PELABELAN KONSEKUTIF PADA GRAF-GRAF POHON

SKRIPSI

Diajukan untuk Memenuhi Persyaratan Meraih Gelar Sarjana Sains
Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Jember

Oleh

Desy Wulandari
NIM : 981810101125

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER
2002

MOTTO

Ilmu adalah senjataku, sabar adalah pakaianku, yakin adalah kekuatanku, kejujuran adalah penolongku, taat adalah kecintaanku, kebahagiaanku adalah shalat. (Suri Tauladan Rasulallah)

Jadilah engkau pemaaf dan anjurkan orang berbuat baik, berpaling dari orang jahil. (Al A'raf 199)

Dengan banyak diam lahirlah kewibawaan, dan dengan rendah hati sempurnalah kenikmatan.

Apabila engkau melihat yang baik dan hak, lakukanlah, bila melihat yang batil dan buruk, jauhilah, itulah cara mendidik diri sendiri. (Ali bin Abi Thalib)

Senyummu ketika bertemu dengan saudaramu adalah sedekah bagimu.
(Hadist riwayat At-Tirmidzi)

Menuntut ilmu itu fardhu bagi setiap muslim. (Hadist riwayat Ahmad)

PERSEMBAHAN

Segala puji bagi Allah SWT, Rabb semesta alam. Sholawat dan salam semoga dilimpahkan pada beliau Rosulullah SAW. Skripsi ini penulis persembahkan kepada:

* Ayahanda tercinta dan tersayang Margono, untuk doa, dukungan dan kasih sayang yang diberikan selama ini.
* Mama tercinta dan tersayang untuk semua doa, kasih sayang, dukungan serta kesabarannya.
* Seseorang yang terkasih, tercinta, dan tersayang untuk kasih sayang, kesabaran, doa serta dukungan yang diberikan selama ini.
* Adikku yang selalu mendukung dan memberikan semangat.

DEKLARASI

Skripsi ini hasil kerja/penelitian penulis mulai bulan April 2002 sampai dengan bulan Oktober 2002 di Matematika Fakultas MIPA UNEJ. Bersama ini saya menyatakan bahwa isi skripsi ini adalah pekerjaan saya sendiri kecuali jika disebutkan sumbernya dan skripsi ini belum pernah diajukan pada institusi lain.

Jember,Oktober 2002 Desy Wulandari

ABSTRAKSI

Desy Wulandari, Oktober, 2002, "**Pelabelan Konsekutif pada Graf-graf Pohon**". Skripsi, Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Pembimbing I : Drs. Kusno, DEA, PhD.
Pembimbing II : Kristiana Wijaya, S.Si, M.Si.

Pelabelan graf berkembang sangat luas dan dapat digunakan untuk merancang model sinar-X kristalografi, sistem alamat jaringan komunikasi dan *circuit design*. Salah satu macam pelabelan pada graf adalah pelabelan pada titik dan sisinya, misalnya pelabelan konsekutif. Pelabelan konsekutif ini idenya dari pelabelan graceful pada graf pohon yang dikemukan oleh Slater. Misal G graf dengan p titik dan q sisi. Pelabelan konsekutif pada graf G adalah pemetaan satu-satu dan pada dari gabungan titik dan sisi pada graf G ke bilangan bulat positif $\{1, 2, 3, \ldots, n, n+1, \ldots, n+q\}$, dimana pelabelan sisinya merupakan harga mutlak dari selisih antara label dua titik yang bertetangga.

Dalam tugas akhir ini dibahas bagaimana mencari pelabelan konsekutif pada graf sederhana dan graf hingga, khususnya graf pohon. Graf pohon mempunyai beberapa kelas khusus, diantaranya graf lintasan, graf bintang, dan graf katerpilar. Sehubungan dengan ide Slater bahwa graf pohon T_n yang graceful adalah konsekutif, maka dapat disimpulkan klasifikasi sebagai berikut: kelas graf lintasan P_n, kelas graf bintang S_r, dan graf katerpilar C_{rk} merupakan graf konsekutif.

Kata Kunci : pelabelan, pelabelan graceful, pelabelan konsekutif, graf pohon, graf lintasan, graf bintang, graf katerpilar.

PENGESAHAN

Skripsi ini diterima oleh Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember pada :

Hari : RABU

Tanggal : 20 NOV 2002

Tempat : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember

Tim Penguji

Ketua

(Drs.Kusno,DEA,PhD)

NIP. 131 592 357

Sekretaris

(Kristiana Wijaya, S.Si, M.Si)

NIP. 132 258 180

Anggota

(Kosala Dwija P, S.Si)

NIP. 132 206 019

Anggota

(Agustina P, S.Si, M.Si)

NIP. 132 257 933

Mengesahkan

Dekan FMIPA UNEJ

(Ir. Sumadi, MS)

NIP. 130 368 784

KATA PENGANTAR

Bismillahirrohmanirrohim.

