ANALISA SUPER(a,d)-$\mathcal{H}$- ANTIMAGIC TOTAL COVERING ORDE DUA PADA GRAF HASIL OPERASI *AMALGAMASI*

SKRIPSI

Oleh

Junita Velawati

NIM 131810101048

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS JEMBER

2017

ANALISA SUPER(a,d)-$\mathcal{H}$- ANTIMAGIC TOTAL COVERING ORDE DUA PADA GRAF HASIL OPERASI *AMALGAMASI*

SKRIPSI

diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat
untuk menyelesaikan Program Studi Matematika (S1) dan mencapai gelar Sarjana Sains

Oleh

Junita Velawati

NIM 131810101048

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS JEMBER

2017

HALAMAN PERSEMBAHAN

Dengan menyebut nama Allah yang Maha Pengasih dan Maha Penyayang serta sholawat dan salam selalu tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW, kupersembahkan sebuah kebahagiaan dalam hidupku, teriring rasa terima kasihku yang mendalam kepada:

1. Ayahanda Mohammad Saleh dan Ibunda Juwairiyah, serta adik-adikku Savira Nayla Ramadhani dan Ahmed Yigid Al-Fattah yang senantiasa hadir dalam setiap hela nafas saya dan senantiasa mendampingi saya dalam meraih cita-cita saya;
2. Bapak dan Ibu Dosen FMIPA Matematika yang dengan sabar telah memberikan ilmu dan bimbingannya selama menyelesaikan masa studi;
3. Bapak dan ibu guru TK Nurul Jadid Muncar, SDN 6 Kedungrejo, SMP Negeri 1 Muncar dan MA Negeri Srono yang selama ini telah sabar memberikan ilmunya;
4. Teman-teman pejuang graf dan para pecinta graf lain yang tergabung dalam CGANT yang telah membagikan ilmu dan pengalaman berharga serta mengajarkan bahwa sebuah perbedaan bukanlah alasan untuk tidak saling membantu;
5. Teman-teman seperjuangan ATLAS(Angkatan 2013) FMIPA dan teman-teman RCM (Anis, Dinda, Yessy, Sida, Yanti, Mega, Andre dan Hairus) serta teman-teman SPARO MAN SRONO yang senantiasa selalu memberi semangat;
6. Saudara dan sahabat-sahabat yang senantiasa memberi dukungan serta tak henti-hentinya menghibur;
7. Almamater Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

MOTTO

"Jika engkau masuk waktu sore, janganlah menunggu pagi, dan
jika engkau masuk waktu pagi, janganlah menunggu sore, pergunakanlah kesempatan pada masa sehatmu untuk masa sakitmu, dan masa hidupmu untuk matimu"
(HR. Al-Bukhari)

"Sesuatu mungkin mau mendatangi mereka yang mau menunggu, namun hanya didapatkan oleh mereka yang semangat mengejarnya."
(Abraham Lincoln)

"Jangan mudah terguncang oleh kritikan,jadilah orang yang teguh pendirian, dan sadarilah bahwa kritikan itu akan mengangkat
harga diri Anda setara dengan kritikan tersebut."
(La Tahzan)

HALAMAN PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Junita Velawati

NIM : 131810101048

Menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang berjudul: Analisa Super (a,d)-$\mathcal{H}$-*Antimagic Total Covering* Orde Dua pada Graf Hasil Operasi *Amalgamasi* adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali jika dalam pengutipan substansi disebutkan sumbernya, dan belum diajukan pada instansi manapun, serta bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa adanya tekanan dan paksaan dari pihak manapun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, Juni 2017
Yang menyatakan,

Junita Velawati
NIM. 131810101048

SKRIPSI

ANALISA SUPER(a,d)-$\mathcal{H}$- ANTIMAGIC TOTAL COVERING ORDE DUA PADA GRAF HASIL OPERASI *AMALGAMASI*

oleh

Junita Velawati
NIM 131810101048

Dosen Pembimbing 1 : Kusbudiono, S.Si., M.Si.
Dosen Pembimbing 2 : Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si.

PERSETUJUAN

ANALISA SUPER(a,d)-$\mathcal{H}$- *ANTIMAGIC TOTAL COVERING* ORDE DUA PADA GRAF HASIL OPERASI *AMALGAMASI*

SKRIPSI

Diajukan guna memenuhi syarat untuk menyelesaikan Program Jurusan Matematika dengan Program Studi Matematika pada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember

Nama Mahasiswa	: Junita Velawati
NIM	: 131810101048
Jurusan	: Matematika
Angkatan Tahun	: 2013
Daerah Asal	: Banyuwangi
Tempat, Tanggal Lahir	: Banyuwangi, 16 Juni 1995

Disetujui oleh:

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Kusbudiono, S.Si., M.Si.	Ika Hesti Agustin, S.Si, M.Si.
NIP. 19770430 200501 1 001	NIP. 19840801 200801 2 006

HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi berjudul Analisa Super (a, d)-$\mathcal{H}$-*Antimagic Total Covering* Orde Dua pada Graf Hasil Operasi *Amalgamasi* telah diuji dan disahkan oleh Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Umum pada:

Hari :

Tanggal :

Tempat : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Tim Penguji :

Ketua,	Sekretaris,
Kusbudiono, S.Si., M.Si.	Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si.
NIP.19770430 200501 1 001	NIP.19840801 200801 2 006
Anggota I,	Anggota 2,
Prof. Drs. Dafik, M.Sc, Ph.D	Kosala D.P, S.Si., M.Si
NIP.19680802 199303 1 004	NIP. 19690828 199802 1 001

Mengetahui,
Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Jember

Drs. Sujito, Ph.D
NIP. 19610204 198711 1 001

RINGKASAN

ANALISA SUPER(a,d)-$\mathcal{H}$- ANTIMAGIC TOTAL COVERING ORDE DUA PADA GRAF HASIL OPERASI *AMALGAMASI*; Junita Velawati 131810101048; 2017:59 halaman; Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Jember.

Teori graf dikemukakan oleh matematikawan Swiss, L.Euler pada tahun 1736. Pelabelan graf pada pertengahan tahun 1960-an diperkenalkan melalui hipotesis Ringel dan Rosa. Pelabelan graf merupakan fungsi bijektif yang memetakan himpunan dari elemen-elemen graf ke himpunan bilangan bulat positif. Inayah(2013) mengembangkan pelabelan selimut $\mathcal{H}-antimagic$ pada graf G yang mempunyai sebuah fungsi bijektif sehingga terdapat jumlah-jumlah yang membentuk barisan aritmatika $a, a+d, a+2d, ..., a+(n-1)d$ yang mempunyai fungsi bijektif pada suatu graf yang berbeda dan berututan.

Pada penelitian ini, akan dibahas mengenai super (a,d)-$\mathcal{H}$-*antimagic total covering* orde dua pada operasi *amalgamasi*. suatu graf G dapat dikatakan sebagai (a,d)-$\mathcal{H}$-antimagic total apabila ada fungsi bijektif $f : V(G) \cup E(G) \longrightarrow \{1, 2, \ldots, |V(G)| + |E(G)|\}$ untuk setiap subgraf G isomorfis terhadap $\mathcal{H}$ dan bobot total selimutnya adalah $W(\mathcal{H}) = \Sigma_{v\epsilon V(\mathcal{H})} f(v) + \Sigma_{e\epsilon E(\mathcal{H})} f(e)$ membentuk barisan aritmatika orde dua $\{a, a+d, a+3d, a+6d, \ldots, a+(\frac{(n-1)(n-2)}{2})d\}$, dengan *a* dan *d* merupakan bilangan bulat positif dan *n* merupakan jumlah semua subgraf G yang isomorfis terhadap $\mathcal{H}$. *Amalgamasi* memiliki himpunan titik $V = \{A\} \cup \{x_{ij}; 1 \leq i \leq p_H - 1, 1 \leq j \leq n\}$ dan himpunan sisi $E = \{e_{ij}; 1 \leq i \leq q_H, 1 \leq j \leq n\}$. Sedangkan jumlah titik $p_G = n(p_H - 1) + 1$ dan jumlah sisi $q_G = nq_H$.

Metode yang akan digunakan dalam penelitian ini adalah metode deskriptif aksiomatik yaitu menentapkan pengertian dasar -*H*-*antimagic* orde dua, kemudian dikenalkan beberapa teorema mengenai pelabelan super (a,d)-*H*- antimagic orde dua pada graf hasil operasi *amalgamasi*. Selanjutnya menurunkan teorema tersebut untuk memperoleh pelabelan titik dan pelabelan sisi pada graf hasil operasi *amalgamasi*. Selanjutnya metode pendeteksian pola yaitu digunakan untuk

merumuskan pola pelabelan titik dan pelabelan sisi apabila graf hasil operasi *amalgamasi* diperumumkan, sehingga akan didapatkan perumusan pelabelan super (a,d)-*H*- antimagic pada graf hasil operasi *amalgamasi*.

