



**PEWARNAAN TITIK r -DINAMIS PADA GRAF HASIL
OPERASI *EDGE COMB PRODUCT GRAPH*
DIKAITKAN DENGAN KETERAMPILAN
BERPIKIR TINGKAT TINGGI**

SKRIPSI

Oleh

Mita Oktavia Aziza

NIM 130210101109

**PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN IPA
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS JEMBER**

2017



**PEWARNAAN TITIK r -DINAMIS PADA GRAF HASIL
OPERASI *EDGE COMB PRODUCT GRAPH*
DIKAITKAN DENGAN KETERAMPILAN
BERPIKIR TINGKAT TINGGI**

SKRIPSI

diajukan guna melengkap tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan Program Studi Pendidikan Matematika (S1) dan mencapai gelar Sarjana Pendidikan

Oleh

Mita Oktavia Aziza

130210101109

**PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN IPA
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS JEMBER**

2017

HALAMAN PERSEMBAHAN

Dengan menyebut nama Allah yang Maha Pengasih lagi Maha Penyayang, serta Sholawat atas Nabi Muhammad S.A.W, kupersembahkan suatu kebahagiaan penggalan bait dalam perjalanan hidupku teriring rasa terima kasih kepada:

1. Allah SWT yang telah memberikan nikmat, Ridho, dan RahmatNya sehingga skripsi ini dapat terselesaikan;
2. Orang tuaku tercinta dan terkasih : Ayahanda Miskam, S.Pd dan Ibunda Mukhtatiatun Al Aini, S.Pd serta kedua kakakku Andrian Fitradani, dan Iqbal Rifqi Arifandi yang senantiasa mengalirkan rasa cinta, kasih sayang dan doa yang tiada pernah putus yang selalu mengiringiku dalam meraih cita-cita;
3. Bapak Prof. Drs. Dafik, M.Sc.,Ph.D. selaku Dosen Pembimbing I dan Ibu Susi Setiawani, S.Si., M.Sc selaku Dosen Pembimbing II yang telah meluangkan waktu, pikiran, dan perhatian dalam penulisan skripsi ini;
4. Bapak dan Ibu Dosen FKIP Pendidikan Matematika yang dengan sabar telah memberikan ilmu dan bimbingannya selama menyelesaikan masa studi;
5. Teman-teman pejuang graf yang tergabung dalam CGANT (Lisa, Hasan, Elitta, Putu, Yuli, Aghni, Wahyu, Darian dll) yang selalu berbagi suka maupun duka dan selalu memberikan dukungan serta semangat;
6. Teman-teman seperjuangan FKIP Pendidikan Matematika angkatan 2013;
7. Syahdinnar Indriawati Amaliyah, Fika Romadhoni, Tri Utari, Riska Amalia Hakim, dan Rika Nurmaharani sebagai sahabat yang selalu ada disaat suka maupun duka dan senantiasa membantu dan menorehkan pengalaman hidup yang tak terlupakan;
8. Febri, Iqbal, Ma'ruf, Dika, Tio yang banyak memberikan pengalaman mengesankan;

9. Keluargaku di kosan Brantas 25 no.255: Uky, Virda, Dini, Istiyam, Putri, dan Bapak Imam sekeluarga yang telah memberikan pengalaman berharga dalam beberapa tahun ini,
10. Almamater Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember;
11. Semua pihak yang telah membantu terselesaikannya skripsi ini.

Semoga bantuan, bimbingan, dan dorongan beliau dicatat sebagai amal baik oleh Allah SWT dan mendapat balasan yang sesuai dari-Nya. Selain itu, penulis juga menerima segala kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan skripsi ini. Akhirnya penulis berharap, semoga skripsi ini dapat bermanfaat.

Jember, April 2017

Penulis

MOTTO

فِي أَيِّ آيَاتِ رَبِّكُمَا تُكذِّبَانِ ﴿١٣﴾

"Maka nikmat Tuhanmu yang manakah yang kamu dustakan?."

(Surah Ar-Rahman (55:13))*

"Jika nasib adalah titik, dan usaha adalah sisi; maka hidup adalah sebuah graf. Tantangan kita adalah bagaimana merangkai titik dan sisi tersebut agar tercipta sebuah graf yang keindahannya dapat dinikmati bersama"

(Prof. Drs. Slamin, M.Comp.Sc., Ph.D.)

"Syukur adalah jalan mutlak untuk mendatangkan lebih banyak kebaikan ke dalam hidup anda."

(Marci Shimoff)*

"Jangan patah semangat dengan apapun yang terjadi. Jika kita menyerah, maka habislah sudah"

(Top Ittiphat)**

*) Buku "The Secret" Karya Rhonda Byrne

***) Film "Top Secret The Billionaire"

HALAMAN PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Mita Oktavia Aziza

NIM : 130210101109

Menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang berjudul: "Pewarnaan Titik r -Dinamis pada graf hasil operasi *Edge Comb Product Graph* Dikaitkan dengan Keterampilan Berpikir Tingkat Tinggi" adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali jika dalam pengutipan substansi disebutkan sumbernya dan belum diajukan pada instansi manapun, serta bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa adanya tekanan dan paksaan dari pihak manapun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, April 2017

Yang menyatakan,

Mita Oktavia Aziza

NIM 130210101109

SKRIPSI

**PEWARNAAN TITIK r -DINAMIS PADA GRAF HASIL
OPERASI *EDGE COMB PRODUCT GRAPH*
DIKAITKAN DENGAN KETERAMPILAN
BERPIKIR TINGKAT TINGGI**

Oleh

Mita Oktavia Aziza
NIM 130210101109

Dosen Pembimbing 1 : Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D.

Dosen Pembimbing 2 : Susi Setiawani, S.Si., M.Sc

HALAMAN PERSETUJUAN

PEWARNAAN TITIK r -DINAMIS PADA GRAF HASIL
OPERASI *EDGE COMB PRODUCT GRAPH*
DIKAITKAN DENGAN KETERAMPILAN
BERPIKIR TINGKAT TINGGI

SKRIPSI

Diajukan untuk dipertahankan di depan Tim Penguji sebagai salah satu persyaratan untuk menyelesaikan Program Pendidikan Sarjana Jurusan Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam dengan Program Studi Pendidikan Matematika pada Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember

Nama Mahasiswa : Mita Oktavia Aziza
NIM : 130210101109
Jurusan : Pendidikan MIPA
Fakultas : Keguruan dan Ilmu Pendidikan
Angkatan Tahun : 2013
Daerah Asal : Jember
Tempat, Tanggal Lahir : Jember, 7 Oktober 1994

Disetujui oleh:

Pembimbing I,

Pembimbing II,

Prof. Drs. Dafik, M.Sc, Ph.D
NIP. 196808021993031004

Susi Setiawani, S.Si., M.Sc
NIP. 197003071995122001

HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi berjudul Pewarnaan Titik r -Dinamis pada Graf Hasil Operasi *Edge Comb Product Graph* Dikaitkan dengan Keterampilan Berpikir Tingkat Tinggi telah diuji dan disahkan oleh Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universtas Jember pada:

Hari : Selasa

Tanggal : 11 April 2017

Tempat : Gedung E Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan

Tim Penguji :

Ketua,

Sekretaris,

Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D.
NIP.196808021993031004

Susi Setiawani, S.Si., M.Sc
NIP.197003071995122001

Anggota 1,

Anggota 2,

Drs. Toto Bara Setiawan, M.Si.
NIP.195812091986031003

Arif Fatahillah, S.Pd., M.Si.
NIP. 198205292009121003

Mengetahui,
Dekan Fakultas Keguruan Dan Ilmu Pendidikan
Universitas Jember

Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D.
NIP. 196808021993031004

RINGKASAN

PEWARNAAN TITIK r -DINAMIS PADA GRAF HASIL OPERASI *EDGE COMB PRODUCT GRAPH* DIKAITKAN DENGAN KETERAMPILAN BERPIKIR TINGKAT TINGGI; Mita Oktavia Aziza, 130210101109; 2017: 76 halaman; Jurusan Pendidikan MIPA, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Jember.

Salah satu topik yang menarik untuk dikembangkan dalam teori graf adalah pewarnaan (*colouring*). Pewarnaan suatu graf terdiri dari pewarnaan titik, pewarnaan sisi dan pewarnaan wilayah. Penelitian ini terfokus pada pewarnaan titik yang dikembangkan pada pewarnaan r -dinamis. Pengembangan pewarnaan titik r -dinamis bertujuan untuk mencari nilai kromatik pada pewarnaan graf. Penelitian ini menggunakan graf hasil operasi *comb* sisi yang dinotasikan dengan $G \supseteq H$. Tujuan dari penelitian yaitu untuk menentukan kardinalitas, menentukan pewarnaan titik r -dinamis, dan keterkaitan antara pewarnaan titik r -dinamis pada graf hasil operasi *edge comb product graph* dalam mengasah keterampilan berpikir tingkat tinggi.

Metode yang digunakan adalah metode deduktif aksiomatik yaitu menurunkan teorema tentang pewarnaan titik r -dinamis, kemudian diterapkan dalam pewarnaan titik r -dinamis, berikutnya dikenalkan pada beberapa teorema mengenai pewarnaan titik r -dinamis pada graf *comb* sisi. Selanjutnya menurunkan teorema tersebut untuk memperoleh pewarnaan titik dan nilai kromatik r -dinamis. Setelah ditemukan pewarnaan titik r -dinamis pada graf tersebut, maka dilanjutkan dengan pendeteksian pola, yaitu dengan menentukan pola pewarnaan r -dinamis sedemikian hingga diperoleh bentuk pola umumnya. Hasil penelitian ini berupa teorema baru mengenai nilai kromatik dari pewarnaan titik r -dinamis pada graf hasil operasi *edge comb product graph*.

Berdasarkan penelitian dihasilkan kardinalitasnya yaitu graf $C_m \supseteq W_3$, dimana $m = 2 \pmod{4}$, $m > 2$, memiliki kardinalitas $|V(C_m \supseteq W_3)| = p = 18m$ dan $|E(C_m \supseteq W_3)| = q = 30m$, graf $S_m \supseteq C_3$, dimana $m \geq 3$, memiliki kardinalitas $|V(S_m \supseteq C_3)| = p = 2m + 1$ dan $|E(S_m \supseteq C_3)| = q = 3m$, graf

$P_m \supseteq C_3$, dimana $m \geq 2$, memiliki kardinalitas $|V(P_m \supseteq C_3)| = p = m + 1$ dan $|E(P_m \supseteq C_3)| = q = m$, graf $L_{3m} \supseteq C_3$, dimana $m \geq 1$, S_m , memiliki kardinalitas $|V(L_{3m} \supseteq C_3)| = p = 15m - 2$ dan $|E(L_{3m} \supseteq C_3)| = q = 27m - 6$, $C_{6m} \supseteq C_3$, dimana $m \geq 1$, memiliki kardinalitas $|V(C_{6m} \supseteq C_3)| = p = 12m$ dan $|E(C_{6m} \supseteq C_3)| = q = 18m$, $C_{6m} \supseteq B_2$, dimana $m \geq 1$, memiliki kardinalitas $|V(C_{6m} \supseteq B_2)| = p = 18m$ dan $|E(C_{6m} \supseteq B_2)| = q = 30m$.