Syukur Alhamdulillah penulis panjatkan ke-Hadirat Allah SWT, karena dengan rahmat, barokah, hidayah, dan inayah-Nya penulis dapat menyelesaikan tugas akhir ini dengan baik. Penulisan tugas akhir ini merupakan salah satu syarat akademik guna memperoleh gelar Sarjana Sains (SI) di Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Jember.

Dalam penulisan tugas akhir ini, penulis telah banyak mendapat bantuan dan dorongan baik secara langsung maupun tidak langsung dari berbagai pihak. Untuk itu pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada :

1. Bapak Drs, Kusno, DEA, PhD, selaku Dosen Pembimbing Utama dan Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam yang telah memberikan bimbingan kepada penulis sehingga tugas akhir ini dapat terselesaikan dengan baik.
2. Ibu Kristiana Wijaya, S.Si, M.Si, selaku Dosen Pembimbing Anggota yang telah memberikan bimbingan kepada penulis sehingga tugas akhir ini dapat terselesaikan dengan baik.
3. Bapak Kosala Dwidja Purnomo, S.Si dan Ibu Agustina Pradjaningsih, S.Si, M.Si, selaku dosen penguji yang telah memberikan saran dan masukan sehingga tugas akhir ini dapat terselesaikan dengan baik.
4. Bapak Ir. Sumadi MS, selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.
5. Seluruh Dosen dan Civitas Akademika di lingkungan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, khususnya Jurusan Matematika.
6. Rekan-rekan sesama warga graf dan teman-temanku Anis, Titin, Toriq, Mas Widi, Tutut, Vita, Lena dan yang lainnya.

Penulis menyadari bahwa tugas akhir ini jauh dari sempurna karena keterbatasan waktu dan buku panduan, untuk itu penulis mengharapkan kritik dan saran demi perbaikan.

Akhirnya penulis berharap agar tugas akhir ini dapat memberi kontribusi terhadap kemajuan ilmu pengetahuan khususnya bidang ilmu graf.

Jember, Oktober 2002

Penulis,

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

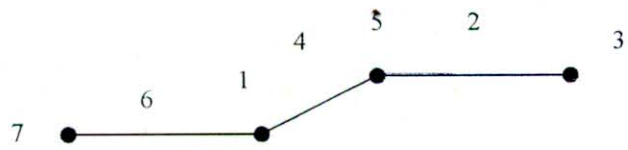
BAB I
PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Pelabelan graf berkembang sangat luas, diantaranya berguna untuk merancang model sinar – X kristalografi, system alamat jaringan komunikasi dan *circuit design* [3].

Pelabelan graf dapat ditinjau dari beberapa segi, misalnya pelabelan pada titiknya, pelabelan pada sisinya atau pelabelan pada titik dan sisinya. Pelabelan titik pada graf adalah pemberian nilai pada setiap titik. Pelabelan sisi pada graf adalah pemberian nilai pada setiap sisi. Sedangkan pelabelan titik dan sisi pada graf adalah pemberian nilai pada setiap titik dan sisi. Pelabelan konsekutif termasuk pelabelan titik dan sisi. Pelabelan konsekutif ini, idenya dari pelabelan graceful pada graf pohon yang dikemukakan oleh Slater [3]. Pelabelan graceful yang diselidiki Slater, titiknya mendapat label dari bilangan bulat positif $1, 2, 3, \ldots, q+1$, dimana q merupakan banyaknya sisi. Namun untuk selanjutnya, pelabelan konsekutif dapat diperoleh tanpa melalui pelabelan graceful. Pada tugas akhir ini, pembahasan hanya dikhususkan pada pelabelan konsekutif tanpa melihat pelabelan graceful, untuk mendapatkan formulasi label titik dan label sisi dari sejumlah kelas graf.

Misalkan graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ dan himpunan sisi $E(G) = \{e_1, e_2, \ldots, e_q\}$ dimana sisi $e = uv$ merupakan pasangan tak terurut (u,v) dari titik u,v di V. Pelabelan titik pada graf G dinotasikan dengan $\lambda(v)$ dan pelabelan sisi dinotasikan dengan $\lambda(e)$. *Pelabelan konsekutif dari graf* G adalah pemetaan satu-satu dan pada dari gabungan titik dan sisi pada graf G ke bilangan bulat positif $\{1, 2, 3, \ldots, n, n+1, \ldots, n+q\}$. Dalam hal ini, pelabelan sisi $e = uv$ merupakan harga mutlak dari selisih antara label dua titik yang bertetangga atau yang menempel dengan sisi e yaitu $\lambda(e) = \lambda(uv) = |\lambda(u) - \lambda(v)|$. Pada Gambar 1, diberikan contoh pelabelan konsekutif pada graf G.



