



**KETERAMPILAN BERPIKIR TINGKAT TINGGI
DALAM KEANTIAJAIBAN SUPER TOTAL
SELIMUT GRAF *CIRCULANT* DAN
APLIKASINYA PADA *CIPHER
BLOCK CHAINING***

SKRIPSI

oleh

Elitta Permata Dewy

NIM 130210101035

**PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MIPA
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS JEMBER**

2017



**KETERAMPILAN BERPIKIR TINGKAT TINGGI
DALAM KEANTIAJAIBAN SUPER TOTAL
SELIMUT GRAF *CIRCULANT* DAN
APLIKASINYA PADA *CIPHER
BLOCK CHAINING***

SKRIPSI

diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan Program Studi Pendidikan Matematika (S1) dan mencapai gelar Sarjana Pendidikan

oleh

Elitta Permata Dewy

NIM 130210101035

**PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MIPA
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS JEMBER**

2017

HALAMAN PERSEMBAHAN

Dengan menyebut nama Allah yang maha pengasih lagi maha penyayang, serta sholawat atas Nabi Muhammad S.A.W, kupersembahkan sebuah kebahagiaan dalam perjalanan hidupku teriring rasa terima kasihku yang terdalam kepada:

1. Allah SWT yang telah memberikan nikmat, Ridho, dan Rahmat-Nya sehingga skripsi ini dapat terselesaikan;
2. Ayahanda Drs. Tri Hariyono dan Ibunda Dra. Satimah, serta Adikku Intan Puspita Rahayu yang senantiasa hadir dalam setiap hela nafas saya serta senantiasa mendampingi saya dalam meraih cita-cita;
3. Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D. selaku Dosen Pembimbing I dan Susi Setiawani, S.Si., M.Sc selaku Dosen Pembimbing II yang telah meluangkan pikiran dan perhatian dalam penulisan skripsi ini;
4. Bapak dan Ibu Dosen FKIP Pendidikan Matematika yang dengan sabar telah memberikan ilmu dan bimbingannya selama menyelesaikan masa studi;
5. Andry Dwi Prastyo yang selalu memberi semangat disela-sela pelatihan TAIFIBnya;
6. Teman-teman pejuang graf yang tergabung dalam CGANT selalu berbagi suka maupun duka yang selalu memberikan dukungan serta semangat;
7. Teman-teman seperjuangan FKIP Pendidikan Matematika angkatan 2013 "Cuucok Mania - Sahabat Saklawase";
8. Vutikatul Nur R., Citra Dwi A., Redita Febry A., Dini Makhillatul, Syahdinar Indriawati, Mita Oktavia, Afni Nurvita, Anggun Ika, Rizky Hayina, Ayu Septia, dan Kholifatu Rizki A. yang selalu memberi semangat dalam semua situasi dan kondisi;
9. Ida Nurahadiana dan Sri Wahyuni sebagai sahabat sehidup semati dalam Sister's;

10. Anggota "Telolet bukan si Mawar": Mas Ridlo, Mas Sadam, Kak Bibi, Kak Dwi, Kak Ermita, Kak Novia dan Kak Niar;
11. Almamater Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember;
12. Semua pihak yang telah membantu terselesaikannya skripsi ini.



MOTTO

"Sesungguhnya dibalik kesulitan selalu ada kemudahan."
(QS.Al-Insyiraah 94:5-6)

"Sebaik-baik manusia diantaramu adalah yang paling banyak
manfaatnya bagi orang lain"
(HR.Thabrani)

"Seperti emas yang ditempa dengan panas, semakin murni dan indah.
Yakinlah bahwa di balik kesakitan,
ada hikmah yang tiada tara."
(Pipiet Senja, Novel 'Jangan Jadi Perempuan Cengeng')

"Kalau rasa keadilanmu menurun berarti kau melemah, dibawah rasa
keadilan tidak ada kelemahan apapun!"
(Kakashi Hatake)

"Dimana ada cahaya, disana ada bayangan. Tetapi, kehilangan salah
satunya hanya akan menyebabkan dunia ini menjadi kacau."
(Hiruzen to Danzo)

"Shinobi yang melanggar aturan memang disebut sampah, tetapi
shinobi yang meninggalkan sahabatnya lebih rendah dari sampah."
(Uchiha Obito)

"Semua orang hidup terikat dan bergantung pada pengetahuan atau
persepsinya sendiri, itu disebut kenyataan. Tetapi pengetahuan
atau persepsi itu sesuatu yang samar. Bisa saja kenyataan itu
hanya ilusi, semua orang hidup dalam asumsi."
(Uchiha Itachi)

HALAMAN PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Elitta Permata Dewy

NIM : 130210101035

Menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang berjudul: "KETERAMPILAN BERPIKIR TINGKAT TINGGI DALAM PELABELAN SUPER TOTAL SELIMUT GRAF *CIRCULANT* DAN APLIKASINYA PADA *CHIPER BLOCK CHAINING*" adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali jika dalam pengutipan substansi disebutkan sumbernya, dan belum diajukan pada instansi manapun, serta bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa adanya tekanan dan paksaan dari pihak manapun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, 5 April 2017

Yang menyatakan,

Elitta Permata Dewy

NIM. 130210101035

SKRIPSI

**KETERAMPILAN BERPIKIR TINGKAT TINGGI
DALAM KEANTIAJAIBAN SUPER TOTAL
SELIMUT GRAF *CIRCULANT* DAN
APLIKASINYA PADA *CIPHER
BLOCK CHAINING***

Oleh

**Elitta Permata Dewy
NIM 130210101035**

Dosen Pembimbing 1 : Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D.

Dosen Pembimbing 2 : Susi Setiawani, S.Si., M.Sc

HALAMAN PERSETUJUAN

**KETERAMPILAN BERPIKIR TINGKAT TINGGI
DALAM KEANTIAJAIBAN SUPER TOTAL
SELIMUT GRAF *CIRCULANT* DAN
APLIKASINYA PADA *CIPHER
BLOCK CHAINING***

SKRIPSI

Diajukan untuk dipertahankan di depan Tim Penguji sebagai salah satu persyaratan untuk menyelesaikan Program Pendidikan Sarjana Jurusan Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam dengan Program Studi Pendidikan Matematika pada Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember

Oleh:

Nama : Elitta Permata Dewy
NIM : 130210101035
Tempat dan Tanggal Lahir : Sidoarjo, 3 Agustus 1995
Jurusan / Program Studi : Pendidikan MIPA / P. Matematika

Disetujui oleh:

Pembimbing I,

Pembimbing II,

Prof. Drs. Dafik, M.Sc, Ph.D
NIP. 196808021993031004

Susi Setiawani, S.Si., M.Sc
NIP. 197003071995122001

HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi berjudul Keterampilan Berpikir Tingkat Tinggi dalam Keantiajaiban Super Total Selimut Graf *Circulant* dan Aplikasinya pada *Chiper Block Chaining* telah diuji dan disahkan oleh Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan pada:

Hari : Rabu

Tanggal : 5 April 2017

Tempat : Gedung E Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan

Tim Penguji :

Ketua,

Sekretaris,

Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D.
NIP.196808021993031004

Susi Setiawani, S.Si., M.Sc
NIP.197003071995122001

Anggota I,

Anggota 2,

Drs. Toto Bara Setiawan, M.Si.
NIP.195812091986031003

Arif Fatahillah, S.Pd., M.Si.
NIP. 198205292009121003

Mengetahui,

Dekan Fakultas Keguruan Dan Ilmu Pendidikan
Universitas Jember

Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D.
NIP. 19680802 199303 1 004

RINGKASAN

Keterampilan Berpikir Tingkat Tinggi dalam Keantiajaiban Super Total Selimut Graf *Circulant* dan Aplikasinya pada *Chiper Block Chaining*; Elitta Permata Dewy, 130210101035; 2017: 109 halaman; Program Studi Pendidikan Matematika, Jurusan Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Jember.

Permasalahan dalam proses peningkatan keamanan data maupun pesan yang tinggi dapat dipecahkan melalui pengembangan pesan rahasia atau *ciphertext*. Proses dalam pengembangan pesan rahasia atau *ciphertext* dapat disebut sebagai *cryptosystem*. Terdapat beberapa cara untuk mengubah pesan rahasia, salah satunya adalah dengan metode *Cipher Block Chaining* (CBC). Salah satu bidang ilmu dari matematika diskrit yang dapat diterapkan untuk pengembangan *ciphertext* yaitu teori graf, dengan topik pelabelan graf.

Hasil utama dari penelitian terkait dengan pelabelan super (a, d) - $C_{ca(s_l)}^{K_4}$ -antiajaib total selimut yang dinotasikan dengan $Shack(C_{ca(s_l)}^{K_4}, K_4, e, n)$ yaitu lemma dan teorema. Teknik yang digunakan untuk pelabelan adalah teknik partisi, dimana himpunan bulat dikelompokkan ke dalam baris dan kolom. Terdapat beberapa lemma dan teorema baru yang ditemukan secara eksperimental dalam penelitian ini.

Berdasarkan penelitian dihasilkan kardinalitasnya yaitu himpunan titik pada operasi *shackle* subgraf dari graf *circulant* ($C_{ca(s_l)}$) dengan konektor graf komplit (K_4) $V_1 = \{x_{1,1}; x_{2,1}; x_{3,1}; x_{4,1}\}$ dan $V_2 = \{y_{j,i} | 1 \leq j \leq m; 1 \leq i \leq n\}$ dengan jumlah titik $|V| = |V| = 4 + mn$, sisi $E_1 = \{x_{11}x_{21}; x_{11}y_{11}; x_{11}y_{101}; x_{21}y_{101}; x_{21}y_{11}; x_{31}y_{5n}; x_{31}y_{41}; x_{31}y_{6n}; x_{41}y_{5n}; x_{41}y_{6n}\} \cup \{y_{\frac{m}{2},i}y_{1,i+1} | 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{y_{\frac{m}{2}+1,i}y_{m,i+1} | 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{y_{\frac{m}{2},i}y_{m,i+1} | 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{y_{\frac{m}{2}+1,i}y_{1,i+1} | 1 \leq i \leq n-1\}$ dan $E_2 = \{y_{j,i}y_{(j+s_l)mod m,i} | 1 \leq j \leq m; 1 \leq i \leq n; s_l = r\}$ dengan jumlah sisi $|E| = 4n + rm + 6$, serta batas atas beda $d \leq -mp_H + q_H^2 - \frac{q_H n(n+2)}{n-1} + \frac{6q_H}{n-1}$ dengan $p_G = p_H + m(n-1)$, $p_H = m + 4$, $q_G = nq_H - n^2 - 2n + 6$, dan $q_H = n + rm + 6$.

Operasi *shackle* subgraf dari graf *circulant* ($C_{ca(s_l)}$) dengan konektor graf komplit (K_4) yang dinotasikan dengan $Shack(C_{ca(s_l)}^{K_4}, K_4, e, n)$, dengan indeks n ,

m , dan $s_l = r = 3$ memiliki super (a, d) - $C_{ca(s_l)}^{K_4}$ -antiajaib. Kemudian dihasilkan 2 lemma tentang partisi $\mathcal{P}_{t, \frac{t}{5}}^{n, k}(i, j, k)$ dan $\mathcal{P}_{t, -\frac{t}{5}}^{n, k}(i, j, k)$ yang disertai observasi. Dari partisi yang dihasilkan dilakukan kombinasi dengan partisi yang telah ditemukan sebelumnya. Pelabelan super (a, d) - $C_{ca(s_l)}^{K_4}$ -anti ajaib memiliki nilai beda $d = 2(t_1 + t_2^2) + \frac{1}{5}t_3 - \frac{1}{5}t_4 + t_5 - t_6 + t_7^2 - t_8^2 + \frac{1}{3}t_9 - \frac{1}{3}t_{10} + \dots + t_t + 2r_1 + 2r_2^2 + \frac{1}{5}r_3 - \frac{1}{5}r_4 + r_5 - r_6 + r_7^2 - r_8^2 + \frac{1}{3}r_9 - \frac{1}{3}r_{10} + \dots + r_r$.

Aplikasi pengembangan *cryptosystem polyalphabetic ciphertext* terhadap operasi *shackle* subgraf dari graf *circulant* ($C_{ca(s_l)}$) dengan konektor graf komplit (K_4) menggunakan metode *cipher block chaining* (CBC). Metode ini membagi *plaintext* ke dalam *block*, dan kunci yang digunakan merupakan pengembangan *key stream* yang dibangun dari label sisi yang diperoleh. *Key stream* memiliki sifat yang sensitif terhadap nilai awal, sehingga kunci rahasia yang merupakan nilai awal apabila diganti akan menghasilkan *key stream* yang berbeda. Melalui metode tersebut, Jika terdapat *plaintext* sesuai dengan karakter yang ditetapkan yaitu dimana karakter yang dikodekan meliputi alfabet, spasi, tanda baca koma (,), tanda baca titik (.), tanda baca perintah (!), dan tanda baca tanya (?), maka *ciphertext* dari pesan "hidup harus diperjuangkan!" memiliki banyak hasil yang bergantung pada pembagian *blocknya*, dengan catatan untuk membagi *block* yaitu lebih dari satu huruf dan kurang dari jumlah karakter yang akan disandikan.

Keterampilan berpikir tingkat tinggi dalam keantiajaiban super (a, d) - $C_{ca(s_l)}^{K_4}$ -antiajaib yang terbagi dalam 6 tahapan. Tahap mengingat meliputi mengingat istilah dan teorema yang terkait, mengenali graf yang akan digunakan. Tahap memahami yang terdiri dari menjelaskan kesesuaian operasi *shackle* subgraf dari graf *circulant* ($C_{ca(s_l)}$) dengan konektor graf komplit (K_4) serta definisinya. Tahap menerapkan yaitu menggunakan teorema batas atas untuk menunjukkan batas atas yang ada pada operasi *shackle* subgraf dari graf *circulant* ($C_{ca(s_l)}$) dengan konektor graf komplit (K_4) dan menerapkan teorema lainnya yang berkaitan, termasuk aturan-aturan yang berlaku dalam ilmu hitung. Tahap menganalisis meliputi memecah graf menjadi beberapa bagian berdasarkan polanya, mengkerangkakan pola untuk setiap bagian dalam

bentuk partisi. Tahap mengevaluasi yaitu mengecek dan mengkaji ulang pola tersebut pada setiap eksponnya, mengecek pengkombinasian partisi pada setiap eksponnya. Tahap mencipta yaitu memformulasikan partisi, mencari suku terkecil a , dan beberapa nilai beda d yang diperoleh serta menciptakan observasi dan teorema baru.



KATA PENGANTAR

Puji syukur ke hadirat Allah Swt atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul Keterampilan Berpikir Tingkat Tinggi dalam Keantiajaiban Super Total Selimut Graf *Circulant* dan Aplikasinya pada *Chiper Block Chaining*. Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan pendidikan strata satu (S1) pada Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember.

Pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih atas bantuan dan bimbingan dalam penyusunan skripsi ini, terutama kepada yang terhormat:

1. Dekan Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember;
2. Ketua Jurusan Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
3. Ketua Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Jember;
4. Dosen Pembimbing I dan Dosen Pembimbing II yang telah meluangkan waktu, pikiran, dan perhatian dalam penulisan skripsi ini;
5. Dosen dan Karyawan Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember;
6. Semua pihak yang telah membantu terselesaikannya skripsi ini.

Semoga bantuan, bimbingan, dan dorongan beliau dicatat sebagai amal baik oleh Allah SWT dan mendapat balasan yang sesuai dari-Nya. Selain itu, penulis juga menerima segala kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan skripsi ini. Akhirnya penulis berharap, semoga skripsi ini dapat bermanfaat.

Jember, 5 April 2017

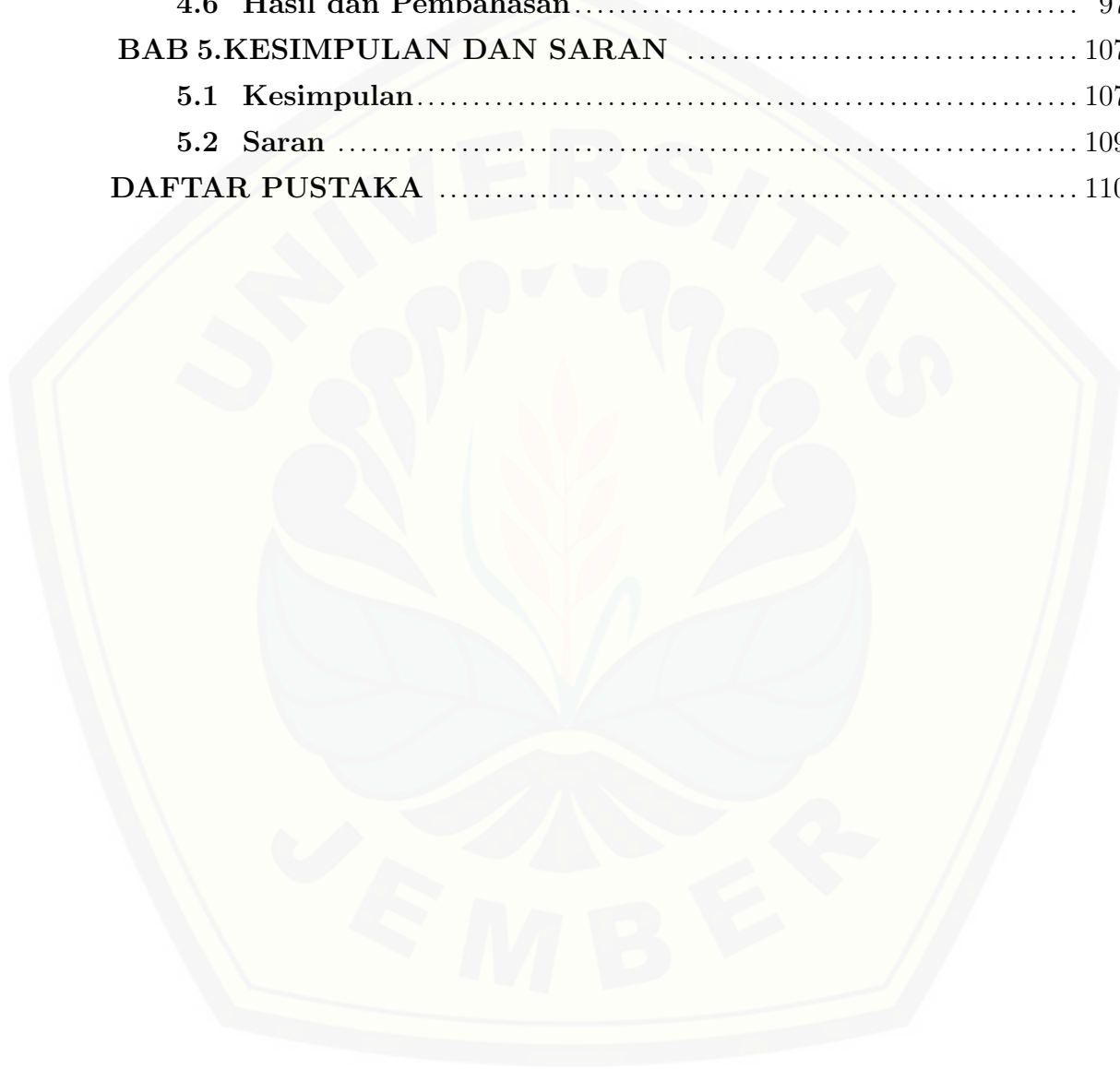
Penulis

DAFTAR ISI

	Halaman
HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PERSEMBAHAN	ii
HALAMAN MOTTO	iv
HALAMAN PERNYATAAN	v
HALAMAN PERSETUJUAN	vii
HALAMAN PENGESAHAN	viii
RINGKASAN	ix
KATA PENGANTAR	xii
DAFTAR ISI	xv
DAFTAR GAMBAR	xvii
DAFTAR TABEL	xix
DAFTAR LAMBANG	xx
BAB 1.PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang Masalah.....	1
1.2 Rumusan Masalah	5
1.3 Batasan Masalah.....	6
1.4 Tujuan Penelitian.....	6
1.5 Manfaat Penelitian	7
1.6 Kebaharuan Penelitian	7
BAB 2.TINJAUAN PUSTAKA	8
2.1 Sejarah dan Terminologi Dasar Graf.....	8
2.2 Graf Khusus.....	15
2.3 Operasi Graf <i>Shackle</i>	16
2.4 Graf <i>Shack</i> ($C_{ca(s_l)}^{K_4}, K_4, e, n$)	17
2.5 Teknik Partisi.....	17
2.6 Fungsi dan Barisan Aritmatik	20
2.7 Aksioma, postulat, teorema, lemma, <i>corollary</i> , konjektur, dan <i>open problem</i>	22