Teorema baru yang dihasilkan pada graf $C_m \supseteq W_3$, $m = 2 \pmod 4$, dan $m > 2$, $S_m \supseteq C_3$, $m \geq 3$, graf $P_m \supseteq C_3$, $m \geq 2$, graf $L_{3m} \supseteq C_3$, $m \geq 1$, graf $C_{6m} \supseteq C_3$, $m \geq 1$, dan graf $C_{6m} \supseteq B_2$, $m \geq 1$ adalah sebagai berikut:

- 1.) **Teorema 3.4.1** $C_m \supseteq W_3$, dimana $m = 2 \pmod 4$, $m > 2$, maka pewarnaan titik r -dinamis dari graf G adalah $\chi(C_m \supseteq W_3) = \chi_{1 \leq r \leq \delta}(C_m \supseteq W_3) = 4$, $\chi_{\delta+1 \leq r \leq \Delta-1}(C_m \supseteq W_3) = r + 1$, $\chi_{r \geq \Delta}(C_m \supseteq W_3) = \Delta + 1$.
- 2.) **Teorema 4.1.1** $S_m \supseteq C_3$, dimana $m \geq 3$, maka pewarnaan titik r -dinamis dari graf $S_m \supseteq C_3$ adalah $\chi(S_m \supseteq C_3) = \chi_{1 \leq r \leq \delta}(S_m \supseteq C_3) = 3$, $\chi_{\delta+1 \leq r \leq \Delta-1}(S_m \supseteq C_3) = r + 1$, $\chi_{r \geq \Delta}(S_m \supseteq C_3) = \Delta + 1$.
- 3.) **Teorema 4.1.2** Misalkan graf G merupakan graf hasil operasi dari $P_m \supseteq C_3$ dimana $m \geq 2$, $L_{3m} \supseteq C_3$ dimana $m \geq 1$, $C_{6m} \supseteq C_3$ dimana $m \geq 1$, dan $C_{6m} \supseteq B_2$ dimana $m \geq 1$, maka pewarnaan titik r -dinamis dari graf G atau graf hasil operasi tersebut adalah $\chi(G) = \chi_{1 \leq r \leq \delta}(G) = 3$, $\chi_{\delta+1 \leq r \leq \Delta-1}(G) = r + 1$, $\chi_{r \geq \Delta}(G) = \Delta + 1$.

Kaitan antara keterampilan berpikir tingkat tinggi dengan pewarnaan titik r -dinamis pada graf hasil operasi yaitu dalam mengidentifikasi famili graf, menentukan kardinalitas elemen pada graf hasil operasi *edge comb product* yang akan diterapkan pada pewarnaan titik, menerapkan dan menentukan pewarnaan titik r -dinamis pada *edge comb product graph*, menentukan pola nilai kromatik r -dinamis, menentukan fungsi pewarnaan r -dinamis serta mengevaluasi dalam membuktikan kebenaran fungsi, dan menemukan teorema baru.

1.Masalah Terbuka 4.3.1 Misalkan graf hasil operasi dari $B_2 \supseteq C_m$, tentukan nilai kromatik pewarnaan titik r -dinamis dari graf G untuk $m=2 \pmod 4$, $m > 2$.

DAFTAR ISI

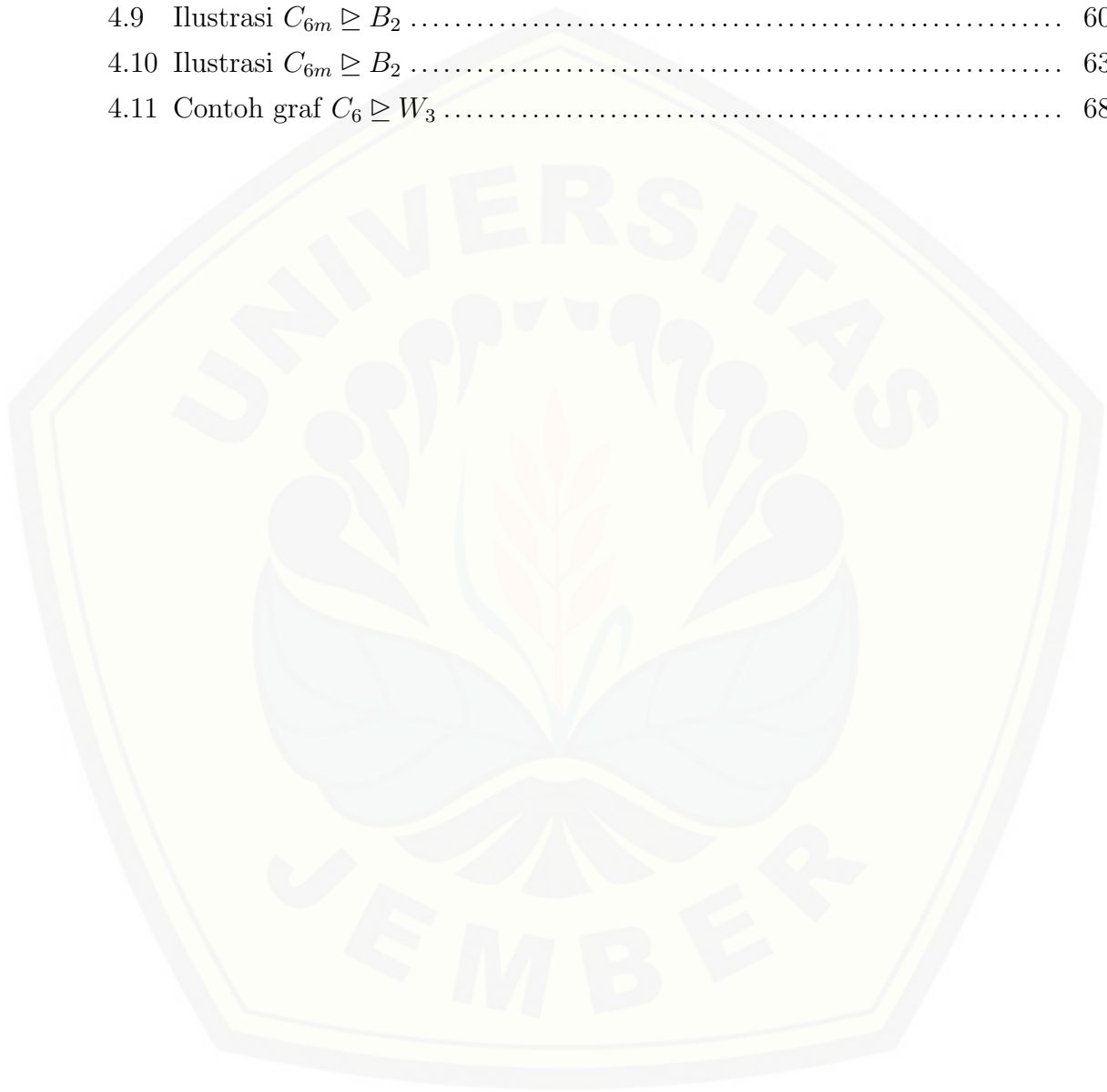
	Halaman
HALAMAN JUDUL	ii
HALAMAN PERSEMBAHAN	iii
HALAMAN MOTTO	v
HALAMAN PERNYATAAN	vi
HALAMAN PERSETUJUAN	viii
HALAMAN PENGESAHAN	ix
RINGKASAN	x
DAFTAR ISI	xii
DAFTAR GAMBAR	xiv
DAFTAR TABEL	xvi
DAFTAR LAMBANG	xviii
BAB 1.PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang Masalah.....	1
1.2 Rumusan Masalah	4
1.3 Batasan Masalah.....	4
1.4 Tujuan Penelitian.....	5
1.5 Manfaat Penelitian	5
1.6 Kebaharuan	6
BAB 2.TINJAUAN PUSTAKA	7
2.1 Terminologi Graf.....	7
2.2 Graf-graf Khusus.....	13
2.3 Operasi Graf Comb Sisi (<i>Edge Comb Graph</i>)	15
2.4 Pewarnaan Graf.....	16
2.4.1 Pewarnaan Titik (<i>Vertex Coloring</i>)	17
2.4.2 Pewarnaan Sisi (<i>Edge Coloring</i>).....	18
2.4.3 Pewarnaan Wilayah (<i>Region Coloring</i>)	18
2.5 Pewarnaan Titik <i>r</i> -dinamis	19
2.6 Fungsi	20

2.7	Keterampilan Berpikir Tingkat Tinggi	21
2.8	Hasil-Hasil Pewarnaan Titik	24
BAB 3.METODE PENELITIAN		26
3.1	Metode Penelitian	26
3.2	Definisi Operasional	26
3.2.1	Pewarnaan Titik r -Dinamis	26
3.2.2	Graf Operasi $(C_m \supseteq W_3)$ dimana $m = 2 \text{ mod } 4, m > 2$	27
3.3	Teknik Penelitian	28
3.4	Observasi	30
BAB 4.HASIL DAN PEMBAHASAN		35
4.1	Nilai Kromatik r -dinamis dan Fungsi Pewarnaan Titik r -dinamis.....	35
4.2	Berpikir Tingkat Tinggi dalam menentukan Pewarnaan Titik r -Dinamis pada Graf Hasil Operasi <i>Edge Comb</i> <i>Product Graph</i>	64
4.2.1	Tahap Mengingat.....	66
4.2.2	Tahap Memahami	67
4.2.3	Tahap Menerapkan	67
4.2.4	Tahap Menganalisis	69
4.2.5	Tahap Mengevaluasi	70
4.2.6	Mencipta.....	70
4.3	Pembahasan	71
BAB 5.KESIMPULAN DAN SARAN		74
5.1	Kesimpulan.....	74
5.2	Saran	75
DAFTAR PUSTAKA		77

DAFTAR GAMBAR

	Halaman
2.1 Contoh Penomoran graf pada G_1 , G_2 , dan G_3	7
2.2 G_1 tidak memiliki loop, dan G_2 memiliki loop	8
2.3 (a) contoh graf G dan (b) titik terisolasi	10
2.4 Graf Berarah	11
2.5 Graf tak Berarah	11
2.6 (a) Graf Sederhana dan (b) Graf tak Sederhana	11
2.7 (a) Graf Berhingga dan (b) Graf tak Hingga	12
2.8 (a) Graf Terhubung dan (b) Graf tak Terhubung	12
2.9 Graf Buku $B_{2,3}$	13
2.10 (a) Graf bintang S_8 dan (b) Graf roda W_4	14
2.11 (a) Graf sikel C_6 dan (b) Graf tangga L_5	14
2.12 (a) Graf Kipas $F_{3,2}$, dan (b) Graf lintasan P_4	15
2.13 Graf comb sisi pada $C_4 \supseteq C_3$	16
2.14 pewarnaan titik pada graf G_1 dan G_2	17
2.15 pewarnaan sisi pada graf G_1 dan G_2	18
2.16 pewarnaan wilayah pada graf	19
2.17 contoh pewarnaan titik 1,2-dinamis pada graf p_7	20
2.18 contoh fungsi (a) injektif, (b) surjektif, dan (c) bijektif	22
2.19 Tahapan Taksonomi Bloom sebelum dan sesudah revisi	23
3.1 contoh pewarnaan titik r -dinamis pada graf $C_6 \supseteq W_3$	27
3.2 Rancangan Penelitian	29
3.3 observasi graf $C_6 \supseteq W_3$ untuk $1 \leq r \leq \delta$ -dinamis	32
3.4 observasi graf $C_6 \supseteq W_3$ untuk $\delta + 1 \leq r \leq \Delta - 1$ -dinamis	32
3.5 observasi graf $C_6 \supseteq W_3$ untuk r -dinamis	33
4.1 Ilustrasi $S_4 \supseteq C_3$	37
4.2 Ilustrasi $S_4 \supseteq C_3$	39
4.3 Ilustrasi $P_4 \supseteq C_3$	42