Gambar 1: Pelabelan Konsekutif pada Graf G

1.2. Perumusan Masalah

Masalah yang akan dicari solusinya adalah pelabelan konsekutif dari sejumlah kelas graf. Dalam skripsi ini, graf yang kita kaji adalah graf sederhana dan graf hingga, khususnya graf pohon (tree). Karena bentuk graf pohon mempunyai beberapa kemungkinan, maka perumusannya secara umum sangat rumit. Oleh karena itu, akan dicari pelabelan konsekutif pada beberapa kelas khusus dari graf pohon, diantaranya graf lintasan (path), graf bintang (star) dan graf katerpilar (Caterpilar).

1.3. Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah untuk mendapatkan formulasi pelabelan konsekutif pada beberapa kelas khusus dari graf pohon, yaitu graf lintasan (path), graf bintang (star) dan graf katerpilar (Caterpilar).

1.4. Manfaat Penelitian

Manfaat yang dapat diambil dari pelabelan graf adalah untuk sinar – X kristalografi, system alamat jaringan komunikasi dan *circuit design.*

Manfaat pada sinar – X kristalografi adalah untuk penentuan struktur kristal dari difraksi data sinar – X. Masalah yang sama dalam matematika yaitu untuk menentukan label himpunan titik sehingga diperoleh label untuk himpunan sisinya.

Aplikasi dalam system alamat jaringan komunikasi yaitu dapat digunakan untuk label titik untuk tiap-tiap pengguna terminal dengan sebuah nomor, sehingga jaringan komunikasi yang menghubungkan mendapat label berbeda. Dalam hal ini, label pada dua terminal yang terhubung secara otomatis merinci nomor lintasannya; sebaliknya, nomor lintasan yang terhubung berpasangan dengan nomor pengguna terminal yang sesuai.

Sebelum pelabelan graf diaplikasikan pada pengoptimalan *circuit design*, masalah yang harus diperhatikan adalah masalah komponen garis terhubung antar tampat perjalanan. Komponen tempat perjalanan ditetapkan dengan nomor. Nomor posisi yang berbeda-beda menunjukkan nomor unit pada masing-masing tempat. Dalam teori graf, masalah ini baru di mulai. Diberikan graf yang menunjukkan hubungan antar komponen, agar perbedaan jumlah pada bilangan untuk semua komponen kecil.

Aplikasi lain yang termasuk pelabelan graf adalah mendesain optik pada tingkat ketelitian pengukuran yang tinggi untuk dimanfaatkan pada mesin gurdi otomatis, menyamakan desain kode penjuru dan penetapan konfigurasi pada jaringan resistor sederhana [3].

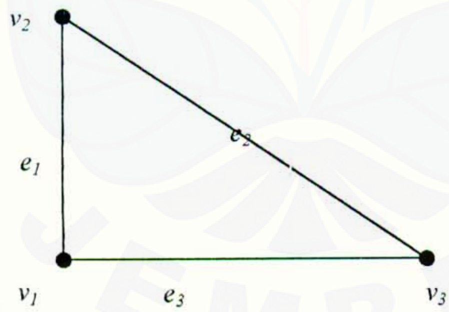
BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Definisi dan Notasi

Sebuah *graf* G didefinisikan sebagai pasangan dua himpunan yaitu himpunan tak kosong V yang elemen–elemennya disebut *titik* (*vertex*) dan himpunan (mungkin kosong) dari pasangan tak terurut (u,v) (selanjutnya akan ditulis uv) dari titik u,v di V yang disebut *sisi* (*edge*). Himpunan titik pada G dinotasikan dengan $V(G)$ dan himpunan sisi pada G dinotasikan dengan $E(G)$.

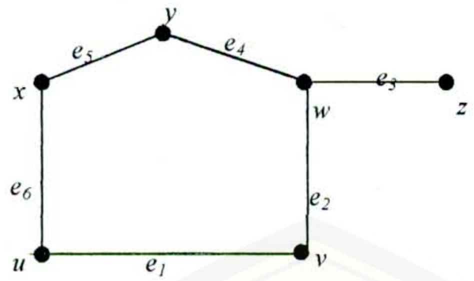
Graf G digambarkan dalam bentuk diagram yaitu setiap titik di G digambarkan dengan noktah dan setiap sisi yang menghubungkan dua titik di G digambarkan dengan sebuah ruas garis.

Misalkan G adalah sebuah graf dengan $V(G) = \{v_1, v_2, v_3\}$ dan $E(G)=\{e_1, e_2, e_3\}$ dengan $e_1 = v_1v_2$, $e_2 = v_2v_3$, $e_3 = v_3v_1$. Diagram graf G terlihat pada Gambar 2.1.



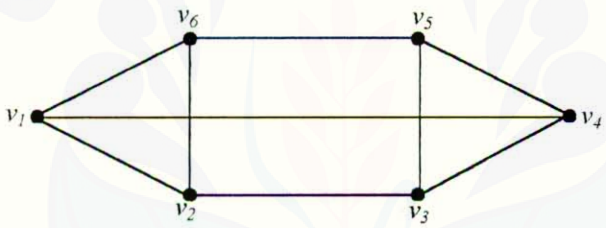
Gambar 2.1 Graf dengan Tiga Titik dan Tiga Sisi

Misalkan u dan v titik pada graf G. Titik v dikatakan *tetangga* (*adjacent*) u jika ada sisi e yang menghubungkan titik u dan v, yaitu $e = uv$. Jika $e = uv$ adalah sisi pada graf G maka e dikatakan *menempel* (*incident*) pada titik u dan v. Pada Gambar 2.2, titik u tetangga titik v dan x, tetapi titik u bukan tetangga titik w ; titik u dan sisi e_1 menempel tetapi titik x dan sisi e_1 tidak menempel.