2.8	Pelabelan Graf	23
2.8.1	Definisi Pelabelan Graf	23
2.8.2	Pelabelan Super $(a, d) - \mathcal{H}$ Antiajaib Total Labeling	24
2.9	Partisi pada Pelabelan Graf	26
2.10	Aplikasi Graf	30
2.11	Hasil Pelabelan Selimut Graf $(a, d) - \mathcal{H}$ Antimagic Total Selimut pada Graf Konektif dan Diskonektif	33
2.12	Keterampilan Berpikir Tingkat Tinggi	35
BAB 3. METODE PENELITIAN		38
3.1	Metode Penelitian	38
3.2	Definisi Oprasional	39
3.2.1	Pelabelan Super $(a, d) - \mathcal{H}$ -Antiajaib Total Selimut	39
3.2.2	Operasi <i>Shackle</i> subgraf dari Graf <i>Circulant</i> (C_{ca}) dengan Konektor Graf Komplit K_4	39
3.3	Teknik Penelitian	40
3.4	Observasi Awal	42
BAB 4. HASIL DAN PEMBAHASAN		46
4.1	Kardinalitas dan Batas Atas dari Operasi <i>Shackle</i> Subgraf dari Graf <i>Circulant</i> $(C_{ca(s_1)})$ dengan Konektor Graf Komplit (K_4)	47
4.2	Pengembangan Partisi dan Variasi Nilai Beda	49
4.3	Super $(a, d) - \mathcal{H}$ -Antiajaib Total Selimut pada Operasi <i>Shackle</i> Subgraf dari Graf <i>Circulant</i> $(C_{ca(s_1)})$ dengan Konektor Graf Komplit (K_4)	50
4.4	Pengembangan <i>Cipher Block Chaining</i> (CBC) pada Pelabelan Super $(a, d) - \mathcal{H}$ -Antiajaib Total Selimut pada Operasi <i>Shackle</i> Subgraf dari Graf <i>Circulant</i> $(C_{ca(s_1)})$ dengan Konektor Graf Komplit (K_4)	64

4.5 Keterampilan Berpikir Tingkat Tinggi dalam Pelabelan Super (a, d) - \mathcal{H} -Antiajaib Total Selimut pada Operasi <i>Shackle</i> Subgraf dari Graf <i>Circulant</i> $(C_{ca(s_1)})$ dengan Konektor Graf Komplit (K_4)	78
4.6 Hasil dan Pembahasan	97
BAB 5. KESIMPULAN DAN SARAN	107
5.1 Kesimpulan	107
5.2 Saran	109
DAFTAR PUSTAKA	110



DAFTAR GAMBAR

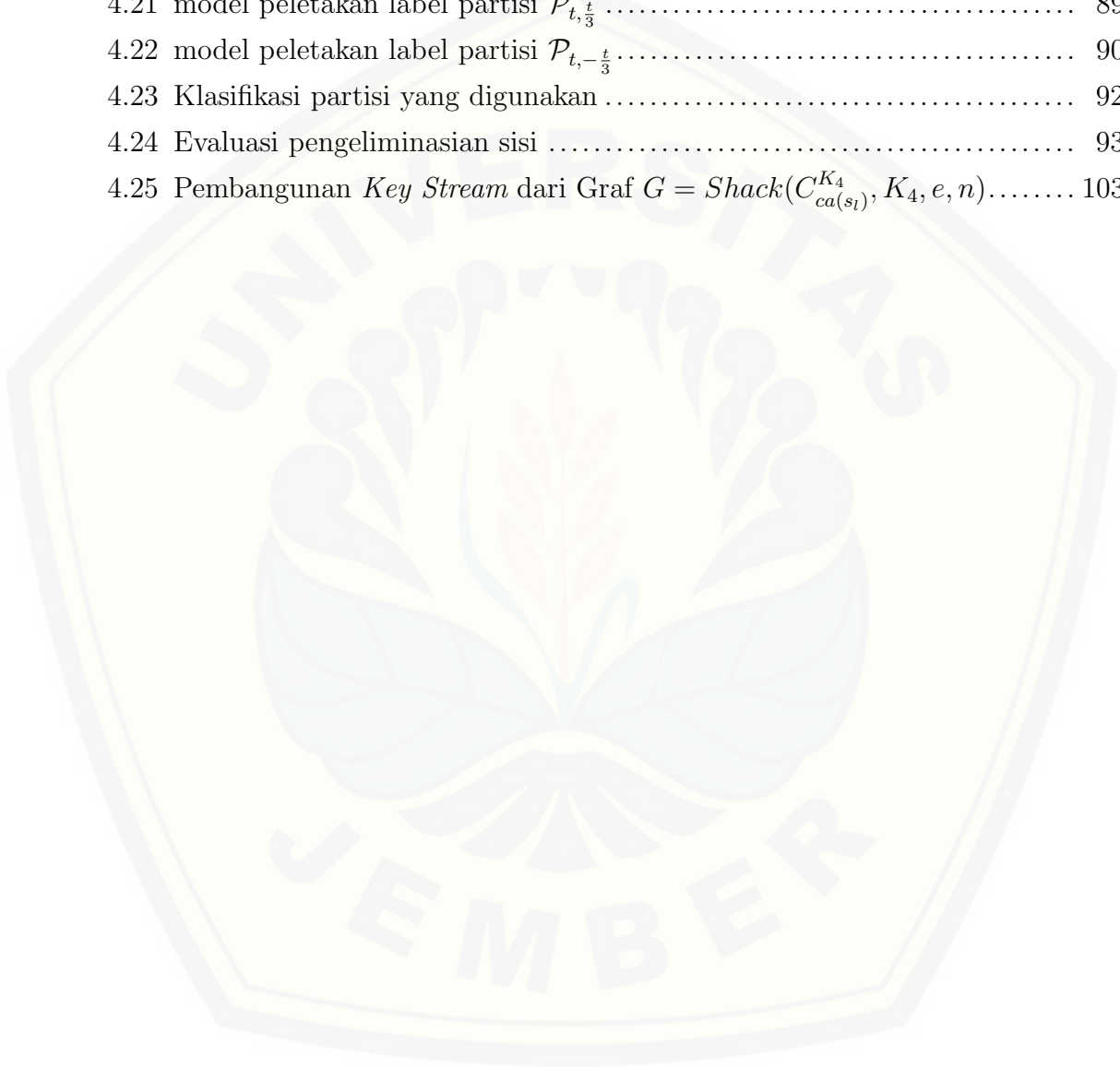
	Halaman
2.1 (a)Penampang Jembatan Königsberg; (b)Graf yang mempresentasikan Jembatan Königsberg; dan (c)Jembatan Königsberg (http : //scienceatelier.wordpress.com/2015/08/15/satu – jalan – kali – jalan – tujuh – jembatan – konigsberg/)	9
2.2 Contoh graf secara umum.....	10
2.3 (G_1) Graf Regular dan (G_2) Non-regular	11
2.4 (a) Graf G_1 dan (b) Graf G_2	12
2.5 Graf Kosong E_5	12
2.6 (G_1) Graf Tidak Sederhana dan (G_2) Graf Sederhana.....	13
2.7 (G) Graf, (G_1) dan (G_2) Subgrafnya	13
2.8 Graf G_1	14
2.9 Sebuah graf terhubung menjadi sebuah graf tak terhubung dikarenakan adanya <i>Cut – Set</i>	15
2.10 (a) Graf K_4 , (b) Graf K_5 , dan (c) Graf K_6	15
2.11 (a) Graf <i>Circulant</i> $(C_{1,2})$, (b) Graf <i>Circulant</i> $(C_{1,2,3})$ dan (c) Graf <i>Circulant</i> $(C_{1,2,3,4})$	16
2.12 <i>Shack</i> $(C_{10(1,2,3)}^{K_4}, K_4, e, 3)$	18
2.13 <i>Shack</i> $(C_{ca}^{K_4}, K_4, e, n)$	19
2.14 (a) Fungsi Injektif, (b) Fungsi Surjektif, dan (c) Fungsi Bijektif.....	21
2.15 (a)Pelabelan Titik, (b)Pelabelan Sisi, dan (c)Pelabelan Total	23
2.16 Alur Kerja Kriptografi	31
2.17 (a) Tahapan Taksonomi Bloom yang belum direvisi, dan (b) Tahapan Taksonomi Bloom yang sudah direvisi	35
3.1 Pelabelan Super $(a, d) – \mathcal{H}$ -Antiajaib Total Selimut pada shackle dari graf <i>Shack</i> $(C_{10(1,2,3)}^{K_4}, K_4, e, 3)$	41
3.2 Bagan teknik penelitan	43
3.3 Observasi awal pada <i>Shack</i> $(C_{10(1,2,3)}^{K_4}, K_4, e, 3)$	45

4.1	Super (7678, 58) – \mathcal{H} -Anti Ajaib Total Selimut pada Graf <i>Shack</i> $(C_{16(1,2,3)}^{K_4}, K_4, e, 3)$	61
4.2	Super (9741, 46) – \mathcal{H} -Anti Ajaib Total Selimut pada Graf <i>Shack</i> $(C_{18(1,2,3)}^{K_4}, K_4, e, 3)$	62
4.3	Super (9289, 84) – \mathcal{H} -Anti Ajaib Total Selimut pada Graf <i>Shack</i> $(C_{20(1,2,3)}^{K_4}, K_4, e, 3)$	63
4.4	Pelabelan Super (7678, 58) – \mathcal{H} -Anti Ajaib Total Selimut pada Graf <i>Shack</i> $(C_{16(1,2,3)}^{K_4}, K_4, e, 3)$	66
4.5	Diagram pohon dari Graf <i>Shack</i> $(C_{16(1,2,3)}^{K_4}, K_4, e, 3)$	68
4.6	Contoh Graf.....	79
4.7	Graf <i>Shack</i> $(C_{10(1,2,3)}^{K_4}, K_4, e, 3)$	81
4.8	Graf komplit K_4	85
4.9	Graf <i>Shack</i> $(C_{10(1,2,3)}^{K_4}, K_4, e, 3)$	86

DAFTAR TABEL

	Halaman
2.1 Klasifikasi partisi $d = m$	29
2.2 Klasifikasi partisi $d = m^2$	29
2.3 Klasifikasi partisi $d = \frac{m}{2}$	30
2.4 Ringkasan pelabelan total super (a, d) -edge antimagic pada graf konektif.	34
4.1 Pelabelan Graf $Shack(C_{16(1,2,3)}^{K_4}, K_4, e, 3)$ dengan $d = 58$	55
4.2 Pelabelan Graf $Shack(C_{18(1,2,3)}^{K_4}, K_4, e, 3)$ dengan $d = 46$	57
4.3 Pelabelan Graf $Shack(C_{20(1,2,3)}^{K_4}, K_4, e, 3)$ dengan $d = 42$	59
4.4 Pembangunan <i>Key Stream</i> dari Graf $G = Shack(C_{16(1,2,3)}^{K_4}, K_4, e, 3)$	69
4.5 Enkripsi Menggunakan Metode CBC dengan $b = 1$ dari Pelabelan $Shack(C_{16(1,2,3)}^{K_4}, K_4, e, 3)$	71
4.6 Enkripsi Menggunakan Metode CBC dengan $b = 2$ dari Pelabelan $Shack(C_{16(1,2,3)}^{K_4}, K_4, e, 3)$	71
4.7 Enkripsi Menggunakan Metode CBC dengan $b = 3$ dari Pelabelan $Shack(C_{16(1,2,3)}^{K_4}, K_4, e, 3)$	72
4.8 Enkripsi Menggunakan Metode CBC dengan $b = 4$ dari Pelabelan $Shack(C_{16(1,2,3)}^{K_4}, K_4, e, 3)$	73
4.9 Deskripsi Menggunakan Metode CBC dengan $b = 1$ dari Pelabelan $Shack(C_{16(1,2,3)}^{K_4}, K_4, e, 3)$	75
4.10 Deskripsi Menggunakan Metode CBC dengan $b = 2$ dari Pelabelan $Shack(C_{16(1,2,3)}^{K_4}, K_4, e, 3)$	75
4.11 Deskripsi Menggunakan Metode CBC dengan $b = 3$ dari Pelabelan $Shack(C_{16(1,2,3)}^{K_4}, K_4, e, 3)$	76
4.12 Deskripsi Menggunakan Metode CBC dengan $b = 4$ dari Pelabelan $Shack(C_{16(1,2,3)}^{K_4}, K_4, e, 3)$	77
4.13 Pelabelan himpunan titik pertama	85
4.14 Pelabelan himpunan sisi pertama	87
4.15 model peletakan label partisi $\mathcal{P}_{t, \frac{t}{5}}$	87
4.16 model peletakan label partisi $\mathcal{P}_{t, -\frac{t}{5}}$	88

4.17	model peletakan label partisi $\mathcal{P}_{t,t}$	88
4.18	model peletakan label partisi $\mathcal{P}_{t,-t}$	88
4.19	model peletakan label partisi \mathcal{P}_{t,t^2}	89
4.20	model peletakan label partisi $\mathcal{P}_{t,-t^2}$	89
4.21	model peletakan label partisi $\mathcal{P}_{t,\frac{t}{3}}$	89
4.22	model peletakan label partisi $\mathcal{P}_{t,-\frac{t}{3}}$	90
4.23	Klasifikasi partisi yang digunakan	92
4.24	Evaluasi pengeliminasian sisi	93
4.25	Pembangunan <i>Key Stream</i> dari Graf $G = Shack(C_{ca(s_i)}^{K_4}, K_4, e, n)$	103



DAFTAR LAMBANG

G	=	Graf G
$G(V(G), E(G))$	=	Sebarang graf tak berarah dengan $V(G)$ adalah himpunan tak kosong dari semua titik dan $E(G)$ adalah himpunan sisi
v_n	=	Titik ke- n pada suatu graf
e_n	=	Sisi ke- n dari suatu graf
E_n	=	Graf kosong berorder n
K_n	=	Graf komplit berorder n
C_{sl}	=	Graf <i>circulant</i> dengan busur sl
$C_{ca(sl)}$	=	Graf <i>circulant</i> dengan jumlah titik ca dan jumlah busur sl
$ShackC_{ca(sl)K_4, K_4, n}$	=	Operasi <i>shackle</i> subgraf dari graf <i>circulant</i> dengan jumlah titik ca dan jumlah busur sl dengan konektor K_4 berorder n
$ V(G) = p(G)$	=	Banyaknya titik dari graf G yang disebut <i>order</i>
$ E(G) = q(G)$	=	Banyaknya sisi dari graf G yang disebut ukuran (<i>size</i>)
$ V(G) = p(G)$	=	Jumlah titik selimut
$ E(G) = q(G)$	=	Jumlah sisi selimut
$EAVL$	=	<i>Edge antimagic vertex labeling</i> atau pelabelan titik sisi antimagic
$H-AVC$	=	H- <i>Antimagic vertex covering</i> atau pelabelan selimut (a,d) -titik anti ajaib pada graf
n	=	Banyaknya kopian pada subgraf <i>circulant</i>
m	=	Banyaknya titik pada subgraf <i>circulant</i>
sl	=	Jumlah busur yang digunakan pada subgraf <i>circulant</i>
d	=	Nilai beda barisan bobot total selimut
a	=	Bobot sisi terkecil yang merupakan suku pertama barisan bobot
C_1	=	Nilai konstanta yang digunakan untuk menyederhanakan nilai bobot total selimut operasi <i>shackle</i> subgraf dari graf <i>circulant</i> dengan konektor K_4
$x_{i,j}$	=	Titik ke- i, j pada bagian konektor graf komplit K_4 dari graf $Shack(C_{ca(sl)}^{K_4}, K_4, n)$

- $y_{i,j}$ = Titik ke- i, j pada bagian graf *circulant* dari graf *Shack*
 $(C_{ca(s_i)}^{K_4}, K_4, n)$
- W = Bobot total selimut operasi *shackle* subgraf dari graf
circulant dengan konektor K_4
- $f(V_1)$ = Fungsi untuk himpunan titik ke-1 pada operasi *shackle*
subgraf dari graf *circulant* dengan konektor K_4
- $f(V_2)$ = Fungsi untuk himpunan titik ke-2 pada operasi *shackle*
subgraf dari graf *circulant* dengan konektor K_4
- $f(E_1)$ = Fungsi untuk himpunan sisi ke-1 pada operasi *shackle*
subgraf dari graf *circulant* dengan konektor K_4
- $f(E_2)$ = Fungsi untuk himpunan sisi ke-2 pada operasi *shackle*
subgraf dari graf *circulant* dengan konektor K_4
- $P_{m,d}^n(i, j)$ = Fungsi suatu partisi yang memiliki m -tuple dan beda d
untuk antar jumlah anggota pada partisi ke- j pada operasi
shackle subgraf dari graf *circulant* dengan konektor
 K_4
- $\sum P_{m,d}^n(i, j)$ = Jumlah setiap anggota $P_{m,d}^n(i, j)$ pada partisi ke- j pada
operasi *shackle* subgraf dari graf *circulant* dengan konektor
 K_4
- \oplus = Menjumlahkan setiap anggota partisi dengan bilangan
real atau dengan setiap anggota partisi yang lain
- \cup = Menggabungkan lebih dari satu himpunan
- r = Jumlah karakter yang dipilih dalam *Cipher Block Chaining*
(CBC)
- k_{i+31} = Fungsi *key stream* dengan i adalah label sisi yang termo-
dulo 31
- P_i = Kunci *plaintext* dalam modulo 31
- C_i = Kunci *Cipher Block Chaining* (CBC)
- C_{i-1} = Kunci *Cipher Block Chaining* (CBC) baru yang di elimi-
nasi dengan kunci *Cipher Block Chaining* (CBC) sebelumnya

BAB 1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Di zaman yang serba modern ini, tidak dipungkiri bahwa semua perubahan yang terjadi dikarenakan perkembangan dari semua ilmu pengetahuan terutama matematika. Matematika berpengaruh dalam setiap arah perubahan zaman yang terjadi pada saat ini, seperti teknologi, kecanggihan mesin dan alat-alat berteknologi ini juga merupakan terapan dari ilmu matematika.

Matematika berkembang seiring berjalannya waktu, sehingga matematika merupakan dasar dari segala ilmu. Banyak permasalahan dan kegiatan dalam hidup kita yang harus diselesaikan dengan menggunakan ilmu matematika seperti menghitung, mengukur, dan lain-lain. Oleh karena itu mata pelajaran matematika sangat perlu diajarkan kepada peserta didik mulai dari taman kanak-kanak.

Menurut Johnson dan Myklebust yang dikutip oleh Mulyono Abdurrahman (2002:252) matematika adalah bahasa simbiolis yang fungsi praktisnya untuk mengekspresikan hubungan-hubungan kuantitatif dan keruangan sedangkan fungsi teoritisnya adalah untuk memudahkan berfikir. Matematika terdiri dari beberapa cabang misalnya, aljabar, geometri, statistika, probabilitas (peluang), matematika teknik, matematika aplikasi, matematika komputasi, matematika ekonomi, matematika diskrit, Sains Komputer, dan sebagainya.

Matematika merupakan disiplin ilmu yang secara jelas mengandalkan proses berpikir karena diperlukan oleh setiap individu dalam kehidupan sehari-hari. Berpikir merupakan suatu ketrampilan yang kognitif untuk memperoleh pengetahuan. Definisi yang paling umum dari berfikir adalah berkembangnya ide dan konsep di dalam diri seseorang (Suriasumantri (ed), 1983:52). Perkembangan ide dan konsep ini berlangsung melalui proses penjalinan hubungan antara bagian-bagian informasi yang tersimpan dalam diri seseorang yang berupa pengertian-pengertian. "berfikir" mencakup banyak

aktivitas mental. Hal ini menunjukkan ketika individu memecahkan masalah dan ingin menemukan penyelesaian maka individu tersebut akan mengalami proses berpikir, oleh karenanya manusia dapat mengenali masalah dalam berpikir, memahami, dan menyelesaikannya.

Keterampilan berpikir tingkat tinggi yang diterjemahkan dari *Higher Order Thinking Skills* (HOTS) adalah kegiatan berpikir yang melibatkan level kognitif hirarki tinggi dari taksonomi berpikir Bloom. Secara hirarkikal taksonomi Bloom terdiri dari enam level, yaitu (*knowledge*) pengetahuan, (*comprehension*) pemahaman, (*application*) penerapan, (*analysis*) analisis, (*synthesis*) sintesis, (*evaluation*) evaluasi. Anderson, L., and Krathwohl, D. (eds.) (2002) merevisi level taxonomi ini menjadi (*remembering*) mengingat, (*understanding*) memahami/mengerti, (*applying*) menerapkan, (*analyzing*) menganalisis, (*evaluating*) mengevaluasi, dan (*creating*) menciptakan. Hasil revisi dari Anderson and Krathwohl ini sangat mudah diterima oleh banyak saintisi dan praktisi sehingga keberadaannya selalu menjadi rujukan dari perkembangan teori pembelajaran. Dalam perkembangannya mengingat, memahami, dan menerapkan dikategorikan dalam *recalling* dan *processing*, sedangkan *analyzing* dan *evaluating* dikategorikan dalam *critical thinking* dan yang terakhir *creating* dikategorikan dalam *creative thinking*.

Ilmu matematika memiliki bermacam-macam cabang seperti yang tertulis di atas, dan juga hal itu berjalan secara linear dengan proses berpikir tinggi. Kaitannya dengan itu ada satu cabang terkait dengan penelitian ini, dan juga merupakan cabang matematika terkini terkait dengan sains computer, yaitu teori Graf, yang mana teori ini merupakan aplikasi dalam matematika diskrit.

Teori graf memiliki ragam aplikasi dalam berbagai bidang ilmu dalam kehidupan sehari-hari pemecahan masalah jaringan komputer, dengan pencarian rute terpendek, jaringan telepon, dan lain sebagainya. Teori ini pertama kali muncul pada tahun 1736, yakni ketika Euler mencoba mencari solusi dari pemecahan jembatan Königsberg.

Teori ini diperkenalkan pertama kali ketika mencoba membuktikan kemungkinan untuk melewati empat daerah yang terhubung dengan tujuh

jembatan di atas sungai Pregel di Königsberg, Rusia dalam sekali waktu oleh Leonhard Euler pada tahun 1736. Pembuktian Euler tersebut ditulis dalam karya tulisnya yang berjudul (*Solutio Problematis ad Geometriam Silus Pertinensi*). Masalah ini sangat terkenal di Eropa. Setelah seratus tahun terbitnya buku tersebut tidak ada perkembangan yang berarti yang berkenaan dengan teori graf.