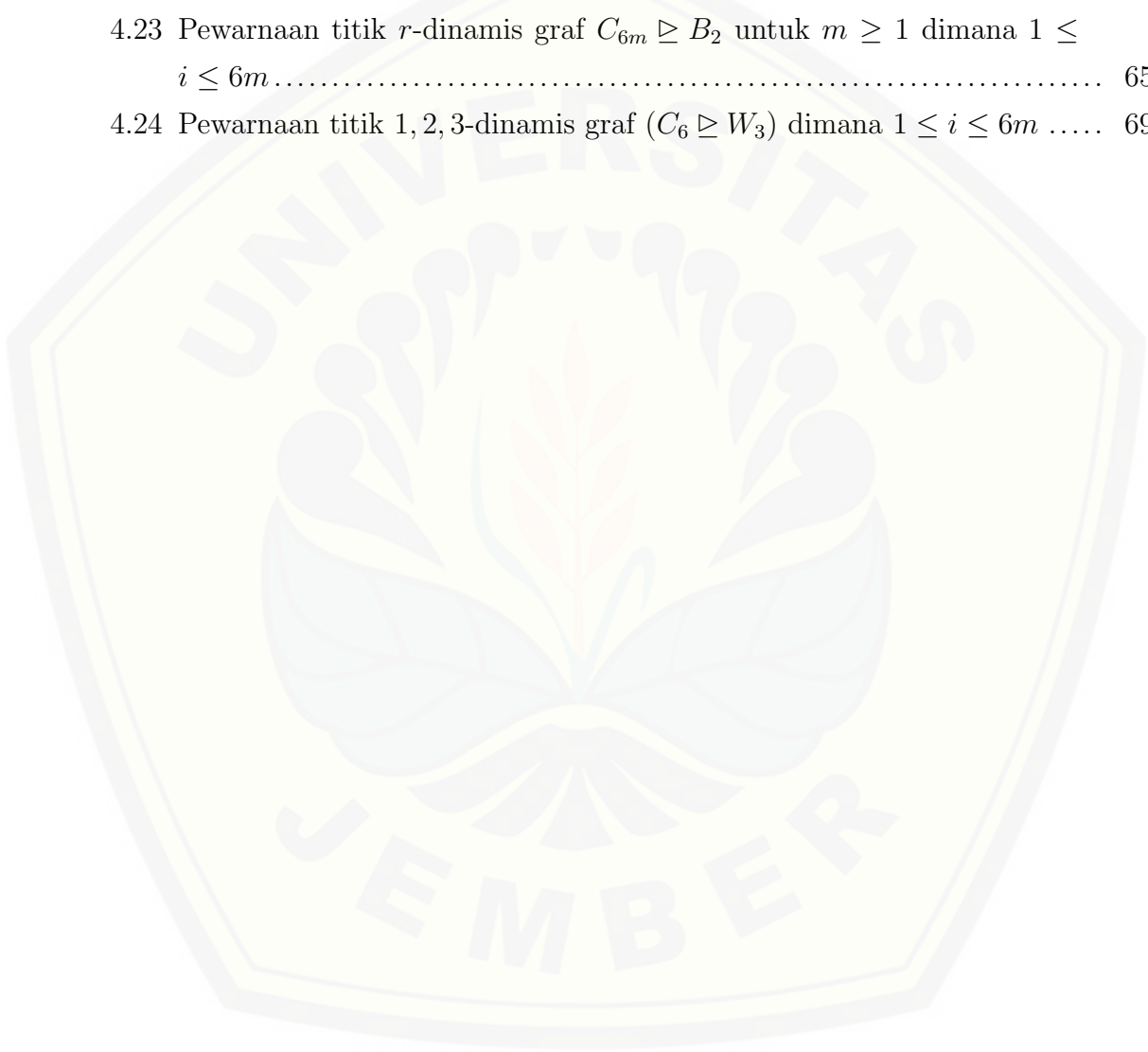
4.4	Ilustrasi $P_4 \supseteq C_3$	45
4.5	Ilustrasi $L_6 \supseteq C_3$	47
4.6	Ilustrasi $L_{3m} \supseteq C_3$	51
4.7	Ilustrasi $C_{6m} \supseteq C_3$	55
4.8	Ilustrasi $C_{6m} \supseteq C_3$	58
4.9	Ilustrasi $C_{6m} \supseteq B_2$	60
4.10	Ilustrasi $C_{6m} \supseteq B_2$	63
4.11	Contoh graf $C_6 \supseteq W_3$	68



DAFTAR TABEL

	Halaman
2.1 Pewarnaan titik 2-dinamis graf p_7	21
2.2 Hasil Pewarnaan Titik r -dinamis Penelitian Sebelumnya.....	25
3.1 Pewarnaan titik 1, 2, 3-dinamis graf $(C_6 \supseteq W_3)$ dimana $1 \leq i \leq 6m$	33
3.2 Pewarnaan titik 4-dinamis graf $(C_6 \supseteq W_3)$ dimana $1 \leq i \leq 6m$	33
3.3 Pewarnaan titik 5-dinamis graf $(C_6 \supseteq W_3)$ dimana $1 \leq i \leq 6m$	34
3.4 Pewarnaan titik r -dinamis graf $(C_6 \supseteq W_3)$ dimana $1 \leq i \leq 6m$	34
4.1 Pewarnaan titik 1, 2-dinamis graf $S_5 \supseteq C_3$, dimana $i = 1 \leq i \leq m$	40
4.2 Pewarnaan titik 3-dinamis graf $S_5 \supseteq C_3$, dimana $i = 1 \leq i \leq m$	40
4.3 Pewarnaan titik 4-dinamis graf $S_5 \supseteq C_3$, dimana $i = 1 \leq i \leq m$	40
4.4 Pewarnaan titik 5-dinamis graf $S_5 \supseteq C_3$, dimana $i = 1 \leq i \leq m$	40
4.5 Pewarnaan titik 6-dinamis graf $S_5 \supseteq C_3$, dimana $i = 1 \leq i \leq m$	40
4.6 Pewarnaan titik 7-dinamis graf $S_5 \supseteq C_3$, dimana $i = 1 \leq i \leq m$	41
4.7 Pewarnaan titik r -dinamis graf $S_5 \supseteq C_3$, dimana $i = 1 \leq i \leq m$	41
4.8 Pewarnaan titik 1, 2-dinamis graf $P_4 \supseteq C_3$, dimana $i = 2 \leq i \leq m$	45
4.9 Pewarnaan titik 3-dinamis graf $P_4 \supseteq C_3$, dimana $1 \leq i \leq m$	46
4.10 Pewarnaan titik r -dinamis graf $P_4 \supseteq C_3$ dimana $i = 1 \leq i \leq m$	46
4.11 Pewarnaan titik 1, 2-dinamis graf $L_{3m} \supseteq C_3$ untuk $m \geq 1$ dimana $2 \leq$ $i \leq 6m, 1 \leq j \leq 6m$ dan $1 \leq k \leq 6m - 1$	52
4.12 Pewarnaan titik 3-dinamis graf $L_{3m} \supseteq C_3$ untuk $m \geq 1$ dimana $2 \leq$ $i \leq 6m, 1 \leq j \leq 6m$ dan $1 \leq k \leq 6m - 1$	52
4.13 Pewarnaan titik 4-dinamis graf $L_{3m} \supseteq C_3$ untuk $m \geq 1$ dimana $1 \leq$ $i \leq 6m - 1$, dan $1 \leq j \leq 6m$	53
4.14 Pewarnaan titik 5-dinamis graf $L_{3m} \supseteq C_3$ untuk $m \geq 1$ dimana $1 \leq$ $i \leq 6m - 1$, dan $1 \leq j \leq 6m$	53
4.15 Pewarnaan titik r -dinamis graf $L_{3m} \supseteq C_3$ untuk $m \geq 1$ dimana $1 \leq i \leq 6m$	54
4.16 Pewarnaan titik 1, 2-dinamis graf $C_{6m} \supseteq C_3$ dimana $1 \leq i \leq 6m$	58
4.17 Pewarnaan titik 3-dinamis graf $C_{6m} \supseteq C_3$ dimana $1 \leq i \leq 6m$	59

4.18	Pewarnaan titik r -dinamis graf $C_{6m} \supseteq C_3$ dimana $1 \leq i \leq 6m$	59
4.19	Pewarnaan titik 1,2-dinamis graf $C_{6m} \supseteq B_2$ untuk $m \geq 1$ dimana $\leq i \leq 6m$	64
4.20	Pewarnaan titik 3-dinamis graf $C_{6m} \supseteq B_2$ untuk $m \geq 1$ dimana $\leq i \leq 6m$	64
4.21	Pewarnaan titik 4-dinamis graf $C_{6m} \supseteq B_2$ untuk $m \geq 1$ dimana $\leq i \leq 6m$	64
4.22	Pewarnaan titik 5-dinamis graf $C_{6m} \supseteq B_2$ untuk $m \geq 1$ dimana $i= 1 \pmod 3, j= 2 \pmod 3, \text{ dan } k= 0 \pmod 3$	65
4.23	Pewarnaan titik r -dinamis graf $C_{6m} \supseteq B_2$ untuk $m \geq 1$ dimana $1 \leq i \leq 6m$	65
4.24	Pewarnaan titik 1,2,3-dinamis graf $(C_6 \supseteq W_3)$ dimana $1 \leq i \leq 6m$	69



DAFTAR LAMBANG

G	=	Graf G
$G(V, E)$	=	Sebarang graf tak berarah dengan V adalah himpunan tak kosong dari semua titik dan E adalah himpunan sisi
$V(G)$	=	Himpunan titik graf G
$E(G)$	=	Himpunan sisi graf G
v_n	=	Titik ke- n pada suatu graf
e_n	=	Sisi ke- n dari suatu graf
$d(u, v)$	=	Jarak dari titik u ke v
$\Delta(G)$	=	Derajat titik maksimum dari graf G
$\delta(G)$	=	Derajat titik minimum dari graf G
$\chi(G)$	=	Bilangan kromatik pada graf G
$\chi^r(G)$	=	Bilangan kromatik r -dinamis pada graf G
$G \supseteq H$	=	Operasi graf <i>Edge Comb Product Graph</i>
$c(v)$	=	pewarnaan pada titik
$ c(N(v)) $	=	banyak pewarnaan pada titik
$d(v)$	=	derajat pada titik v
r	=	parameter
$N(v)$	=	Himpunan ketetanggaan pada suatu titik v
$d(v)$	=	Derajat dari suatu titik v

BAB 1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Ilmu Pengetahuan dan Teknologi dalam kehidupan sehari-hari selalu mengalami perkembangan yang sangat pesat. Ilmu Pengetahuan dan Teknologi yang berkembang dalam masyarakat merupakan hasil karya dari pemikiran seseorang ataupun sekumpulan orang yang berupaya untuk menyelesaikan permasalahan yang ada dalam lingkungan sekitar. Permasalahan yang dihadapi seorang individu atau kelompok membutuhkan waktu yang tidak singkat, dalam hal ini seseorang perlu melakukan serangkaian ide atau proses berfikir untuk menyelesaikan masalah tersebut. Santrock (2008: 357), berfikir adalah memanipulasi atau me-ngola dan mentransformasikan informasi dalam memori. Umumnya dalam sehari, seorang individu akan melakukan proses berfikir dengan cara yang berbeda-beda bisa dengan cara berbicara sendiri, ataupun merenungkan bagaimana cara yang tepat untuk keluar dari masalah yang dihadapi.

Berpikir yang dilakukan seseorang akan membuat dirinya mempunyai banyak pengalaman dalam menyelesaikan sesuatu dan mempunyai banyak keterampilan berfikir dalam menyelesaikan masalah yang sedang atau yang akan terjadi. Proses berfikir seorang individu ketika dihadapkan suatu masalah akan memiliki banyak cara agar dapat keluar dari masalah yang dihadapi, dalam hal ini keterampilan berfikir seseorang sangat berbeda tergantung bagaimana keterampilan berfikir yang dimiliki setiap individu. Keterampilan berfikir bisa didapat dari banyaknya pengalaman yang seseorang lakukan, semakin banyak pengalaman untuk menyelesaikan masalah, maka keterampilan berfikirnya akan jauh lebih bagus dibandingkan dengan seorang individu yang mempunyai sedikit pengalaman dalam hal menyelesaikan masalah.

Keterampilan berfikir tingkat tinggi termasuk dalam ranah kognitif yang merupakan bagian dari taksonomi bloom revisi. Ranah kognitif terdiri dari enam

tingkatan yaitu (1) *knowledge* (pengetahuan), (2) *comprehension* (pemahaman atau persepsi), (3) *application* (penerapan), (4) *analysis* (penguraian atau penjabaran), (5) *synthesis* (pemaduan), (6) *evaluation* (penilaian). Keterampilan berpikir tingkat tinggi digunakan untuk semua jenis ilmu pengetahuan termasuk matematika. Matematika terdiri dari beberapa cabang ilmu, misalnya Logika, Geometri, Aljabar, Statistika, Matematika Ekonomi, Matematika Diskrit, Sains Komputer dan lain sebagainya. Salah satu cabang matematika yang cukup terkenal saat ini terkait sains komputer yaitu Matematika diskrit. Aplikasi dari matematika diskrit yang digunakan dalam sains komputer salah satunya yaitu teori graf.