Gambar 2.2 Graf untuk Mengilustrasikan Tetangga dan Menempel

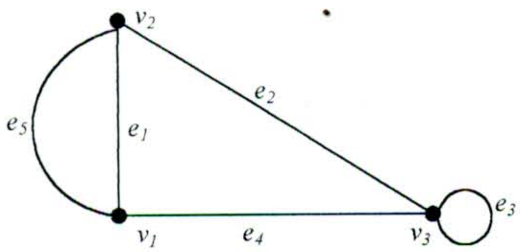
Order n dari graf G adalah banyaknya titik yang ada di G yaitu $n = |V|$. Graf yang mempunyai order hingga dinamakan *graf hingga.* Sebagai contoh Gambar 2.3 adalah graf berorder 6.



Gambar 2.3 Graf Order 6

Derajat (*degree*) dari titik v di G adalah jumlah sisi yang berinsiden dengan v, dinotasikan dengan deg (v). Jika setiap titik pada graf G mempunyai derajat yang sama, maka graf G disebut *graf reguler*. Gambar 2.3 merupakan graf reguler dimana derajat setiap titiknya adalah 3.

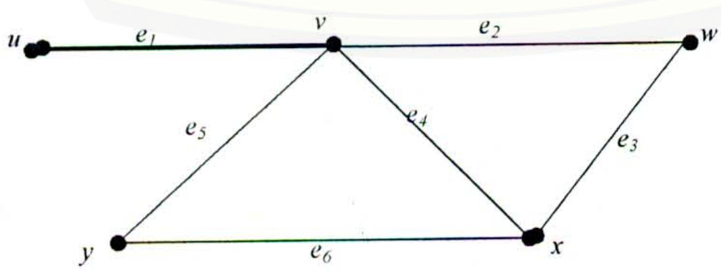
Sebuah sisi dalam graf G yang menghubungkan sebuah titik v dengan dirinya sendiri disebut *loop*. Dalam suatu graf, apabila terdapat lebih dari satu sisi yang menghubungkan dua titik, maka sisi – sisi tersebut dinamakan *sisi rangkap* (*multiple edges*). Sebagai contoh graf G dengan $V(G) = \{v_1, v_2, v_3\}$ dan $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ dimana $e_1 = v_1v_2$, $e_2 = v_2v_3$, $e_3 = v_3v_3$, $e_4 = v_3v_1$, $e_5 = v_1v_2$, dapat dilihat pada Gambar 2.4. Dalam contoh ini, sisi e_3 merupakan sebuah loop sedangkan sisi e_1, e_5 merupakan sisi rangkap dalam G.



Gambar 2.4 Sisi e_3 disebut Loop dan Sisi e_1, e_5 disebut Sisi Rangkap

Sebuah graf yang tidak memiliki loop dan sisi rangkap disebut *graf sederhana*. Sedangkan graf yang memiliki sisi rangkap tetapi tidak memiliki loop disebut *graf rangkap* (*multi graf*). Graf G pada Gambar 2.1 adalah graf sederhana, sedangkan graf G pada Gambar 2.4 bukan graf sederhana.

Sebuah *jalan* (*walk*) W pada graf G adalah barisan berhingga $W = v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, e_k, v_k$ $(k \geq 1)$ yang suku – sukunya bergantian titik dan sisi, sedemikian hingga (v_i, v_{i+1}) adalah sisi di G, untuk $1 \leq i \leq k - 1$. Titik v_1 dan titik v_k berturut – turut disebut *titik awal* dan *titik akhir* dari W. Sedangkan titik – titik $v_2, v_3, \dots, v_{k-1}$ disebut *titik internal* dari W. Jalan dikatakan tertutup jika titik akhir dan titik awal di W sama. Jika semua titik dalam jalan W berbeda, maka jalan disebut *lintasan* (*path*). Jika semua sisi dalam jalan W berbeda, maka jalan disebut *jejak* (*trail*). *Sikel* (*cycle*) adalah jalan tertutup dengan barisan titik yang berbeda atau lintasan yang tertutup. Pada Gambar 2.5 barisan $u_1, e_1, v, e_2, w, e_3, x, e_4, v, e_5, y, e_6, x$ merupakan jalan, barisan $u, e_1, v, e_2, w, e_3, x, e_6, y$ merupakan lintasan, barisan $u, e_1, v, e_2, w, e_3, x, e_6, y, e_5, v$ merupakan jejak dan barisan $v, e_2, w, e_3, x, e_6, y, e_5, v$ merupakan sikel.