Pada penelitian ini, diperoleh batas atas beda $d \leq \frac{2(p_H^2-p_H+q_H^2)}{n}$, selanjutnya diperoleh Lemma yang terkait dengan fungsi bijektif partisi untuk pelabelan yang digunakan pada graf operasi amalgamasi adalah $\mathcal{P}^n_{m,d_7}(j) = \frac{2n^3+4n}{6} + \frac{(-mj+mj^2)}{2}$ dan $\mathcal{P}^n_{m,d8}(j) = \frac{-2n^3+30n^2+2n}{6} + \frac{-mj^2+mj}{2}$. Sehingga, teorema baru untuk pelabelan super (a,d)-*H*- antimagic pada graf hasil operasi *amalgamasi* adalah $W_j = a + (j-1)b + \frac{(j-1)(j-2)d}{2}$ dengan $a = 1 + \frac{2n^3+4n}{6} + \frac{-2n^3+2n+30n^2}{6} + \frac{n}{2}(m_2^2 - m_2 + 2m_4^2 - 2m_4 + m_6^2 + m_6 + 2m_7^2 + 2m_8^2 + m_8) + \frac{1}{4}(4m_2 + 2m_3 + 2m_3^2 + 5m_4 - 4m_6 + 2m_7^2 + 2m_7 - m_8) + (m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6 + m_7 + m_8) + nm_1(m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6 + m_7 + m_8) + nm_2(m_3 + m_4 + m_5 + m_6 + m_7 + m_8) + nm_3(m_4 + m_5 + m_6 + m_7 + m_8) + nm_4(m_5 + m_6 + m_7 + m_8) + nm_5(m_6 + m_7 + m_8) + nm_6(m_7 + m_8) + nm_7m_8 + \frac{n}{4}(2c_1^2 - 2c_1 + 2c_3^2 - c_3 + 2c_4^2 + 2c_4 + 4c_5^2 + 2c_6^2 + c_6) + \frac{1}{2}(2c_1 + c_2 + c_2^2 + 4c_3 - c_5^2 + c_5 + c_6) + (np_H - n + 1)(c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 + c_6) + nc_1(c_2 + c_3 + c_4 + c_5 + c_6) + nc_2(c_3 + c_4 + c_5 + c_6) + nc_3(c_4 + c_5 + c_6) + nc_4(c_5 + c_6) + nc_5c_6$, $b = m_2 + m_3^2 + \frac{m_4}{2} - m_6 - m_7^2 - \frac{m_8}{2} + c_1 + c_2 + \frac{c_3}{2} - c_4 - c_5^2 - \frac{c_6}{2}$ dan nilai beda $d = m_1 - m_5$, dimana $\Sigma_{t=1}^{8} m_t = p_H - 1$ dan $\Sigma_{t=1}^{6} c_t = q_H$.

Masalah Terbuka 4.1. *Pelabelan super (a,d)-$\mathcal{H}$-antimagic total covering orde $(n \neq m)$ dua pada graf gabungan saling lepas hasil operasi amalgamasi.*

KATA PENGANTAR

Puji syukur ke hadirat Allah Swt atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga dapat diselesaikan skripsi yang berjudul ANALISA SUPER(a,d)-$\mathcal{H}$- *ANTIMAGIC TOTAL COVERING* ORDE DUA PADA GRAF HASIL OPERASI *AMALGAMASI*. Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan pendidikan strata satu (S1) pada Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Penetahuan Alam Universitas Jember.

Pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih atas bantuan dan bimbingan dalam penyusunan skripsi ini, terutama kepada yang terhormat:

1. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
2. Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
3. Kusbudiono,S.Si., M.Si., selaku Dosen Pembimbing I dan Ika Hesti Agustin, S.Si, M.Si., selaku Dosen Pembimbing II, Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D., selaku Dosen Penguji I dan Kosala Dwidja Purnomo, S.Si., M.Si., selaku Dosen Penguji II yang telah meluangkan waktu, pikiran, perhatian kritikan dan saran dalam penulisan skripsi ini;
4. Kusbudiono,S.Si., M.Si., selaku Dosen Pembimbing Akademik;
5. Dosen dan Karyawan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
6. Semua pihak yang telah membantu terselesaikannya skripsi ini.

Semoga bantuan, bimbingan, dan dorongan beliau dicatat sebagai amal baik oleh Allah SWT dan mendapat balasan yang sesuai dari-Nya. Selain itu, penulis juga menerima segala kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan skripsi ini. Akhirnya penulis berharap, semoga tesis ini dapat bermanfaat.

Jember, Juni 2017

Penulis

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR GAMBAR

Halaman

DAFTAR TABEL

BAB 1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori graf dikemukakan oleh matematikawan Swiss, L.Euler pada tahun 1736. L.Euler adalah orang pertama yang berhasil menemukan jawaban masalah jembatan Konigsberg yang merupakan masalah yang pertama kali menggunakan graf dengan jawaban masalahnya menggunakan pembuktian yang sederhana. Ia memodelkan masalah ini kedalam graf. Daratan (titik-titik yang dihubungkan oleh jembatan) dinyatakan sebagai titik (noktah) yang disebut simpul (*vertex*) dan jembatan dinyatakan sebagai garis yabg disebut sebagai sisi (*edge*).

Pelabelan graf pada pertengahan tahun 1960-an diperkenalkan melalui hipotesis Ringel dan Rosa. Pelabelan graf merupakan fungsi bijektif yang memetakan himpunan dari elemen-elemen graf ke himpunan bilangan bulat positif. Elemen-elemen graf terdiri dari himpunan titik, himpunan sisi, serta himpunan titik dan sisi. Pelabelan berkembang menjadi pelabelan super, pelabelan titik, pelabelan sisi, pelabelan total, pelabelan *magic*, dan pelabelan *antimagic*. Pelabelan super didefinisikan sebagai pelabelan titik dan sisi dimana label titik kurang dari label sisi, pelabelan titik mempunyai daerah asal berupa himpunan titik, pelabelan sisi mempunyai daerah asal berupa himpunan sisi, pelabelan total mempunyai daerah asal berupa himpunan titik dan sisi (Dafik, 2007:17). Pelabelan *magic* didefinisikan sebagai pelabelan dengan jumlah bobot total yang sama. Hartsfield dan Ringel (1994) mendefinisikan antimagic merupakan graf G yang mempunyai verteks sebanyak v_G dan e_G jika label titik dan sisinya berupa $1, 2, ..., e_G$ sehingga mempunyai bobot total berbeda. Gutterrez dan Llado (2005) mengatakan bahwa pelabelan total selimut *magic* berawal dari pelabelan total *magic*. Pelabelan total selimut $\mathcal{H}$

magic sebuah graf $G = (v_G, e_G)$ apabila setiap garis e_G terdapat pada subgraf $\mathcal{H}$ dari G yang isoformik dengan $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}$ adalah subgarf dari G. Lalu Inayah(2013) mengembangkan pelabelan selimut $\mathcal{H} - antimagic$ pada graf G yang mempunyai sebuah fungsi bijektif sehingga terdapat jumlah-jumlah yang membentuk barisan aritmatika $a, a + d, a + 2d, ..., a + (n - 1)d$ yang mempunyai fungsi bijektif pada suatu graf yang berbeda dan berututan. Nilai $d \leq n$ dengan d adalah bilangan bulat positif dan nilai n adalah nilai terbesar pada d dalam suatu graf. Nilai batas atas digunakan untuk mrngetahui pada nilai maksimum dalam mencari pelabelan super $(a, d) - \mathcal{H} - antimagic$ total covering. Pelabelan graf mempunyai nilai d (batas atas) yang berbeda dan mempunyai nilai d yang tidak tunggal (Dafik $et\ al., 2009$).

Beberapa penelitian sejenis terdahulu yang telah mengembangkan tentang pelabelan selimut antara lain, Pelabelan $(a, d) - \mathcal{H} - antimagic$ covering pada graf kipas F_n dan graf roda W_n oleh Inayah (2013). Pudyaningrum $et\ al.$ (2014) telah meneliti tentang Pengembangan Total Selimut Super pada Graf *Shackel* Tringular Book. Jamil $et\ al.$ (2014) meneliti tentang Super $(a, d) - \mathcal{H} - antimagic$ Total Covering pada Gabungan Saling Lepas Graf Tringular Ladder. Siti (2016) meneliti tentang Antimagicness Super Total Selimut Pada Joint *Graf* serta Aplikasi untuk Pengembangan *Ciphertex*. Haniah (2016) meneliti tentang Analisa Antimagic Total Covering Super pada *Shackle* Graf Khusus dan Aplikasinya dalam Mengembangkan *Ciphertex*.