Teori graf dikenalkan oleh Leonard Euler seorang matematikawan Swiss pada tahun 1736 yang berhasil menyelesaikan masalah yang terjadi pada jembatan Königsberg. Permasalahan ini muncul ketika penduduk kota menginginkan untuk menyeberangi jembatan Königsberg tepat satu kali dari tempat berangkat hingga kembali ke tempat awal keberangkatan. Pada permasalahan tersebut, Euler memodelkannya menggunakan graf yaitu mempresentasikan lokasi daratan yang menghubungkan jembatan-jembatan dengan simpul atau *vertex*, dan tiap jembatan dipresentasikan dengan sisi atau *edge*. Hasil penelitian yaitu perjalanan seseorang tidak mungkin dapat melintasi ketujuh jembatan masing-masing satu kali dan kembali ke tempat awal keberangkatan.

Saat ini teori graf mulai banyak mengalami perkembangan, salah satu topik yang menarik untuk dibahas yaitu mengenai pewarnaan. Pewarnaan graf terdapat 3 macam, yaitu pewarnaan titik, pewarnaan sisi, dan pewarnaan wilayah. Penggunaan warna yang berbeda dalam mewarnai semua titik yang terdapat pada graf yaitu setiap dua titik yang saling terhubung dengan sisi /*edge* akan diberi warna yang berbeda, hal ini biasa disebut dengan pewarnaan titik. Perlu diketahui bahwa saat pemberian warna pada titik tidak hanya sekedar memberi warna, namun harus menghasilkan banyaknya warna minimum yang didapatkan, atau biasa disebut dengan bilangan kromatik yang dinotasikan dengan χG . Fungsi pewarnaan juga ditentukan dari keteraturan pada bilangan

kromatik. Saat ini terdapat *r-Dynamic Vertex Coloring* yang masih dalam hal pewarnaan titik atau disebut juga dengan pewarnaan titik dinamis, dan masih memiliki sifat yang sama pada pewarnaan titik yang di notasikan dengan χG .

Pewarnaan titik telah banyak diteliti, diantaranya Lai and Montgomery (2002) melakukan penelitian pada graf Particular dan Lu (2013) melakukan penelitian pewarnaan titik pada graf bipartit. Kaiser (2014) meneliti tentang pewarnaan titik pada graf pesawat (*Plane Graph*). Harsya et al. (2014) mengembangkan pewarnaan titik pada operasi graf sikel dengan graf lintasan. Irwanto dan Dafik (2014) menentukan bilangan kromatik pada graf roda untuk $n \leq 5$, graf helm H_n dengan $n \leq 4$, graf anti prisma H_m untuk $m \leq 4$, graf prisma untuk H_n , $n \leq 4$, dan graf kipas F_n untuk $n \leq 4$. Tahun 2015 Wulandari et al menganalisis *r-Dynamic Vertex Coloring* pada hasil operasi graf khusus.

Berdasarkan uraian hasil-hasil penelitian yang telah dilakukan oleh para peneliti sebelumnya, maka penulis akan melakukan penelitian lebih lanjut mengenai pewarnaan titik r-dinamis pada beberapa graf hasil operasi *Edge Comb Product Graph*. *Edge Comb Product Graph* dibangun dari dua graf khusus misalnya graf G dan graf H , G comb sisi H yaitu dengan mengambil satu salinan graf G dan graf H sebanyak jumlah sisi pada graf G dan melekatkan satu sisi pada graf H dari setiap salinan graf H ke setiap sisi graf G sehingga akan membentuk suatu graf *Edge Comb Product Graph* dengan simbol $G \triangleright H$. Graf khusus yang digunakan yaitu graf bintang (*Star Graph*), graf roda (*Wheel Graph*), graf sikel (*Cycle*), graf lintasan *Path*, graf tangga *Ladder* dan graf buku (*Book Graph*). Sehingga diperlukan nilai kromatik dan fungsi pewarnaan titik dalam menyelesaikannya. Hasil operasi dari beberapa graf dicari pewarnaan titik dinamisnya, sehingga mendapatkan nilai kromatik titik dinamis. Selain itu akan diterapkan tahapan-tahapan Taksonomi Bloom yang telah direvisi hingga mencapai pada tingkat berfikir tingkat tinggi. Oleh karena itu, pada penelitian ini penulis memilih judul "**Pewarnaan Titik *r*-Dinamis pada Graf Hasil Operasi *Edge Comb Product Graph* dan Kaitannya dengan Keterampilan Berpikir Tingkat Tinggi**".

1.2 Rumusan Masalah

Menurut latar belakang tersebut, maka dapat dirumuskan masalah dalam penelitian ini yaitu:

- 1.) berapa kardinalitas elemen dari graf hasil operasi *Edge Comb Product Graph* ($C_m \supseteq W_3$) untuk $m=2 \text{ mod } 4, m > 2$, ($S_m \supseteq C_3$) untuk $m \geq 3$, ($P_m \supseteq C_3$) untuk $m \geq 2$, ($L_{3m} \supseteq C_3$) untuk $m \geq 1$, ($C_{6m} \supseteq C_3$) untuk $m \geq 1$, dan ($C_{6m} \supseteq B_2$) untuk $m \geq 1$?
- 2.) bagaimana nilai kromatik pewarnaan titik r -dinamis pada graf hasil operasi *Edge Comb Product Graph* ($C_m \supseteq W_3$) untuk $m=2 \text{ mod } 4, m > 2$, ($S_m \supseteq C_3$) untuk $m \geq 3$, ($P_m \supseteq C_3$) untuk $m \geq 2$, ($L_{3m} \supseteq C_3$) untuk $m \geq 1$, ($C_{6m} \supseteq C_3$) untuk $m \geq 1$, dan ($C_{6m} \supseteq B_2$) untuk $m \geq 1$?
- 3.) bagaimana keterkaitan antara pewarnaan titik r -Dinamis pada hasil operasi *Edge Comb Product Graph* dalam mengasah keterampilan berpikir tingkat tinggi?

1.3 Batasan Masalah

Penelitian ini memiliki batasan masalah guna untuk menghindari meluasnya pemecahan masalah, antara lain:

- 1.) pada graf tidak berarah dan konektif;
- 2.) graf khusus yang dioperasikan adalah graf roda (W_3), Graf Sikel (C_3) dan (C_{6m}), graf bintang (S_m), graf tangga (L_{3m}), graf lintasan (P_m) dan graf buku (B_2);
- 3.) operasi Graph yang digunakan yaitu *Edge Comb Product Graph* ($G \supseteq C_3$), dan ($C \supseteq H$);
- 4.) menggunakan taksonomi bloom yang telah direvisi.

1.4 Tujuan Penelitian

Sesuai dengan rumusan masalah dan latar belakang diatas, maka tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

- 1.) menentukan kardinalitas pewarnaan titik r -Dinamis pada graf hasil operasi *Edge Comb Product Graph* ($C_m \supseteq W_3$) untuk $m=2 \bmod 4$, $m > 2$, ($S_m \supseteq C_3$) untuk $m \geq 3$, ($P_m \supseteq C_3$) untuk $m \geq 2$, ($L_{3m} \supseteq C_3$) untuk $m \geq 1$, ($C_{6m} \supseteq C_3$) untuk $m \geq 1$, dan ($C_{6m} \supseteq B_2$) untuk $m \geq 1$;
- 2.) menentukan pewarnaan titik r -Dinamis pada graf hasil operasi *Edge Comb Product Graph* ($C_m \supseteq W_3$) untuk $m=2 \bmod 4$, $m > 2$, ($S_m \supseteq C_3$) untuk $m \geq 3$, ($P_m \supseteq C_3$) untuk $m \geq 2$, ($L_{3m} \supseteq C_3$) untuk $m \geq 1$, ($C_{6m} \supseteq C_3$) untuk $m \geq 1$, dan ($C_{6m} \supseteq B_2$) untuk $m \geq 1$;
- 3.) mengetahui keterkaitan antara pewarnaan titik r -Dinamis pada graf hasil operasi *Edge Comb Product Graph* dalam mengasah keterampilan berpikir tingkat tinggi.

1.5 Manfaat Penelitian

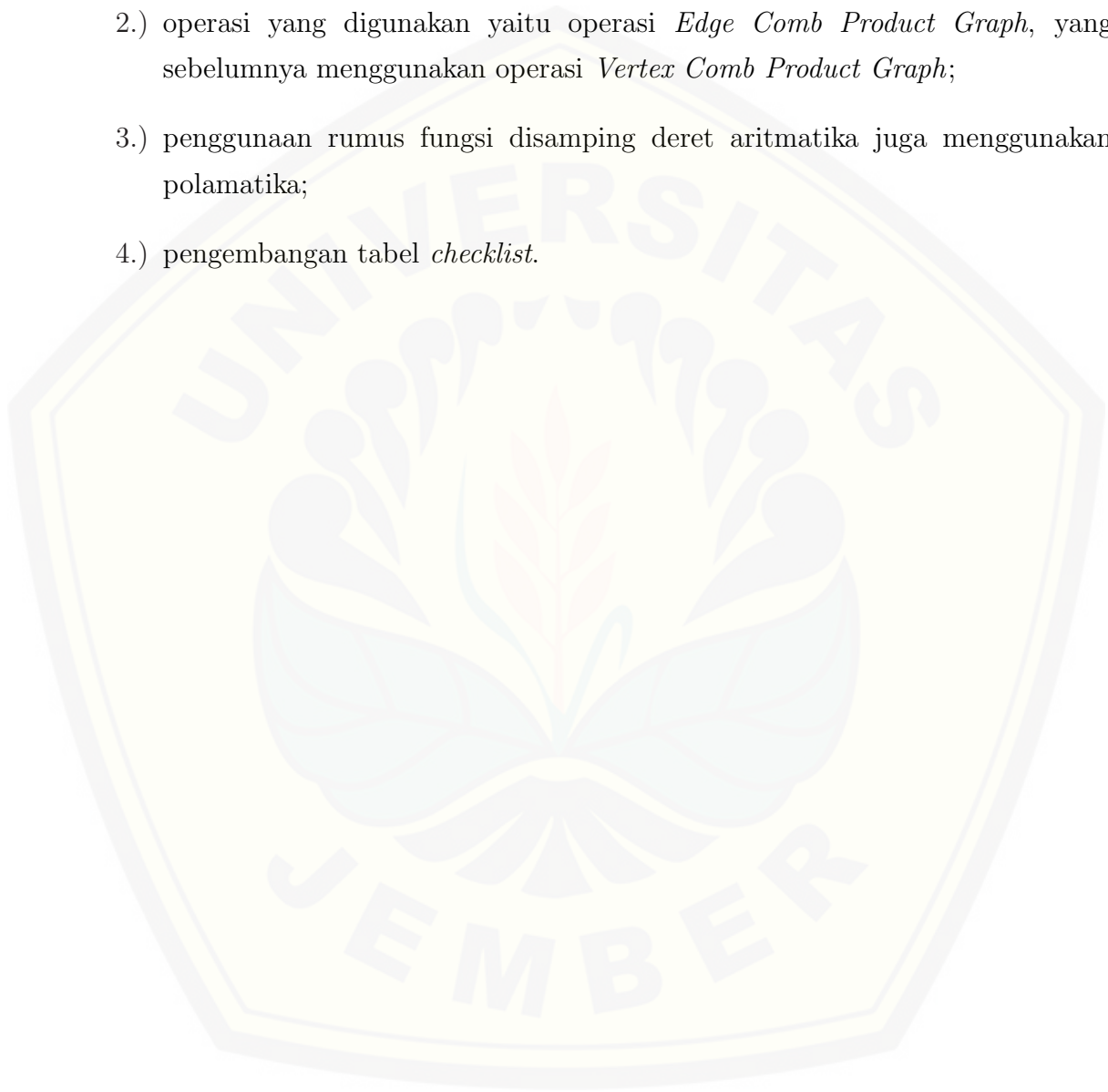
Manfaat yang diharapkan dari hasil penelitian ini antara lain:

- 1.) meningkatkan pemahaman mengenai graf hasil operasi *Edge Comb Product Graph*;
- 2.) meningkatkan pengetahuan baru dalam hal pewarnaan titik r -dinamis pada graf hasil operasi *Edge Comb Product Graph*;
- 3.) memotivasi pada peneliti lain untuk memperluas penelitian tentang pewarnaan titik menggunakan *r-dynamic coloring* pada graf hasil operasi *Edge Comb Product Graph*;
- 4.) hasil dari penelitian ini diharapkan dapat digunakan sebagai pengembangan ilmu dan aplikasi dalam masalah pewarnaan titik.

