8	8	I
H	7	12	-5	21	V

<i>Ciphertext</i>	$y_i$	$k_i$	$y_i - k_i$	$x_i$	<i>Plaintext</i>
S	18	14	4	4	E
G	6	15	-9	17	R
O	14	22	-8	18	S
F	5	23	-18	8	I
R	17	24	-7	19	T
Z	25	25	0	0	A
S	18	26	-8	18	S
K	10	27	-17	9	J
G	6	2	4	4	E
P	15	3	12	12	M
J	9	8	1	1	B
P	15	11	4	4	E
E	4	13	-9	17	R

### 2.8 Hasil Super $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -Antimagic Total Covering

Pada bagian ini merupakan beberapa hasil super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic total covering dari penelitian terdahulu yang digunakan sebagai rujukan pada penelitian ini.

Tabel 2.5: Hasil Super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -Antimagic Total Covering.

Graf	$a$	$d$	Hasil
<i>Shackle Graf Kipas</i> ( $F_n$ )	$18n + 115$	3	
	$18n + 111$	8	
	$18n + 87$	24	
	$18n + 82$	29	
(Azizah dan Dafik, 2014)			-
<i>Shackle Graf Triangular Book</i> ( $SBT_n$ )	$36n + 84$	96	$(a, d)$ - $Bt_3 + 2e$
	$52n + 68$	60	
	$60n + 60$	48	
(Pudyaningrum dkk., 2014)			-
Amalgamasi Graf Roda	$21m + 1065$	9	
	$21m + 103$	7	
	$23m + 92$	5	
	$21m + 106$	9	
(Anggraeni dkk., 2015)			-
Shakel Graf Kipas Konektif ( $SF_4^n$ )	$63n + 15$	0	
	$55n + 23$	16	
	$39n + 63$	24	
	$50n + 28$	26	
(Cholidah dkk., 2015)			-

Graf	$a$	$d$	Hasil
Amalgamasi Graf Kipas ( $amal(F_n, P_n, 2)$ )	$\frac{29n+32}{2}$	0	$B_2$
	$\frac{29n+25}{2}$	0	
	$13n + 19$	1	
	$11n + 23$	3	
(Latifah dkk., 2015)			-
Graf Windmill ( $WD_5^n$ )	$98n + 22$	0	$WD_5$
	$95n + 25$	6	
	$91n + 29$	14	
	$88n + 32$	20	
	$86n + 34$	24	
	$73n + 47$	50	
(Milasari dkk., 2015)			-
Shackle of Cycle with Cords ( $Shack(C_6^3, e, n)$ )	$52n + 68$	64	$C_6^3$
	$60n + 60$	48	
	$58n + 76$	31	
	$64n + 68$	21	
	$61n + 79$	19	
(Novitasari dkk., 2015)			-
Graf Helm $H_n$	$\frac{31n+15}{2}$	5	$S_3$
	$\frac{19n+27}{2}$	7	
	$\frac{37n+9}{2}$	11	
(Rosyidah dkk., 2015)			-



## BAB 3. METODE PENELITIAN

### 3.1 Jenis Penelitian

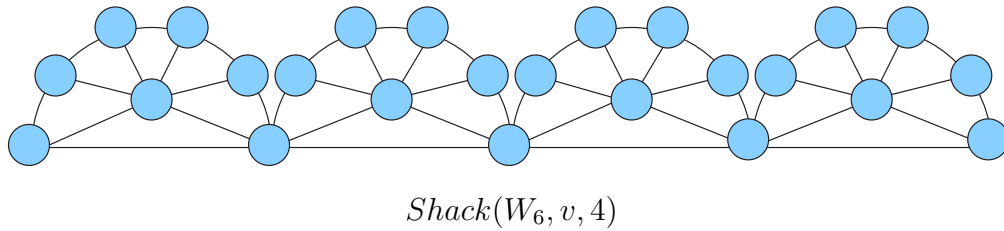
Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode deduktif aksiomatik, yaitu dengan menurunkan aksioma atau teorema yang telah ada, kemudian diterapkan dalam super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -*antimagic* total covering orde dua pada graf hasil operasi *shackle* dengan titik sebagai penghubung yang dinotasikan dengan  $shack(H, v, n)$ . Langkah awal yang dilakukan dalam penelitian ini adalah menentukan kardinalitas titik dan sisi graf  $shack(H, v, n)$ , kemudian pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -*antimagic* orde dua dibuat rumus pola pelabelan dengan menggunakan metode pendeteksian pola (*pattern recognition*) untuk menentukan pola umumnya.