Pada penelitian ini, akan dibahas mengenai graf pada operasi *amalgamasi*. Untuk meneliti penelitian ini langkah awal yaitu menentukan nilai batas atas beda ***d*** dari *super antimagic total covering* orde dua pada graf hasil operasi *amalgamasi*, selanjujtnya menentukan fungsi partisi untuk pelabelan yang digunakan untuk mendapatkan nilai fungsi bijektif pelabelan super (a, d)-$\mathcal{H}$-*super antimagic total covering* orde dua pada graf hasil operasi *amalgamasi*.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan pemaparan dari latar belakang di atas, maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah:

a. berapa nilai batas atas beda *d* dari *super antimagic total covering* orde dua pada graf hasil operasi *amalgamasi*?
b. bagaimana fungsi bijektif partisi untuk pelabelan?
c. bagaimana fungsi bijektif pelabelan super (a, d)-$\mathcal{H}$-*antimagic total covering* orde dua pada graf hasil operasi *amalgamasi*?

1.3 Tujuan Penelitian

Sesuai dengan rumusan masalah dan pemaparan latar belakang diatas, adapun tujuan dari penelitian ini adalah:

a. menentukan nilai batas atas beda *d* dari *super antimagic total covering* orde dua pada graf hasil operasi *amalgamasi*;
b. menentukan fungsi bijektif partisi untuk pelabelan;
c. menentukan fungsi bijektif pelabelan super (a, d)-$\mathcal{H}$- *antimagic total covering* orde dua pada graf hasil operasi *amalgamasi*.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari hasil penelitian ini adalah:

a. menambahkan pengetahuan baru tentang teori graf, khususnya tentang *covering* pada graf hasil operasi *amalgamasi*.
b. memberi motivasi peneliti graf yang lain tentang *antimagic* super total selimut pada graf jenis lainnya.
c. hasil penelitian ini diharapkan dapat digunakan sebagai pengembangan atau perluasan ilmu dan aplikasi dalam masalah *antimagic* super total selimut.

1.5 Kebaharuan

Kebaharuan pada peneliti ini diantaranya sebagai berikut:

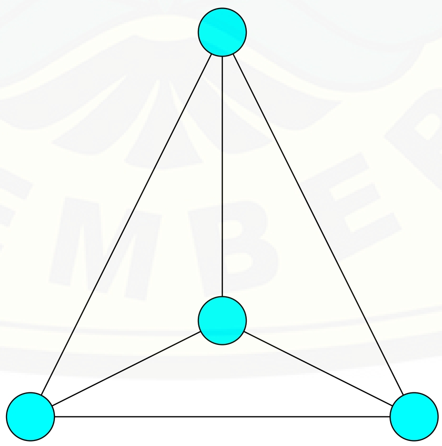
a. batas atas nilai beda d pada pelabelan berorde dua;
b. teknik pelabelan yang digunakan merupakan teknik partisi berorde dua;
c. mengeneralisasi pelabelan super (a, d)-$\mathcal{H}$-*antimagic total covering* orde dua pada graf hasil operasi *amalgamasi*.

BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Konsep Dasar dan Terminologi Graf

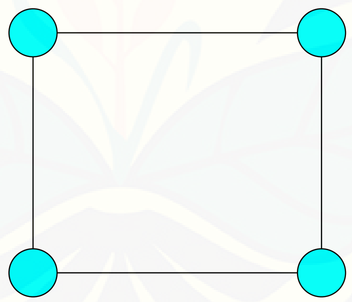
Graf G adalah pasangan himpunan (V, E) ditulis dengan notasi $G = (V, E)$, yang dalam hal ini V adalah himpunan tidak-kosong dari simpul-simpul (vertex atau titik) dan E adalah himpunan sisi (*edge*) yang menghubungkan sepasang simpul. Pada pengertian graf diatas bahwa V tidak boleh kosong, sedangkan E boleh kosong. Jadi, sebuah graf dimungkinkan tidak mempunyai sisi satu buah pun, tetapi titik/simpul harus ada, minimal satu.

Graf yang hanya mempunyai satu buah titik tanpa sebuah sisi pun dinamakan graf trivial. Titik pada graf dapat dinomori dengan huruf, seperti $a, b, c, ..., v, w, ...$, dengan bilangan asli $1, 2, 3, ...$, atau gabungan keduanya. Sedangkan sisi yang menghubungkan titik u dan titik v dinyatakan dengan pasangan (u, v) atau dinyatakan dengan lambang $e_1, e_2, ...$ dan juga dapat ditulis dengan $e = (u, v)$. Gambar 2.1 adalah contoh graf yang dinamakan graf G.



Gambar 2.1 Graf G

Graf dapat dikelompokkan menjadi beberapa katagori (jenis) bergantung pada sudut pandang pengelompokannya. Pengelompokan graf dapat dipandang berdasarkan ada tidaknya sisi ganda atau sisi kalang, berdasarkan jumlah titik, atau berdasarkan orientasi arah pada sisi. Berdasarkan ada tidaknya sisi ganda pada suatu graf, maka secara umum dapat dikelompokkan menjadi dua jenis yaitu graf sederhana (*simple graph*) dan graf tak-sederhana (*unsimple-graph*). Graf sederhana (*simple graph*) adalah graf yang tidak mengandung gelang maupun sisi-ganda. Graf tak-sederhana (*unsimple-graph*) adalah graf yang mengandung sisi ganda atau gelang. Ada dua macam graf tak-sederhana, yaitu graf ganda (*multigraph*) dan graf semu (*pseudograph*). Graf ganda adalah graf yang mengandung sisi ganda. Sisi ganda yang menghubungkan sepasang titik bisa bisa lebih dari dua buah. Sisi ganda dapat diasosiasikan sebagai pasangan tak-terurut yang sama. Graf semu adalah graf yang mengandung gelang (*loop*). Graf semu lebih umum daripada graf ganda, karena sisi pada graf semu dapat terhubung ke dirinya sendiri. Gambar 2.2 adalah contoh graf sederhana.



Gambar 2.2 Contoh graf sederhana

Suatu graf dikatakan terhubung atau konektif *(connected)*, jika ada lintasan dari u ke v dan jika tidak ada lintasan dari u ke v maka disebut graf tak terhubung atau diskonektif *(disconnected)*. Jarak antara titik u dan v dalam G yang ditulis $d(u,v)$ adalah panjang dari jarak tersingkat antara u dan v. Diameter dari G yang dituliskan $diam(G)$ adalah jarak maksimum antara sembarang dua titik dalam G (Lipchutz dan

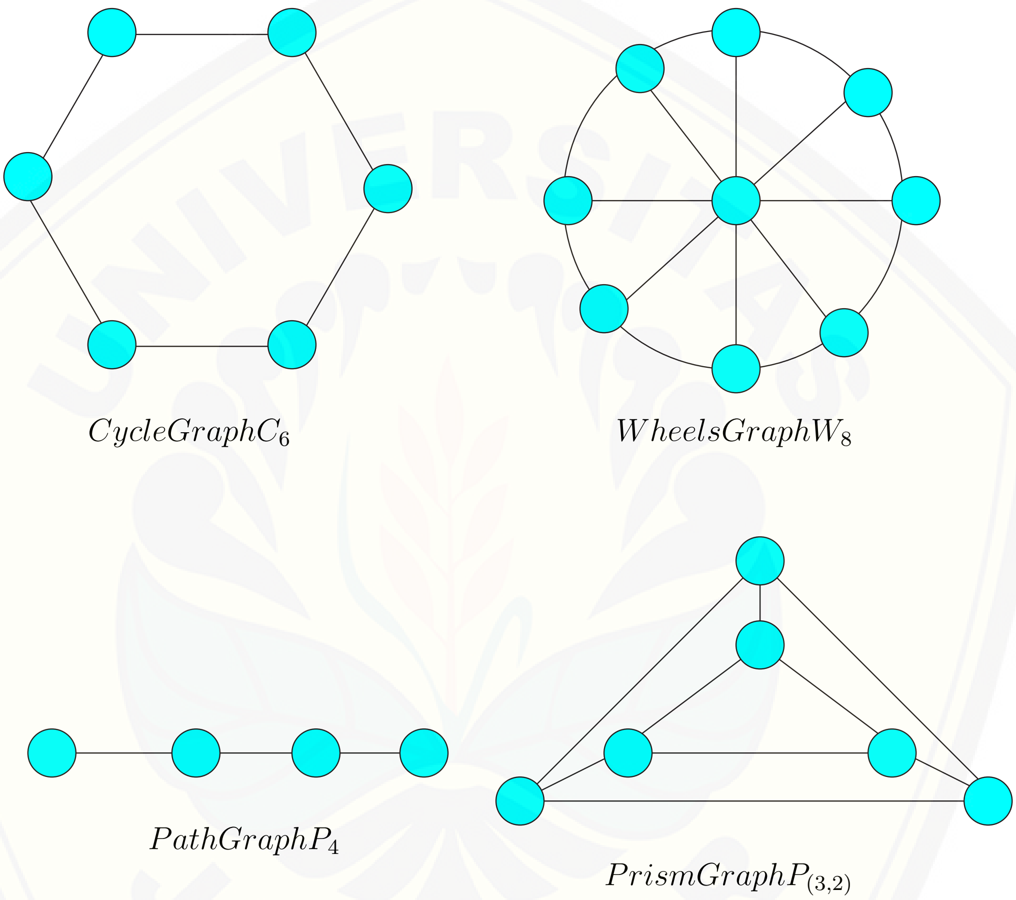
Lipson,2002).