Gambar 2.5 Jalan pada Graf

2.2 Graf Terhubung dan Graf Tak Terhubung

Sebuah graf dikatakan *terhubung* (*connected*) jika untuk setiap dua titik u dan v di G, terdapat lintasan yang menghubungkan kedua titik tersebut. Sedangkan sebuah graf dikatakan tidak terhubung (*disconected*) jika ada dua titik u dan v di G yang tidak mempunyai lintasan. Gambar 2.6 (a) merupakan graf terhubung dan 2.6 (b) merupakan graf tak terhubung.

Gambar 2.6 Graf Terhubung dan Graf Tak Terhubung

2.3 Kelas – Kelas Graf

Graf *terbagi* dalam beberapa kelas. Pada tugas akhir ini, kita memerlukan beberapa definisi kelas graf diantaranya adalah graf pohon, graf lintasan, graf bintang, graf katerpilar, graf bipartit dan graf sikel. Akan tetapi, kelas graf yang akan kita bahas adalah graf lintasan, graf bintang dan graf katerpilar.

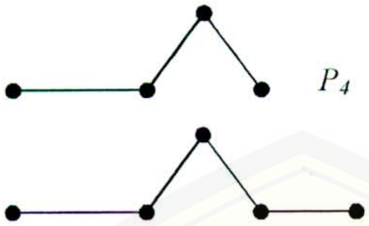
2.3.1 Graf Pohon (Tree)

Graf pohon adalah graf sederhana yang terhubung dan tidak memuat sikel. Graf pohon dengan n titik dinotasikan dengan T_n. Pada Gambar 2.7, diberikan graf pohon T_5. Berikut ini diberikan beberapa kelas khusus dari graf pohon.

Gambar 2.7 Graf Pohon T_5

1. Graf Lintasan (Path)

Graf lintasan adalah graf yang terdiri dari satu lintasan. Graf lintasan dengan n titik dinotasikan dengan P_n. Contoh graf lintasan P_4 dan P_5 dapat dilihat pada Gambar 2.8.



Gambar 2.8 Graf Lintasan P_4 dan P_5

2. Graf Bintang (Star)

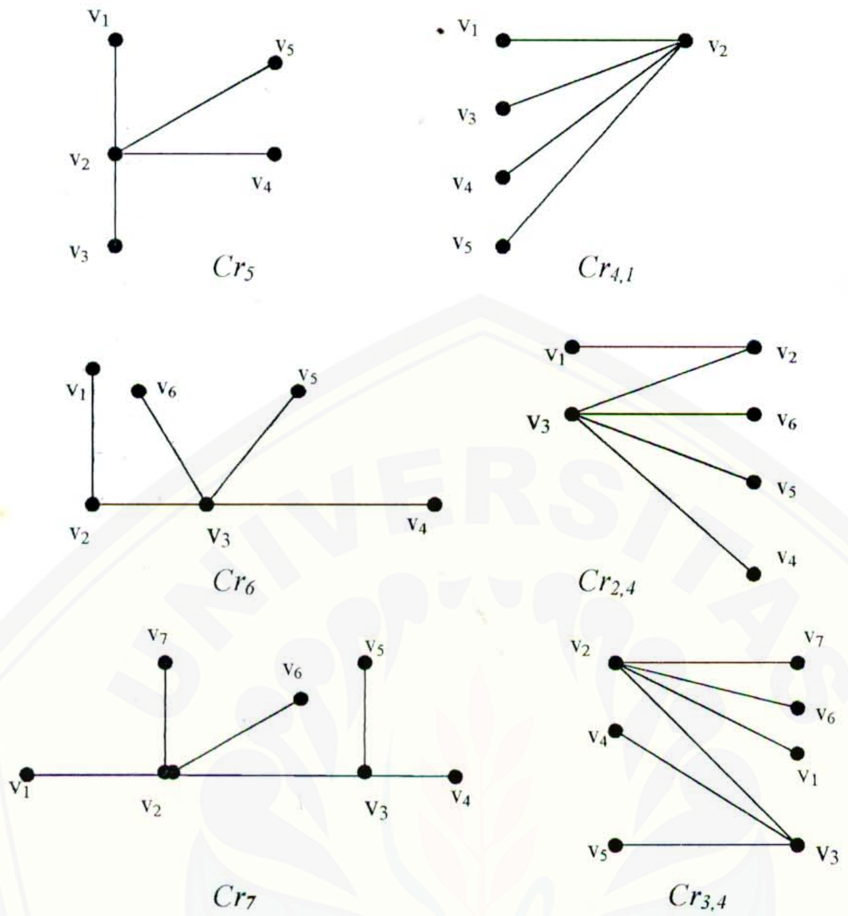
Graf bintang adalah graf komplit bipartit $K_{1,n}$ atau $K_{n,1}$. Dengan kata lain graf bintang adalah graf yang salah satu titiknya berderajat n yang disebut *titik pusat* dan titik-titik yang lain berderajat 1 yang disebut *titik daun*. Untuk selanjutnya graf star akan dinotasikan dengan S_r, dimana $r = n+1$. Pada Gambar 2.9, diberikan graf bintang S_5 dan S_9.