1.6 Kebaharuan

Adapun kebaruan penelitian ini dari penelitian sebelumnya adalah:

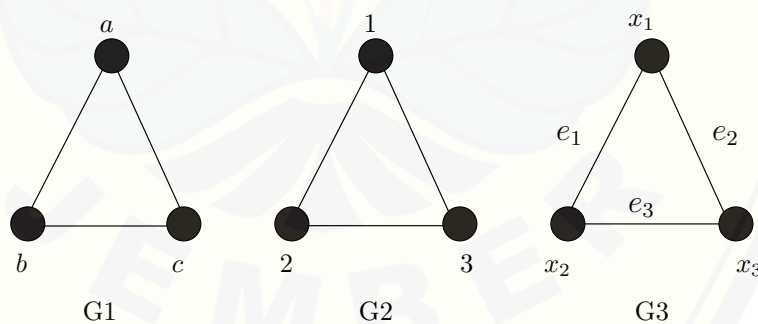
- 1.) penelitian pewarnaan titik sebelumnya hanya terfokus pada pewarnaan biasa yaitu $r = 1$; sedangkan dalam penelitian ini akan dikembangkan untuk $r \geq 1$;
- 2.) operasi yang digunakan yaitu operasi *Edge Comb Product Graph*, yang sebelumnya menggunakan operasi *Vertex Comb Product Graph*;
- 3.) penggunaan rumus fungsi disamping deret aritmatika juga menggunakan polamatika;
- 4.) pengembangan tabel *checklist*.



BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Terminologi Graf

Sebuah graf G merupakan himpunan $(V(G), E(G))$, dimana $V(G)$ adalah himpunan berhingga tak kosong dari elemen yang disebut titik, dan $E(G)$ adalah sebuah himpunan (boleh kosong) dari pasangan tak terurut (u, v) dari titik $(u, v) \in V(G)$ yang disebut sisi. $V(G)$ disebut himpunan titik dari G dan $E(G)$ disebut himpunan sisi dari G (Slamin, 2009). Penjelasan diatas menyatakan bahwa pada sebuah graf dilambangkan dengan $G = (V, E)$ yang didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E) , V merupakan himpunan titik atau *vertex* tidak boleh kosong $v = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$, namun pada E yang merupakan himpunan sisi atau *edges* boleh kosong yang menghubungkan sepasang titik $(e) = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_n\}$. Maka dapat diketahui bahwa sebuah graf dimungkinkan bisa tidak memiliki sisi, namun harus memiliki titik atau minimal satu titik. *Vertex* biasa digambarkan dengan sebuah titik atau node, dan pada sebuah graf sebuah *vertex* dapat diberi nomor dengan huruf, angka, ataupun dengan huruf dan angka. Lihat pada gambar 2.1.

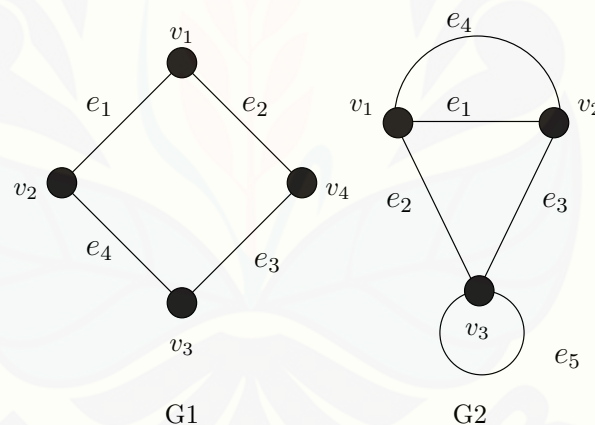


Gambar 2.1 Contoh Penomoran graf pada G1, G2, dan G3

Pada gambar 2.1, Graf $G1$ adalah graf dengan titik/*vertex* $V = a, b, c$ de-ngan sisi/*edge* $E = \{(a, b), (b, c), (a, c)\}$, untuk graf $G2$ yaitu dengan

titik/*vertex* $V = \{1, 2, 3\}$ dengan sisi/*edge* $E = \{(1, 2), (2, 3), (1, 3)\}$, sedangkan untuk graf G_3 yaitu dengan titik/*vertex* $V = \{x_1, x_2, x_3\}$ dan sisi/*edge* $E = \{(x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_1, x_3)\}$ atau bisa ditulis dengan $E = \{e_1, e_2, e_3\}$. Suatu sisi pada sebuah graf yang menghubungkan suatu titik ke dirinya sendiri disebut loop atau *self loop* (Vasudev, 2006:4).

Loop merupakan garis atau sisi yang menghubungkan dengan satu titik ke dirinya sendiri yaitu (v_i, v_i) dan dua atau lebih sisi yang menghubungkan pasangan titik yang sama disebut dengan garis paralel (*multiple edges*). Pada gambar 2.2 dapat dilihat, bahwa gambar G_1 tidak memiliki *loop* ataupun *edge paralel*. Pada gambar 2.2, bahwa gambar G_2 memiliki loop pada e_5 dan terdapat garis atau sisi (*edges*) paralel yaitu e_1, e_4 . Jika sebuah graf G tidak memiliki *multiple edges* dan *loop* maka graf tersebut dinamakan dengan graf sederhana, dan apabila sebuah graf G memiliki sisi *multiple* namun tidak memiliki loop maka dinamakan multigraph, sedangkan sebuah graf G yang memiliki sisi *loop* dan *multiple* disebut *pseudograph*.



Gambar 2.2 G_1 tidak memiliki loop, dan G_2 memiliki loop

Misalkan pada graf G terdapat titik (*vertex*) v_i dan v_j , kedua titik yang ada pada graf G dikatakan berdekatan/bertetangga/*adjacent* jika kedua titik tersebut terhubung langsung dengan satu sisi, atau bisa dinotasikan dengan $e = (v_i, v_j) \in E(G)$. Pada suatu graf G dengan $(v_i, v_j) \in V(G)$ jika $e = (v_i, v_j) \in E(G)$ sehingga e bersisian/ *incident* dengan titik v_i atau e insiden dengan v_j .

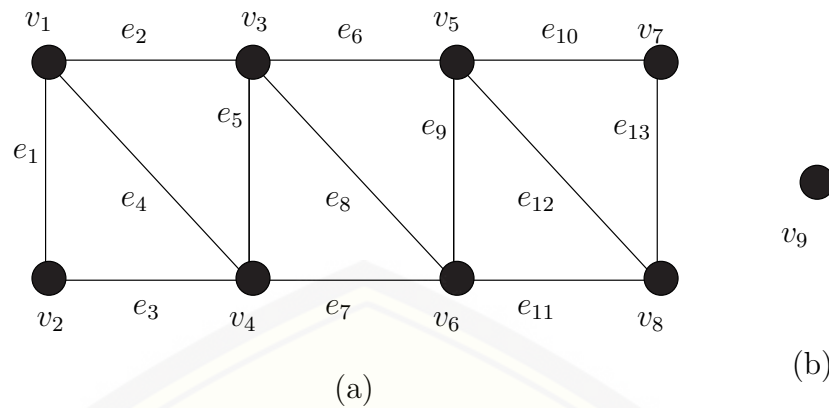
Pada gambar 2.2 graf G_1 , titik v_1 dan v_2 merupakan titik yang berdekatan, namun untuk titik v_2 dan v_4 bukan titik yang berdekatan. Sisi e_1 insiden dengan titik v_1 dan v_2 , namun tidak terdapat sisi yang insiden dengan titik v_2 dan v_4 , begitupula dengan titik v_1 dan v_3 .

Jarak $d(u, v)$ atau $dist(u, v)$ antara dua titik u dan v pada graf G merupakan panjang lintasan suatu *walk* yang semua titiknya berlainan dan mempunyai lintasan terpendek dari titik u ke v . Jika tidak terdapat lintasan dari titik u ke v , maka didefinisikan jarak $d(u, v) = \infty$. Sebagai contoh gambar 2.3 jarak v_1 ke v_6 adalah 2. Diameter pada sebuah graf G merupakan jarak maksimum dari sebarang dua titik, dan untuk panjang sikel terpendek yaitu *girth*. Diameter dari graf G pada gambar 2.3 adalah 3 dan *girth* adalah 4.

Derajat (*degree*) sebuah titik v pada sebuah graf G ditulis dengan $der(v)$ yaitu banyaknya sisi yang insiden pada v , dengan demikian banyak sisi yang memuat v sebagai titik ujung. Sebuah titik yang mempunyai derajat 0 (nol) disebut titik terisolasi (*isolated vertex*), sebagai contoh pada gambar 2.3 pada v_9 . Derajat minimal pada suatu graf G dinotasikan dengan δ , sedangkan derajat maksimal pada graf G dinotasikan dengan Δ . Pada gambar 2.3, $der(v_3) = 4$, $der(v_7) = 2$, $der(v_9) = 0$.

Endpoint merupakan dua titik pada graf yang mana dua buah titik tersebut saling berdekatan, jika sebuah sisi insiden terhadap dua buah titik itu. Sehingga kedua titik tersebut dinamakan *endpoint*. Pada gambar 2.3, graf G_1 , titik v_1 dan v_2 merupakan *endpoint* dari sisi e_1 atau juga titik v_1 dan v_2 merupakan titik yang berdekatan, begitupula dengan sisi e_8 insiden dengan titik v_3 dan v_6 sehingga titik v_3 dan v_6 juga merupakan *endpoint*, sedangkan titik v_1 dan v_5 bukan titik yang berdekatan.

Lintasan dari suatu titik ke titik yang lain *Walk* adalah barisan berhingga dari titik dan sisi secara bergantian dari titik-titik dan sisi-sisi pada sebuah graf atau dimulai dan diakhiri oleh titik, sehingga setiap sisi hanya dilalui satu kali. Pada sebuah graf, *walk* dapat terjadi untuk satu titik dilalui lebih dari satu kali. Pada *walk* yang memiliki titik awal yang sama dengan titik akhirnya, *walk* tersebut dinamakan *closed walk* (jalan tutup). Sedangkan, jika titik awal dan

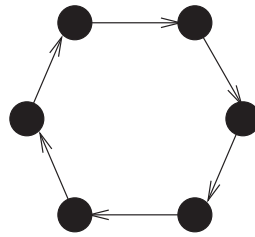
Gambar 2.3 (a) contoh graf G dan (b) titik terisolasi

titik akhirnya berbeda, maka *walk* tersebut disebut *open walk* (jalan terbuka).

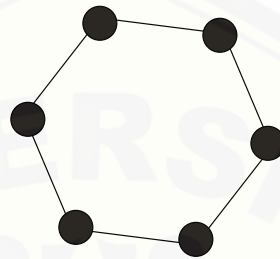
Walk yang semua sisinya berlainan dinamakan *trail*, untuk *trail* dengan simpul awal dan simpul akhir sama merupakan *trail* tertutup. Panjang path merupakan banyaknya sisi pada lintasan sebuah graf. Path yang memiliki titik awal sama dengan titik akhir merupakan path tertutup atau biasa dinamakan dengan *cycle*, sedangkan *path* yang memiliki titik awal dan akhir tidak sama maka disebut *open path* (lintasan terbuka).