2.2 Graf Khusus

Sebuah graf disebut graf khusus karena graf tersebut memiliki karakteristik dari ciri-ciri tertentu. Karakteristik graf khusus dapat dilihat bahwa graf tetap simetris meskipun diperluas sampai tak hingga. Dan ciri-cirinya dapat dilihat bahwa graf khusus tidak isomorfis dengan graf lain. Berikut contoh-contoh graf khusus sebagai berikut: graf lingkaran (*cycle graph*), graf roda (*wheels graph*), graf lintasan (*path graph*) dan graf prisma (*prism graph*).

Graf lingkaran (*cycle graph*) adalah graf yang jumlah titik dan sisinya sama. Graf Lingkaran dengan n titik dinotasikan dengan C_n(Munir, 2010). Graf roda (*wheels graph*) adalah graf yang diperoleh dengan cara menambahkan satu simpul pada graf lingkaran C_n dan menghubungkan simpul baru dengan semua titik pada graf lingkaran tersebut. Graf roda dapat dinotasikan dengan W_n dengan $n \geq 3$. Graf roda memiliki $n + 1$ titik dan $2n$ sisi (Gallian, 2009).

Graf Lintasan (*Path graph*) adalah Graf yang terdiri dari satu lintasan. Graf lintasan dengan *n* titik dinotasikan P_n dengan $n \geq 2$. Banyaknya sisi pada graf lintasan yang memiliki n titik adalah $n - 1$ (Damayanti, 2011). Graf prisma (*prism graph*) adalah graf yang diperoleh dari hasil kali cartesian graf lintasan (*path*) di 2 titik dan graf lingkaran (*cycle*) disetiap titiknya. Gambar 2.4 merupakan contoh dari graf-graf khusus.

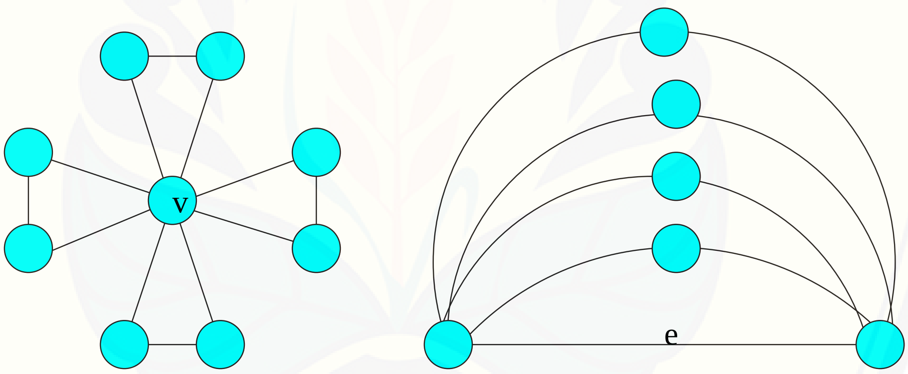


Gambar 2.3 Contoh graf khusus

2.3 Operasi Graf

Pengoperasian beberapa graf dapat digunkaan unutk mendapatkan sebuah graf baru. Dalam penelitian ini, digunakan operasi *amalgamasi*. Carlson (2006) mendefinisikan *amalgamasi-titik* dari graf sebagai berikut. Misalkan $\{H_i\}$ adalah suatu keluarga graf berhingga dan setiap H_i mempunyai suatu titik v_{0i} yang disebut titik terminal. *Amalgamasi-titik* yang dinotasikan dengan amal$\{H_i, v_{0i}\}$ dibentuk oleh semua H_i dengan seluruh titik terminalnya direkatkan menjadi satu titik. Misalkan k adalah suatu bilangan bulat positif, untuk $i\epsilon[1, k]$, *amalgamasi* dikontruksi dari graf terhubung tak trivial H_i yang isomorfik dengan H.

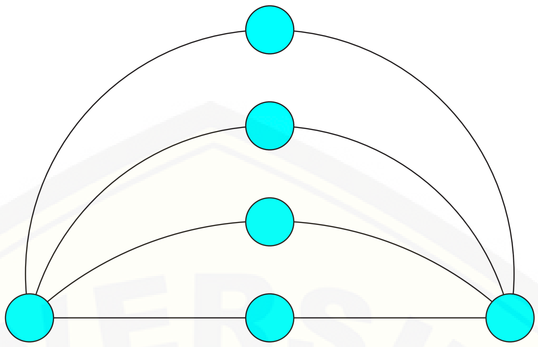
Amalgamasi-titik yang dinotasikan dengan $amal(H, v, k)$. Selanjutnya dengan cara yang serupa, jika terminalnya adalah suatu sisi, maka *amalgamasi* tersebut dinamakan *amalgamasi-sisi* yang dinotasikan dengan $amal(H, e, k)$.



$amal(C_3, v, 4)$ $amal(C_3, e, 4)$

Gambar 2.4 Contoh graf operasi *amalgamasi* titik dan sisi

Jika terminalnya adalah suatu subgraf terhubung tak trivial, maka *amalgamasi* tersebut dinamakan *amalgamasi-subgraf* dinotasikan dengan $Amal(H, S, k)$.



$amal(C_4, P_3, 3)$

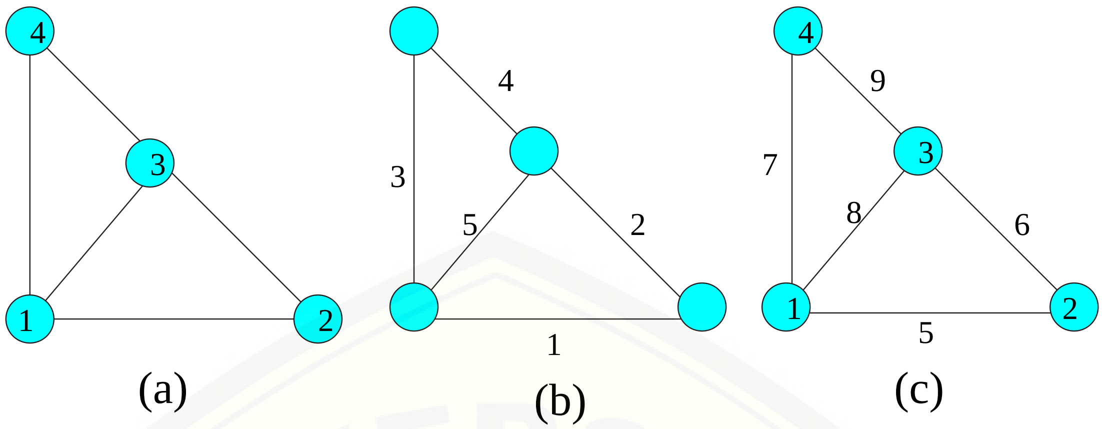
Gambar 2.5 Contoh graf operasi *amalgamasi* subgraf