Salah satu jenis pelabelan yang banyak diteliti adalah pelabelan ajaib (*magic*) dan pelabelan anti ajaib (*antimagic*). Pelabelan ajaib (*magic*) pertama kali diperkenalkan oleh Kotzig dan Rosa sebagai $M - (valuation)$ pada tahun 1970. Pelabelan ajaib (*magic*) adalah pemetaan dari himpunan sisi graf G pada bilangan real non-negatif, sehingga jumlah label sisi di sekitar titik pada graf G semuanya sama.

Pelabelan antiajaib adalah pengembangan dari pelabelan ajaib yang dilakukan oleh Hartsfield dan Ringel (1990). Mereka mendefinisikan bahwa suatu graf G yang memiliki verteks sebanyak $v_G = |V| = |V(G)|$ dan $e_G = |E| = |E(G)|$ disebut antiajab, jika sisi-sisinya dapat dilabeli dengan $1, 2, \dots, e_G$ sehingga setiap titik mempunyai bobot titik yang berbeda. Selanjutnya, Simanjutak dkk. (2000) memperkenalkan pelabelan total (a, d) -sisi antiajaib. Berbagai kelas graf telah ditunjukkan memiliki pelabelan total (a, d) -sisi antiajaib, diantaranya lintasan dan lingkaran. Sedangkan pada pelabelan total ajaib kemudian dikembangkan menjadi pelabelan selimut ajaib yang pertama kali diperkenalkan oleh Gutiérrez dan Lladó (2005). Suatu graf $G = (V(G), E(G))$ dikatakan memiliki pelabelan selimut- \mathcal{H} ajaib jika setiap garis pada $E(G)$ termuat dalam subgraf- \mathcal{H} dari G yang isomorfik dengan- \mathcal{H} . Sehingga dalam hal ini \mathcal{H} merupakan subgraf dari G . Inayah dkk kemudian dikembangkan suatu pelabelan selimut \mathcal{H} -antiajaib, dengan penjelasan bahwa suatu pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} -antiajaib total selimut pada graf G adalah sebuah fungsi bijektif sehingga terdapat jumlahan yang merupakan barisan aritmatika $\{a, a + d, a + 2d, \dots, a + (t - 1)d\}$. Pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} -antiajaib total selimut dikatakan sebagai fungsi bijektif karena label selimut pada suatu graf tersebut selalu berbeda dan berurutan.

Setiap pelabelan graf memiliki nilai batas atas d yang berbeda dan nilai d tidak tunggal. Nilai $d \geq s$ dengan s adalah bilangan bulat non negatif, dan s merupakan bilangan bulat terbesar dari d dalam suatu graf tertentu. Hasil-hasil pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} -anti ajaib total selimut yang sudah ditemukan diantaranya adalah pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} -anti ajaib total selimut pada graf fan, sun, dan generalized Petersen oleh Karyanti (2012). Inayah (2013) juga meneliti mengenai suatu pelabelan super $(a, d) - \mathcal{H}$ -anti ajaib total selimut pada graf kipas F_n dan graf roda W_n .

Salah satu jenis graf yang belum diketahui adalah pelabelan super $(a, d) - \mathcal{H}$ -antiajaib total selimut yaitu $Shack(C_{ca(s_i)}^{K_4}, K_4, n)$ serta generalisasi graf. Graf ini merupakan pengembangan operasi *shackle* subgraf, dengan graf *Circulant* ($C_{ca(s_i)}$) sebagai graf pusat yang memiliki tiga busur dan konektor graf komplit (K_4). Sehingga notasi penamaan secara umum dapat dituliskan graf $Shack(C_{ca(s_i)}^{K_4}, K_4, n)$, dimana n merupakan ekspansi graf, K_4 sebagai shacklanya subgraf, ca yang merupakan jumlah titik dari graf *circulant*, dan s_i merupakan jumlah busur dalam graf *circulant*.

Pelabelan super $(a, d) - \mathcal{H}$ -antiajaib total selimut pada graf $Shack(C_{ca(s_i)}^{K_4}, K_4, n)$ merupakan dasar pengembangan dari kriptografi dengan model *block* dalam metode *chiper block chaining* (CBC). Pada sistem ini, *Plaintext* atau P dibagi kedalam *blocks* serta kunci yang terurut K . Tujuan pengembangan *chiper block chaining* (CBC) ini adalah mengkodefikasi antara masing-masing antara masing-masing elemen dengan rumit supaya tidak dapat dirusak oleh para *hacker* yang mengakibatkan transfer data antar elemen menjadi tidak akurat, sehingga keamanan data dan informasi dapat terjaga dengan baik.

Pada penelitian ini akan dibahas tentang pelabelan super $(a, d) - \mathcal{H}$ -antiajaib total selimut pada graf $Shack(C_{ca(s_i)}^{K_4}, K_4, n)$ dan generalisasinya dalam mengembangkan kriptografi *cipher block chaining* (CBC), metode ini dipilih karena untuk mempersulit *hacker* dalam proses pembobolan pesan rahasia karena pesan tersebut terbagi dalam *block* yang memuat beberapa huruf saja serta mengkombinasikannya juga dengan kunci berjalan pada persandian di *block* selanjutnya. Dalam metode CBC yang akan digunakan di

sini diharapkan pembagian *block* lebih dari satu huruf, dikarenakan apabila pembagiannya hanya satu huruf saja maka metode ini sama saja dengan metode *stream cipher* dan para *hacker* dengan mudah dapat membobol pesan rahasia tersebut. Graf $Shackle(C_{ca(s_i)}^{K_4}, K_4, n)$ merupakan graf yang diperoleh dari hasil operasi *shackle* subgraf dari graf *circulant* dengan konektor K_4 yang saat ini masih belum ditemukan pelabelannya dan dapat mengembangkan teks kode yang unik.

Selain itu, pada penelitian ini akan menerapkan tahapan-tahapan berpikir tingkat tinggi taksonomi Bloom yang telah direvisi untuk mengasah keterampilan berpikir dalam menemukan graf $Shackle(C_{ca(s_i)}^{K_4}, K_4, n)$ hingga mencapai aspek tertinggi dari taksonomi tersebut yaitu aspek mencipta. Oleh karena itu, penelitian ini akan berjudul **"Keterampilan Berpikir Tingkat Tinggi dalam Keantiajaiban Super Total Selimut Graf *Circulant* dan Aplikasinya pada *Chiper Block Chaining*"**.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka dapat dirumuskan masalah dalam penelitian ini yaitu:

- 1) berapa kardinalitas titik dan sisi pada operasi *shackle* subgraf dari graf *circulant* ($C_{ca(s_i)}$) dengan konektor graf komplit K_4 ?
- 2) berapa batas atas beda pada operasi *shackle* subgraf dari graf *circulant* ($C_{ca(s_i)}$) dengan konektor graf komplit K_4 ?
- 3) bagaimana pelabelan super (a, d) - $(C_{ca(s_i)}^{K_4})$ -antiajaib total selimut pada operasi *shackle* graf *circulant* ($C_{ca(s_i)}$) dengan konektor graf komplit K_4 ?
- 4) bagaimana pengembangan *cipher block chaining* (CBC) melalui pelabelan super (a, d) - $(C_{ca(s_i)}^{K_4})$ -antiajaib total selimut pada operasi *shackle* graf *circulant* ($C_{ca(s_i)}$) dengan konektor graf komplit K_4 ?
- 5) bagaimana keterampilan berpikir tingkat tinggi dalam pelabelan super (a, d) - $(C_{ca(s_i)}^{K_4})$ -antiajaib total selimut pada operasi *shackle* graf *circulant* ($C_{ca(s_i)}$) dengan konektor graf komplit K_4 ?

1.3 Batasan Masalah

Untuk menghindari meluasnya permasalahan yang akan diteliti, maka dalam penelitian ini masalahnya dibatasi pada:

- 1) graf berhingga sederhana, yaitu graf yang tidak mempunyai loop dan sisi ganda (paralel) serta bukan graf berarah (*directed graph*);
- 2) graf yang digunakan adalah graf $Shack - (C_{ca(s_i)}^{K_4}, K_4, e, n)$, dengan $ca = m =$ genap dan busur pada graf *circulant* $s_l = r = 3$;
- 3) penerapan teknik partisi dan variasi beda aritmatika dalam pelabelan super total selimut $(a, d) - \mathcal{H}$ antiajaib pada graf $Shack - (C_{ca(s_i)}^{K_4}, K_4, e, n)$, dimana $n \geq 3$, $m \geq ca$ dan $s_l \geq 3$ dengan n adalah duplikat graf secara konektif;
- 4) proses substitusi pesan ke dalam *chipertext* teknik *CBC* dengan penambahan beberapa karakter yang akan mempengaruhi jumlah modulonya, serta apabila pesan tersebut berbentuk angka, maka di konversikan ke dalam bentuk huruf;
- 5) menggunakan taksonomi bloom yang telah direvisi.

1.4 Tujuan Penelitian

Sesuai dengan rumusan masalah dan latar belakang, maka tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

- 1) menentukan kardinalitas titik dan sisi pada operasi *shackle* subgraf dari graf *circulant* $(C_{ca(s_i)})$ dengan konektor graf komplit K_4 ;
- 2) menentukan batas atas beda pada operasi *shackle* subgraf dari graf *circulant* $(C_{ca(s_i)})$ dengan konektor graf komplit K_4 ;
- 3) untuk mengetahui pelabelan super $(a, d) - (C_{ca(s_i)}^{K_4})$ -antiajaib total selimut pada operasi *shackle* graf *circulant* $(C_{ca(s_i)})$ dengan konektor graf komplit K_4 ;
- 4) untuk mengetahui pengembangan *cipher block chaining* (CBC) melalui pelabelan super $(a, d) - (C_{ca(s_i)}^{K_4})$ -antiajaib total selimut pada operasi *shackle* graf *circulant* $(C_{ca(s_i)})$ dengan konektor graf komplit K_4 ;

- 5) mengasah keterampilan berpikir tingkat tinggi dalam pelabelan super (a, d) - $(C_{ca(s_i)}^{K_4})$ -antiajaib total selimut pada operasi *shackle* graf *circulant* $(C_{ca(s_i)})$ dengan konektor graf komplit K_4 .

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari hasil penelitian adalah:

- 1) menambah pengetahuan dalam teori graf mengenai operasi *shackle* subgraf salah satunya adalah pengembangan pelabelan super (a, d) - $(C_{ca(s_i)}^{K_4})$ -antiajaib total selimut pada operasi *shackle* graf *circulant* $(C_{ca(s_i)})$ dengan konektor graf komplit K_4 ;
- 2) menambah wawasan baru dalam menciptakan keterampilan berpikir tingkat tinggi dalam operasi *shackle* subgraf dalam pengembangan pelabelan super $(a, d) - \mathcal{H}$ -antiajaib total selimut;
- 3) menambah pengetahuan baru tentang ciphertext dan mengubah *plaintext* (kalimat pesan) menjadi *ciphertext* (kalimat rahasia) dengan metode *cipher block chaining* (CBC);
- 4) hasil penelitian ini diharapkan dapat digunakan sebagai perluasan ilmu atau pengembangan ilmu dalam masalah pelabelan super (a, d) - $(C_{ca(s_i)}^{K_4})$ -antiajaib total selimut.

1.6 Kebaharuan Penelitian

Kebaharuan dari penelitian ini adalah:

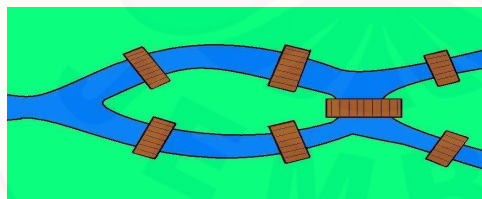
- 1) selama ini pelabelan super $(a, d) - \mathcal{H}$ antiajaib total selimut terfokus pada pelabelan total sisi, dalam hal ini diperluas menggunakan pelabelan total gabungan subgraf;
- 2) teknik pelabelan super $(a, d) - \mathcal{H}$ antiajaib total selimut yang awalnya menggunakan deret aritmatik pada penentuan titik-titiknya atau sisi-sisinya sekarang diperluas dengan menggunakan teknik partisi.

BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

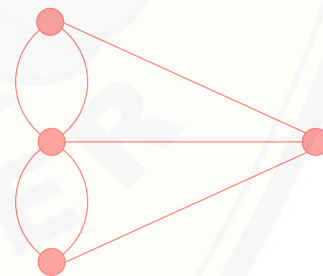
Sebelum membahas lebih lanjut tentang penelitian ini, berikut disajikan beberapa konsep dasar graf yang berkaitan dengan penelitian ini.

2.1 Sejarah dan Terminologi Dasar Graf

Lahirnya teori graf pertama kali diperkenalkan oleh Leonhard Euler seorang matematikawan berkebangsaan Swiss pada tahun 1736 melalui tulisannya Euler yang berisi tentang upaya pemecahan masalah jembatan Königsberg yang sangat terkenal di Eropa. Masalah jembatan Königsberg adalah mungkin tidaknya melewati ketujuh jembatan yang ada di kota Königsberg masing-masing tepat satu kali dan kembali lagi ditempat semula. Untuk memecahkan masalah itu, Euler memisalkan daratan yang dihubungkan dengan titik (verteks) dan jembatan dinyatakan dengan garis atau sisi (edge). Euler berkesimpulan bahwa tidak mungkin seseorang dapat melalui ketujuh jembatan itu, masing-masing satu kali dan kembali lagi ketempat semula. Sehingga kisah Jembatan Königsberg ini menjadi sejarah lahirnya teori graf.

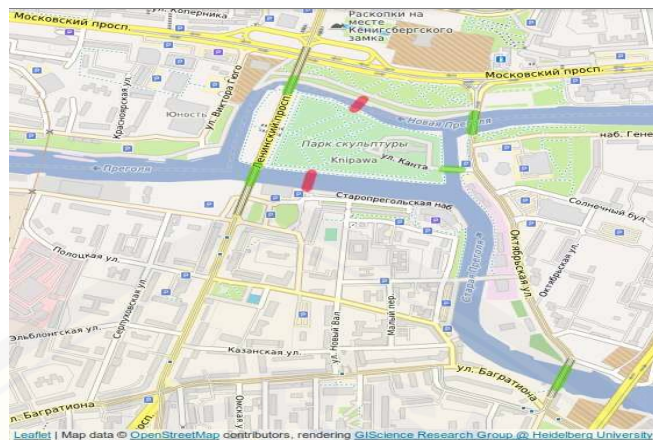


(a)



(b)

Nama graf diberikan karena graf dapat disajikan dalam secara grafik atau gambar, dan justru dengan bentuk gambar inilah sifat-sifat graf dapat dikenali secara detail. Titik disajikan dalam bentuk noktah atau lingkaran kecil dan sisi



(c)

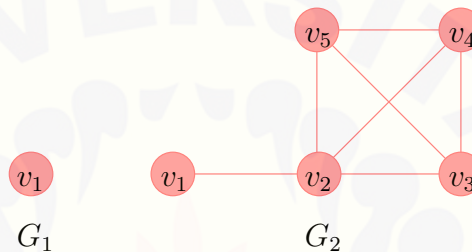
Gambar 2.1 (a)Penampang Jembatan Königsberg; (b)Graf yang mempresentasikan Jembatan Königsberg; dan (c)Jembatan Königsberg (<http://scienceatelier.wordpress.com/2015/08/15/satu-jalan-kali-jalan-tujuh-jembatan-konigsberg/>)

disajikan dalam bentuk garis atau kurva yang memasangkan dua titik. Penyajian graf secara gambar tidak harus tunggal, penempatan posisi titik atau sisi tidak menjadi perhatian serius (Abdussakir,dkk., 2009).

Menurut (Slamin, 2009:11-12), sebuah graf G merupakan pasangan himpunan $(V(G), E(G))$, dimana $V(G)$ adalah himpunan berhingga tak kosong dari elemen yang disebut titik, dan $E(G)$ adalah sebuah himpunan (mungkin kosong) dari pasangan tak terurut $\{u, v\}$ dari titik-titik $u, v \in V(G)$ yang disebut sisi. $V(G)$ disebut himpunan titik dari G dan $E(G)$ disebut himpunan sisi dari G . Banyaknya unsur di $V(G)$ disebut *order* dari G dan dilambangkan dengan $p(G)$, dan banyaknya unsur di $E(G)$ disebut ukuran dari G dan dilambangkan dengan $q(G)$. Jika graf yang dibicarakan hanya graf G , maka *order* dan ukuran dari G masing-masing cukup ditulis p dan q . Graf dengan *order* p dan ukuran q dapat ditulis graf- (p, q) .

Titik pada graf dilabeli dengan huruf, seperti a, b, c, \dots dengan bilangan asli 1, 2, 3, ... atau gabungan antara keduanya. Sisi yang menghubungkan titik u dan titik v dapat dinyatakan dengan pasangan $e = (u, v)$. Setiap sisi menghubungkan satu titik ke titik yang lain dan setiap titik dapat mempunyai

banyak sisi yang menghubungkannya ke titik lain. Order n dari graf G adalah banyaknya titik di G , yaitu $n = p(G)$ atau dapat ditulis $n = |V(G)|$ sedangkan banyaknya sisi dari sebuah graf G disebut *size* dari G , sering dinotasikan dengan $q(G)$ atau dapat ditulis $|E(G)|$. G_1 pada Gambar 2.2 adalah graf dengan *order* = 1 dan G_2 pada Gambar 2.2 adalah graf dengan $|V(G)| = 5$ dan $|E(G)| = 7$. Untuk G_1 $V = v_1$ dan $E = \emptyset$, sedangkan untuk G_2 $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$ atau dapat ditulis $\{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_2, v_4), (v_3, v_4), (v_3, v_5), (v_4, v_5), (v_5, v_2), (v_4, v_5)\}$.



Gambar 2.2 Contoh graf secara umum

Di dalam graf terdapat istilah-istilah mengenai dasar-dasar dari suatu graf atau disebut juga dengan Terminologi Dasar Graf yang sering digunakan dalam graf adalah bertetangga (*adjacent*), bersisian (*incident*), derajat (*degree*), simpul terpencil (*isolated vertex*), graf kosong (*null graph atau empty graph*), gelang (*loop*), subgraf, jalan (*walk*), lintasan (*path*), sirkuit atau siklus (*cycle*), dan *cut – set*. Beberapa terminologi tersebut dijabarkan sebagai berikut:

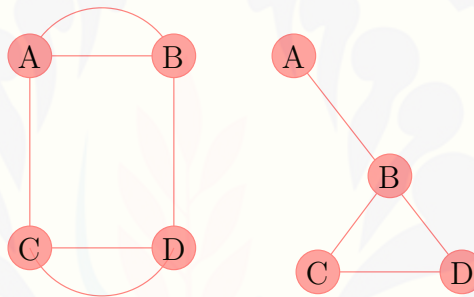
1. Bertetangga (*Adjacent*)

Dua buah simpul, yaitu titik u dan titik v dikatakan bertetangga (*adjacent*) jika ada sisi e yang menghubungkan titik u dan titik v , yaitu $e = uv$. Selanjutnya, u dan v terletak pada sisi e , maka u dan v dikatakan menempel (*incident*) dengan sisi e . Sebuah titik v menempel dengan sebuah sisi e jika v merupakan titik ujung dari e , sedemikian juga e menempel dengan v ketika v merupakan titik ujung dari e (Hartsfield and Ringel, 1994:7).

2. Derajat (*Degree*)

Banyaknya sisi yang bersisian pada titik v disebut derajat (*degree*) titik v pada graf, dinotasikan d (indeks i menunjukkan titik ke- i pada graf). Jika titik v mempunyai derajat 0 artinya tidak mempunyai tetangga dengan titik yang lain, maka titik v disebut titik terisolasi (*isolated vertex*).

Graf reguler merupakan graf dimana *degree* di setiap titik pada graf tersebut sama (Gary Chartrand dan Ping Zhang, 2012:38). Atau dapat dikatakan *degree* minimum graf G sama dengan *degree* maksimum graf G ($\delta(G) = \Delta(G)$). Sedangkan jika graf non-reguler yaitu graf dimana sebarang minimal ada dua titik pada graf G yang memiliki *degree* berbeda ($\delta(G) \neq \Delta(G)$).



Gambar 2.3 (G_1) Graf Regular dan (G_2) Non-regular

Pada Gambar 2.3 graf G_1 adalah salah satu contoh graf reguler yang ber-derajat tiga dan G_2 adalah graf non-reguler dengan $\delta(G) = 1$ dan $\Delta(G) = 3$.

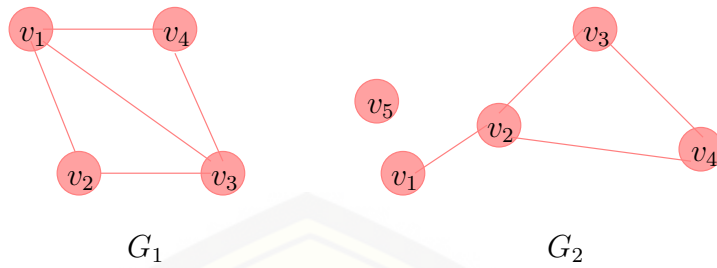
3. Simpul Terpencil (*Isolated Vertex*)

Simpul terpencil adalah simpul yang tidak mempunyai sisi yang bersisian dengannya.