### 3.2 Rancangan Penelitian

Rancangan penelitian digunakan untuk memberikan gambaran secara sistematis terhadap penelitian yang akan dilakukan. Adapun rancangan penelitian tersebut adalah sebagai berikut:

#### 3.2.1 Penotasian Titik dan Sisi Graf

Pada penelitian ini, akan dilakukan pelabelan pada  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -*antimagic total covering* orde dua pada graf hasil operasi *shackle*. Operasi *shackle* pada graf  $G = shack(H, v, n)$  dengan  $v$  merupakan titik penghubung antar graf  $H$  dan  $n$  merupakan jumlah graf  $H$ . Penentuan notasi titik dan sisi pada graf  $G$  dilakukan sebelum pelabelan. Penotasian titik dan sisi berguna untuk mempermudah menentukan kardinalitas titik dan sisi graf tersebut.

Gambar 3.1 Graf Hasil Operasi *Shackle*

### 3.2.2 Indikator Pelabelan Graf

Indikator pelabelan selimut super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -*antimagic* orde dua pada graf hasil operasi *shackle* dalam penelitian ini adalah:

a. Label titik berbeda semua

Label titik untuk pelabelan selimut super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -*antimagic* orde dua pada graf hasil operasi *shackle* merupakan suatu fungsi bijektif yang memetakan himpunan titik pada graf hasil operasi *shackle* ke bilangan bulat dari 1 sampai sejumlah titik pada graf yang diteliti.

b. Label sisi berbeda semua

Label sisi untuk pelabelan selimut super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -*antimagic* orde dua pada graf hasil operasi *shackle* merupakan suatu fungsi bijektif yang memetakan himpunan sisi pada graf hasil operasi *shackle* ke bilangan bulat dari banyaknya titik ditambah 1 sampai sejumlah titik dan sisi pada graf yang diteliti.

c. Bobot total selimut

Bobot total selimut adalah jumlah label titik dan label sisi pada setiap selimut. Dimana pada penelitian ini, bobot total selimut yang akan diteliti adalah bobot total selimut yang membentuk barisan aritmatika berorde dua dengan beda  $d$ .

### 3.3 Teknik Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada graf hasil operasi *shackle*. Teknik penelitian yang digunakan adalah sebagai berikut:

a. menghitung jumlah titik  $p$  dan sisi  $q$  pada graf  $shack(H, v, n)$ ;

Pada bagian ini akan dihitung jumlah titik dan sisi dari graf hasil operasi *shackle* yang dinotasikan dengan  $shack(H, v, n)$ , lalu kemudian akan dipilih untuk  $H = W_s, K_s, H_s$  sebagai contoh kasus.

- b. menentukan batas atas nilai beda  $d$  pada graf  $shack(H, v, n)$  dengan menggunakan Lemma;

Setelah jumlah titik dan sisi diperoleh maka akan ditentukan batas atas nilai beda  $d$  yang dimiliki oleh graf hasil operasi *shackle*  $shack(H, v, n)$ , dan dipilih untuk  $H = W_m, K_s, H_s$  sebagai contoh kasus.

- c. menentukan pelabelan titik dan sisi pada graf  $shack(H, v, n)$  dengan metode partisi;

Pada bagian ini akan diberikan label pada titik dan sisi graf  $shack(H, v, n)$ , untuk  $H = W_m, K_s, H_s$  dengan menggunakan teknik partisi. Adapun Partisi yang digunakan adalah partisi berorde dua.

- d. menentukan fungsi bijektif label titik dan sisi pada graf  $shack(H, v, n)$ ;

Pada bagian ini akan dibuat fungsi titik dan sisi dari graf  $shack(H, v, n)$  untuk  $H = W_m, K_s, H_s$ .