2.4 Pelabelan Graf

2.4.1 Definisi pelabelan graf

Pelabelan pada suatu graf adalah sebarang pemetaan yang memasangkan unsur pada graf, yaitu titik dan sisi ke himpunan bilangan asli berurutan yang dimulai dari 1 hingga ke nilai jumlah titik dan sisi pada graf. Berdasarkan daerah asal atau domainnya, pelabelan terbagi menjadi 3 bagian, yaitu pelabelan titik, pelabelan sisi, dan pelabelan total. Pelabelan titik (*vertex locating*) adalah pelabelan graf yang daerah asalnya (*domain*) merupakan titik. Pelabelan sisi (*edge locating*) adalah pelabelan graf yang daerah asalnya (*domain*) merupakan sisi. Dan pelabelan total (*total locating*) adalah pelabelan graf yang daerah asalnya (*domain*) merupakan keduanya yaitu titik dan sisi. Berikut contoh pelabelan pada graf:

Suatu pemetaan satu-satu f dari $V(G) \cup E(G)$ ke himpunan bilangan bulat $\{1, 2, 3, \ldots, p + q\}$ disebut pelabelan total (a, d)-sisi *antimagic* jika bobot sisinya $w(uv) = f(u) + f(uv) + f(v)$ dengan $uv \epsilon E(G)$ adalah $\{a, a + d, a + 2d, \ldots, a + (q - 1)d\}$ untuk $a < 0$ dan $d \geq 0$. Pelabelan total (a, d)-sisi



Gambar 2.6 Contoh (a) pelabelan titik (b) pelabelan sisi (c) pelabelan total

antimagic f dikatakan super jika memiliki sifat bahwa titiknya dilabeli dengan bilangan bulat positif $1, 2, \ldots, p$ yang merupakan label terkecil dari graf G dan $f(E(G)) = \{p + 1, p + 2, \ldots, p + q\}$(Ba$\check{c}a$ dan Miller, 2008).

Terdapat sebuah kombinasi dari pelabelan total (a, d)-sisi *antimagic* dan $covering - \mathcal{H}$ yaitu pelabelan (a, d)-$\mathcal{H}$-*antimagic* total *covering*. Menurut Dafik (2014) pelabelan (a, d)-$\mathcal{H}$-*antimagic* total *covering* graf G adalah pelabelan total λ dari $V(G) \cup E(G)$ pada bilangan bulat $\{1, 2, 3, \ldots, |V(G) \cup E(G)|\}$, untuk setiap subgraf $\mathcal{H}$ dari graf G yang isomorfik dengan $\mathcal{H}$ dimana $\sum \mathcal{H} = \sum_{v \epsilon V(H)} \lambda(v) \sum_{e \epsilon E(H)} \lambda(e)$ merupakan barisan aritmatika. Graf G dikatakan memiliki pelabelan $\mathcal{H}$ antimagic super jika $\{\lambda(v)\}_{v \epsilon V} = \{1, \ldots, |V|\}$.

Dapat diartikan bahwa, pelabelan super (a, d)-antimagic total *covering* paa sebuah graf $G = (p_G, q_G)$ mempunyai pelabelan super (a, d)-$\mathcal{H}$-antimagic total covering dengan fungsi total $f(V \cup E) = \{1, 2, 3, 4, \ldots, p_G + q_G\}$ maka himpunan bobot selimut sebuah graf adalah $\{a, a + d, a + 2d, \ldots, a(m - 1)d\}$ dimana *a* merupakan bobot total selimut terkecil dan *d* merupakan batas atas nilai beda. Jika G memuat suatu selimut- $\mathcal{H}$, maka pelabelan total (a, d)-$\mathcal{H}$-antimagic super dikatakan pelabelan (a, d)-$\mathcal{H}$-antimagic total *covering* (Inayah, 2013). Pada penelitian ini, subgraf $\mathcal{H}$ berupa H.

2.4.2 Pelabelan (a, d)-$\mathcal{H}$-*antimagic total covering* orde dua

suatu graf G dapat dikatakan sebagai (a, d)-$\mathcal{H}$-antimagic total apabila ada fungsi bijektif $f : V(G) \cup E(G) \longrightarrow \{1, 2, \ldots, |V(G)| + |E(G)|\}$ untuk setiap subgraf G isomorfis terhadap $\mathcal{H}$ dan bobot total selimutnya adalah $W(\mathcal{H}) = \Sigma_{v \epsilon V(\mathcal{H})} f(v) + \Sigma_{e \epsilon E(\mathcal{H})} f(e)$ membentuk barisan aritmatika orde dua $\{a, a + d, a + 3d, a + 6d, \ldots, a + (\frac{(n-1)(n-2)}{2})d\}$, dengan *a* dan *d* merupakan bilangan bulat positif dan *n* merupakan jumlah semua subgraf G yang isomorfis terhadap $\mathcal{H}$. Jika fungsi tersebut ada, maka *f* disebut sebagai (a, d)-$\mathcal{H}$-antimagic total covering dari graf G. Suatu (a, d)-$\mathcal{H}$-antimagic total covering dengan fungsi *f* dikatakan super apabila $f : V(G) \longrightarrow \{1, 2, \ldots, |V(G)|\}$ (Agustin *et al.*,2017)

2.4.3 Batas atas nilai beda *d* pelabelan selimut super (a, d)-$\mathcal{H}$- *antimagic* orde dua

Batas atas adalah nilai beda (*d*) tertinggi dalam suatu pelabelan graf. Lemma untuk menghitung batas atas *d* dalam suatu pelabelan graf adalah sebagai berikut.

Lemma 2.1. Jika sebuah graf G(V,E) memiliki pelabelan super (a,d)-$\mathcal{H}$- Antimagic total covering maka

$$d \leq \frac{(p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H}{\frac{s^2 - s}{2}}$$

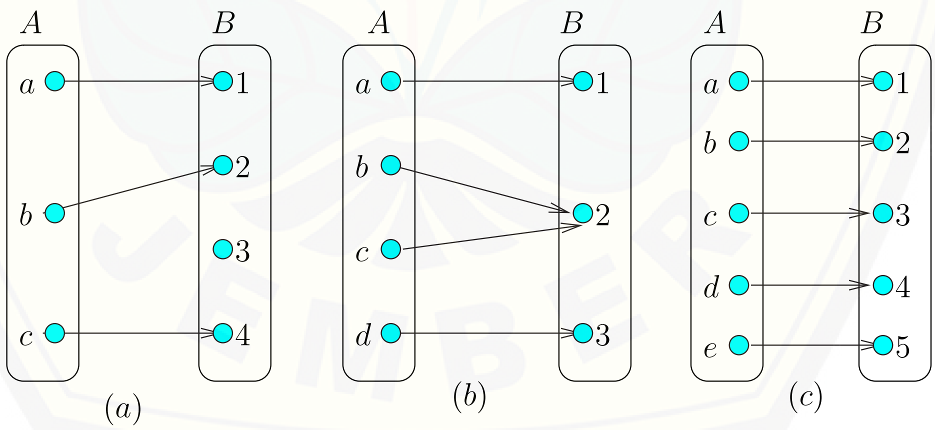
untuk $s = |Hi|, p_G = |V|, q_G = |E|, p_H = |V'|, q_H = |E'|$ (Agustin,*et al. 2017).* □

2.5 Fungsi dan Barisan Aritmatika Orde Dua

Misalkan *A* dan *B* merupakan dua himpunan tak kosong. Pemetaan dari himpunan *A* ke himpunan *B* dapat dideskripsikan sebagai salah satu relasi yang memasangkan setiap anggota himpunan *A* dengan tepat satu anggota himpunan *B*. Himpunan *A* disebut sebagai daerah asal pemetaan (*domain*)dan himpunan *B* sebagai daerah kawan pemetaan (*kodomain*). dan daerah hasil pemetaan disebut dengan *range*.

Pemetaan tersebut dapat dinotasikan dengan $f : A \rightarrow B$. Notasi tersebut dapat diartikan bahwa f memetakan setiap anggota himpunan *A* dengan tepat satu pasangan anggota himpunan *B*.

Suatu fungsi dapat dibedakan menjadi beberapa jenis, diantaranya adalah fungsi injektif, fungsi surjektif dan fungsi bijektif. Fungsi injektif atau fungsi into atau disebut juga fungsi satu-satu adalah pemetaan dimana setiap elemen di daerah kawan *kodomain* yang berpasangan dan yang mempunyai pasangan elemen tepat satu di daerah *kodomain*. Secara matematika dapat ditulis sebgai berikut $f : A \rightarrow B$, injektif $\Leftrightarrow \forall a_1, a_2 \epsilon A, a_1 \neq a_2 \rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$. Fungsi surjektif adalah atau fungsi onto atau disebut juga fungsi kepada adalah pemetaan dimana semua elemen di daerah *kodomain* mempunyai pasangan elemen di daerah *domain*, secara matematika dapat ditulis sebagai berikut: $f : A \rightarrow B$, surjektif $\Leftrightarrow \forall b \epsilon B, \exists a \epsilon A \rightarrow f(a) = b$. Dan, fungsi bijektif adalah pemetaan yang memenuhi pemetaan injektif dan surjektif. Istilah ini berasal dari pernyataan bahwa setiap elemen domain akan berkorespondensi secara unik ke elemen domain dan sebaliknya. Gambar 2.6 menunjukkan fungsi injektif, fungsi surjektif dan fungsi bijektif.