Graf terdiri dari berbagai jenis, diantaranya diklasifikasikan berdasarkan orientasi arah, ada tidaknya loop ataupun sisi ganda, jumlah titik, dan titik yang terhubung:

1. Berdasarkan orientasi arah:
 - a. Graf berarah (*direct graph*) adalah graf yang setiap sisinya diberikan orientasi arah. Contoh Graf berarah lihat pada gambar 2.4
 - b. Graf tak berarah (*undirect graph*) adalah graf yang sisinya tidak mempunyai orientasi arah. Contoh Graf berarah lihat pada gambar 2.5
2. Berdasarkan ada tidaknya loop ataupun sisi ganda:
 - a. Graf sederhana (*simple graph*) adalah graf yang tidak mengandung loop ataupun sisi ganda. Contoh pada gambar 2.6

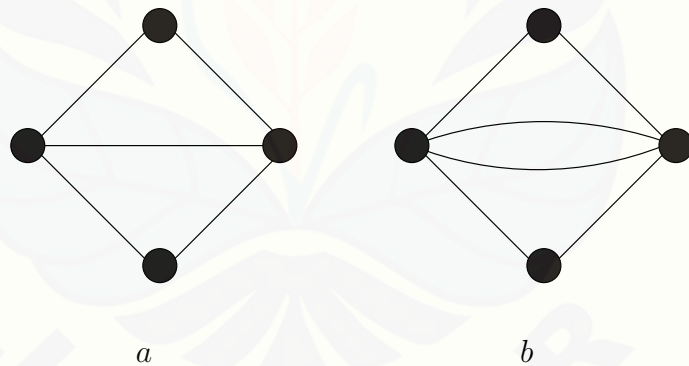


Gambar 2.4 Graf Berarah



Gambar 2.5 Graf tak Berarah

- b. Graf tak sederhana (*unsimple graph*) adalah graf yang mengandung loop ataupun sisi ganda. Contoh pada gambar 2.6

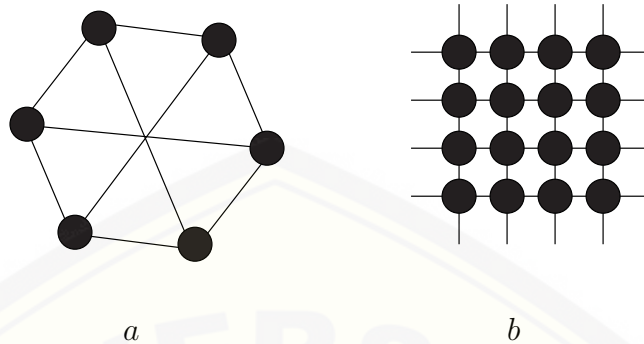


Gambar 2.6 (a) Graf Sederhana dan (b) Graf tak Sederhana

3. Berdasarkan jumlah titik:

- a. Graf berhingga (*limited graph*) adalah graf yang jumlah titiknya berhingga. Contoh pada gambar 2.7

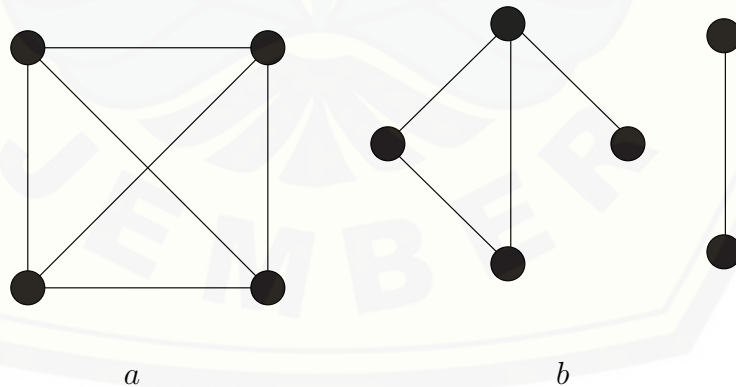
- b. Graf tak berhingga (*unlimited graph*) adalah graf yang jumlah titiknya tidak berhingga. Contoh pada gambar 2.7



Gambar 2.7 (a) Graf Berhingga dan (b) Graf tak Hingga

4. Berdasarkan jumlah titik yang terhubung:

- a. Suatu graf terhubung (*connected graph*), yaitu jika setiap pasang titik v_i dan v_j di dalam himpunan V terdapat path dari v_i ke v_j . Contoh graf terhubung adalah graf pada gambar 2.8
- b. Graf G dikatakan tak terhubung jika ada minimal dua titik yang berbeda v_i dan v_j di G , sehingga tidak terdapat lintasan dari v_i ke v_j . Contoh graf tak terhubung pada gambar 2.8



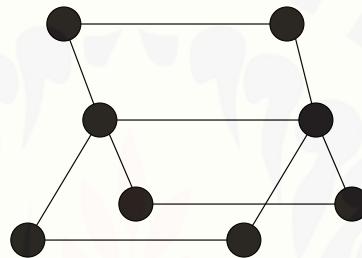
Gambar 2.8 (a) Graf Terhubung dan (b) Graf tak Terhubung

2.2 Graf-graf Khusus

Graf khusus adalah sebuah graf yang memiliki karakteristik dan keunikan. Keunikan pada graf khusus yaitu tidak isomorfis dengan graf lainnya. Sedangkan karakteristik bentuk pada graf khusus memperluas order n tetapi simetri. Berikut ini adalah beberapa contoh graf khusus.

a. Graf Buku (*Book Graph*)

Graf buku tersusun dari orde (m, n) yang merupakan graf *Cartesian Product* $S_m + 1 \times P_n$, dimana S_m adalah graf bintang dan P_n adalah graf lintasan pada n titik, dan Graf buku dilambangkan dengan $B_{m,n}$ (Salama, 2013: 165-166). Contoh dari graf buku bisa dilihat pada Gambar 2.9



Gambar 2.9 Graf Buku $B_{2,3}$

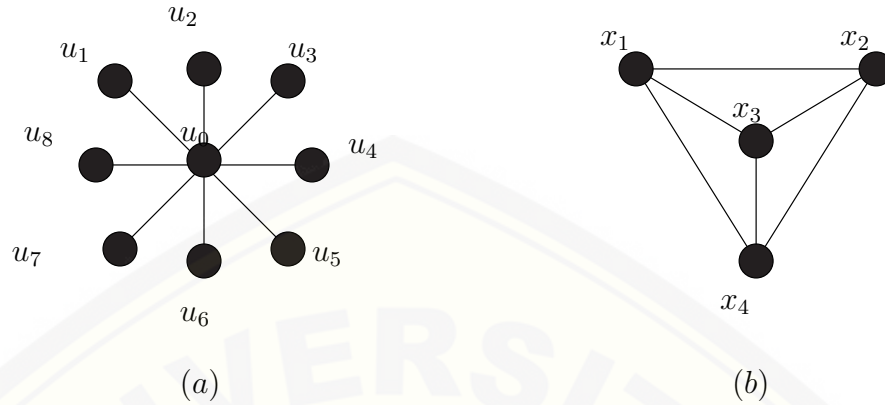
b. Graf Bintang (*Star Graph*)

Graf bintang merupakan graf berorder $n + 1$ yang mempunyai himpunan titik $V(S_n) = \{u_1, u_2, \dots, u_n\} \cup \{u_0\}$ dan himpunan sisi $E(S_n) = \{u_0 u_i, i = 1, 2, \dots, n\}$. Titik u_0 biasanya disebut dengan titik pusat yang bertetangga dengan setiap titik yang lain. Derajat titik u_0 adalah n , sedangkan derajat $u_i, i = 1, 2, \dots, n$ adalah 1. Graf bintang biasa dinotasikan dengan S_n sisi dan $S_n + 1$ titik. Contoh gambar graf bintang dapat dilihat pada Gambar 2.10

c. Graf Roda (*Wheel Graph*)

Slamin (2009) menjelaskan graf roda yang dinotasikan dengan W_n adalah sebuah graf yang memuat n siklus dengan satu titik pusat yang bertetangga dengan semua titik di n siklus. Sehingga graf roda W_n terdiri dari $n + 1$ titik

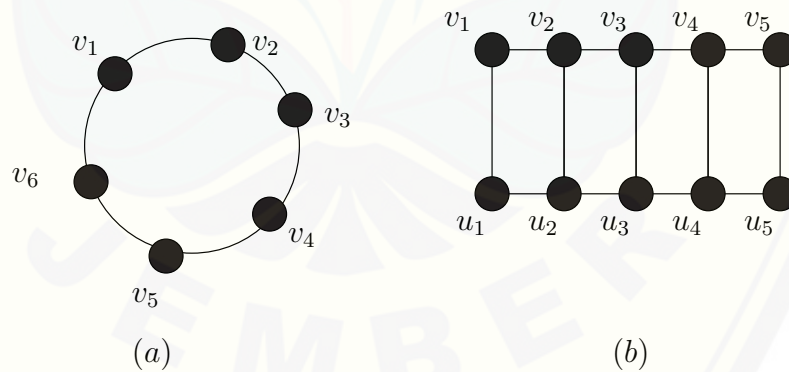
yaitu : $c, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ dan $2n$ sisi, yaitu $cx_i, 1 \leq i \leq n, x_i x_{i+1}, 1 \leq i \leq n \leq 1$ dan $x_n x_1$. Contoh graf roda dapat dilihat pada Gambar 2.10



Gambar 2.10 (a) Graf bintang S_8 dan (b) Graf roda W_4

d. Graf Sikel (*Cycle*)

Graf sikel, dinotasikan dengan C_n dimana $n \geq 3$, merupakan graf yang memiliki himpunan titik $V(C_n) = V(P_n)$ dan himpunan sisi $E(C_n) = E(P_n) \cup \{u_n u_1\}$. (Acharya dan Mehta, 2014:140). Contoh gambar graf sikel dapat dilihat pada Gambar 2.11

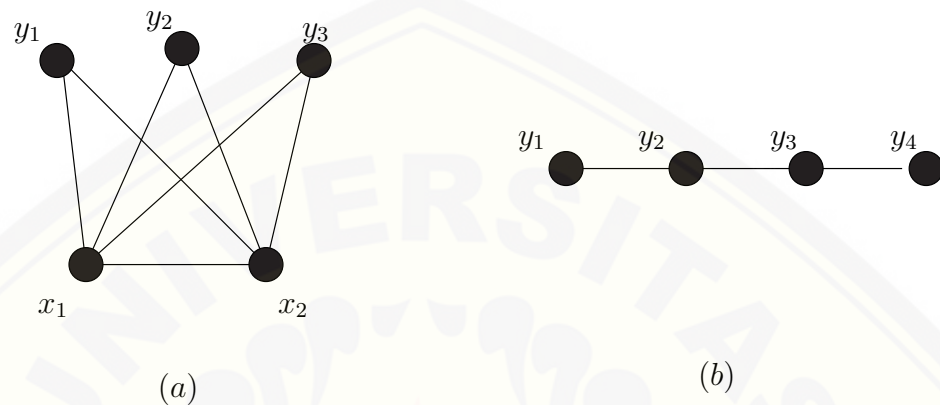


Gambar 2.11 (a) Graf sikel C_6 dan (b) Graf tangga L_5

e. Graf Kipas (*Fan Graph*)

Graf kipas *fan graph* dinotasikan dengan F_n . Sebuah graf kipas diperoleh

dari menghubungkan semua simpul dari F_n , dimana $n \geq 2$ yang merupakan graf lintasan P_n pada suatu titik yang disebut pusat. Jadi F_n terdiri dari $n + 1$ titik yaitu $C, v_1, v_2, v_3 \dots v_n$ dan $(2n - 1)$ sisi, yaitu $cv_i, 1 \leq i \leq n$ dan $v_i v_{i+1}, 1 \leq i \leq n - 1$ (Meena, dan Vaithilingam, 2012). Contoh gambar graf kipas dapat dilihat pada Gambar 2.12 (a).



Gambar 2.12 (a) Graf Kipas $F_{3,2}$, dan (b) Graf lintasan P_4

f. Graf Tangga (*Ladder Graph*)

Graf ladder yang dilambangkan dengan L_n adalah graf yang berpadanan dengan $K_2 \times P_n$ dengan titik $V(L_n) = \{u_i, v_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan $E(L_n) = \{u_i u_{i+1}, v_i v_{i+1}; 1 \leq i \leq n\}$. Graf ladder mempunyai $2n$ titik, dan $3n - 2$ sisi. Gambar 2.11 (b.)

g. Graf Lintasan (*Path Graph*)

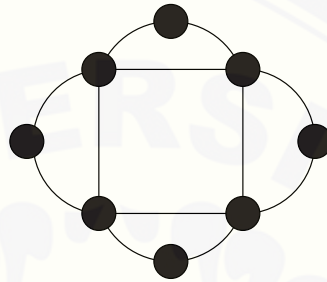
Graf lintasan, dinotasikan dengan P_n merupakan suatu graf dengan himpunan titik $V(P_n) = \{u_1, u_2, u_3, \dots, u_n\}$ dan himpunan sisi $E(P_n) = \{u_1 u_2, u_2 u_3, \dots, u_{n-1} u_n\}$. (Acharya dan Mehta, 2014:140) Gambar 2.12 (b)

2.3 Operasi Graf Comb Sisi (*Edge Comb Graph*)

Operasi graf merupakan salah satu teknik/cara untuk mendapatkan jenis graf baru melalui pengoperasi dari 2 graf atau lebih. Ada beberapa macam operasi graf yang telah dikembangkan diantaranya Joint, shackle, amalgamasi, dan tensor

product. Namun, pada penelitian ini, operasi graf yang digunakan adalah operasi comb sisi.