Gambar 2.9 Graf Bintang S_5 dan S_9

3. Graf Katerpilar

Graf katerpilar adalah graf yang dibangun dari beberapa graf star dimana titik pusat S_i bertetangga dengan titik pusat S_{i+1}, untuk $i = 1, 2, 3, \ldots, n-1$. Graf katerpilar dengan k titik dinotasikan dengan Cr_k.

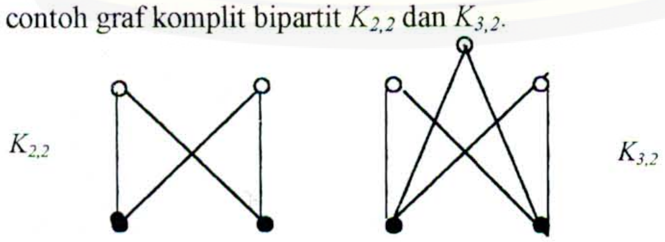
Graf katerpilar secara umum dapat diubah menjadi graf bipartit apabila himpunan titik $V(G)$ dapat dipisah menjadi himpunan titik V_1 dan V_2 dimana anggota himpunan titik V_1 adalah titik pusat S_i untuk i ganjil dan titik daun dari graf S_i untuk i genap, sedangkan anggota himpunan titik V_2 adalah titik pusat S_i untuk i genap dan titik daun dari S_i untuk i ganjil. Dengan demikian, graf katerpilar secara umum dapat diubah menjadi graf bipartit. Pada Gambar 2.10, diberikan contoh graf caterpilar Cr_k yang diubah menjadi graf bipartit $Cr_{m,p}$.



Gambar 2.10 Graf Katerpilar Cr_k menjadi Graf Katerpilar $Cr_{m,p}$

2.3.2 Graf Bipartit

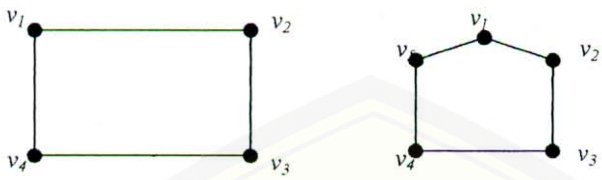
Graf G dikatakan *bipartit* jika himpunan titik $V(G)$ dapat dipisah menjadi dua himpunan $V_1(G)$ dan $V_2(G)$ yang saling asing, sedemikian hingga setiap sisi dari G menghubungkan sebuah titik di V_1 dan sebuah titik di V_2. Jika setiap pasang titik di V_1 dan V_2 saling terhubung disebut *graf komplit bipartit*. Jika $|V_1|= m$ dan $|V_2|= p$, maka graf komplit bipartit dinotasikan dengan $K_{m,p}$. Pada Gambar 2.9, diberikan contoh graf komplit bipartit $K_{2,2}$ dan $K_{3,2}$.



Gambar 2.11 Graf Komplit Bipartit $K_{2,2}$ dan $K_{3,2}$

2.3.3 Graf Sikel (Cycle)

Graf sikel adalah graf yang terdiri dari satu sikel. Graf sikel dengan n titik dinotasikan dengan C_n. Pada Gambar 2.12 dapat dilihat graf sikel dengan empat titik (C_4) dan lima titik (C_5).



Gambar 2.12 Graf sikel C_4 dan C_5

2.4 Pemetaan

Misalkan X dan Y adalah himpunan yang tidak kosong. Pemetaan f dari himpunan X ke himpunan Y adalah suatu aturan yang memetakan setiap anggota dari himpunan X tepat satu anggota dari himpunan Y, dimana himpunan X disebut *domain* (*daerah asal*) dan himpunan Y disebut *kodomain* (*daerah kawan*), sedangkan himpunan nilai yang diperoleh dari pemetaan f disebut *daerah hasil* (*range*).

Apabila pemetaan f mempunyai sifat bahwa setiap dua elemen yang berlainan dari daerah hasil mempunyai prapeta yang berlainan pula dalam daerah asal atau dengan kata lain setiap dua elemen yang berbeda dari daerah asal mempunyai peta yang berbeda dalam daerah hasil, maka pemetaan dari himpunan X ke himpunan Y dinamakan *pemetaan satu-satu* (*injektif*). Secara matematik disajikan sebagai berikut:

untuk setiap $u, v \in X$, $f(u) \neq f(v)$ maka $u \neq v$

Apabila pemetaan f mempunyai sifat bahwa setiap elemen dari daerah kawan mempunyai prapeta dalam daerah asal, maka pemetaan dari himpunan X ke himpunan Y dinamakan *pemetaan onto* atau *pada* (*surjektif*). Secara matematik disajikan sebagai berikut:

untuk setiap $y \in Y \; \exists \; x \in X \ni f(x) = y$

Contoh :

Misal $X = \{1,2,3,4\}$; $Y = \{2,3,4,5\}$

$f : X \rightarrow Y$ dengan aturan $f(x) = 1 + x$

f merupakan pemetaan satu-satu karena, jika $f(x_1) = f(x_2)$ yaitu $1 + x_1 = 1 + x_2$ maka $x_1 = x_2$.

f merupakan pemetaan pada karena, untuk setiap $y \in Y$ terdapat $y - 1 \in X$ sedemikian hingga $f(y - 1) = y$.