Gambar 2.7 Contoh (a) fungsi injektif (b) fungsi surjektif (c) fungsi bijektif

Barisan adalah suatu susunan bilangan yang di bentuk menurut tertentu.

Bilangan-bilangan yang menyusun barisan tersebut disebut dengan suku. Jika barisan yang suku berurutnya mempunyai beda bilangan yang sama maka barisan tersebut dapat dikatakan sebagai barisan aritmatika. Barisan aritmatika ada yang mempunyai orde dua. Barisan aritmatika berorde dua adalah suatu barisan bilangan yang tidak memiliki beda yang tetap, tetapi beda tersebut dapat dijadikan berisan bilangan baru akan didapatkan beda yang tetap. Dari uraian tersebut, barisan aritmatika berorde dua dapat dituliskan sebagai berikut:

$$a \quad a+b \quad a+2b+c \ldots a+(n-2)b+\frac{(n-2)(n-3)c}{2} \quad a+(n-1)b+\frac{(n-2)(n-1)}{2}$$

$$b \qquad b+c \qquad\qquad b+(n-1)c$$

$$c$$

Jadi, rumus ke-*n* dari suatu barisan aritmatika berorde dua adalah

$$U_n = \frac{a}{0!} + \frac{(n-1)b}{1!} + \frac{(n-1)(n-2)c}{2!}$$

dengan

U_n =suku ke-*n*

a =suku pertama orde ke-*1*

b =suku kedua orde ke-*2*

c =beda

2.6 Teknik Partisi

Teknik partisi (*partition tecnique*) yang dapat dinotasikan dengan $\mathcal{P}^n_{m,d}(i,j)$ merupakan suatu metode yang digunakan untuk membagi atau memecah fungsi berdasarkan selimutnya. Partisi dapat dapat dinyatakan dalam bentuk sebuah matriks dengan *m* baris dan *n* kolom, dimana jumlah masing-masing kolomnya membentuk barisan aritmatika dengan nilai beda *d* yang digunakan untuk mengkontruksi pelabelan (*a*,*d*)-$\mathcal{H}$- *Antimgic* super pada graf.

Tabel 2.1: Partisi untuk pelabelan orde dua.

	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	6	7	8	9	19
3	10	11	12	18	22
4	13	14	17	21	24
5	15	16	20	23	25
	45	50	60	75	95
		5	10	15	20
			5	5	5

Misal *n*, *m*, *d*, *i* dan *j* merupakan bilangan bulat positif atau nol. Anggap bahwa $\mathcal{P}^n_{m,d}(i,j)$ dari himpunan $\{1,2,3,...,k_n\}$ dengan $n \geq 2$, sedemikian hingga nilai beda antara jumlah bilangan sebanyak *m* baris untuk masing-masing kolom dengan $i = \{1,2,3,...,m\}$ dan $j = \{1,2,3,...,n\}$ adalah konstan *d*. Jumlah bilangan pada $\mathcal{P}^n_{m,d}(i,j)$ adalah $\Sigma\mathcal{P}^n_{m,d}(i,j)$ dan untuk sebarang konstan *b*, notasi $\mathcal{P}^n_{m,d}(i,j)\bigoplus b$ adalah hasil penjumlahan setiap bilangan pada $\mathcal{P}^n_{m,d}(i,j)$ ditambahkan dengan *b* (Baca *et al*., 2013). Beberapa bentuk umum partisi $P^n_{m,d}(i,j)$ yang telah ditemukan pada penelitian sebelumnya adalah

a. $P^n_{m,m}(i,j)$

b. $P^n_{m,-m}(i,j)$

c. $P^n_{m,m^2}(i,j)$

d. $P^n_{m,-m^2}(i,j)$

e. $P^n_{m,\frac{m}{2}}(i,j)$

f. $P^n_{m,-\frac{m}{2}}(i,j)$

Berdasarkan partisi-partisi yang dikemukakan dari penelitian tersebut di hasilkan Lemma sebagai berikut

Lemma 2.2. Misal n dan m adalah bilangan bulat positif, untuk $j = \{1,2,3,\ldots,n\}$ jumlah dari $\mathcal{P}^n_{m,d_1}(i,j) = \{(i-1)n + j; 1 \le i \le m\}$ membentuk barisan aritmatika dengan beda $d_1 = m$ *(Azizah, 2016).* $\square$

Lemma 2.3. Misal n dan m adalah bilangan bulat positif, untuk $j = \{1,2,3,\ldots,n\}$ jumlah dari $\mathcal{P}^n_{m,d_2}(i,j) = \{(j-1)m + i; 1 \le i \le m\}$ membentuk barisan aritmatika dengan beda $d_2 = m^2$ *(Azizah, 2016).* $\square$

Lemma 2.4. Misal n dan m adalah bilangan bulat positif, untuk $j = \{1,2,3,\ldots,n\}$ jumlah dari

$$\mathcal{P}^n_{m,d_3}(i,j) = \begin{cases} (i-1)n + \frac{j+1}{2}; 1 \le i \le m \\ \frac{j-n}{2} + in; 1 \le i \le m \\ \frac{j+1-n}{2} + in; 1 \le i \le m \\ (i-1)n + \frac{j}{2}; 1 \le i \le m \end{cases}$$

membentuk barisan aritmatika dengan beda $d_3 = \frac{m}{2}$ *(Azizah, 2016).* $\square$

Lemma 2.5. Misal n dan m adalah bilangan bulat positif, untuk $j = \{1,2,3,\ldots,n\}$ jumlah dari $\mathcal{P}^n_{m,d_4}(i,j) = \{1 + ni - j; 1 \le i \le m\}$ membentuk barisan aritmatika dengan beda $d_4 = -m$ *(Agustin et al., 2016).* $\square$

Lemma 2.6. Misal n dan m adalah bilangan bulat positif, untuk $j = \{1,2,3,\ldots,n\}$ jumlah dari $\mathcal{P}^n_{m,d_5}(i,j) = \{cn + i - cj; 1 \le i \le m\}$ membentuk barisan aritmatika dengan beda $d_5 = -m^2$ *(Agustin et al., 2016).* $\square$

Lemma 2.7. Misal n dan m adalah bilangan bulat positif, untuk $j = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ *jumlah dari*

$$\mathcal{P}^{n}_{m,d_6}(i,j) = \begin{cases} ni - \frac{j}{2} + \frac{1}{2}; 1 \le i \le m; 1 \le j \le n; i \textit{ ganjil}; j \textit{ ganjil} \\ ni - \frac{n}{2} - \frac{j}{2} + 1; 1 \le i \le m; 1 \le j \le n; i \textit{ genap}; j \textit{ ganjil} \\ ni - \frac{n}{2} - \frac{j}{2} + \frac{1}{2}; 1 \le i \le m; 1 \le j \le n; i \textit{ ganjil}; j \textit{ genap} \\ ni - \frac{j}{2} + 1; 1 \le i \le m; 1 \le j \le n; i \textit{ genap}; j \textit{ genap} \end{cases}$$

membentuk barisan aritmatika dengan beda $d_6 = -\frac{m}{2}$ *(Agustin et al., 2016).* □

2.7 Hasil Pelabelan Super (*a,d*)-$\mathcal{H}$- *Antimgic* Total Selimut

Pada bagian ini merupakan pelabelan selimut (*a,d*)-$\mathcal{H}$- *Antimgic* yang digunakan sebagai rujukan dalam penelitian ini.

Tabel 2.2: Ringkasan pelabelan selimut super (a, d)-$\mathcal{H}$-sntimagic pada graf konektif.