Definisi 2.3.1 *Graf comb sisi (Edge Comb Graph). Misal r adalah sisi dari graf H . Comb sisi adalah jika ada dua graf yaitu graf G dan graf H . G comb sisi H didefinisikan dengan mengambil satu salinan graf G dan salinan graf H sebanyak jumlah sisi pada graf G dan melekatkan satu sisi r dari setiap salinan graf H ke setiap sisi graf G dinotasikan $G \geq H$ (Dafik, 2016).*



Gambar 2.13 Graf comb sisi pada $C_4 \geq C_3$

2.4 Pewarnaan Graf

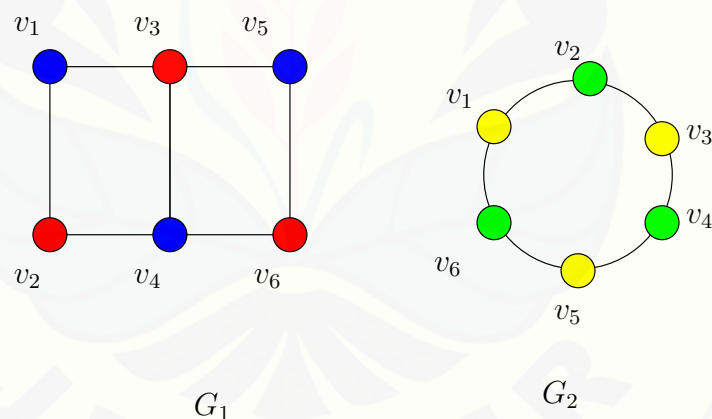
Pewarnaan graf adalah pemberian warna pada elemen graf. Pemberian warna pada elemen graf tidak jauh berbeda dengan konsep pemberian label pada elemen graf. Terdapat tiga macam dalam melakukan pewarnaan, yaitu pewarnaan titik (*vertex coloring*), pewarnaan sisi/rusuk (*edge coloring*), dan pewarnaan wilayah (*region*). Ada beberapa prinsip dalam mewarnai peta, yaitu:

- Banyak warna yang digunakan harus seminimum mungkin, banyak warna minimum disebut bilangan kromatik ($\chi(G)$);
- Dua buah titik yang terhubung oleh satu atau lebih rusuk tidak boleh diberi warna yang sama (pewarnaan titik);
- Dua buah rusuk atau lebih yang bertemu pada sebuah titik tidak boleh diberi warna yang sama (pewarnaan rusuk);

- d. Dalam mewarnai peta pakailah sebuah warna secara optimum, artinya warna kedua digunakan setelah warna pertama tidak dapat digunakan lagi, demikian seterusnya sampai semua titik/sisi/wilayah terwarnai semua (Samuel Wibisono, 2008: 148).

2.4.1 Pewarnaan Titik (*Vertex Coloring*)

Pewarnaan titik pada graf G merupakan pemberian warna pada titik-titik graf G , satu warna untuk setiap titik, sehingga titik-titik yang bertetangga diwarnai dengan warna berbeda (Chartrand dan Zhang, 2009:147). Warna yang biasa digunakan untuk mewarnai graf G yaitu dapat berupa warna seperti: kuning, hijau, biru, merah, dan lainnya, elemen dari bilangan bulat positif, ataupun menggunakan sebarang himpunan. Pemberian warna yang berbeda pada setiap titik yang bertetangga, sehingga tidak ada dua titik yang bertetangga memiliki warna yang sama, dan dua titik yang tidak bertetangga dapat dimungkinkan memiliki warna yang sama, pewarnaan ini dikenal dengan pewarnaan titik pada graf G . Perhatikan gambar 2.14



Gambar 2.14 pewarnaan titik pada graf G_1 dan G_2

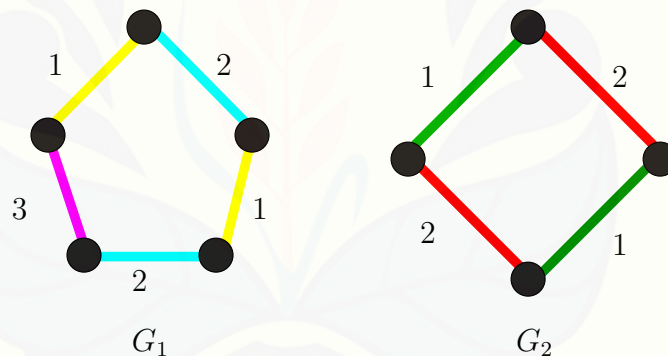
Graf G ($\chi(G)$) atau bilangan kromatik (*chromatic number*) adalah bilangan k yang terkecil/ minimum pada suatu graf G , sehingga dua titik yang bertetangga akan memiliki warna yang berbeda. Jika pada suatu graf G dapat diwarnai dengan k minimal dari n warna, maka G mempunyai bilangan kromatik $n(\chi(G)) = n$.

Jika G adalah sebuah graf khusus dengan p titik dan q sisi dan G mempunyai bilangan kromatik χ maka hubungannya $(\chi-1)p \leq 2q$ (Ringel, 1994:26).

2.4.2 Pewarnaan Sisi (*Edge Coloring*)

Sebuah pewarnaan sisi pada graf G adalah pewarnaan semua sisi G sedemikian hingga setiap dua sisi yang berkait pada titik yang sama mendapatkan warna yang berbeda (Budayasa, 2007). Sama halnya dengan pemberian warna pada pewarnaan titik, untuk sisi yang bertetangga akan diberi warna yang berbeda dan pada sisi yang tidak bertetangga dapat dimungkinkan diberi warna yang sama.

Jika graf G mempunyai pewarnaan sisi- k maka dikatakan sisi-sisi di G diwarnai dengan k warna. Pewarnaan sisi pada graf G merupakan pemberian warna pada sisi-sisi graf G , satu warna untuk setiap sisi pada graf G , dimana sisi-sisi yang bertetangga diberikan warna yang berbeda (Chartrand dan Zhang, 2009) Perhatikan pada gambar 2.15

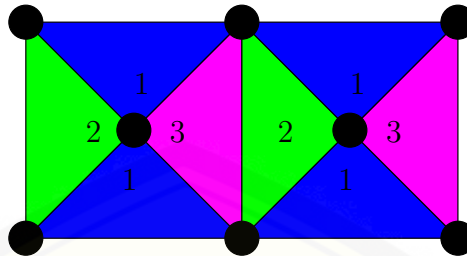


Gambar 2.15 pewarnaan sisi pada graf G_1 dan G_2

2.4.3 Pewarnaan Wilayah (*Region Coloring*)

Pewarnaan wilayah adalah pemberian warna pada suatu wilayah yang terdapat pada suatu graf G , sehingga wilayah yang bertetangga tidak akan memiliki warna yang sama. Teknik pemberian warna pada *region*/wilayah hampir sama dengan pemberian warna pada titik dan sisi. Dalam pemberian

warna pada suatu wilayah biasanya digunakan untuk mewarnai sebuah peta. Perhatikan pewarnaan wilayah pada gambar 2.16



Gambar 2.16 pewarnaan wilayah pada graf

2.5 Pewarnaan Titik r -dinamis

Pewarnaan titik adalah pemberian warna pada setiap titik yang berbeda dalam suatu graf, sedemikian hingga tidak ada warna yang sama antar dua titik yang bertetangga. Suatu graf G disebut k -colorable jika dibutuhkan k -warna untuk memberikan pewarnaan pada graf G , dimana k merupakan bilangan bulat positif. Nilai minimum untuk k yang dibutuhkan pada pewarnaan graf G disebut bilangan kromatik pada graf G yang disimbolkan dengan $\chi(G)$.

Pewarnaan r -dinamis merupakan pengembangan dari pewarnaan k -warna dinamis yang diperkenalkan oleh Montgomery pada tahun 2002. Pewarnaan titik k dari graf G disebut tepat (*proper*) yaitu pewarnaan dinamis jika untuk setiap titik v dengan derajat minimal 2 setidaknya memiliki dua warna berbeda dengan titik-titik ketetanggaannya. Nilai k terkecil dimana graf G memiliki pewarnaan k -warna dinamis disebut sebagai bilangan kromatik dinamis, disimbolkan dengan $\chi_d(G)$ (Lai, dkk, 2003: 193).

Bilangan kromatik dinamis, dilambangkan dengan $\chi_2(G)$ yang merupakan bilangan bulat terkecil k yang mana graf G memiliki $(k, 2)$ warna. Daftar L dari G merupakan sebuah fungsi yang memberikan setiap titik v dari G pada himpunan $L(v)$ dari bilangan bulat positif. Untuk memberikan daftar L dari G , (L, r) -warna dari G yang merupakan pewarnaan titik c sehingga setiap titik v berderajat $d(v)$ berdekatan dengan titik setidaknya $\min\{d(v), r\}$ berbeda warna dan $c(v) \in L(v)$

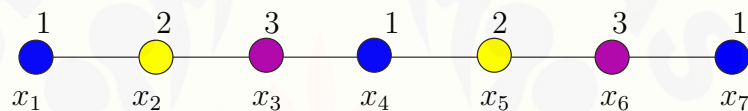
(Ye Chen, dkk, 2012: 1604)

Pewarnaan r -dinamis pada suatu graf G didefinisikan sebagai pemetaan c dari V ke himpunan warna sedemikian hingga memenuhi kondisi berikut:

1. jika $uv \in E(G)$ maka $c(u) \neq c(v)$, dan
2. $\forall v \in V(G), |c(N(v))| \geq \min\{r, d(v)\}$.

(Lai dan Montgomery, 2002: 12)

Jumlah warna pada r -dynamic dari graf G dinotasikan $\chi_r(G)$ yang merupakan bilangan kromatik biasa, $\chi_d(G)$ merupakan pewarnaan titik dinamis dengan $r=2$ dan untuk nilai $r=3$ atau lebih dapat dituliskan dengan notasi $\chi_r(G)$. Lebih jelasnya dapat ditunjukkan pada contoh pewarnaan titik r -dinamis pada Gambar 2.17 dan tabel 2.1



Gambar 2.17 contoh pewarnaan titik 1,2-dinamis pada graf p_7

Berdasarkan pewarnaan titik 1,2-dinamis pada graf P_7 dengan fungsi berulang sebagai berikut:

$$c(x_i) = \begin{cases} 1; & 1 \leq i \leq n, i \equiv 1 \pmod 3 \\ 2; & 1 \leq i \leq n, i \equiv 2 \pmod 3 \\ 3; & 1 \leq i \leq n, i \equiv 0 \pmod 3 \end{cases}$$

Keterangan: Jika memenuhi syarat $|c(N(v))| \geq \min\{r, d(v)\}$ maka YA dan jika tidak memenuhi syarat $|c(N(v))| \geq \min\{r, d(v)\}$ maka TIDAK

2.6 Fungsi

Fungsi ("f") merupakan sebuah pemetaan. Fungsi "f" dari himpunan A ke himpunan B, ditulis dengan notasi $f : A \rightarrow B$, adalah aturan korespondensi yang menghubungkan setiap $x \in A$ dengan tepat satu anggota B. Himpunan A yaitu

v	$c(v)$	$ c(N(v)) $	r	$d(v)$	$\min\{r, d(v)\}$	$ c(N(v)) \geq \min\{r, d(v)\}$
x_1	1	1	2	1	1	YA
x_2	2	2	2	2	2	YA
x_3	3	2	2	2	2	YA
x_4	1	2	2	2	2	YA
x_5	2	2	2	2	2	YA
x_6	3	2	2	2	2	YA
x_7	1	1	2	1	1	YA