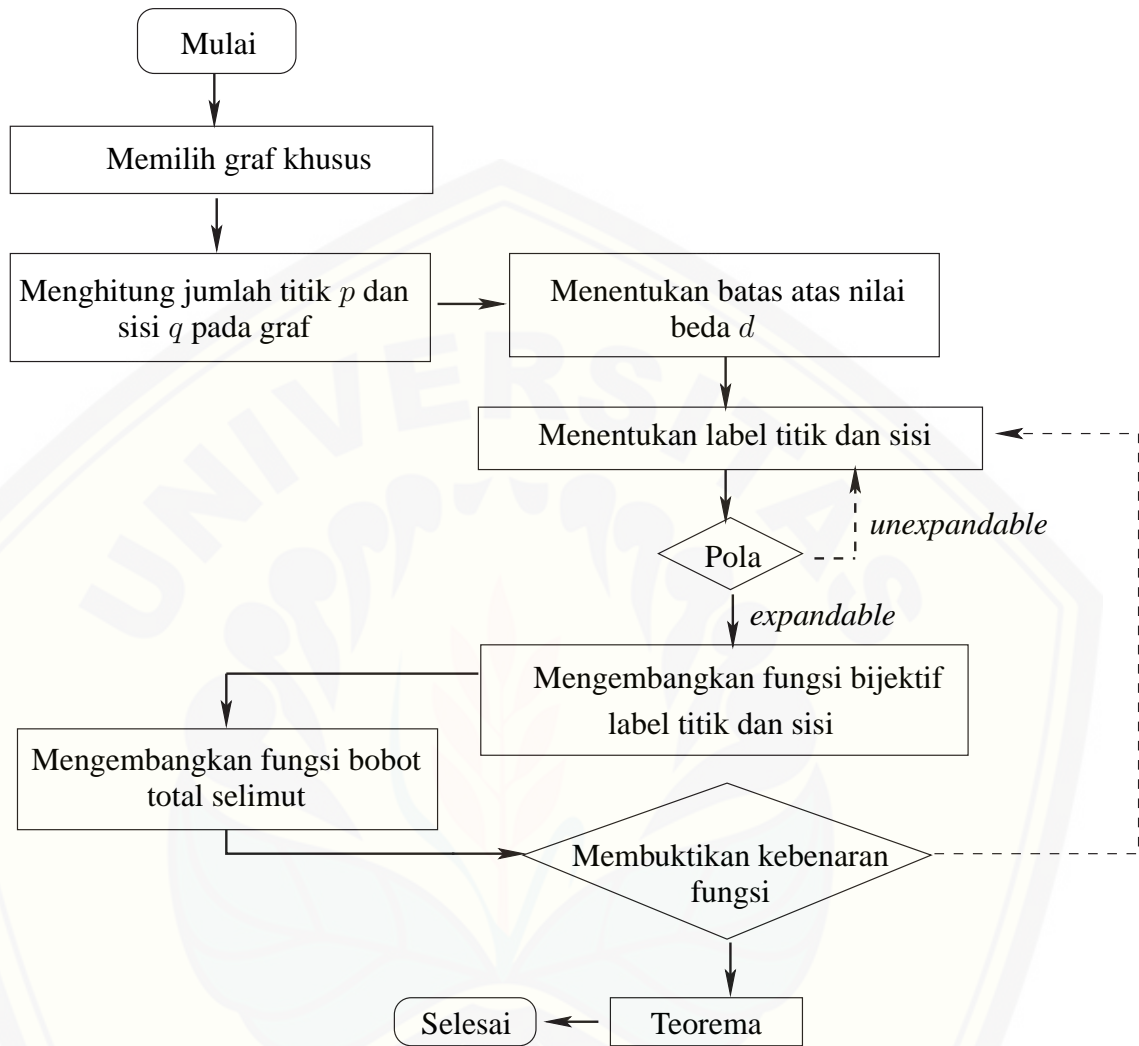
- e. mengembangkan fungsi bobot total selimut pada graf  $shack(H, v, n)$ ;

Setelah fungsi titik dan sisi diperoleh, maka selanjutnya akan dihitung bobot total selimut dari  $shack(H, v, n)$  untuk  $H = W_m, K_s, H_s$ . Bobot total selimut merupakan penjumlahan dari jumlah fungsi titik dan fungsi sisi yang diperoleh dalam selimut.

- f. membuktikan kebenaran fungsi;

- g. menemukan teorema.

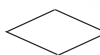
Penelitian ini dilakukan untuk menemukan berbagai pola pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic total orde dua dengan berbagai nilai beda  $d$ . Secara umum, langkah-langkah penelitian diatas dapat disajikan dalam *flowchart* pada Gambar 3.2.



Keterangan :

 = Kegiatan awal dan akhir

 = Kegiatan penelitian

 = Analisis uji

 = Aliran kegiatan utama

 = Aliran pengecekan

Gambar 3.2 Bagan Penelitian

## BAB 5. KESIMPULAN DAN SARAN

### 5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa:

- Batas atas nilai beda  $d$  dari *super antimagic total covering* orde dua pada graf hasil operasi *shackle* adalah  $d \leq \frac{2[p_H^2 - p_H + q_H^2]}{n-2}$ .
- Fungsi bijektif partisi untuk pelabelan berorde dua yang ditemukan adalah
  - 1)

$$\mathcal{P}_{m,d_7}^{*n}(i,j) = \begin{cases} \frac{2mi-i^2+i-2j+2}{2}; 1 \leq i \leq m, i+j \leq m+1 \\ \frac{-2m^2-4m+4mi+4mj-i^2+3i-2ij-j^2+j}{2}; 1 \leq i \leq m, i+j > m+1 \end{cases}$$

dan diperoleh  $\sum_{i=1}^m \mathcal{P}_{m,d_7}^{*n}(i,j) = \frac{2m^3+3m^2+(3j^2-9j+7)m}{6}$  membentuk barisan aritmatika orde dua dengan beda  $d_7 = m$ ;