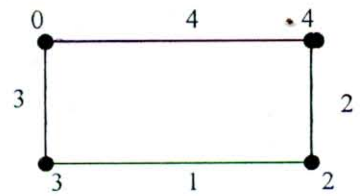
2.5 Pelabelan Graf

Pelabelan pada graf adalah pemberian nilai pada setiap titik, setiap sisi atau setiap titik dan sisinya. Pelabelan titik pada graf adalah pemberian nilai pada setiap titik. Pelabelan sisi pada graf adalah pemberian nilai pada setiap sisi. Sedangkan pelabelan titik dan sisi pada graf adalah pemberian nilai pada setiap titik dan sisi. Pelabelan konsekutif termasuk pelabelan titik dan sisi. Pelabelan konsekutif ini, idenya dari pelabelan graceful pada graf pohon yang titiknya dilabeli dengan bilangan bulat positif 1, 2, 3,…, q+1, dimana q merupakan banyaknya sisi. Karena itu, kita akan mendefinisikan pelabelan graceful sebelum pelabelan konsekutif. Namun untuk selanjutnya, pelabelan konsekutif dapat diperoleh tanpa melalui pelabelan graceful. Pada penelitian ini, pembahasan hanya dikhususkan untuk pelabelan konsekutif tanpa melihat pelabelan graceful dengan mengasumsikan bahwa graf G (n,q) merupakan graf dengan n titik dan q sisi.

2.5.1 Pelabelan Graceful

Pelabelan graceful diperkenalkan oleh Gerhard Ringel pada pertengahan tahun 1960. Kemudian, pada tahun 1967 Rosa mengembangkan teori pelabelan graceful yang telah diperkenalkan oleh Gerhard Ringel [3].

Pelabelan graceful adalah pemetaan satu–satu λ: $V(G) \rightarrow \{0, 1, 2, 3,.., q\}$ dimana pelabelan sisi $e = uv$ adalah harga mutlak dari selisih pelabelan titik yang menempel dengan sisi e yaitu $\lambda(e) = \lambda(uv) = |\lambda(u) - \lambda(v)|$. Gambar 2.13 adalah contoh pelabelan graceful pada graf sikel C_4.



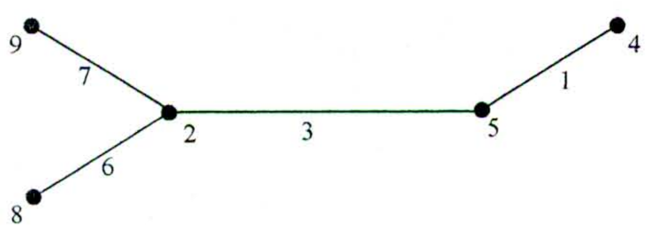
Gambar 2.13 Pelabelan Graceful pada Graf Sikel C_4

Pelabelan graceful yang diselidiki oleh Slater sedikit berbeda dengan pelabelan graceful yang diselidiki oleh Rosa. Pelabelan graceful oleh Rosa memberi label titiknya dari bilangan bulat positif 0, 1, 2,..., q, sedangkan Slater memberi label titiknya dari bilangan bulat positif 1, 2, 3,..., q+ 1.

Pelabelan graceful pada graf pohon dengan n titik secara umum belum dibuktikan, meskipun Ringel telah memberikan konjektur bahwa semua graf pohon adalah graceful. Akan tetapi, Rosa dan Bloom telah menunjukkan bahwa semua graf pohon dengan $n \leq 16$ adalah graceful [3].

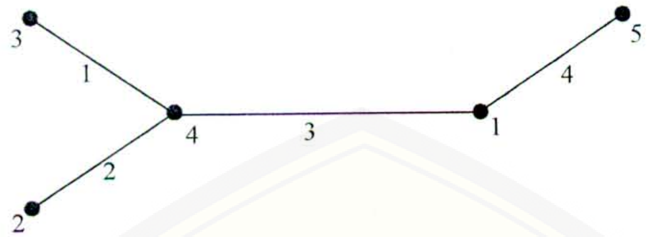
2.5.2 Pelabelan Konsekutif

Sebuah masalah pelabelan yang berhubungan dengan masalah pelabelan graceful diselidiki oleh Slater. Slater menyelidiki pelabelan graceful pada graf pohon yang himpunan titiknya mendapat label dari bilangan bulat positif 1, 2, 3,..., q+1. Pada graf pohon T dengan n-1 sisi yang himpunan titik dan sisinya mendapat label berurutan dari bilangan bulat positif 1, 2, 3,..., 2n-*1* disebut *pelabelan konsekutif* pada graf pohon, dimana label sisinya merupakan harga mutlak dari selisih antara label dua titik yang bertetangga. Pelabelan yang ditunjukkan Gambar 2.14 merupakan pelabelan konsekutif pada graf pohon T_5.