Perhatikan graf G_1 pada Gambar 2.4 graf ini tidak memiliki simpul terkecil karena semua verteks pada grafnya terhubung, sedangkan pada G_2 pada vertek v_5 merupakan simpul terpencil karena tidak terhubung dengan vertek lainnya.

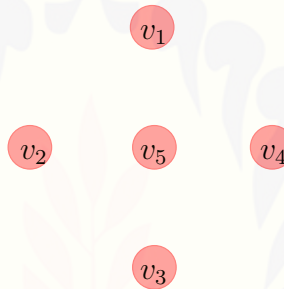
4. Graf Kosong (*Null Graph atau Empty Graph*)

Graf kosong adalah graf yang himpunan sisi E merupakan himpunan kosong. Jika graf tersebut mempunyai himpunan sisi yang merupakan himpunan kosong



Gambar 2.4 (a) Graf G_1 dan (b) Graf G_2

dan dinotasikan dengan E_n dengan n adalah jumlah simpul maka graf tersebut dinamakan graf kosong (*empty graf*). Perhatikan Gambar 2.5.



Gambar 2.5 Graf Kosong E_5

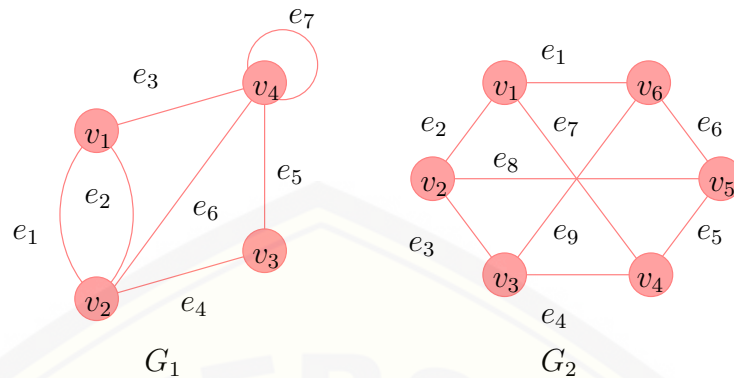
5. Gelang (*loop*)

Sebuah sisi yang menghubungkan pasangan simpul yang sama atau bisa disebut juga sebuah sisi yang berawal dan berakhir pada vertek yang sama disebut dengan loop. Dan dua atau lebih sisi yang mempunyai vertek-vertik ujung yang sama disebut dengan sisi paralel. Sebuah graf yang di dalamnya tidak terdapat loop dan sisi paralel disebut dengan graf sederhana.

Berdasarkan Gambar 2.6 G_1 bukan graf sederhana karena memiliki loop yaitu sisi e_7 dan sisi rangkap e_1 dan e_2 . Sedangkan G_2 merupakan graf sederhana karena tidak memiliki loop.

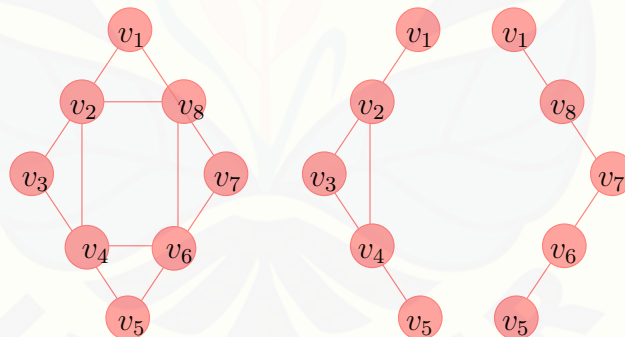
6. Subgraf

Sebuah graf H disebut subgraf dari G jika setiap titik dari G , dan setiap sisi dari H merupakan sisi dari G , dengan kata lain, $V(H) \subset V(G)$ dan



Gambar 2.6 (G_1) Graf Tidak Sederhana dan (G_2) Graf Sederhana

$E(H) \subset E(G)$. Misalkan U merupakan subhimpunan dari $V(G)$. Subgraf terinduksi $G(U)$ adalah sebuah subgraf dari G yang terdiri dari himpunan-titik U bersama dengan semua sisi uv pada G dimana $u, v \in U$. Sebagai contoh pada Gambar 2.7 G_1 merupakan sebuah subgraf dari G tetapi bukan subgraf terinduksi (karena pada $G_2, v_7, v_8 \in V(G)$ tetapi tidak ada sisi diantara titik v_7 dan v_8 , padahal $v_7v_8 \in E(G)$).



Gambar 2.7 (G) Graf, (G_1) dan (G_2) Subgrafnya

7. Jalan (*walk*), dan Sikel (*cycle*)

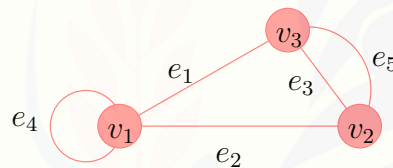
Jalan pada suatu graf dibentuk melalui barisan titik dan sisi terhingga serta bergantian dari titik-titik maupun sisi-sisi dalam suatu graf, dimana titik dan sisinya boleh berulang atau digunakan secara bersama.

Sebuah jalan merupakan sebuah *trail* jika jalan tersebut tidak memiliki sisi yang berulang. Sedangkan, sebuah jalan dikatakan sebagai lintasan (*path*),

jika titik-titik dan sisi-sisi pada jalan $A_1e_1A_2e_2A_3e_3\dots A_{n-1}e_{n-1}A_n$ semuanya berbeda, dengan kata lain *path* merupakan *trail* yang tidak memiliki titik yang berulang.

Jika sebuah *trail* memiliki ujung titik yang sama, lintasan ini disebut dengan *trail* tertutup, biasanya disebut dengan sirkuit (Hartsfield dan Ringel, 1994:51). Jika lintasan *path* berawal dan berakhir pada titik yang sama, yaitu $A_1 = A_n$, maka membentuk lintasan tertutup yang disebut dengan sikel atau siklus. Sikel (*cycle*) merupakan sebuah lintasan *path* yang tertutup. Sikel terpendek setidaknya memiliki lintasan yang panjangnya 3, dan disebut dengan segitiga.

Panjang sebuah jalan (*walk*) dihitung dari banyaknya sisi yang dilintasi oleh jalan tersebut. Gambar 2.8 $v_1e_4e_2v_2e_5v_3$ merupakan lintasan (*path*) dari simpul v_1 ke simpul v_3 yang melalui sisi e_4e_2 dan e_5 dengan panjang 3.



Gambar 2.8 Graf G_1

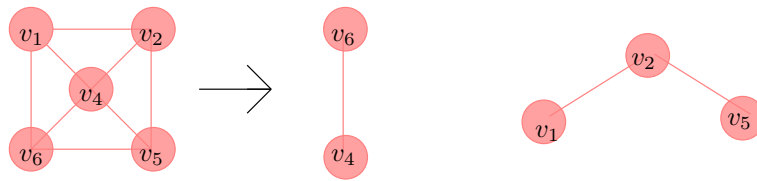
Gambar 2.8 Graf (G_1) bukan merupakan sikel sederhana karena sisi v_1 memiliki loop dan v_2 dilalui sebanyak dua kali

8. *Cut – Set*

Cut – set dari graf terhubung G adalah himpunan sisi yang bila dibuang dari G menyebabkan G tidak terhubung. Jadi *cut – set* menghasilkan dua buah komponen terhubung.

Pada Gambar 2.9 jika kita membuang (v_4, v_6) , maka (v_1, v_6) , (v_5, v_6) , (v_1, v_4) , (v_2, v_4) , dan (v_5, v_4) menjadi tidak terhubung. Jadi himpunan $\{(v_1, v_6), (v_5, v_6), (v_1, v_4), (v_2, v_4), (v_5, v_4)\}$ adalah *cut – set*.

Dengan memperhatikan kondisi sisi dari suatu graf, graf tersebut dapat dikategorikan sebagai graf berarah atau graf tidak berarah. Graf yang memiliki



Gambar 2.9 Sebuah graf terhubung menjadi sebuah graf tak terhubung dikarenakan adanya *Cut – Set*

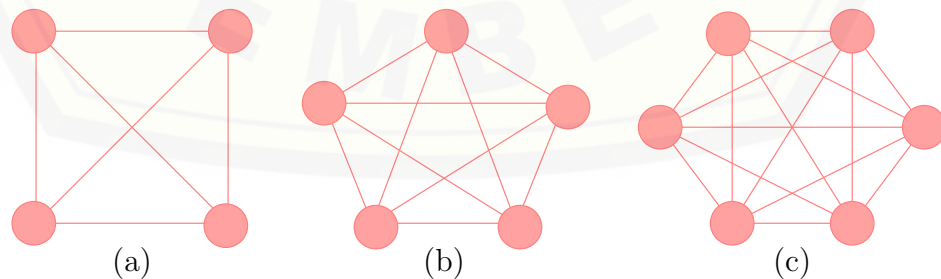
sisi berarah adalah sebuah simpul yang dihubungkan oleh sisi tersebut yang merupakan simpul awal (*initial vertex*) dan simpul lain yang merupakan ujungnya (*terminal vertex*). Sementara graf yang tidak memiliki sisi yang berarah seperti pada contoh graf untuk Jembatan Königsberg.

2.2 Graf Khusus

Graf khusus adalah graf yang mempunyai keunikan dan karakteristik bentuk khusus. Keunikan graf khusus adalah tidak isomorfis dengan graf lainnya. Karakteristik bentuknya dapat diperluas sampai orde n dan tetap dalam bentuk simetris. Berikut merupakan beberapa penjelasan graf khusus berdasarkan familinya:

1. Graf Lengkap (*complete graph*)

Suatu graf G dikatakan lengkap jika setiap titik dalam G terhubung ke setiap titik lainnya dalam G . Jadi suatu graf lengkap G pasti terhubung. Graf lengkap dengan n titik dinotasikan oleh K_n . Graf K_4 , K_5 , dan K_6 adalah contoh graf lengkap yang ditunjukkan pada gambar 2.10 (Lipschutz dan Lipson, 2008:141).

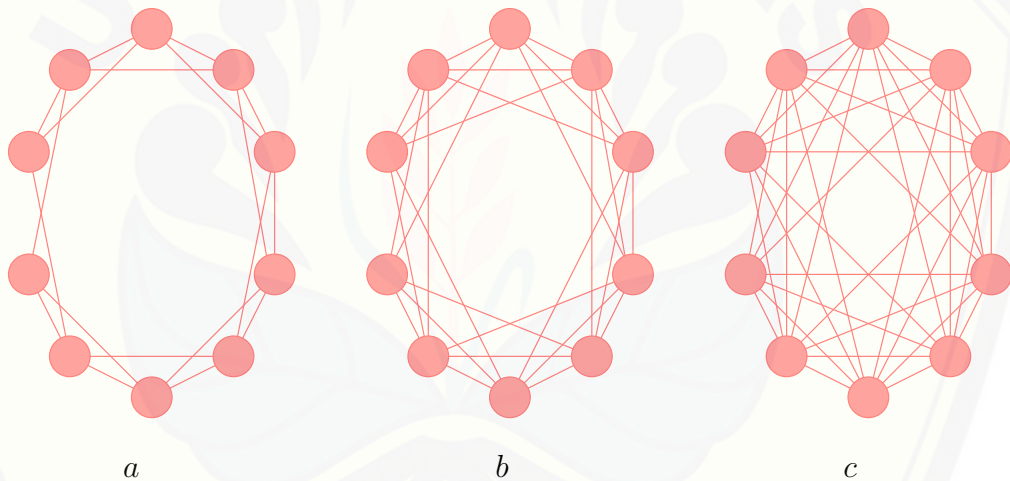


Gambar 2.10 (a) Graf K_4 , (b) Graf K_5 , dan (c) Graf K_6

2. Graf *circulant* (*circulant graph*)

Definisi graf *circulant* yang dikemukakan oleh Balbuena et al. adalah sebagai berikut, diberikan $1 \leq ca_1 < \dots < ca_k < \frac{n}{2}$ dengan n dan ca_i ($i \leq 1, 2, \dots, n-1$) merupakan bilangan positif. Suatu graf *circulant* $C_{(ca_1, ca_2, \dots, ca_k)}$ adalah graf regular yang memiliki himpunan titik $\{ca_1, ca_2, \dots, Sca_k\}$ dan himpunan sisi $\{i \pm ca_1, i \pm ca_2, \dots, i \pm ca_k \pmod{n}\}$ dengan $i = \{0, 1, 2, \dots, n\}$ dan $j = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ (Heuberger, 2003:153-169).

Graf *circulant* $C_{(ca_1, ca_2, \dots, ca_k)}$ merupakan graf $2h$ -regular. Jika $ca = \frac{n}{2}$ maka graf $C_{(ca_1, ca_2, \dots, ca_k)}$ merupakan graf komplit. Graf *circulant* dapat dikatakan sebagai *cycle* dengan *chords* yang menghubungkan *vertex-vertex* dengan jarak a pada *cycle*. Contoh graf *circulant* disajikan dalam Gambar 2.11



Gambar 2.11 (a) Graf $Circulant(C_{1,2})$, (b) Graf $Circulant(C_{1,2,3})$ dan (c) Graf $Circulant(C_{1,2,3,4})$

2.3 Operasi Graf *Shackle*

Operasi graf adalah bentuk pengoprasian pada dua buah graf atau lebih untuk memperoleh graf baru. Salah satu bentuk operasinya adalah Shackle. Shackle dari sebuah graf didefinisikan sebagai berikut: misal k adalah himpunan bulat positif, dan dinotasikan dengan $shack(G_1, G_2, \dots, G_k)$, sebagai sebuah graf yang dibentuk dari k graf yang tak terhubung tak trivial G_1, G_2, \dots, G_k sehingga

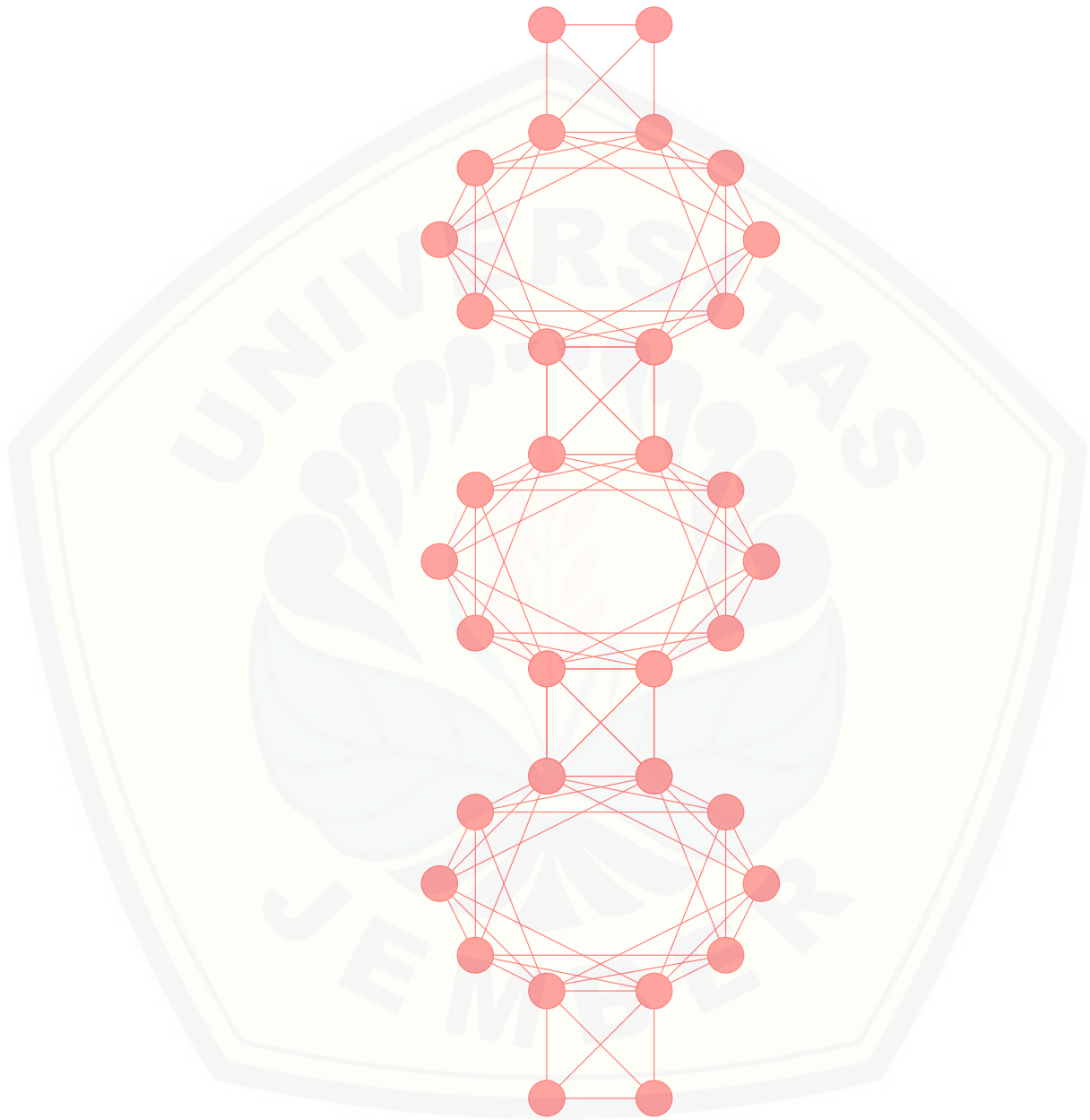
untuk setiap $1 \leq i, j \leq k$ dengan $|i - j| \geq 2$ berlaku G_i dan G_j tidak mempunyai titik yang sama, dan untuk setiap $1 \leq i \leq k - 1$, G_i , dan G_{i+1} mempunyai tepat satu titik yang sama, disebut titik penghubung, dimana $k - 1$ titik penghubungnya berbeda. Dalam kasus ini, ketika semua $C_{ca(s_l)}^i$ s adalah isomorfis untuk graf terhubung H , hasil dari graf shackle H dinotasikan dengan $shach(H, k)$ (Inayah, dkk: 2013). Gambar 2.12 adalah graf dari $Shack(C_{ca(s_l)}^{K_4})$ diekspan sebanyak 3 kali, dengan jumlah $ca = 6$ dan busur dari graf *circulant* $s_l = 3$.

2.4 Graf $Shack(C_{ca(s_l)}^{K_4}, K_4, e, n)$

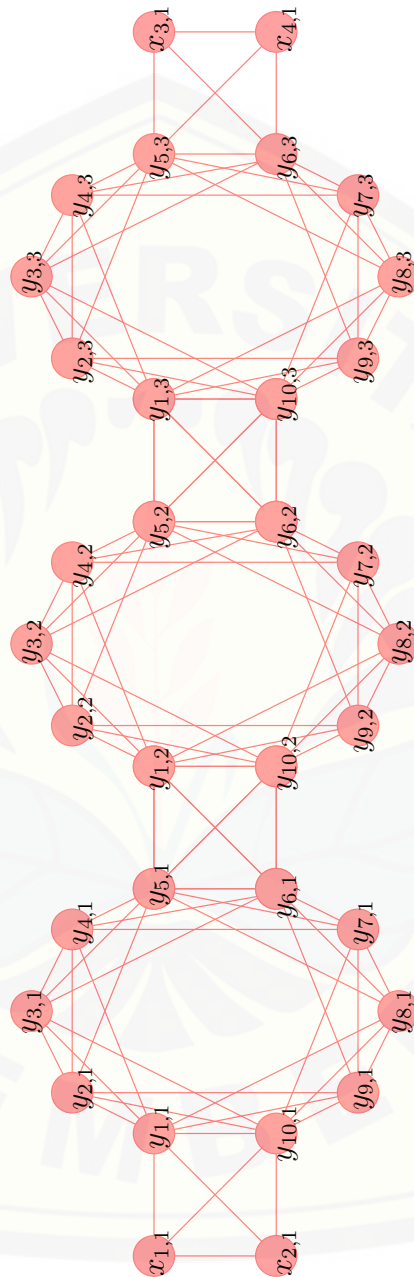
Graf $Shack(C_{ca(s_l)}^{K_4}, K_4, e, n)$ merupakan sebuah graf dengan bentuk menarik karena merupakan pengembangan dari operasi *shackle* subgraf dengan graf *circulant* ($C_{ca(s_l)}$) yang dapat dikembangkan menjadi berbagai macam graf dengan penghubung graf khusus (K_4) dengan jumlah busur pada graf *circulant* $s_l = 3$. Ide ini muncul dari pengembangan graf *circulant* yang saling dihubungkan dengan menggunakan penghubung graf lengkap dari K_4 sebanyak $n + 1$, sehingga subgraf *circulant* terhubung dengan subgraf dari graf komplit K_4 . Dari pengembangan tersebut maka terbentuk graf $Shack(C_{ca}^{K_4}, K_4, e, n)$. Graf $Shack(C_{ca}^{K_4}, K_4, e, n)$ memiliki himpunan titik (*vertex*), $V_1 = \{x_{1,1}; x_{2,1}; x_{3,1}; x_{4,1}\}$ dan $V_2 = \{y_{j,i} | 1 \leq j \leq m; 1 \leq i \leq n\}$ serta himpunan sisi $E_1 = \{x_{1,1}x_{2,1}; x_{1,1}y_{1,1}; x_{1,1}y_{10,1}; x_{2,1}y_{10,1}; x_{2,1}y_{1,1}; x_{3,1}y_{5,n}; x_{3,1}y_{4,1}; x_{3,1}y_{6,n}; x_{4,1}y_{5,n}; x_{4,1}y_{6,n}\} \cup \{y_{\frac{m}{2},i} y_{1,i+1} | 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{y_{\frac{m}{2}+1,i} y_{m,i+1} | 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{y_{\frac{m}{2},i} y_{m,i+1} | 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{y_{\frac{m}{2}+1,i} y_{1,i+1} | 1 \leq i \leq n - 1\}$ dan $E_2 = \{y_{j,i} y_{(j+s_l) \bmod m, i} | 1 \leq j \leq m; 1 \leq i \leq n; s_l = r\}$ dan memiliki jumlah titik dan jumlah sisi $p_G = p_H + m(n - 1)$ dan $q_G = nq_H - n^2 - 2n + 6$, dengan jumlah konektor dan graf *circulant* yang selalu memiliki selisih satu atau dengan kata lain jumlah graf konektor yang selalu lebih banyak satu dari pada graf *circulant* ($n + 1$) dapat dilihat pada Gambar 2.13.