Graf	a	d	Hasil
Graf Roda	$3hn + 5$	3	$(a, d) - C_3$
(W_n)	$3hn + 3h + n$	1	
		(Inayah, 2013)	-
Graf Triangular Book	$61n + 59$	40	$(a, d) - Bt_3 + 2e$
(SBT_n)	$64n + 56$	33	
	$66n + 54$	30	
	$52n + 68$	28	
		(Pudyaningrum et al., 2014)	-
Graf Shackle Kipas	$18n + 115$	3	
(F_n)	$18n + 111$	8	
	$18n + 87$	24	
	$18n + 82$	29	
		(Azizah dan Dafik, 2014)	-
Graf Pohon pisang	$2k^2n^2 - 2kn^2$	2	$(a, d) - B_{k-1,n}$
(B_n)	$+3kn - 3n - k + 2$	(Sari, 2014)	-

Graf	a	d	Hasil
Graf Triangular Ladder	$16n-3$	0	$(a,d)-C_3$
(L_n)	$15n-1$	1	
		(jamil, 2014)	-
Graf Daun	$n+3$	1	
	$11n+15$	0	
		(Yunika *et al.*, 2014)	-
Amalgamasi Graf Kipas	$\frac{29n+32}{2}$	0	B_2
$(amal(F_n, P_n, 2))$	$\frac{29n+25}{2}$ 0		
	$13n+19$	1	
	$11n+23$	3	
		(Latifah.*et al.*, 2015)	-
Graf Helm	$\frac{31n+315}{2}$	5	S_3
H_n	$\frac{19n+27}{2}$ 7		
	$\frac{37n+0}{2}$ 11		
		(Rosyidah.*et al.*, 2015)	-

BAB 3. METODE PENELITIAN

3.1 Metode Penelitian

Metode yang akan digunakan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

3.1.1 Metode deskriptif aksiomatik

Yaitu menentapkan pengertian dasar *-H-antimagic* orde dua, kemudian dikenalkan beberapa teorema mengenai pelabelan super (a, d)-*H*- antimagic orde dua pada graf hasil operasi *amalgamasi*. Selanjutnya menurunkan teorema tersebut untuk memperoleh pelabelan titik dan pelabelan sisi pada graf hasil operasi *amalgamasi*.

3.1.2 Metode pendeteksian pola

Setelah ditemukan pelabelan super (a, d)-*H*- *antimagic* orde dua pada graf hasil operasi *amalgamasi*, maka dilanjutkan ke metode pendeteksian pola. Metode ini digunakan untuk merumuskan pola pelabelan titik dan pelabelan sisi apabila graf hasil operasi *amalgamasi* diperumumkan, sehingga akan didapatkan perumusan pelabelan super (a, d)-*H*- antimagic pada graf hasil operasi *amalgamasi*.

3.2 Rancangan Penelitian

Rancangan yang ada pada penelitian ini digunakan untuk memberi gambaran mengenai penelitian yang akan dilakukan. Adapun rancangan penelitian sebagai berikut:

3.2.1 Penotasian titik dan sisi

Graf hasil operasi amalgamasi yang dinotasikan dengan $G = amal(H, v, n)$ memiliki himpunan titik $V = \{A\} \cup \{x_{ij}; 1 \leq i \leq p_H - 1, 1 \leq j \leq n\}$ dan memiliki himpunan sisi $E = \{e_{ij}; 1 \leq i \leq q_H, 1 \leq j \leq n\}$.

3.2.2 Indikator pelabelan

Indikator pelabelan super (a,d)-*H*- *antimagic* orde dua pada selimut graf prisma operasi *amalgamasi* dalam penelitian ini adalah:

a. Label titik berbeda semua

   Label titik untuk pelabelan super (a, d)-*H*- *antimagic* orde dua pada graf hasil operasi *amalgamasi* merupakan suatu fungsi bijektif yang memetakan himpunan titik pada graf hasil operasi *amalgamasi* ke bilangan bulat dari satu sampai sejumlah titik pada graf yang diteliti.

b. Label sisi berbeda semua

   Label sisi untuk pelabelan super (a, d)-*H*- *antimagic* orde dua pada graf hasil operasi *amalgamasi* merupakan suatu fungsi bijektif yang memetakan himpunan sisi pada graf hasil operasi *amalgamasi* ke bilangan bulat dari satu sampai sejumlah sisi pada graf yang diteliti.

c. Bobot total selimut

   Bobot total selimut adalah jumlah tabel titik dan label sisi pada setiap selimut. Dimana pada penelitian ini, bobot total selimut yang akan diteliti adalah bobot total selimut yang membentuk barisan aritmatika berorde dua.

3.3 Teknik Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada graf hasil operasi *amalgamasi*. Teknik penelitian yang digunakan adalah sebagai berikut:

a. Menghitung jumlah titik *a* dan sisi *b* pada graf operasi *amalgamasi*;

   Pada bagian ini akan dihitung jumlah titik dan sisi dari graf hasil operasi amalagamasi yang dinotasikan dengan $amal(H, v, n)$.

b. Menentukan pelabelan titik dan sisi pada graf operasi *amalgamasi* dengan metode partisi;

   Pada bagian ini akan diberikan label pada titik dan sisi graf $amal(H, v, k)$ dengan menggunakan teknik partisi. Adapun partisi yang digunakan adalah partisi berorde dua.

c. Menentukan fungsi bijektif label titik dan sisi pada graf operasi *amalgamasi*;

   Pada bagian ini akan dibuat fungsi titik dan sisi dari graf operasi *amalgamasi*.

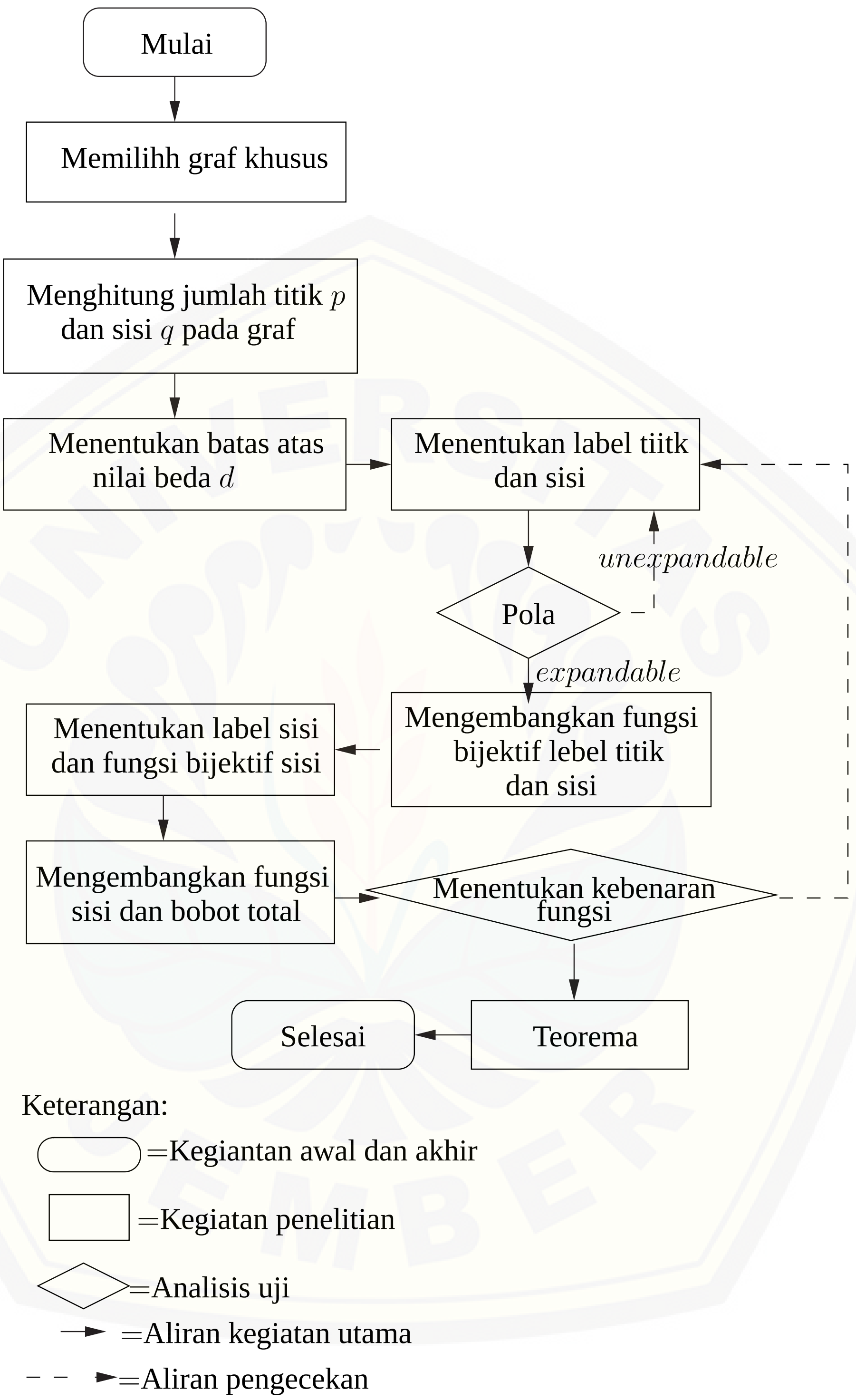
d. Mengembangkan fungsi bobot selimut dan fungsi bobot total sisi pada graf operasi *amalgamasi*;

   Bobot selimut adalah penjumlahan dari fungsi titik dan fungsi sisi yang diperoleh. Setelah fungsi titik dan sisi diperoleh, maka selanjutnya akan dihitung bobot selimut dari graf operasi *amalgamasi*.

e. Membuktikan kebenaran fungsi;

f. Menemukan teorema.