Gambar 2.14 Pelabelan Konsekutif pada Graf Pohon T_5

Slater memberikan contoh pelabelan graceful pada graf pohon dengan lima titik dan empat sisi seperti ditunjukkan Gambar 2.15. Pelabelan graceful tersebut dapat diubah menjadi pelabelan konsekutif dengan cara sebagai berikut.



Gambar 2.15 Graf Pohon T_5 yang Graceful

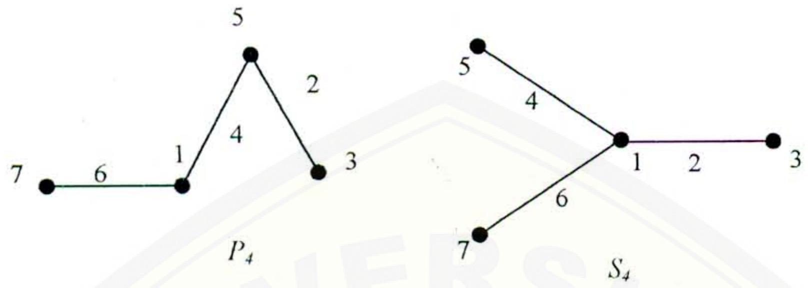
Misal salah satu titiknya dilabeli dengan k , ubah labelnya dengan $2k-1$, sehingga semua titiknya mendapat label bernomor ganjil. Sisinya mendapat label selisih antara label dua titik yang bertetangga, label sisi-sisinya akan genap. Sekarang diperoleh pelabelan kosekutif pada graf pohon T_5 seperti Gambar 2.16.

Gambar 2.16 Graf Pohon T_5 yang Konsekutif

Slater memberikan konjektur bahwa semua graf pohon mempunyai pelabelan konsekutif. Konjektur ini lebih rumit dibandingkan konjektur bahwa semua graf pohon adalah graceful, karena pada pelabelan graceful label titik dan sisinya boleh mendapat label yang sama, sedangkan pada pelabelan konsekutif label titik dan sisinya harus memenuhi aturan pemetaan satu–satu dan pada.

Pelabelan konsekutif dapat diaplikasikan pada graf secara umum, tidak hanya pada graf pohon. Tentu saja, himpunan titik dan sisinya dilabeli dengan bilangan bulat positif 1, 2 , 3,..., n, $n+1$,..., $n+q$. Untuk selanjutnya Slater mendefinisikan pelabelan konsekutif sebagai berikut. *Pelabelan konsekutif* adalah pemetaan satu–satu dan pada $\lambda: V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, ..., n, n+1, ..., n+q\}$

dimana label sisi e merupakan harga mutlak dari selisih antara label dua titik yang bertetangga atau yang menempel dengan sisi e yaitu $\lambda(e)=\lambda(uv)=|\lambda(u)-\lambda(v)|$. Gambar 2.17 adalah contoh pelabelan konsekutif pada graf lintasan P_4 dan graf bintang S_4.



Gambar 2.17 Pelabelan Konsekutif pada Graf Lintasan P_4 dan Graf Bintang S_4

BAB IV
KESIMPULAN DAN SARAN

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan, diperoleh kesimpulan bahwa pelabelan konsekutif pada graf sederhana dan graf hingga, dalam bentuk graf pohon mempunyai beberapa kelas khusus, diantaranya graf lintasan, graf bintang dan graf katerpilar dengan sifat-sifat sebagai berikut :

1. Jika graf pohon T_n adalah graceful maka graf pohon tersebut adalah konsekutif.
2. Graf lintasan P_n untuk setiap n adalah graf konsekutif.
3. Graf bintang S_r adalah graf konsekutif.
4. Graf katerpilar $Cr_{m,p}$ adalah graf konsekutif.

4.2 Saran

Pelabelan konsekutif tidak hanya dapat diaplikasikan pada graf yang telah dibahas penulis. Oleh karena itu, tidak menutup kemungkinan bagi penulis lain untuk mengaplikasikannya pada graf sikel dan graf-graf yang lain.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Chartrand, G. and Lesniak, L. (1996). *Graphs and Digraphs*, Third edition, Chapman and Hall, London.

[2] Hartsfield, N. and Ringel, G. (1990). *Pearls in Graph Theory A Comprehensive Introduction*, Academic Press, Inc, London.

[3] Slamin. (1997). *Graph Labellings*, Department of Computer Science and Software Engineering, The University of Newcastle, Australia.