2.5 Teknik Partisi

Dapat dimisalkan jika n, m, d, i dan k merupakan bilangan bulat positif dimana m dan d boleh nol "0". Kita dapat menuliskan $\mathcal{P}_{m,d}^n(i, k)$ dari



Gambar 2.12 $Shack(C_{10(1,2,3)}^{K_4}, K_4, e, 3)$



Gambar 2.13 $Shack(C_{ca}^{K_4}, K_4, e, n)$

himpunan $\{1, 2, 3, \dots, cn\}$ dalam m dan n tuple dengan $1 \leq i \leq m$ dan $1 \leq k \leq n$, sedemikian hingga beda antara jumlah bilangan pada m -tuple ke $k = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ adalah konstan dengan lambang d . Diberikan $\Sigma \mathcal{P}_{m,d}^n(i, k)$ adalah jumlah bilangan pada $\mathcal{P}_{m,d}^n(i, k)$. Dan jika terdapat partisi dengan beda d , maka pasti ada partisi dengan beda- d . Notasi $\mathcal{P}_{m,d}^n(i, k) \oplus b$ diartikan untuk setiap bilangan pada $\mathcal{P}_{m,d}^n(k)$ ditambahkan dengan b (Bača dkk, 2013). Berikut ini merupakan bentuk partisi apabila dituliskan dalam matriks:

$$\mathcal{P}_{m,d}^n(i, k) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ n+1 & n+2 & \cdots & 2n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (c-1)n+1 & (c-1)n+2 & \cdots & cn \end{pmatrix}$$

2.6 Fungsi dan Barisan Aritmatik

Fungsi dari himpunan A ke himpunan B didefinisikan sebagai suatu relasi yang memasangkan setiap anggota himpunan A dengan tepat satu anggota himpunan B . Himpunan A disebut sebagai daerah asal fungsi atau disebut juga dengan domain dan himpunan B disebut sebagai daerah kawan fungsi atau disebut juga dengan kodomain. Fungsi juga dikenal dengan istilah "pemetaan", "peta" atau "transformasi". Untuk mendefinisikan suatu fungsi, dapat digunakan notasi sebagai berikut:

$$f : A \rightarrow B$$

Maksud notasi tersebut adalah suatu fungsi f yang memetakan setiap anggota himpunan A dengan tepat satu anggota himpunan B . Ada tiga jenis fungsi, diantaranya adalah fungsi injektif, fungsi surjektif, dan fungsi bijektif.

Berikut ini disajikan fungsi-fungsi khusus, yaitu:

1. Fungsi Injektif

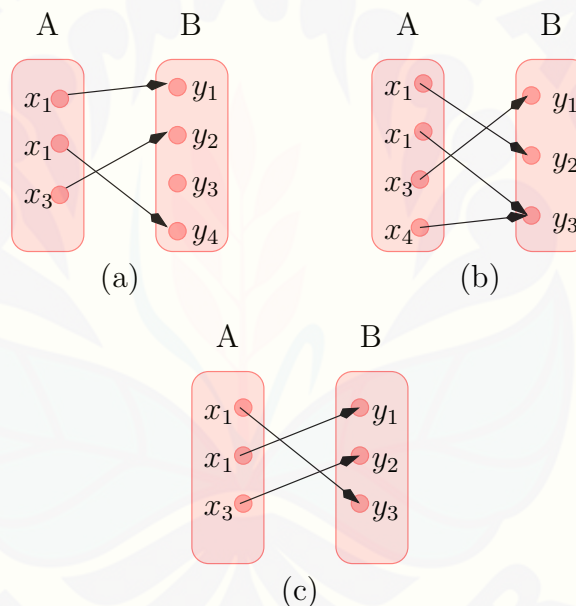
Suatu fungsi $f : A \rightarrow B$ disebut fungsi (pemetaan) *injektif* jika dan hanya jika untuk setiap x_1, x_2 elemen A berlaku apabila $f(x_1) = f(x_2)$ maka $x_1 = x_2$.

2. Fungsi Surjektif

Suatu fungsi $f : A \rightarrow B$ disebut fungsi (pemetaan) *surjektif* jika dan hanya jika untuk setiap y elemen B terdapat x elemen A sedemikian hingga $y = f(x)$, yaitu setiap elemen dalam kodomain mempunyai prabayangan.

3. Fungsi Bijektif

Suatu fungsi $f : A \rightarrow B$ disebut fungsi (pemetaan) *bijektif* jika dan hanya jika fungsi f tersebut adalah fungsi yang injektif dan sekaligus surjektif. Oleh karena itu, fungsi bijektif seringkali juga disebut korespondensi satu-satu (Susilo, 2011: 112).



Gambar 2.14 (a) Fungsi Injektif, (b) Fungsi Surjektif, dan (c) Fungsi Bijektif

Barisan aritmatika adalah suatu barisan yang dibentuk dengan cara menambahkan atau mengurangi suku sebelumnya dengan suatu bilangan tertentu (Munir: 2012). Suatu barisan $U_1, U_2, U_3, \dots, U_{(n-1)}, U_n$ merupakan suatu barisan aritmatika jika selisih dua suku yang berurutan adalah tetap, atau dengan kata lain $U_1 - U_2 = U_3 - U_2 = \dots = U_n - U_{(n-1)} = \text{konstanta}$. Selisih ini disebut juga *beda* ($d = U_n - U_{(n-1)}$). Perhatikan contoh barisan bilangan 3, 6, 9, 12,

Barisan bilangan di atas merupakan contoh barisan bilangan aritmatika dengan beda 2. Misalkan $U_1, U_2, U_3, \dots, U_{(n-1)}, U_n$ merupakan suatu barisan aritmatika, maka untuk menentukan nilai suku ke- n , perhatikan penurunan rumus berikut: Jika suku pertam $U_1 = a$, maka didapatkan:

$$U_2 - U_1 = d \Rightarrow U_2 = U_1 + d = a + d$$

$$U_3 - U_2 = d \Rightarrow U_3 = U_2 + d = a + d + d = a + 2d$$

$$U_4 - U_3 = d \Rightarrow U_4 = U_3 + d = a + 2d + d = a + 3d$$

...

$$U_n - U_{(n-1)} \Rightarrow U_n = U_{(n-1)} + d = a + (n-1)d$$

Sehingga kita peroleh rumus suku ke- n dari barisan aritmatika tersebut adalah $a + (n-1)d$. Apabila suatu barisan aritmatika memiliki beda positif maka barisan aritmatika tersebut disebut barisan aritmatika naik, sedangkan apabila beda suatu barisan aritmatika adalah negatif, maka barisan aritmatika tersebut disebut barisan aritmatika turun.

2.7 Aksioma, postulat, teorema, lemma, *corollary*, konjektur, dan *open problem*

Aksioma merupakan sebuah proposisi yang diasumsikan benar tanpa perlu adanya pembuktian. Sehingga aksioma tidak memerlukan pembuktian lagi. Postulat merupakan proposisi yang dianggap jelas dengan sendirinya yang biasanya dalam matematika merupakan pernyataan yang telah disepakati kebenarannya. Teorema merupakan proposisi yang sudah terbukti benar. Bentuk khusus dari teorema adalah lemma dan *corollary* (akibat). Lemma merupakan teorema sederhana yang digunakan sebagai pendukung pembuktian teorema lain. Lemma biasanya kurang menarik tetapi berguna bagi pembuktian proporsisi yang lebih kompleks, yang artinya pembuktian tersebut dapat lebih muda dimengerti dengan menggunakan beberapa lemma, namun disetiap pembuktian lemma ini dibuktikan secara individual. *Corollary* (akibat) merupakan teorema yang dapat dibentuk langsung dari teorema yang sudah terbukti, atau dengan kata lain ini merupakan teorema yang mengikuti teorema lain. Konjektur merupakan sebuah proposisi yang dipradugakan sebagai hal yang nyata, benar, atau asli, sebageaian besar didasarkan pada

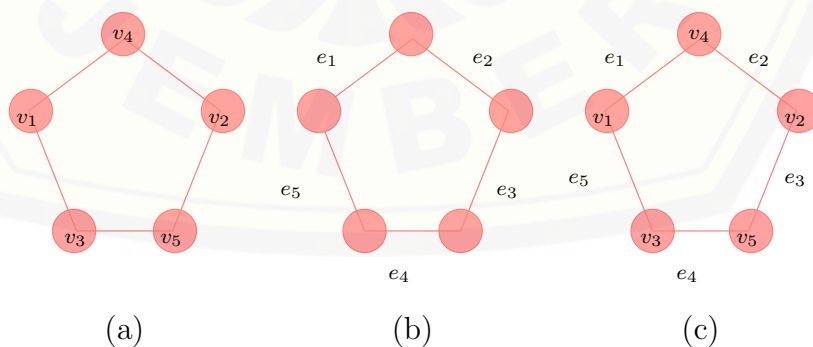
landasan inkonklusif (tanpa simpulan), sehingga ini biasanya bertentangan dengan hipotesis (oleh karenanya bertentangan pula dengan teori, aksioma, atau prinsip), yang merupakan pernyataan perjanjian menurut landasan yang dapat diterima. Di dalam Matematika, konjektur merupakan proposisi yang tidak terbukti (tidak memerlukan bukti) sehingga dianggap pasti benar adanya. *Open problem* (masalah terbuka atau pernyataan terbuka) merupakan beberapa masalah yang dapat secara akurat dinyatakan dan belum terselesaikan (tidak ada solusi yang diketahui). Contoh *open problem* dalam permasalahan teori graf adalah permasalahan jembatan Königsberg.

2.8 Pelabelan Graf

2.8.1 Definisi Pelabelan Graf

Dalam teori graf, pelabelan menjadi topik yang banyak mendapat perhatian karena model-model yang ada pada pelabelan graf berguna untuk aplikasi yang luas, seperti masalah peta jaringan jalan raya, jaringan internet, sistem alamat jaringan komunikasi, dan desain sirkuit (Munir, 2003).

Pelabelan graf merupakan suatu fungsi bijektif yang memetakan himpunan dari elemen-elemen graf, yaitu sisi dan titik ke himpunan bulat positif. Secara umum, fungsi f yang memetakan himpunan A ke dalam B disebut fungsi injektif jika setiap elemen dalam A mempunyai elemen yang berbeda pada B disebut jika dan hanya jika *range* f sama dengan B . Secara lebih singkat, $f : A \rightarrow B$ adalah satu-satu jika $f(a) = f(a')$ maka $a = a'$ dan merupakan onto jika $f(A) = B$.



Gambar 2.15 (a)Pelabelan Titik, (b)Pelabelan Sisi, dan (c)Pelabelan Total

Pada pelabelan titik, jumlah label dua titik yang menempel pada suatu sisi disebut bobot sisi. Jika semua sisi mempunyai bobot sisi yang sama maka disebut pelabelan titik sisi ajaib. Jika semua sisi mempunyai bobot sisi yang berbeda dan himpunan bobot sisi dari semua sisi membentuk barisan aritmatia dengan suku pertama a dan beda d maka pelabelan tersebut disebut pelabelan titik sisi anti ajaib (*edge antimagic vertex labelling (EAVL)*).

Sedangkan dalam pelabelan total, bobot sisi diartikan sebagai jumlah label sisi dan label dua titik yang menempel pada suatu sisi. Jika semua sisi mempunyai bobot sisi yang sama maka pelabelan tersebut disebut pelabelan total sisi ajaib. Jika semua sisi mempunyai bobot sisi yang berbeda dan himpunan bobot sisi dari semua sisi membentuk barisan aritmatika dengan suku pertama a dan beda d maka pelabelan tersebut disebut pelabelan total sisi anti ajaib (pelabelan total sisi antiajaib).

2.8.2 Pelabelan Super $(a, d) - \mathcal{H}$ Antiajaib Total Labeling

Menurut Inayah (2013), suatu selimut dari G adalah $H = H_1, H_2, H_3, \dots, H_k$ keluarga subgraf dari G dengan sifat setiap sisi di G termuat pada sekurang-kurangnya satu graf H_i , untuk suatu $i \in 1, 2, \dots, k$. Jika untuk setiap $i \in 1, 2, \dots, k$, H_i isomorfik dengan suatu subgraf H , maka H dikatakan suatu selimut- H dari G . Selanjutnya dikatakan bahwa G memuat selimut- H .

Misalkan H adalah selimut- H yang memuat semua subgraf dari G yang isomorfik dengan H . Gutiérrez dan Lladó (2005) memperkenalkan pelabelan total \mathcal{H} -ajaib dengan menggunakan konsep selimut- \mathcal{H} . Misalkan $\beta : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, v_g + e_g\}$ adalah suatu fungsi injektif. Definisikan bobot- H_i , $\beta(H_i)$ sebagai $\beta(H_i) = \sum v \in V(H_i) + \sum e \in E(H_i)$. Fungsi β disebut pelabelan H -ajaib, jika $\{\beta(H_i) | H_i \in H\} = k_\beta$ untuk suatu bilangan bulat positif k_β . Kemudian, β dikatakan pelabelan H -ajaib super, jika $\beta(V(G)) = 1, 2, \dots, v_G$. Selanjutnya, pelabelan total \mathcal{H} -ajaib yang terkait dengan selimut- \mathcal{H} dinamakan pelabelan selimut H - ajaib.

Menurut Dafik (2014) pelabelan selimut- \mathcal{H} anti ajaib (*antimagic*) graf G adalah pelabelan total λ dari $V(G) \cup E(G)$ ke bilangan bulat $\{1, 2, 3, \dots, |V(G) \cup$

$E(G)|$, untuk setiap subgraf H dari G yang isomorfik dengan \mathcal{H} dimana $\sum H = \sum v \in V(H)\lambda(v) + \sum e \in E(H)\lambda(e)$ merupakan barisan aritmatika. Graf G dikatakan memiliki pelabelan \mathcal{H} antimagic super jika $\{\lambda(v)\}_{v \in V} = \{1, \dots, |V|\}$. Dengan kata lain, pelabelan super (a, d) -antimagic total selimut pada sebuah graf $G = (p_G, q_G)$ mempunyai pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} -antimagic total selimut dengan fungsi total $f(V \cup E) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots, p_G + q_G\}$ maka himpunan bobot selimut sebuah graf adalah $\{a, a + d, a + 2d, \dots, a(s - 1)d\}$ dimana a merupakan bobot selimut terkecil dan d batas atas nilai beda. Untuk mencari batas atas nilai beda d pelabelan selimut (a, d) - \mathcal{H} antimagic dapat ditentukan dengan lemma berikut:

Lema 2.8.1. *Jika graf (p, q) adalah super (a, d) antimagic total selimut maka*

$$d \leq \frac{(p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H}{s - 1}$$

untuk $s = |H_i|$, $p_G = |V|$, $q_G = |E|$, $p_H = |V'|$, $q_H = |E'|$.

Bukti. $f(V) = \{1, 2, 3, \dots, p_H\}$ dan $f(E) = \{p_G + 1, p_G + 2, \dots, p_G + q_H\}$. Misalkan graf (p_G, q_G) mempunyai pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} -antimagic total covering dengan fungsi total $f(V \cup E) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots, p_G + q_G\}$ maka himpunan bobot selimut sebuah graf adalah $\{a, a + d, a + 2d, \dots, a(s - 1)d\}$ dimana a merupakan bobot selimut terkecil maka berlaku:

$$\sum A = \sum_{V \in V(A)} f(V) + \sum_{E \in E(A)} f(E) = \{a, a + d, a + 2d, \dots, a + (s - 1)d\}$$

$$1 + 2 + \dots + p_H + (p_G + 1) + (p_G + 2) + \dots + (p_G + q_H) \leq a$$

$$\frac{p_H}{2}(1 + p_H) + q_H p_G + \frac{q_H}{2}(1 + q_H) =$$

$$\frac{p_H}{2} + \frac{p_H^2}{2} + q_H p_G + \frac{q_H}{2} + \frac{q_H^2}{2} \leq a$$

Sedangkan untuk nilai terbesar berlaku:

$$a + (s - 1)d \leq p_G + p_G - 1 + p_G - 2 + \dots + (p_G - (p_H - 1)) + (p_G + q_G) \\ (p_G + q_G - 1) + (p_G + q_G - 2) + \dots + (p_G + q_G - (q_H - 1))$$

$$\begin{aligned}
 &= p_H p_G - \frac{p_H - 1}{2}(1 + (p_H - 1)) + q_H p_G + q_H p_G - \frac{q_H - 1}{2}(1 + (q_H - 1)) \\
 &= p_H p_G - \frac{p_H - 1}{2}(p_H) + q_H p_G + q_H p_G - \frac{q_H - 1}{2}(q_H) \\
 (s - 1)d &\leq p_H p_G - \frac{p_H - 1}{2}p_H + q_H p_G + q_H q_G - \frac{q_H - 1}{2}q_H - a \\
 (s - 1)d &\leq p_H p_G - \frac{p_H - 1}{2}p_H + q_H p_G + q_H q_G - \frac{q_H - 1}{2}q_H - \left(\frac{p_H}{2} + \frac{p_H^2}{2} + \right. \\
 &\quad \left. q_H p_G + \frac{q_H}{2} + \frac{q_H^2}{2}\right) \\
 (s - 1)d &= p_H p_G - \frac{p_H^2}{2} + \frac{p_H}{2} + q_H q_G - \frac{q_H^2}{2} + \frac{q_H}{2} - \left(\frac{p_H}{2} + \frac{p_H^2}{2} + \frac{q_H}{2} + \frac{q_H^2}{2}\right) \\
 (s - 1)d &= p_H p_G + q_H q_G - p_H^2 - q_H^2 \\
 (s - 1)d &= p_H p_G - p_H^2 + q_H q_G - q_H^2 \\
 (s - 1)d &= (p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H \\
 d &\leq \frac{(p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H}{s - 1}
 \end{aligned}$$

Jadi, untuk $s = |H_i|$, $p_G = |V|$, $q_G = |E|$, $p_H = |V'|$, $q_H = |E'|$ terbukti bahwa $d \leq \frac{(p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H}{s - 1}$

2.9 Partisi pada Pelabelan Graf

Beberapa penerapan teknik partisi dalam pelabelan graf yang sudah ditemukan oleh Azizah (2016) diantaranya menghasilkan $\mathcal{P}_{m,d}^n(i, k)$ dengan $d = m$, $d = m^2$, $d = \frac{m}{2}$ dan Agustin (2016) $d = -m$, $d = -m^2$, $d = \frac{-m}{2}$ untuk yang disajikan dalam Lemma. Adapun Lemma tersebut adalah sebagai berikut:

Lema 2.9.1. *Diberikan n and m adalah bilangan bulat positif dengan variasi nilai beda d . Untuk $k = \{1, 2, \dots, n\}$ jumlah dari $\mathcal{P}_{m,d_1}^n(i, k) = \{(i - 1)n + k, 1 \leq i \leq m\}$ membentuk barisan aritmatika dengan beda $d_1 = m$*

Bukti. Dengan perhitungan sederhana, untuk $k = \{1, 2, \dots, n\}$ maka $\sum_{i=1}^m \mathcal{P}_{m,d_1}^n(i, k) = \mathcal{P}_{m,d_1}^n(k) \longleftrightarrow \mathcal{P}_{m,d_1}^n(k) = \left\{\frac{m^2 n - nm}{2} + mk\right\} \longleftrightarrow \mathcal{P}_{m,d_1}^n(k) = \left\{\frac{m^2 n - nm}{2} + m, \frac{m^2 n - nm}{2} + 2m, \dots, \frac{m^2 n - nm}{2} + (n - 1)m, \frac{m^2 n - nm}{2} + nm\right\}$. Terbukti bahwa himpunan tersebut membentuk deret aritmatika dengan $d_1 = m$. \square

Lema 2.9.2. *Diberikan n and m adalah bilangan bulat positif dengan variasi nilai beda d . Untuk $k = \{1, 2, \dots, n\}$ jumlah dari $\mathcal{P}_{m,d_2}^n(i, k) = \{(k - 1)m + i; 1 \leq i \leq m\}$ membentuk barisan aritmatika dengan beda $d_2 = m^2$.*

Bukti. Dengan perhitungan sederhana, untuk $k = \{1, 2, \dots, n\}$ maka $\sum_{i=1}^m \mathcal{P}_{m,d_2}^n(i, k) = \mathcal{P}_{m,d_2}^n(k) \longleftrightarrow \mathcal{P}_{m,d_2}^n(k) = \left\{ \frac{(m-m^2)}{2} + m^2k \right\} \longleftrightarrow \mathcal{P}_{m,d_2}^n(k) = \left\{ \frac{(m-m^2)}{2} + m^2, \frac{(m-m^2)}{2} + 2m^2, \dots, \frac{m^2n-nm}{2} + (n-1)m^2, \frac{m^2n-nm}{2} + nm^2 \right\}$. Terbukti bahwa himpunan tersebut membentuk deret aritmatika dengan $d_2 = m^2$. \square

Lema 2.9.3. Diberikan n and m adalah bilangan bulat positif dengan variasi nilai beda d . Untuk $k = \{1, 2, \dots, n\}$ jumlah dari

$$\mathcal{P}_{m,d_3}^n(k) = \begin{cases} \left\{ (i-1)n + \frac{k+1}{2}; 1 \leq i \leq m, i \equiv 1 \pmod{2} \right\} \cup \\ \left\{ \frac{k-n}{2} + in; 1 \leq i \leq m, i \equiv 0 \pmod{2} \right\}, k \equiv 1 \pmod{2} \\ \left\{ \frac{k+1-n}{2} + in; 1 \leq i \leq m, i \equiv 1 \pmod{2} \right\} \cup \\ \left\{ (i-1)n + \frac{k}{2}; 1 \leq i \leq m, i \equiv 0 \pmod{2} \right\}, k \equiv 0 \pmod{2} \end{cases}$$

membentuk barisan aritmatika dengan beda $d_3 = \frac{m}{2}$.