2)

$$\mathcal{P}_{m,d_8}^{*n}(i,j) = \begin{cases} \frac{2m^2-2mi+i^2-i+2j}{2}; 1 \leq i \leq m, i+j \leq m+1 \\ \frac{4m^2+4m-4mi-4mj-3i-j+2ij+i^2+j^2+2}{2}; 1 \leq i \leq m, i+j > m+1 \end{cases}$$

dan diperoleh  $\sum_{i=1}^m \mathcal{P}_{m,d_8}^{*n}(i,j) = \frac{4m^3-3m^2-(3j^2-9j+1)m}{6}$  membentuk barisan aritmatika orde dua dengan beda  $d_8 = -m$ .

- Pelabelan super  $(nm_1(m_1-1) + 3m_1 + \frac{m_3^2}{3} + \frac{m_2^2}{2} + \frac{m_2}{6} + \frac{nm_3}{2}(m_3-1) + m_3 + \frac{m_4}{2}(1+m_4) + \frac{m_5}{4}(2nm_5-n+3) + \frac{2m_6^3}{3} - \frac{m_6^2}{2} + \frac{5m_6}{6} + \frac{nm_7}{2}(m_7+1) + \frac{m_8}{2}(2nm_8-m_8+1) + (n+1)(m_2+m_3+m_4+m_5+m_6+m_7+m_8+m_9) + nm_2m_3 + nm_4(m_2+m_3) + nm_5(m_2+m_3+m_4) + nm_6(m_2+m_3+m_4+m_5) + nm_7(m_2+m_3+m_4+m_5+m_6) + nm_8(m_2+m_3+m_4+m_5+m_6+m_7) + nm_9(m_2+m_3+m_4+m_5+m_6+m_7+m_8) + \frac{nc_1}{2}(c_1-1) + c_1 + \frac{c_2}{2}(c_2 +$

$1) + \frac{c_3}{4}(2nc_3 - n + 3) + \frac{nc_4}{2}(c_4 + 1) + \frac{c_5}{2}(2nc_5 - c_5 + 1) + \frac{c_6}{4}(2nc_6 + n + 1) +$   
 $(np_H - n + 1)(c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 + c_6) + nc_1c_2 + nc_3(c_1 + c_2) + nc_4(c_1 + c_2 +$   
 $c_3) + nc_5(c_1 + c_2 + c_3 + c_4) + nc_6(c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5), m_2 - m_6)$ - $\mathcal{H}$ -*antimagic*  
*total covering* orde dua pada graf *shack* =  $(H, v, n)$  dengan  $n \geq 2$  dimana  
 $m_1, m_2, \dots, m_9$  dan  $c_1, c_1, \dots, c_6$  merupakan banyaknya baris dalam variasi  
 partisi yang digunakan pada pelabelan total selimut super antimagic orde dua  
 dengan  $m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6 + m_7 + m_8 + m_9 = p_H - 2$  dan  $c_1 + c_2 +$   
 $c_3 + c_4 + c_5 + c_6 = q_H$  serta  $p_H$  dan  $q_H$  adalah banyaknya titik dan sisi pada  
 graf  $H$  untuk mendapatkan variasi nilai  $d$ .

## 5.2 Saran

Berdasarkan hasil penelitian mengenai pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -*antimagic*  
*total covering* orde dua pada graf hasil operasi *shackle*, peneliti memberikan saran  
 kepada pembaca agar dapat melakukan penelitian super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -*antimagic* *total*  
*covering* orde dua pada graf gabungan saling lepas hasil operasi *shackle* dengan  
 partisi orde dua yang berbeda.