Penelitian ini dilakukan untuk menemukan beberapa pola pelabelan super (a, d)-*H*- antimagic orde dua pada graf hasil operasi *amalgamasi* dengan berbagai nilai beda *d*. Secara umum langkah-langkah diatas juga dapat dituliskan dalam *flowchat* pada gambar 3.1



Gambar 3.1 Diagram alur penelitian

BAB 5. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dari pembahasan pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa:

a. Batas atas nilai beda *d* super *antimagic total covering* orde dua pada graf operasi *amalgamasi* adalah $d \leq \frac{2(p_H^2 - p_H + q_H^2)}{n}$.

b. Fungsi bijektif partisi untuk pelabelan berorde dua yang ditemukan adalah

1.

$$\mathcal{P}^n_{m,d7}(i,j) = \begin{cases} \frac{2j+2mi-2m-i^2+3i-2}{2}; 1 \leq i \leq m, i+j \leq m+1 \\ \frac{-2m^2-4m-i^2-2ij+4mi+i-j^2+4mj+3j}{2}; 1 \leq i \leq m, i+j > m+1 \end{cases}$$

dan diperoleh $\sum_{i=1}^{m} \mathcal{P}^n_{m,d_7}(i,j) = \frac{2n^3+4n}{6} + \frac{(-mj+mj^2)}{2}$ membentuk barisan aritmatika orde dua dengan beda $d_7 = m$;

2.

$$\mathcal{P}^n_{m,d_8}(i,j) = \begin{cases} \frac{2n^2-2j-2mi+i^2-3i+4}{2}; 1 \leq i \leq m, i+j \leq m+1 \\ \frac{2n^2+2m^2+4m+i^2+2ij-4mi-i+j^2-4mj-3j+2}{2}; 1 \leq i \leq m, i+j > m \end{cases}$$

dan diperoleh $\sum_{i=1}^{m} \mathcal{P}^n_{m,d_8}(i,j) = \frac{-2n^3+30n^2+2n}{6} + \frac{-2n^3+30n^2+2n}{6} + \frac{-mj^2+mj}{2}$ membentuk barisan aritmatika orde dua dengan beda $d_8 = -m$;

c. Pelabelan super $(1 + \frac{2n^3+4n}{6} + \frac{-2n^3+2n+30n^2}{6} + \frac{n}{2}(m_2^2 - m_2 + 2m_4^2 - 2m_4 + m_6^2 + m_6 + 2m_7^2 + 2m_8^2 + m_8) + \frac{1}{4}(4m_2 + 2m_3 + 2m_3^2 + 5m_4 - 4m_6 + 2m_7^2 + 2m_7 - m_8) + (m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6 + m_7 + m_8) + nm_1(m_2 + m_3 + m_4 +$

$m_5+m_6+m_7+m_8)+nm_2(m_3+m_4+m_5+m_6+m_7+m_8)+nm_3(m_4+m_5+m_6+m_7+m_8)+nm_4(m_5+m_6+m_7+m_8)+nm_5(m_6+m_7+m_8)+nm_6(m_7+m_8)+nm_7m_8+\frac{n}{4}(2c_1^2-2c_1+2c_3^2-c_3+2c_4^2+2c_4+4c_5^2+2c_6^2+c_6)+\frac{1}{2}(2c_1+c_2+c_2^2+4c_3-c_5^2+c_5+c_6)+(np_H-n+1)(c_1+c_2+c_3+c_4+c_5+c_6)+nc_1(c_2+c_3+c_4+c_5+c_6)+nc_2(c_3+c_4+c_5+c_6)+nc_3(c_4+c_5+c_6)+nc_4(c_5+c_6)+nc_5c_6$)-$\mathcal{H}$-*antimagic total covering* orde dua pada graf $amal=(H,v,n)$ untuk $n\geq 3$.

5.2 Saran

Berdasarkan hasil penelitian mengenai pelabelan super $(a,d)-\mathcal{H}$-*antimagic total covering* orde dua pada graf hasil operasi *amalgamasi*, peneliti memberikan saran kepada pembaca agar dapat melakukan penelitian super (a,d)-$\mathcal{H}$-*antimagic total covering* orde dua $(n \neq m)$ pada graf gabungan saling lepas dari hasil operasi *amalgamasi*.

DAFTAR PUSTAKA

Agustin, I. H., Sih, Muhni and Dafik. 2014. Pelabelan Total Super (a,d)-$\mathcal{H}$-Antimagic Pada Graf Daun. *Prosiding Seminar Matematika dan Pendidikan Matematika*, 1:95-104.

Azizah, I. and Dafik. 2014. Super (a,d)-$\mathcal{H}$-$antimagic$ total selimut pada graf shackle kipas $f4$.*Prosiding Seminar Matematika dan Pendidikan Matematika*, 1:242-250.

Bača, Bronkovic, L., Lascsakova, M., Phanalasy, and Fenovcikova, A. S. 2013. On d-$antimagic$ labelings of plane graphs. *Electonica Journal of Graph Theory and Application*,1:28-39.

Carlson, K. 2006. *Generalized book and c_m snakes and prime graphs*. Ars Combinatoria, 80:215-221

Dafik. 2007. *Structural Properties and Labeling of Graphs*. School of Information Technology and Mathematical Sciences University of Ballarat, Australia, Ph.D. Thesis, November : 1 - 140.

Dafik, M.Miller, J.Ryan and M.Baca. 2009. On Super (a,d)-$edge\ antimagic$ total labeling of disconnected graphs. *Discrete Math*, 309(15):4909-4915.

Dafik. 2013. *Antimagic Total Labelling of Disjoint Union of Disconnected Graph*. Jember: CSS.

Gutierrez and Llado. 2005. Magic coverings. *Of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, 55:451-461.

Inayah, N. 2013. *Pelabelan (a, d)-$\mathcal{H}$-Antiajaib Pada Beberapa Kelas Graf*. Bandung: Institut Teknologi Bandung.

Jamil, N. A. 2014. Super (a, d)-$\mathcal{H}$-Antimagic Total Covering Pada Graf Triangular Ladder. *Prosiding Seminar Matematika dan Pendidikan Matematik*, 1:110-118.

Kotzig, A. and Rosa, A. 1970. Magic Valuations of Finite Graphs. *Canad. Math. Bull.*, 13:451 - 461.

Latifah, S. 2015. *Super (a, d)-$\mathcal{H}$-Antimagic Total Covering Pada Amalgamasi Graf Kipas*. *Skripsi*. Jember: Universitas Jember.

Maryati, T. K., Salman, A., Baskoro, E. T., Ryan, J. Miller, M. 2010. On H Supermagic Labellings for Certain Shackles and Amalgamations of A Connected Graph Antimagic Total Labelings For Shackles of A Connected Graph. *Utilitas Math* 83:333-342.

Munir, R. 2001. *Matematika Diskrit. Buku Teks Ilmu Komputer*. Bandung: Penerbit Informatika.

Munir, R. 2010. *Matematika Diskrit. Matematika Diskrit*. Bandung: Penerbit Informatika.

Pudyaningrum, P. R. H. 2014. Super (a, d)-$\mathcal{H}$-Antimagic Total Covering Pada Shackle Graf Triangular Book. *Prosiding Seminar Matematika dan Pendidikan Matematik*,1:68-77.

Rosyidah, K., Dafik, dan S. Setiawani. 2015. Super (a, d)-S_3-Antimagic Total Dekomposisi Graf Helm dan untuk Pengembangan Ciphertext Pada Shackle Graf Triangular Book. *Proceeding The* 13^{th} *GraphMasters Workshop. 25-26 September 2015.CGANT UNEJ*: 61

Sari, F. K. 2014. *Super Pelabelan selimut-(a, d)-anti ajaib super pada graf pohon pisang, kembang api dan buku*. Universitas Sebelas Maret Surakarta.