Bukti. Dengan perhitungan sederhana, untuk $k = \{1, 2, \dots, n\}$ maka $\sum_{i=1}^m \mathcal{P}_{m,d_3}^n(i, k) = \mathcal{P}_{m,d_3}^n(k) \longleftrightarrow \mathcal{P}_{m,d_3}^n(k) = \left\{ \frac{m}{4} + (2mn - n + 1) + \frac{m}{2}k \right\} \longleftrightarrow \mathcal{P}_{m,d_3}^n(k) = \left\{ \frac{m}{4} + (2mn - n + 1) + \frac{m}{2}, \frac{m}{4} + (2mn - n + 1) + m, \dots, \frac{m}{4} + (2mn - n + 1) + \frac{m(n-1)}{2}, \frac{m}{4} + (2mn - n + 1) + \frac{mn}{2} \right\}$. Terbukti bahwa himpunan tersebut membentuk deret aritmatika dengan $d_3 = \frac{m}{2}$. \square

Lema 2.9.4. Misal n dan m bilangan bulat positif dengan variasi nilai beda d . Untuk $k = \{1, 2, \dots, n\}$ jumlah dari $\mathcal{P}_{m,d_4}^n(i, k) = \{1 + ni - k; 1 \leq i \leq m\}$ membentuk baris aritmatika dengan beda $d_4 = -m$.

Bukti. Melalui proses perhitungan sederhana, untuk $k = \{1, 2, \dots, n\}$ didapat

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \mathcal{P}_{m,d_4}^n(i, k) &= \mathcal{P}_{m,d_4}^n(k) \\ &= \left\{ \frac{n}{2}(m^2 + m) + m - mk \right\} \\ &= \left\{ \frac{n}{2}(m^2 + m), \frac{n}{2}(m^2 + m) - m, \frac{n}{2}(m^2 + m) - 2m, \dots, \frac{n}{2}(m^2 + m)m - m(n-1), \frac{n}{2}(m^2 + m)m - mn \right\} \end{aligned}$$

Terbukti bahwa himpunan tersebut membentuk deret arimatika dengan $d_4 = -m$.

□

Lema 2.9.5. Misal n dan m bilangan bulat positif dengan variasi nilai beda d . Untuk $\{k = 1, 2, \dots, n\}$ jumlah dari $\mathcal{P}_{m,d_5}^n(i, k) = \{mn + i - mk; 1 \leq i \leq m\}$ membentuk baris arimatika dengan beda $d_5 = -m^2$.

Bukti. Melalui proses perhitungan sederhana, untuk $k = \{1, 2, \dots, n\}$ didapat

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \mathcal{P}_{m,d_5}^n(i, k) &= \mathcal{P}_{m,d_5}^n(k) \\ &= \left\{ \frac{m}{2}(2mn + m + 1) - m^2k \right\} \\ &= \left\{ \frac{m}{2}(2mn + m + 1) - m^2, \frac{m}{2}(2mn + m + 1) - 2m^2, \dots, \frac{m}{2} \right. \\ &\quad \left. (2mn + m + 1) - m^2(n - 1), \frac{m}{2}(2mn + m + 1) - m^2n \right\} \end{aligned}$$

Terbukti bahwa himpunan tersebut membentuk deret arimatika dengan $d_5 = -m^2$. □

Lema 2.9.6. Misal n dan m bilangan bulat positif dengan variasi nilai beda d . Untuk $k = \{1, 2, \dots, n\}$. jumlah dari

$$\mathcal{P}_{m,d_6}^n(i, k) = \begin{cases} \{ni - \frac{n}{2} - \frac{k}{2} + 1; 1 \leq i \leq m; 1 \leq k \leq n; i \text{ ganjil}; k \text{ ganjil}\} \\ \{ni - \frac{k}{2} + \frac{1}{2}; 1 \leq i \leq m; 1 \leq k \leq n; i \text{ genap}; k \text{ ganjil}\} \\ \{ni + \frac{k}{2} + 1; 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n; i \text{ ganjil}; k \text{ genap}\} \\ \{ni - \frac{k}{2} - \frac{n}{2} + \frac{1}{2}; 1 \leq i \leq m; 1 \leq k \leq n; i \text{ genap}; k \text{ genap}\} \end{cases}$$

membentuk baris arimatika dengan beda $d_6 = \frac{-m}{2}$.

Bukti. Melalui proses perhitungan sederhana, untuk $k = \{1, 2, \dots, n\}$ didapat

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \mathcal{P}_{m,d_6}^n(i, k) &= \mathcal{P}_{m,d_6}^n(k) \\ &= \left\{ \frac{m}{4}(2mn - n + 3) - \frac{m}{2}k \right\} \\ &= \left\{ \frac{m}{4}(2mn - n + 3) - \frac{m}{2}, \frac{m}{4}(2mn - n + 3) - m, \dots, \frac{m}{4} \right. \\ &\quad \left. (2mn - n + 3) - \frac{m}{2}(n - 1), \frac{m}{4}(2mn - n + 3) - \frac{m}{2}n \right\} \end{aligned}$$

Terbukti bahwa himpunan tersebut membentuk deret arimatika dengan $d_6 = \frac{-m}{2}$.

□

Tabel 2.1 Klasifikasi partisi $d = m$.

$i \setminus k$	1	2	...	n	
1	1	2	...	n	
2	$n + 1$	$n + 2$...	$n + n$	
3	$2n + 1$	$2n + 2$...	$2n + n$	
...	
m	$(m - 1)n + 1$	$(m - 1)n + 2$...	$(m - 1)n + n$	+
	a	$a + m$...	$a + (n - 1)m$	$d = m$

Tabel 2.2 Klasifikasi partisi $d = m^2$.

$i \setminus k$	1	2	3	4	...	n	
1	1	$m + 1$	$2m + 1$	$3m + 1$...	$(n - 1)m + 1$	
2	2	$m + 2$	$2m + 2$	$3m + 2$...	$(n - 1)m + 1$	
3	3	$m + 3$	$2m + 3$	$3m + 3$...	$(n - 1)m + 1$	
...	
m	m	$m + m$	$2m + m$	$3m + m$...	$(n - 1)m + 1$	+
	a	$a + m^2$	$a + 2m^2$	$a + m^3$...	$a + (n - 1)m^2$	$d = m^2$

Suatu partisi yang didefinisikan dengan $\mathcal{P}_{m,d}^n(k)$ dapat dibentuk dengan mengkombinasikan partisi lain sehingga diperoleh beda d yang bervariasi. Konstruksi partisi tersebut mengikuti fakta di bawah ini:

Tabel 2.3 Klasifikasi partisi $d = \frac{m}{2}$.

$i \setminus k$	1	2	3	4	5	
1	1	4	2	5	3	
2	8	6	9	7	10	
3	11	14	12	15	13	
4	18	16	19	17	20	+
	38	40	42	44	46	$d = \frac{m}{2}$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{m,d}^n(k) &= \mathcal{P}_{m_1,d_1}^n(i, k) \cup (\mathcal{P}_{m_2,d_2}^n(i, k) \oplus (nm_1)); \text{ untuk } 1 \leq k \leq n \\ \sum \mathcal{P}_{m,m}^n(k) &= \sum \mathcal{P}_{m_1,d_1}^n(k) + \sum (\mathcal{P}_{m_2,d_2}^n(k) \oplus nm_1), \text{ untuk } 1 \leq k \leq n \\ &= \sum \mathcal{P}_{m_1,d_1}^n(k) + \sum (\mathcal{P}_{m_2,d_2}^n(k) \oplus nm_1m_2), 1 \leq i \leq m \} \end{aligned}$$

dimana $m = m_1 + m_2$ dan $d = d_1 + d_2$ (Bača dkk, 2013).

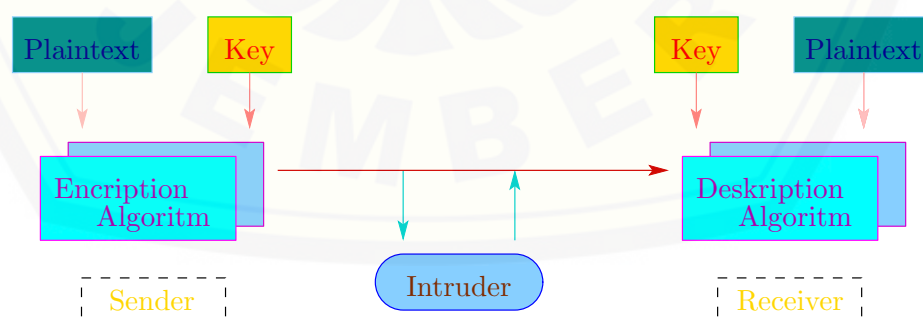
2.10 Aplikasi Graf

Pada saat ini penggunaan ilmu graf dalam penerapan sehari-hari telah banyak, contohnya yaitu: pengaturan jadwal pelajaran, pewarnaan peta, arah lalu lintas kota, pengaturan IP komputer. Aplikasi yang mulai berkembang lagi yaitu dalam bidang kriptografi. Kriptografi (*cryptography*) berasal dari bahasa Yunani: *cryptos* artinya *secret* (rahasia), sedangkan *graphein* artinya *writing* (tulisan). Bruce Schneier (1996) menyatakan bahwa kriptografi adalah ilmu dan seni untuk menjaga keamanan pesan (*Cryptography is the art and science of keeping messages secure*). Sistem kriptografi (*cryptosystem*) adalah suatu teknik di dalam menjaga keamanan data dan informasi supaya tidak dapat diketahui dan dibaca oleh pihak yang tidak berwenang, dan merupakan kumpulan yang terdiri dari algoritma kriptografi, semua *plaintext*, *chipertext*, dan kunci yang mungkin.

Perkembangannya, Kriptografi kunci asimetrik menggunakan dua kunci yang berbeda yaitu kunci publik untuk melakukan enkripsi dan kunci privat untuk melakukan dekripsi. Setiap orang dapat mengirimkan pesan rahasia hanya dengan menggunakan kunci publik, tetapi pesan hanya dapat didekripsi dengan kunci privat, yang merupakan milik penerima yang dituju (Palupi: 2008).

Di dalam kriptografi terdiri dari beberapa komponen, yaitu (1) *Enkripsi* merupakan cara pengamanan data yang dikirimkan sehingga terjaga kerahasiaannya. (2) *Deskripsi* merupakan kebalikan dan enkripsi. Pesan yang telah dienkripsi dikembalikan ke bentuk asalnya. (3) *Kunci* adalah kunci yang dipakai untuk melakukan enkripsi dan deskripsi. (4) *Chiphertext* merupakan suatu pesan yang telah melalui proses enkripsi. (5) *Plaintext* sering disebut dengan *cleartext*. Teks-asli atau teks-biasa ini merupakan pesan yang ditulis atau diketik yang memiliki makna. Teks-asli inilah yang diproses menggunakan algoritma kriptografi untuk menjadi *chiphertext* (teks-kode). (6) *Pesan* dapat berupa data atau informasi yang dikirim (melalui kurir, saluran komunikasi data, dsb) atau yang disimpan di dalam media perekaman (kertas, storage, dsb). (7) *Cryptanalysis* atau kriptanalisis bisa diartikan sebagai analisis kode atau suatu ilmu untuk mendapatkan teks-asli tanpa harus mengetahui kunci yang sah secara wajar (Ariyus: 2008).

Dalam kriptografi, seperangkat parameter yang menentukan transformasi penciperaan tertentu yang biasa disebut dengan set kunci. Maksudnya kunci telah ditentukan sebelumnya dan *chiphertext* mengacu pada kunci yang telah dibuat sebelumnya. Proses enkripsi dan deskripsi diatur oleh satu atau beberapa kunci kriptografi. Secara umum kunci-kunci yang digunakan untuk proses pengenskripsian dalam pendeskripsian tidak perlu identik dan tergantung pada sistem yang digunakan (Pearson, 2006). Gambar 2.16 merupakan alur kerja kriptografi.



Gambar 2.16 Alur Kerja Kriptografi

Teknik persandian dikategorikan menjadi dua jenis yaitu kriptografi klasik

dan kriptografi modern. Kriptografi klasik adalah kriptografi yang berbasis karakter (enkripsi dan dekripsi dilakukan pada setiap karakter), sedangkan kriptografi modern kriptografi yang beroperasi dalam mode bit (dinyatakan dalam 0 dan 1) (Juliadi, 2013). Ada beberapa macam algoritma kriptografi klasik, yaitu *shift cipher*, *vigenere cipher*, *polyalphabetic cipher*, *substitution cipher*, dan sebagainya.

Pesan yang diubah dalam bentuk *ciphertext* pada penelitian ini menggunakan metode *cipher block chaining* (CBC). Mode ini menerapkan mekanisme umpan balik pada sebuah *block*. Hasil enkripsi *block* sebelumnya dijadikan umpan balik untuk enkripsi *block* sekarang. Dengan CBC, setiap *block ciphertext* bergantung tidak hanya pada *block plaintext*-nya, tetapi juga pada seluruh *block plaintext* sebelumnya, dengan panjang *block* kurang dari jumlah karakter pada *plaintext*. Dekripsi untuk mode ini dilakukan dengan arah sebaliknya. Secara matematis, enkripsi dengan mode CBC dinyatakan sebagai: $C_i = E_K(P_i \oplus C_{i-1})$ dan dekripsi sebagai $P_i = D_K(C_i) \oplus C_{i-1}$

Blok *plaintext* pertama menggunakan C_0 sebagai vektor awal yang merupakan data acak yang tak bermakna. Karena *block ciphertext* yang dihasilkan selama proses enkripsi bergantung pada *block ciphertext* sebelumnya, maka kesalahan satu bit pada sebuah *block plaintext* akan merambat pada *block ciphertext* yang berkoresponden dan semua *block ciphertext* berikutnya. Tetapi, hal ini berkebalikan pada proses dekripsi. Kesalahan satu bit pada *block ciphertext* hanya mempengaruhi *block plaintext* yang berkoresponden dan satu bit pada *block plaintext* berikutnya pada posisi bit yang berkoresponden pula.

Langkah-langkah dalam kontruksi *encryption keys* dengan metode *Cipher Block Chaining* (CBC) adalah sebagai berikut:

- a. misal *plaintext* $P = (p_i), 1 \leq i \leq h$.
- b. misalkan barisan kuncinya adalah $K = (k_i), 1 \leq i \leq m$.
 1. jika $m < h$, maka kunci K diulang sehingga $|K| = |P|$.
 2. jika $m > h$, maka $K = K - \{k_{h+1}, \dots, k_m\}$.
- c. bagi P ke dalam *block* dengan panjang b .

- d. bagi K ke dalam *block* dengan panjang b .
- e. untuk $i = 1$ sampai $\lceil \frac{h}{b} \rceil$, lakukan perhitungan *ciphertext blocks* dengan perhitungan dibawah ini:

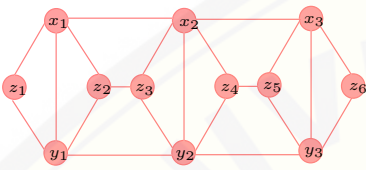
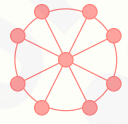

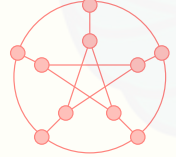
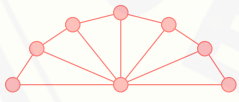

$C_i = C_{i-1} + P_i + K_i \pmod{26}$ sedangkan untuk dekripsi $P_i = C_i - K_i - C_{i-1} \pmod{26}$ dengan P_i dan K_i berturut-turut adalah *block* ke- i dari *plaintext* dan barisan kunci serta C_i adalah *ciphertext* pada modulo 26 untuk $i = 1$, C_{i-1} adalah bilangan nol (Prihandoko, 2016).

Pada *block cipher* teks dibagi menjadi beberapa *block* dengan panjang tertentu dan ditransformasikan menjadi *block* teks sandi dengan panjang yang sama dan dengan menggunakan kunci yang telah disepakati. Sedangkan *stream cipher* yaitu dilakukan bit per bit atau karakter per karakter per satuan waktu. Kunci yang digunakan dihasilkan oleh pembangkit rangkaian kunci (*key stream generator*). Sebuah kunci adalah inputan untuk pembangkit rangkaian kunci yang akan menghasilkan sebuah *stream number* yang acak. Output dari pembangkit disebut *key stream*, yang dikombinasikan bit per bit, *plaintext* pada *stream* dengan menggunakan operasi *exclusive-OR* (XOR). *Key stream* memiliki sifat yang sensitif terhadap nilai awal, sehingga kunci rahasia berupa nilai awal apabila diganti akan menghasilkan *key stream* yang berbeda.

2.11 Hasil Pelabelan Selimut Graf $(a, d) - \mathcal{H}$ Antimagic Total Selimut pada Graf Konektif dan Diskonektif

Suatu selimut dari G adalah $H = H_1, H_2, H_3, \dots, H_k$ keluarga subgraf dari G dengan sifat setiap sisi di G termuat pada sekurang-kurangnya satu graf H_i untuk suatu $i \in 1, 2, \dots, k$. Jika untuk setiap $i \in 1, 2, \dots, k$, H_i isomorfik dengan suatu subgraf H , maka H dikatakan suatu selimut- \mathcal{H} dari G . Selanjutnya dikatakan bahwa G memuat selimut- H . Suatu pelabelan selimut \mathcal{H} -anti-ajaib pada graf G adalah sebuah fungsi bijektif sehingga terdapat jumlahan yang merupakan deret aritmatika $a, a+d, a+2d, \dots, a+(t-1)d$. Pada tabel dibawah ini disajikan beberapa rangkuman hasil pelabelan selimut $(a, d) - \mathcal{H}$ antimagic yang digunakan sebagai rujukan dalam penelitian ini.

Tabel 2.4 Ringkasan pelabelan total super (a, d) -edge antimagic pada graf konektif.

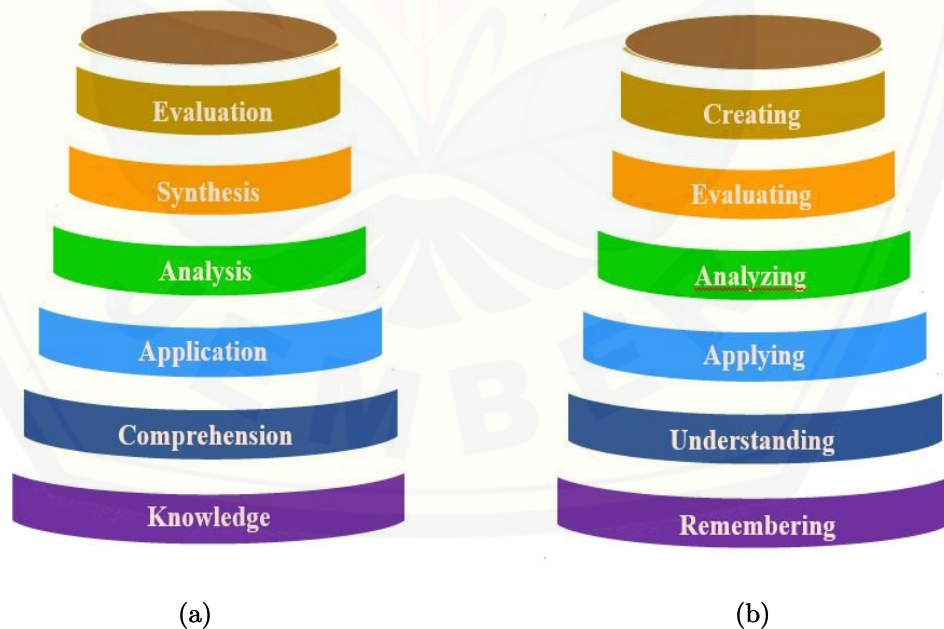
Graf	d	Hasil	Open Problem
Dl_n (Diamond) 	$d \leq 2$	$d \in \{0, 1, 2\}$ untuk $n \geq 2$ (L.Sya'diyah, 2011)	-
W_n (Graf Roda) 	$3n + 5$	$d = 1$ (Inayah, 2009)	$(a, d) - C_3 -$ -
S_n (Matahari) 	$13n + 4$	$d = 1$ (Ismiyati, 2013)	$(a, d) - K_{1,3} -$ -
$GP_{n,k}$ 	$13n + 4 - \frac{n}{2}$	$d = 2$ (Ismiyati, 2013)	$(a, d) - K_{1,3} -$ -
F_n 	$12 + 4n + \frac{n}{2}$	$d = 4$ (Ismiyati, 2013)	$(a, d) - C_3 -$ -
SBt_n 	$36n + 84$	$d = 96$ (Rizky, P., 2014)	$(a, d) - Bt_3 + 2e -$ -

2.12 Keterampilan Berpikir Tingkat Tinggi

Keterampilan berpikir tingkat tinggi dalam pelabelan total selimut $(a, d) - H$ antimagic pada graf Shakerl C_{10}^9, K_4 untuk mengetahui hubungannya dengan tahapan taksonomi bloom pada proses menemukan lema, teorema, dan algoritmanya. *Higher Order Thinking Skills* (HOTS) adalah kegiatan berpikir yang melibatkan level kognitif hirarki tinggi dari taksonomi berpikir Bloom.