**DAFTAR PUSTAKA**

- Agustin, I. H., Dafik, dan R. M. Prihandini. 2017. Super Complete-Antimagicness of Amalgamation of Any Graph. In Preparation.
- Agustin, I. H., Dafik, dan Milasari M. D. 2016. *Super Complete-Antimagicness of Amalgamation Total of Complete Graph*. Working Paper. Jember: CGANT UNEJ.
- Anggraeni, N., Dafik, dan Slamini. 2015. Super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -Antimagic Total Covering of Amalgamation Wheel Graph for Construction of Cryptosystem Polyalphabetic. *Proceeding The 13<sup>th</sup> GraphMasters Workshop*. 25-26 September 2015. *CGANT UNEJ*: 46.
- Azizah, I dan Dafik. 2014. Super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -Antimagic Total Selimut pada Graf Shackle Kipas  $F_4$ . *Prosiding Seminar Nasional Matematika*. 19 Nopember 2014. *Jurusan Matematika FMIPA UNEJ*: 682-690.
- Bača, M., L. Brankovic, M. Lascsóková, O. Phanalasy, dan A. S. Feňovčíová. 2013. On  $d$ -Antimagic labelings of Plane Graphs. *Electronic Journal of Graph Theory and Applications* 1(1):28-39.
- Bača, M. dan M. Miller. 2008. *Super Edge-Antimagic Graphs: A Wealth of Problems and Some Solutions*. USA: Brown Walker Press.
- Cholidah, F., I. H. Agustin, dan Dafik. 2015. Pelabelan Super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -Antimagic Total Decomposition of Connected Shackle of Fan Graph. *Proceeding The 13<sup>th</sup> GraphMasters Workshop*. 25-26 September 2015. *CGANT UNEJ*: 45.
- Dafik, I. H. Agustin, dan D. Hardiyantik. 2016. The Connected and Disjoint Union of Semi Jahangir Graphs Admit a Cycle-Super  $(a, d)$ -Antimagic Total Labeling. *ICMAME. Journal of Physics: Conference Series* 693(1).
- Dafik, Moh. Hasan, Y. N. Azizah, dan I. H. Agustin. 2017. A Generalized Shackle of Any Graph  $H$  Admits a Super  $H$ -Antimagic Total Labeling. *Proceeding*

*IEEE*. In Press.

Damayanti, R. T. 2011. Automorfisma Graf Bintang dan Graf Lintasan. *CAUCHY* 2(1):35-40.

Gallian, J. A. 2011. A Dynamic Survey of Graph Labeling. *The Electronic Journal of Combinatorics* 18:1-256.

Gutiérrez dan Lladó. 2005. Magic Coverings. *Of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing* 55:451-461.

Hartsfield, N. dan Ringel. 1994. *Pearls in Graph Theory*. London: Academic Press Limited.

Inayah, N. 2013. *Pelabelan  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -Antiajaib pada Beberapa Kelas Graf*. Bandung: Institut Teknologi Bandung.

Kotzig, A. dan Rosa. 1970. Magic Valuations of Finite Graphs. *Canadian Mathematical Bulletin* 13:451-461.

Latifah, S., I. H. Agustin, dan Dafik. 2015. Super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -Antimagic Total Covering of Connected Amalgamation of Fan Graph. *Proceeding The 13<sup>th</sup> GraphMasters Workshop*. 25-26 September 2015. *CGANT UNEJ*: 51.

Maryati, T. K., Salman, A. N. M., Baskoro, E. T., Ryan, J. dan Miller, M. 2010. On  $\mathcal{H}$ -Supermagic Labelings for Certain Shackles and Amalgamations of a Connected Graph. *Utilitas Mathematica* 83: 333-342.

Milasari, M. D., I. H. Agustin, dan Dafik. 2015. On Super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -Antimagic Total Decomposition of Windmill Graph. *Proceeding The 13<sup>th</sup> GraphMasters Workshop*. 25-26 September 2015. *CGANT UNEJ*: 52.

Munir, R. 2010. *Matematika Diskrit*. Bandung: Penerbit Informatika.



Novitasari, W., Dafik, dan Slamini. 2015. Super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -Antimagic Total Covering on Shackle of Cycle with Cords. *Proceeding The 13<sup>th</sup> GraphMasters Workshop*. 25-26 September 2015. *CGANT UNEJ*: 56.

Pudyaningrum, P. R. H, I. H. Agustin, dan Dafik. 2014. Super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -Antimagic Total Selimut pada Shackle Graf Triangular Book. *Prosiding Seminar Nasional Matematika*. 19 Nopember 2014. *Jurusan Matematika FMIPA UNEJ*: 506-515.

Rosyidah, K., Dafik, dan S. Setiawani. 2015. Super  $(a, d)$ - $S_3$ -Antimagic Total Labeling of Decomposition Helm Graph. *Proceeding The 13<sup>th</sup> GraphMasters Workshop*. 25-26 September 2015. *CGANT UNEJ*: 61.

Wallis, W. D. 2001. *Magic Graphs*. Boston: Birkhauser.