Taksonomi Bloom dianggap merupakan dasar bagi berpikir tingkat tinggi. Pemikiran ini didasarkan bahwa beberapa jenis pembelajaran memerlukan proses kognisi yang lebih daripada yang lain, tetapi memiliki manfaat-manfaat lebih umum. Pohl yang dikutip oleh Lewy dkk, dalam Taksonomi Bloom sebagai contoh, kemampuan melibatkan analisis, evaluasi dan mengkreasi dianggap berpikir tingkat tinggi (2009).

Secara hirarkikal taksonomi Bloom terdiri dari enam level, yaitu mengingat (*remembering*), pemahaman (*comprehension*), penerapan (*application*), analisis (*analysis*), evaluasi (*evaluation*), dan menciptakan (*creating*), yang dapat digambarkan pada Gambar 2.17.



Gambar 2.17 (a) Tahapan Taksonomi Bloom yang belum direvisi, dan (b) Tahapan Taksonomi Bloom yang sudah direvisi

Berikut ini adalah penjelasan dan pilihan kata kerja dalam ranah kognitif pada Taksonomi Bloom yang telah direvisi (Utari R, 2008:10):

1. Mengingat adalah kemampuan menyampaikan kembali informasi/pengetahuan yang tersimpan dalam ingatan. Kunci kata kerjanya yaitu mendefinisikan, menyusun daftar, menjelaskan, mengingat, mengenali, menemukan kembali, menyatakan, mengulang, dan mengurutkan, menamai, menemukannya, dan menyebutkan. Pada tahap ini, hubungan dengan pelabelan super $(a, d) - \mathcal{H}$ -antiajaib total selimut adalah mengingat kembali dasar-dasar graf dan mengenali graf yang akan dibangun.
2. Memahami adalah kemampuan memahami instruksi dan menegaskan pengertian ide atau konsep yang telah diajarkan baik dalam bentuk lisan, tertulis maupun graf/diagram. Kunci kata kerjanya yaitu menerangkan, menjelaskan, menerjemahkan, menguraikan, mengartikan, menafsirkan, menginterpretasikan, mendiskusikan, menyeleksi, mendeteksi, melaporkan, menduga, mengelompokkan, memberi contoh, merangkum, menganalogikan, merubah, memperkirakan. Pada tahap ini, hubungan dengan pelabelan super $(a, d) - \mathcal{H}$ -antiajaib total selimut adalah memahami kesesuaian graf dan definisi dari graf tersebut.
3. Menerapkan adalah kemampuan melakukan sesuatu dan mengaplikasikan konsep dalam situasi tertentu. Kunci kata kerjanya yaitu memilih, menerapkan, melaksanakan, menggunakan, mendemonstrasikan, memodifikasi, menunjukkan, membuktikan, menggambarkan, memprogramkan, mempraktekkan. Pada tahap ini, hubungan dengan pelabelan super $(a, d) - \mathcal{H}$ -antiajaib total selimut adalah menggunakan definisi, lemma, dan teorema yang telah dibuktikan dan menerapkan batas atas yang ada pada graf tersebut.
4. Menganalisis adalah kemampuan memisahkan konsep kedalam beberapa komponen dan menghubungkan satu sama lain untuk memperoleh pemahaman atas konsep tersebut secara utuh. Kunci kata kerjanya yaitu mengkaji ulang, membedakan, membandingkan, memisahkan, menghubungkan,

menunjukkan hubungan antara variabel, memecah menjadi beberapa bagian, menyisahkan beberapa bagian, mengorganisir, mengkerangkakan. Pada tahap ini, hubungan dengan pelabelan super $(a, d) - \mathcal{H}$ -antiajaib total selimut adalah menganalisis pelabelan graf berpola pada tunggal dan gabungannya.

5. Mengevaluasi adalah kemampuan menetapkan derajat sesuatu berdasarkan norma, kriteria atau patokan tertentu. Kunci kata kerjanya yaitu menilai, mengevaluasi, menjustifikasi, mengecek, mengkritik, memprediksi, membenarkan, menyalahkan, menyeleksi. Pada tahap ini, hubungan dengan pelabelan super $(a, d) - \mathcal{H}$ -antiajaib total selimut adalah melakukan evaluasi terhadap pola pelabelan yang telah ditemukan pada tahap sebelumnya dan menerapkan pola tersebut pada setiap ekspanannya.
6. Mengkreasi adalah kemampuan memadukan unsur-unsur menjadi suatu bentuk yang utuh dan koheren, atau membuat sesuatu yang orisinil. Kunci kata kerjanya yaitu merakit, merancang, menemukan, menciptakan, memperoleh, mengembangkan, memformulasikan, membangun, membentuk, membuat, melakukan inovasi, mendesain, menghasilkan karya. Pada tahap ini, hubungan dengan pelabelan super $(a, d) - \mathcal{H}$ -antiajaib total selimut adalah memformulasikan rumus yang telah diperoleh menjadi lemma dan teorema yang baru.

BAB 3. METODE PENELITIAN

3.1 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode deduktif aksiomatik, metode pendektasian pola dan dikategorikan kedalam penelitian eksploratif dan terapan, serta penerapan teknik partisi dalam pelabelan super (a,d) - \mathcal{H} -antiajaib total selimut dari operasi *shackle* subgraf dari graf *circulant* $(C_{ca(s_i)})$ dengan konektor graf komplit (K_4) . Metode deduktif aksiomatik yaitu dengan menetapkan pengertian dasar pelabelan super (a,d) - \mathcal{H} -antiajaib total selimut, kemudian dikenalkan beberapa teorema mengenai pelabelan super (a,d) - \mathcal{H} -antiajaib total selimut pada operasi *shackle* subgraf dari graf *circulant* $(C_{ca(s_i)})$ dengan konektor graf komplit (K_4) , sehingga secara penamaan pada graf dapat disebut $Shack(C_{ca(s_i)}^{K_4}, K_4, e, n)$. Selanjutnya menurunkan teorema tersebut untuk memperoleh pelabelan titik dan pelabelan sisi pada graf Komplit (K_4) dan graf *circulant* $(C_{ca(s_i)})$ dengan menggunakan teorema yang telah ada yakni menggunakan metode pendeteksian pola (*pattern recognition*). Setelah ditemukan pelabelan super (a,d) - \mathcal{H} -antiajaib total selimut pada selimut graf komplit dan graf *circulant*, dan dengan menetapkan metode diatas maka selanjutnya akan dirumuskan bagaimana pola pelabelan super (a,d) - \mathcal{H} -antiajaib total selimut pada operasi *shackle* subgraf dari graf *circulant* $(C_{ca(s_i)})$ dengan konektor graf komplit (K_4) untuk penentuan pola pada umumnya, sehingga nantinya dapat dirumuskan pelabelan super (a,d) - \mathcal{H} -antiajaib total selimut pada graf $Shack(C_{ca(s_i)}^{K_4}, K_4, e, n)$. Dan pada penelitian ini juga menggunakan tahapan pada taksonomi bloom yang telah direvisi yaitu mengingat (*remembering*), pemahaman (*comprehension*), penerapan (*application*), analisis (*analysis*), evaluasi (*evaluation*), dan menciptakan (*creating*).

3.2 Definisi Oprasional

Definisi operasional variabel digunakan untuk memberikan gambaran secara sistematis dalam penelitian dan untuk menghindari terjadinya perbedaan pengertian makna. Definisi operasional variabel yang dimaksud adalah sebagai berikut:

3.2.1 Pelabelan Super (a, d) - \mathcal{H} -Antiajaib Total Selimut

Gabungan graf memiliki pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} -antiajaib total selimut pada graf G dengan v titik dan e sisi didefinisikan sebagai fungsi bijektif dari titik-titik dan sisi-sisi pada himpunan bilangan bulat dari 1 sampai sejumlah titik dan sisi, secara matematis ditulis dalam bentuk $f : V(G) \cup E(G) \Rightarrow \{1, 2, 3, \dots, |V(G)| + |E(G)|\}$ dengan sifat bahwa setiap subgraf dari G yang isomorfik dengan H dimana H juga subgraf dari G mempunyai total label $w(H)$ yang berbeda, $w(GH) = \sum_{v \in V(H)} f(v) + \sum_{v \in V(G)} f(v)$, pada semua titik G dan H adalah $a, a + d, a + 2d, \dots, a + (q - 1)d$ untuk $a > 0$ dan $d = 0$ keduanya bilangan bulat. Sedangkan pelabelan total selimut (a, d) -sisi antiajaib (SEATL) adalah sebuah pemetaan satu-satu f dari $V(G) \cup E(G)$ ke bilangan bulat $1, 2, 3, \dots, p + q$ sehingga himpunan bobot total $W(GH) = \sum_{v \in V(G)} f(v) + \sum_{v \in V(H)} f(v) + \sum_{e \in E(G)} f(e) + \sum_{e \in E(H)} f(e) + \sum_{w \in w(GH)} w(v)$ pada semua sisi G adalah $a, a + d, a + 2d, \dots, a + (q - 1)d$ untuk $a >$ dan $d = 0$ keduanya bilangan bulat.

3.2.2 Operasi *Shackle* subgraf dari Graf *Circulant* (C_{ca}) dengan Konektor Graf Komplit K_4

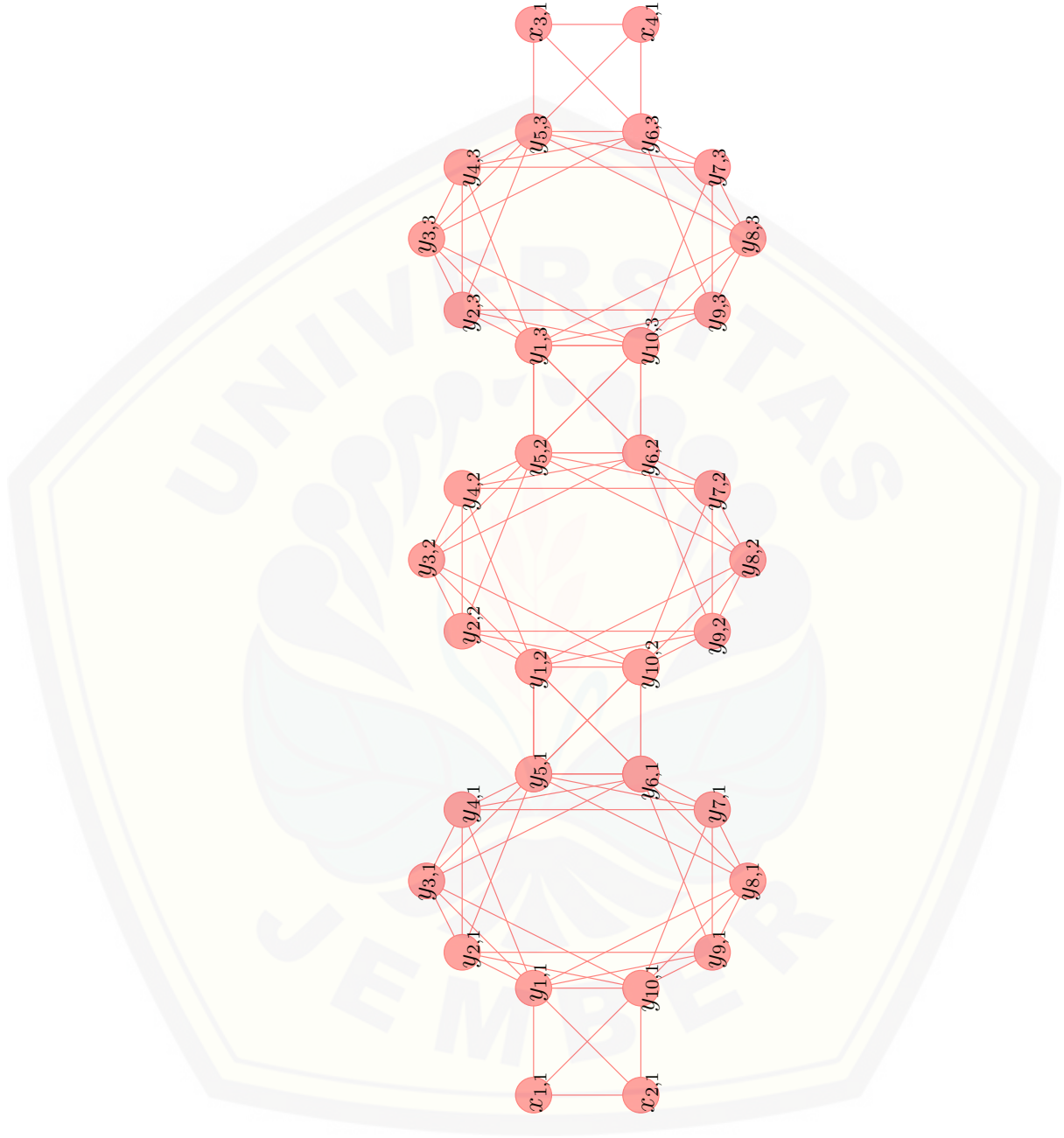
Operasi *shackle* subgraf pada graf *circulant* ($C_{ca(s_l)}$) dengan konektor graf komplit (K_4) dapat dinotasikan dengan $Shack(C_{ca(s_l)}^{K_4}, K_4, e, n)$ dengan ekspansi sebanyak n . Operasi *shackle* subgraf pada graf *circulant* dengan jumlah busur pada graf *circulant* $s_l = r = 3$ yang dinotasikan dengan $C_{ca(s_l)}$, kemudian dioperasikan shakel dengan konektor (K_4), dengan subgraf (K_4) yang digunakan secara bersama dengan graf ekspanya. Graf ini merupakan contoh graf yang masih belum ditemukan pelabelannya. Graf $Shack(C_{ca}^{K_4}, K_4, e, n)$

memiliki himpunan titik (*vertex*), $V_1 = \{x_{1,1}; x_{2,1}; x_{3,1}; x_{4,1}\}$ dan $V_2 = \{y_{j,i} | 1 \leq j \leq m; 1 \leq i \leq n\}$ serta himpunan sisi $E_1 = \{x_{1,1}x_{2,1}; x_{1,1}y_{1,1}; x_{1,1}y_{10,1}; x_{2,1}y_{10,1}; x_{2,1}y_{1,1}; x_{3,1}y_{5,n}; x_{3,1}y_{4,1}; x_{3,1}y_{6,n}; x_{4,1}y_{5,n}; x_{4,1}y_{6,n}\} \cup \{y_{\frac{m}{2},i}y_{1,i+1} | 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{y_{\frac{m}{2}+1,i}y_{m,i+1} | 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{y_{\frac{m}{2},i}y_{m,i+1} | 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{y_{\frac{m}{2}+1,i}y_{1,i+1} | 1 \leq i \leq n-1\}$ dan $E_2 = \{y_{j,i}y_{(j+s_l) \bmod m, i} | 1 \leq j \leq m; 1 \leq i \leq n; s_l = r\}$ Gambar 3.1 merupakan pelabelan super $(a, d) - \mathcal{H}$ -antiajaib total selimut pada operasi *shackle* subgraf *circulant* $(C_{10(1,2,3)})$ dengan konektor graf komplit (K_4) atau dapat dinotasikan dengan *Shack*- $(C_{10(1,2,3)}^{K_4}, K_4, e, 3)$.

3.3 Teknik Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada operasi *shackle* subgraf *circulant* $(C_{ca(s_l)})$ dengan konektor graf komplit (K_4) . Jika pada graf ini ditemukan pelabelan super $(a, d) - \mathcal{H}$ -antiajaib total selimut maka dilakukan dengan pendeteksian pola (*pettern recognition*). Penelitian ini juga menerapkan tahapan-tahapan taksonomi Bloom yang telah direvisi dalam penentuan langkah-langkah untuk pelabelan super $(a, d) - \mathcal{H}$ -anti ajaib total selimut pada operasi *shackle* subgraf *circulant* $(C_{ca(s_l)})$ dengan konektor graf komplit (K_4) . Adapun teknik penelitian adalah sebagai berikut:

1. mengidentifikasi keluarga dari operasi *shackle* subgraf *circulant* $(C_{ca(s_l)})$ dengan konektor graf komplit (K_4) ;
2. menghitung jumlah titik p_G dan sisi q_G pada operasi *shackle* subgraf *circulant* $(C_{ca(s_l)})$ dengan konektor graf komplit (K_4) , serta menghitung jumlah selimut titik p_H , jumlah selimut sisi q_H , dan jumlah selimut pada operasi *shackle* subgraf *circulant* $(C_{ca(s_l)})$ dengan konektor graf komplit (K_4) ;
3. menentukan batas atas nilai beda d pada operasi *shackle* subgraf *circulant* $(C_{ca(s_l)})$ dengan konektor graf komplit (K_4) ;
4. menentukan label $\mathcal{H}AVC$ (\mathcal{H} Antimagic Vertex Covering) atau pelabelan super $(a, d) - \mathcal{H}$ -titik antiajaib total selimut pada operasi *shackle* subgraf



Gambar 3.1 Pelabelan Super $(a, d) - \mathcal{H}$ -Antiajaib Total Selimut pada shackle dari graf $Shack(C_{10(1,2,3)}^{K_4}, K_4, e, 3)$

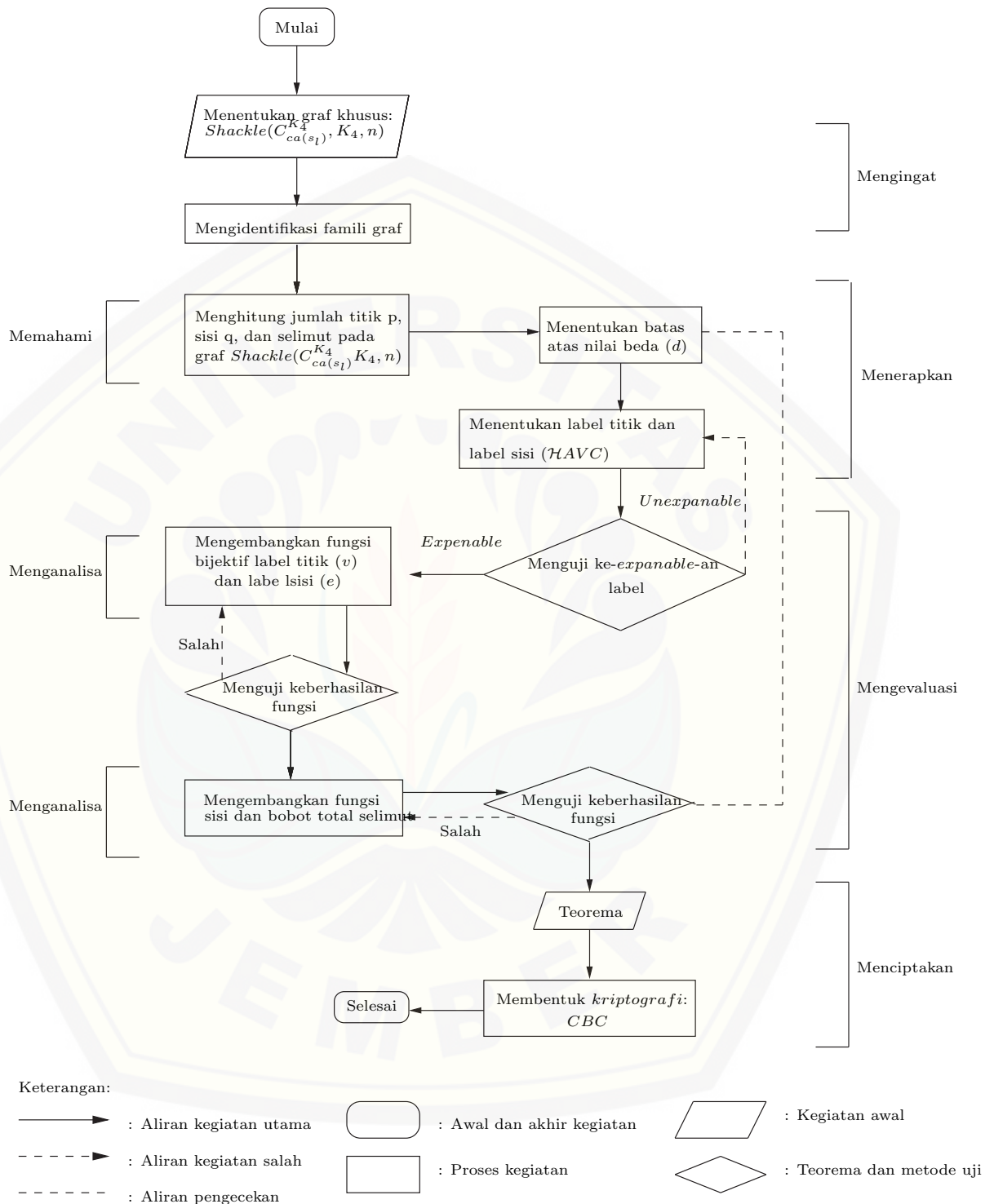
circulant ($C_{ca(s_1)}$) dengan konektor graf komplit (K_4) melalui metode penerapan teknik partisi;

5. apabila label $\mathcal{H}AVC$ berlaku untuk beberapa graf maka dikatakan pelabelan itu *expandable* sehingga dilanjutkan dengan mengembangkan fungsi bijektif bobot titik pada operasi *shackle* subgraf *circulant* ($C_{ca(s_1)}$) dengan konektor graf komplit (K_4);
6. menentukan label sisi dan fungsi bijektif sisi selimut (a, d) -antiajaib pada operasi *shackle* subgraf *circulant* ($C_{ca(s_1)}$) dengan konektor graf komplit (K_4);
7. mengembangkan fungsi sisi dan bobot total selimut (a, d) -antiajaib pada operasi *shackle* subgraf *circulant* ($C_{ca(s_1)}$) dengan konektor graf komplit (K_4);
8. membuktikan kebenaran fungsi pada operasi *shackle* subgraf *circulant* ($C_{ca(s_1)}$) dengan konektor graf komplit (K_4);
9. menemukan teorema;
10. membentuk kriptografi *cipher block chaining* (CBC) sesuai pesan rahasia.

Penelitian ini akan menemukan berbagai pola pelabelan total selimut (a, d) -antiajaib dengan teknik partisi untuk menemukan nilai d yang berbeda. Teknik penelitian yang dilakukan untuk gabungan saling lepas pada operasi *shackle* subgraf *circulant* ($C_{ca(s_1)}$) dengan konektor graf komplit (K_4). Secara umum, langkah-langkah penelitian di atas dapat juga disajikan dalam bagan alir pada Gambar 3.2.

3.4 Observasi Awal

Sebelum penelitian lanjutan pada operasi *shackle* subgraf *circulant* ($C_{ca(s_1)}$) dengan konektor graf komplit (K_4), telah dilakukan observasi awal untuk nilai m dan n serta penetapan jumlah busur pada graf *circulant* ($C_{ca(s_1)}$) tertentu sebagai pedoman untuk menduga keberadaan pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} -antiajaib total selimut serta menentukan pola pelabelannya. Setelah melakukan observasi awal, peneliti menemukan pola pelabelan titik tunggal

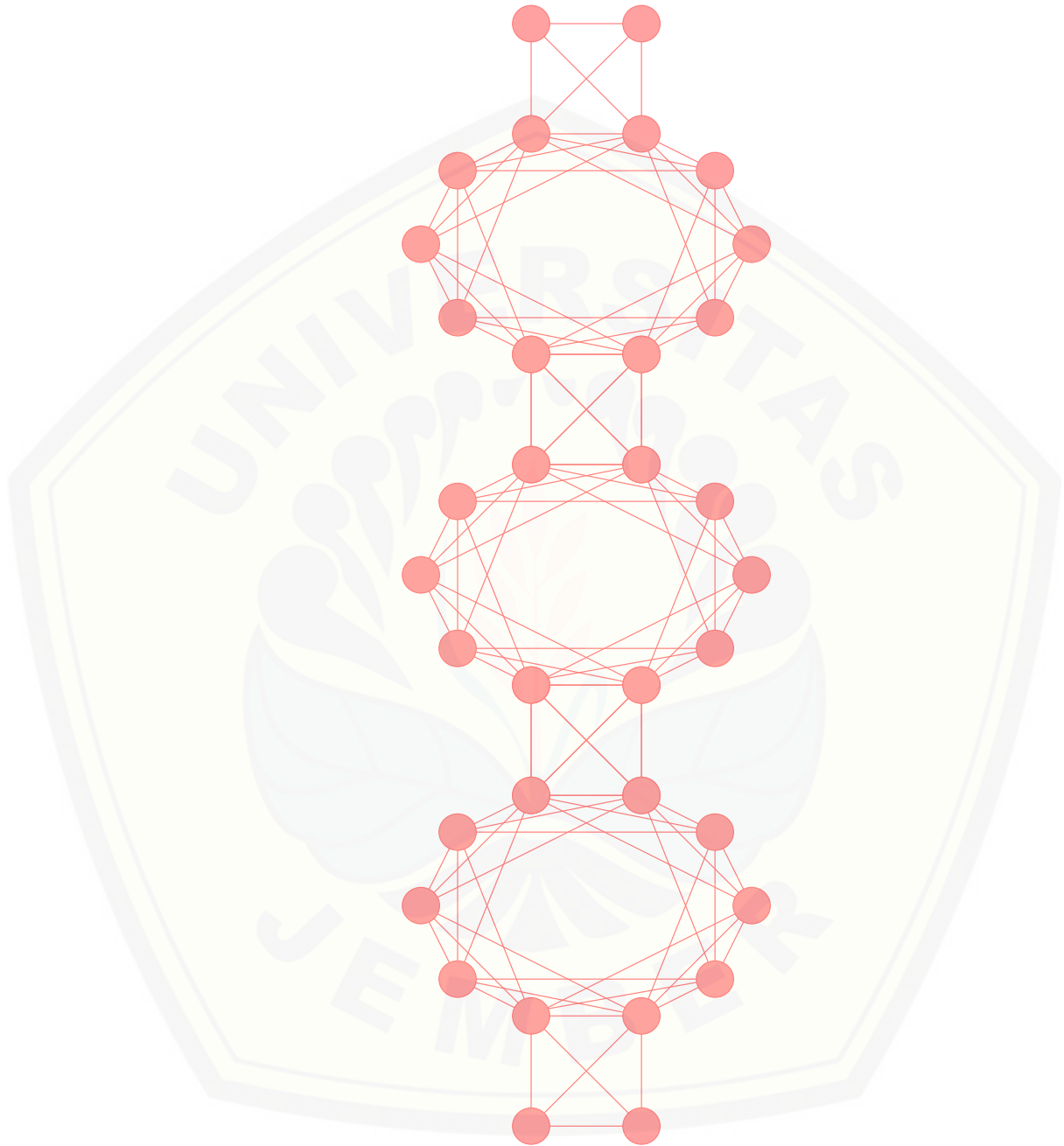


Gambar 3.2 Bagan teknik penelitian

pada operasi *shackle* subgraf *circulant* ($C_{ca(s_l)}$) dengan konektor graf komplit (K_4). Observasi awal yang dilakukan dikaitkan dengan proses berpikir tingkat tinggi (*higher order thinking*) berdasarkan taksonomi Bloom.

Berdasarkan Gambar 3.3, penelitian telah menemukan pelabelan super (a,d) - \mathcal{H} -anti ajaib total selimut pada operasi *shackle* subgraf *circulant* ($C_{ca(s_l)}$) dengan konektor graf komplit (K_4) untuk observasi awal akan digunakan untuk $n = 3$, $ca = m = \text{simpul genap}$ dan $s_l = r = 3$ dengan jumlah selimut $s = n$.





Gambar 3.3 Observasi awal pada $Shack(C_{10(1,2,3)}^{K_4}, K_4, e, 3)$

BAB 5. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dari pembahasan pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa:

1. Kardinalitas pada operasi *shackle* subgraf dari graf *circulant* ($C_{ca(s_l)}$) dengan konektor graf komplit (K_4) dengan yaitu himpunan titik $V_1 = \{x_{1,1}; x_{2,1}; x_{3,1}; x_{4,1}\}$ dan $V_2 = \{y_{j,i} | 1 \leq j \leq m; 1 \leq i \leq n\}$ dengan jumlah titik $|V| = |V| = 4 + mn$ dan sisi $E_1 = \{x_{11}x_{21}; x_{11}y_{11}; x_{11}y_{101}; x_{21}y_{101}; x_{21}y_{11}; x_{31}y_{5n}; x_{31}y_{41}; x_{31}y_{6n}; x_{41}y_{5n}; x_{41}y_{6n}\} \cup \{y_{\frac{m}{2},i}y_{1,i+1} | 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{y_{\frac{m}{2}+1,i}y_{m,i+1} | 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{y_{\frac{m}{2},i}y_{m,i+1} | 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{y_{\frac{m}{2}+1,i}y_{1,i+1} | 1 \leq i \leq n-1\}$ dan $E_2 = \{y_{j,i}y_{(j+s_l)mod m,i} | 1 \leq j \leq m; 1 \leq i \leq n; s_l = r\}$ dengan jumlah sisi $|E| = 4n + rm + 6$.
2. Batas atas d untuk pelabelan super (a,d) - $(C_{ca(s_l)}^{K_4})$ -antiajaib total selimut pada operasi *shackle* subgraf dari graf *circulant* ($C_{ca(s_l)}$) dengan konektor graf komplit (K_4) yaitu $d \leq -mp_H + q_H^2 - \frac{q_H n(n+2)}{n-1} + \frac{6q_H}{n-1}$ dengan $p_G = p_H + m(n-1)$, $p_H = m + 4$, $q_G = nq_H - n^2 - 2n + 6$, dan $q_H = n + rm + 6$.
3. Pelabelan super (a,d) - $(C_{ca(s_l)}^{K_4})$ -antiajaib total selimut pada operasi *shackle* subgraf dari graf *circulant* ($C_{ca(s_l)}$) dengan konektor graf komplit (K_4) yang dinotasikan dengan $Shack(C_{ca(1,2,3)}^{K_4}, K_4, e, n)$ memiliki super (a,d) - $(C_{ca(1,2,3)}^{K_4})$ -antiajaib dengan batas atas $a = C_1 + d$, beda $d = 2(t_1 + t_2^2) + \frac{1}{5}t_3 - \frac{1}{5}t_4 + t_5 - t_6 + t_7^2 - t_8^2 + \frac{1}{3}t_9 - \frac{1}{3}t_{10} + \dots + t_t + 2r_1 + 2r_2^2 + \frac{1}{5}r_3 - \frac{1}{5}r_4 + r_5 - r_6 + r_7^2 - r_8^2 + \frac{1}{3}r_9 - \frac{1}{3}r_{10} + \dots + r_r$, dan nilai $C_1 = \{n(\sum_{o=1}^{10} t_o + 9t_1 + 8t_2 + \frac{69}{10}t_3 + \frac{61}{10}t_4 + \frac{9}{2} \sum_{\varphi=5}^6 t_\varphi + 3t_7 + 2t_8 + \frac{5}{6}t_9 + \frac{1}{6}t_{10} + t_1^2 + \frac{1}{2} \sum_{\varphi=3}^5 t_\varphi^2 + \frac{1}{6}t_6^2 + t_8^2 + \frac{1}{2} \sum_{\varphi=9}^{10} t_\varphi^2 + 9r_1 + 8r_2 + \frac{69}{10}r_3 + \frac{61}{10}r_4 + \frac{9}{2} \sum_{\varphi=5}^6 r_\varphi + 3r_7 + 2r_8 + \frac{1}{6} \sum_{\varphi=9}^{10} r_\varphi^2 +$

$$r_1^2 + \frac{1}{2} \sum_{\varphi=3}^6 r_\varphi^2 + r_8^2 + \frac{1}{2} \sum_{\varphi=9}^{10} r_\varphi^2 + \sum_{\varphi=1}^{10} (r_\varphi - 1) s_l + \sum_{\varphi=1}^2 t_\varphi + \frac{2}{5} \sum_{\varphi=3}^4 t_\varphi + t_6 + \frac{1}{2} \sum_{\varphi=7}^8 t_\varphi + \frac{1}{3} t_9 + \frac{2}{3} t_{10} - \frac{1}{2} t_7^2 + \frac{1}{2} t_8^2 + \sum_{\varphi=1}^2 r_\varphi + \frac{2}{5} r_3 + \frac{3}{5} r_4 + r_6 + \frac{1}{2} \sum_{\varphi=7}^8 r_\varphi + \frac{1}{3} r_9 + \frac{2}{3} r_{10} - \frac{1}{2} r_7^2 + \frac{1}{2} r_8^2 \}.$$

4. Pelabelan super (a,d) - $(C_{ca(1,2,3)}^{K_4})$ -antiajaib total selimut pada operasi *shackle* subgraf dari graf *circulant* $(C_{ca(s_l)})$ dengan konektor graf komplit (K_4) dapat digunakan untuk membangun *chiphertext* menggunakan metode *cipher block chaining* (CBC) dengan *plaintext* "hidup harus diperjuangkan!" memperoleh hasil:
- "LQUIF,VBP AU!GYYIL.SPQQI." jika menggunakan *block* sama dengan satu atau lebih sering disebut metode *stream cipher*
 - "LQAYFV WKRKGJMCFKQHDWNH?P " jika menggunakan *block* sama dengan dua
 - "LQUTVRJWBEWVD,O.FZYXJDIZLE" jika menggunakan *block* sama dengan tiga
 - "LQUIQNKJKIK?!ODWGZAJWEQZ!A" jika menggunakan *block* sama dengan empat
5. Kaitan antara keterampilan berpikir tingkat tinggi yang merupakan keterampilan kognitif tertinggi dari taksonomi Bloom dengan pelabelan super (a,d) - $(C_{ca(s_l)}^{K_4})$ -antiajaib total selimut pada operasi *shackle* subgraf dari graf *circulant* $(C_{ca(s_l)})$ dengan konektor graf komplit (K_4) , yakni dalam penemuan teorema pada batas atas yang telah ditentukan. Tahap mengingat meliputi mengingat istilah dan teorema yang terkait, mengenali graf yang akan digunakan. Tahap memahami yang terdiri dari menjelaskan kesesuaian operasi *shackle* subgraf dari graf *circulant* $(C_{ca(s_l)})$ dengan konektor graf komplit (K_4) serta definisinya. Tahap menerapkan yaitu menggunakan teorema batas atas untuk menunjukkan batas atas yang ada pada SHATD operasi *shackle* subgraf dari graf *circulant* $(C_{ca(s_l)})$ dengan konektor graf komplit (K_4) , dan menerapkan teorema lainnya yang berkaitan, termasuk atura-aturan yang berlaku dalam ilmu hitung. Tahap

menganalisis meliputi memecah graf menjadi beberapa bagian berdasarkan polanya, mengkerangkakan pola untuk setiap bagian dalam bentuk partisi. Tahap mengevaluasi yaitu mengecek pengkombinasian partisi pada setiap eksponannya. Tahap mencipta yaitu memformulasikan partisi, a , dan d yang dipergunakan oleh serta menciptakan observasi dan teorema baru.

5.2 Saran

Berdasarkan hasil penelitian mengenai pelabelan super $(a,d)-(C_{ca(s_1)}^{K_4})$ -antiajaib total selimut pada operasi *shackle* subgraf dari graf *circulant* $(C_{ca(s_1)})$ dengan konektor graf komplit (K_4) serta mengacu pada *open problem* dari hasil penelitian yang telah ditemukan, maka peneliti memberikan saran kepada pembaca untuk melakukan penelitian pada pelabelan super $(a,d)-(C_{ca(s_1)}^{K_4})$ -antiajaib total selimut pada operasi *shackle* subgraf dari graf *circulant* $(C_{ca(s_1)})$ dengan konektor graf komplit (K_4) untuk menemukan partisi $\mathcal{P}_{t,t}^{n,k}(i,j,k)$, $\mathcal{P}_{t,t^2}^{n,k}(i,j,k)$, $\mathcal{P}_{t,\frac{t}{5}}^{n,k}(i,j,k)$, $\mathcal{P}_{t,-\frac{t}{5}}^{n,k}(i,j,k)$, $\mathcal{P}_{t,t}^{n,k}(i,j,k)$, $\mathcal{P}_{t,-t}^{n,k}(i,j,k)$, $\mathcal{P}_{t,t^2}^{n,k}(i,j,k)$, $\mathcal{P}_{t,-t^2}^{n,k}(i,j,k)$, $\mathcal{P}_{t,\frac{t}{3}}^{n,k}(i,j,k)$, $\mathcal{P}_{t,-\frac{t}{3}}^{n,k}(i,j,k)$ pada pelabelan super $(a,d)-(C_{ca(s_1)}^{K_4})$ -antiajaib total selimut secara diskonektif.

DAFTAR PUSTAKA

- A.C. Prihandoko, Dafik, I.H. Agustin, D. Susanto, Slamin. 2016. *The Construction of Encryption Key by Using a Super \mathcal{H} -Antimagic Total Graph*. *Asian Mathematical Conference*. submitted
- Abdussakir, Nisnawati, N. dan Nawandi, Fifi. 2009. *Teori Graf*. UIN Malang Press.
- Agustin, I, H. 2016. *Super Complete-Antimagicness of amalgamation of Complete Graf*. Working Paper. *CGANT-Universitas Jember*.
- Ariyus, Dony. 2008. *Pengantar Ilmu Kriptografi*. Yogyakarta: Andi Yogyakarta.
- Azizah, Y.N. 2016. *Super (a, d) - A_p^o -Anti Ajaib Total Dekomposisi Graf Shackle Antiprisma Untuk Pengembangan Ciphertext dan Ketrampilan Berfikir Tingkat Tinggi*. Tidak dipublikasikan. Skripsi. Jember: FKIP Universitas Jember.
- Baca, Bronkovic, L., Lascsakova, M., Phanalasy, dan Fenovcikova, A. S. 2013. *On d -Antimagic Labellings of Plane Graoph*. *Electronica Journal of Graph Theory and Application*. Vol 1: 28-39.
- Chartrand, G, and Ping Zhang. 2012. *Introductory Graph Theory*. United Statedof America: Dover Publication, inc.
- Dafik. 2014. *Batas Atas d dari Sebuah Graf yang Memiliki Super (a,d) Antimagic Covering*. Working Paper, FKIP UNEJ.
- C. Heuberger. 2003. *Planarity and Colorability of Circulant Graphs*, *Discrete Mathematics*. Vol. 268: 153-169.
- Gutiérrez, A. dan Lladó, A. 2005. *Magic Covering Of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*. Vol.55: 451-461.
- Hartsfield, N. and Ringel, G. 1994. *Pearls in Graph Theory*. Boston-San Diego-NewYork-London: Academic Press Limited.
- Inayah, N. 2013. *Pelabelan $(a, d) - H - antiajaib$ pada beberapa kelas graf*. Tidak dipublikasikan (Disertasi). Bandung: Institut Teknologi Bandung.

- Inayah, N., Salman, A.N.M. and Simanjuntak, R. 2013. *Australian Journal of Combinatorics*. Vol. 57: 127-138.
- Juliadi, dkk. 2013. *Kriptografi Klasik dengan Metode Modifikasi Affine Chipper yang di Perkuat dengan Vigenere Chipper*. (Vol 2 No 2).
- Karyanti. 2012. *Pelabelan Selimut (a,d) -H-Anti Ajaib Super pada Graf Fan, Sun, dan Generalized Petersen*. Tidak dipublikasikan (Skripsi). Surakarta: Universitas Sebelas Maret.
- Krathwol, D. R. 2002. *Pendidikan Bagi Anak Berkesulitan Belajar*.. Jakarta : Rineka Cipta.
- Lewy, dkk. 2009. *Pengembangan Soal untuk mengukur Kemampuan Berpikir Tingkat Tinggi Pokok Bahasan Barisan dan Deret Bilangan di Kelas IX Ak selerasi SMP Xaverius Maria Palembang*. Jurnal Pendidikan Matematika, UNSRI.
- Lipschutz, S. dan Lipson, Marc. 2008. *Schaum's Outlines Matematika Diskret Edisi Ketiga*. Jakarta: Erlangga.
- Mulyono, Abdurrahman. 2002. *A Revision of Bloom's Taxonomy: An Overview. Theory Into Practice* 41 (4): 213-218.
- Munir, R. 2003. *Matematika Diskrit*. Bandung: Informatika Bandung.
- Munir, R. 2012. *Matematika Diskrit: Edisi ke-5*. Bandung: Informatika Bandung.
- Palupi, Retno. 2008. *Kriptosistem Kunci Asimetrik Menggunakan Algoritma Genetika pada Data Citra*. (Vol 1 No. 1).
- Pearson, E. 2006. *Introduction to Cryptography with Coding Theory*. America: United States of America.
- Schneier, B. 1996. *Applied Cryptography: Protocols, Algorithms, and Source Code in C*. John Wiley and Sons, Inc.
- ScienceAtelier. 2015. *Satu kali jalan: Tujuh Jembatan Königsberg*. <https://scienceatelier.wordpress.com/2015/08/15/satu-kali-jalan-tujuh-jembatan-konigsberg/> [15 Juni 2016].

Simanjuntak, R., Miller, M., dan Bertault, F. 2000. *Two New (a,d) -Antimagic Graph Labelings*. Proceeding of the Eleventh Australasian Workshop of Combinatorial Algorithm (AWOCA), 179189.

Slamin. 2009. *ADesain Jaringan: Pendekatan Teori Graf*. Jember: Jember University Press.

Suriasumantri. 1983. *Psikologi Pendidikan Press*. Diakses dari <http://www.andragogi.com>. Rabu, 15 Juni 2016 Jember.

Susilo, Frans. 2011. *Landasan Matematika*. Yogyakarta: Graha Ilmu.

Utari, Retno. 2008. *Taksonomi Bloom: Apa dan Bagaimana Cara Menggunakannya*. Pusdiklat KNKP, Widyaaiswara Madya.