Tabel 2.1 Pewarnaan titik 2-dinamis graf p_7

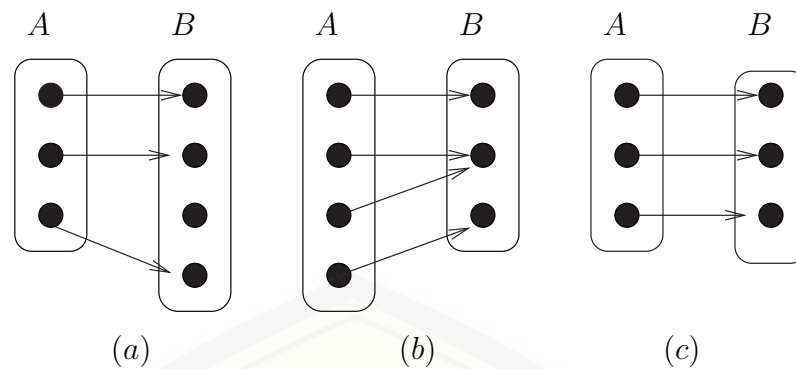
himpunan yang memuat elemen pertama dari elemen-elemen dalam f , disebut domain f dan dapat dinyatakan sebagai D_f . Himpunan B yaitu himpunan yang memuat elemen kedua dari elemen-elemen dalam f , disebut range f dan dinyatakan sebagai R_f . Notasi $f: A \rightarrow B$ menunjukkan bahwa f merupakan fungsi dari A ke B, yang sering juga dibaca "f adalah pemetaan dari A ke B", atau "f memetakan A ke B". Jika $(a; b)$ anggota dari f , maka $b = f(a)$ untuk $(a, b) \in f$. Fungsi dapat digolongkan menjadi 3 golongan sebagai berikut :

1. Fungsi satu-satu (injektif) adalah sebuah pemetaan pada setiap elemen di daerah kodomain yang berpasangan mempunyai pasangan elemen tepat satu di daerah domain, $\forall a_1$ dan $a_2 \in A, a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$.
2. Fungsi $f: A \rightarrow B$ disebut fungsi kepada atau fungsi surjektif $\Leftrightarrow \forall b \in B, \exists a \in A \Rightarrow f(a) = b$. Dengan kata lain, suatu kodomain fungsi surjektif sama dengan kisarannya (range).
3. Fungsi $f: A \rightarrow B$ disebut fungsi bijektif apabila fungsi tersebut merupakan fungsi injektif sekaligus surjektif.

Gambar 2.18 menunjukkan fungsi injektif, surjektif dan bijektif

2.7 Keterampilan Berpikir Tingkat Tinggi

Menurut Heong, et al,(2011: 121) kemampuan berpikir tingkat tinggi didefinisikan sebagai penggunaan pikiran secara luas untuk menemukan tantangan baru. Kemampuan berpikir tingkat tinggi ini mengkehendaki



Gambar 2.18 contoh fungsi (a) injektif, (b) surjektif, dan (c) bijektif

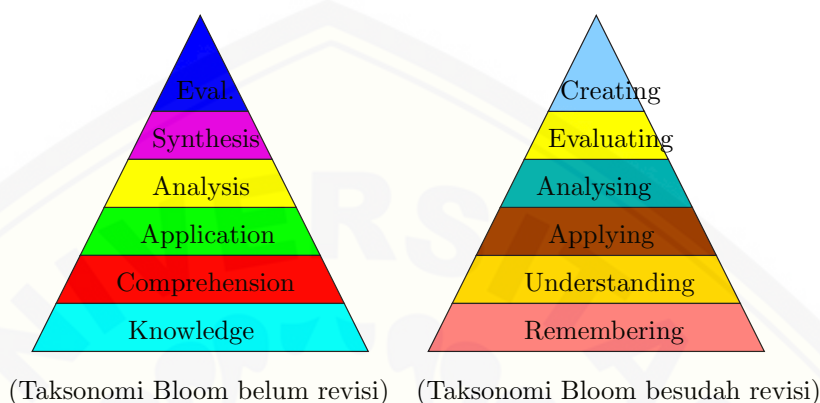
seseorang untuk menerapkan informasi baru atau pengetahuan sebelumnya dan memanipulasi informasi untuk menjangkau kemungkinan jawaban dalam situasi yang baru.

Penggunaan keterampilan berpikir tingkat tinggi dalam pewarnaan titik r -dinamis pada graph eksponensial merupakan cara yang baik untuk mengetahui keterkaitan tumbuh kembang berpikir seseorang. Salah satu keterampilan yang dibutuhkan dalam kehidupan sehari-hari untuk menghadapi berbagai permasalahan yang ada disekitar lingkungan masyarakat yaitu berpikir tingkat tinggi. Berpikir tingkat tinggi merupakan kegiatan yang melibatkan level atau tingkatan kognitif seseorang yang dapat didasarkan pada Taksonomi Bloom.

Taksonomi Bloom dianggap merupakan dasar bagi berpikir tingkat tinggi. Pemikiran ini didasarkan bahwa beberapa jenis pembelajaran memerlukan proses kognisi yang lebih daripada yang lain, tetapi memiliki manfaat-manfaat lebih umum. Dalam Taksonomi Bloom sebagai contoh, kemampuan melibatkan analisis, evaluasi dan mengkreasi dianggap berpikir tingkat tinggi (Pohl dalam Lewy dkk, 2009: 15).

Keterampilan berpikir pada Taksonomi Bloom dimulai dengan tiga tahapan teratas, yaitu tahapan menganalisis, mengevaluasi, dan mengkreasikan. Terdapat beberapa tahapan berpikir pada Taksonomi Bloom sebelum terdapat revisi yaitu mengetahui (knowledge), memahami (compherension)), mengaplikasikan (aplication), menganalisis (analysis), mensintesis (synthesis),

dan mengevaluasi (evaluation). Sedangkan pada tahapan Taksonomi Bloom yang baru memuat 6 aspek yaitu mengingat (remembering), memahami (understanding), menerapkan (applying), menganalisis (analysing), mengevaluasi (evaluating), dan menciptakan (creating). Tahapan Taksonomi Bloom dapat dilihat pada gambar 2.19



Gambar 2.19 Tahapan Taksonomi Bloom sebelum dan sesudah revisi

Berikut ini adalah penjelasan dan pilihan kata kerja operasional dari ranah kognitif yang telah direvisi oleh Utari, R. (2008: 10) yaitu:

1. Mengingat adalah kemampuan menyampaikan kembali informasi/ pengetahuan yang tersimpan dalam ingatan. Kata kerja operasionalnya yaitu mendefinisikan, menyusun daftar, menjelaskan, mengingat, mengenali, mene-mukan kembali, menyatakan, mengulang, mengurutkan, menamai, menempatkan, menyebutkan.
2. Memahami adalah kemampuan memahami instruksi dan menegaskan penger-tian ide atau konsep yang telah diajarkan baik dalam bentuk lisan, tertulis maupun graf/diagram. Kata kerja operasionalnya yaitu menerangkan, menjelaskan, menerjemahkan, menguraikan, mengartikan, menafsirkan, menginterpretasikan, mendiskusikan, menyeleksi, mendeteksi, melaporkan, menduga, mengelompokkan, memberi contoh, merangkum, menganalogikan, me-ngubah, memperkirakan.

3. Menerapkan adalah kemampuan melakukan sesuatu dan mengaplikasikan konsep dalam situasi tertentu. Kata kerja operasionalnya yaitu memilih, menerapkan, melaksanakan, menggunakan, mendemonstrasikan, memodifikasi, menunjukkan, membuktikan, menggambarkan, memprogramkan, mempraktikkan.
4. Menganalisis adalah kemampuan memisahkan konsep ke dalam beberapa komponen dan menghubungkan satu sama lain untuk memperoleh pemahaman atas konsep tersebut secara utuh. Kata kerja operasionalnya yaitu mengkaji ulang, membedakan, membandingkan, memisahkan, menghubungkan, menunjukkan hubungan antara variabel, memecah menjadi beberapa bagian, menyisihkan menjadi beberapa bagian, mengorganisir, mengkerangka-kan.
5. Mengevaluasi adalah kemampuan menetapkan derajat sesuatu berdasarkan norma, kriteria atau patokan tertentu. Kata kerja operasionalnya yaitu menilai, mengevaluasi, menjustikasi, mengecek, mengkritik, memprediksi, membenarkan, menyalahkan, menyeleksi.
6. Mengkreasi adalah kemampuan memadukan unsur-unsur menjadi suatu bentuk yang utuh dan koheren, atau membuat sesuatu yang orisinal. Kata kerja operasionalnya yaitu merakit, merancang, menemukan, menciptakan, memperoleh, mengembangkan, memformulasikan, membangun, membentuk, membuat, melakukan inovasi, mendesain, menghasilkan karya.

2.8 Hasil-Hasil Pewarnaan Titik

Pada bagian ini disajikan beberapa hasil pewarnaan titik r -Dynamic yang dapat digunakan sebagai rujukan penelitian ini. Rangkuman yang tersedia pada bagian ini merupakan hasil penelitian terdahulu dapat dilihat pada Tabel 2.2.

Tabel 2.2: Hasil Pewarnaan Titik r -dinamis Penelitian Sebelumnya

Graf	Bilangan kromatik r -dinamis	Keterangan
$P_2 \otimes C_n$, n ganjil	$\chi(G) = 6$	Harsya, dkk 2014
$P_2 \otimes C_n$, n genap	$\chi(G) = 4$	Harsya dkk 2014
$P_3 \odot C_n$, n ganjil	$\chi(G) = 6$	Harsya dkk 2014
Graf Cycle(C_6)	$\chi(G) = 2$	Sesa, J. 2014
Graf Kipas(F_n), $n \geq 4$	$\chi(G) = 3$	Irwanto, dkk 2014
Graf Roda(W_n), $n \geq 5$	$\chi(G) = 4$	Irwanto dkk 2014
Graf Helm(H_n), $n \geq 4$	$\chi(G) = 3$	Irwanto dkk 2014
Graf Anti Prisma(H_m), $n \geq 4$	$\chi(G) = 4$	Irwanto dkk 2014
Graf Prisma(H_m), $n \geq 5$	$\chi(G) = 4$	Irwanto dkk 2014
$C_n \odot C_m$	$\chi(G) = 4$	Puspasari dkk 2014
$C_n \otimes C_m$	$\chi(G) = 3$	Puspasari dkk 2014
$S_n \otimes C_m$	$\chi(G) = 3$	Dewi, N.L dkk 2014
$W_n + P_m = W_n + P_m$, n genap	$\chi(G) = \chi_d(G) = \chi_3(G) = \chi_4(G) = 5$	Wulandari dkk 2015
$W_n + P_m = W_n + P_m$, n ganjil	$\chi(G) = \chi_d(G) = \chi_3(G) = \chi_4(G) = 6$	Wulandari dkk 2015
$W_n \odot P_m$	$\chi(G) = \chi_d(G) = 4$	Wulandari dkk 2015

BAB 3. METODE PENELITIAN

3.1 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode deduktif aksiomatik, yaitu menurunkan aksioma atau teorema yang telah ada, kemudian diterapkan dalam pewarnaan titik r -dinamis, berikutnya dikenalkan pada beberapa teorema mengenai pewarnaan titik r -dinamis pada graf $comb$ sisi. Selanjutnya menurunkan teorema tersebut untuk memperoleh pewarnaan titik dan nilai kromatik r -dinamis. Setelah ditemukan pewarnaan titik r -dinamis pada graf tersebut, maka dilanjutkan dengan pendeteksian pola, yaitu dengan menentukan pola pewarnaan r -dinamis sedemikian hingga diperoleh bentuk pola umumnya. Metode ini digunakan untuk merumuskan pola pewarnaan titik dan nilai kromatik pewarnaan titik r -dinamis pada graf $comb$ sisi. Penelitian ini juga menggunakan 6 tahapan yang terdapat didalam Taksonomi Bloom yaitu mengingat, memahami, mengaplikasikan, menganalisa, mengevaluasi, dan menciptakan untuk mengasah kemampuan berpikir tingkat tinggi.

3.2 Definisi Operasional

Definisi operasional variabel digunakan untuk memberikan gambaran sistematis dalam penelitian dan untuk menghindari terjadinya perbedaan pengertian makna. Definisi operasional yang dimaksud adalah sebagai berikut:

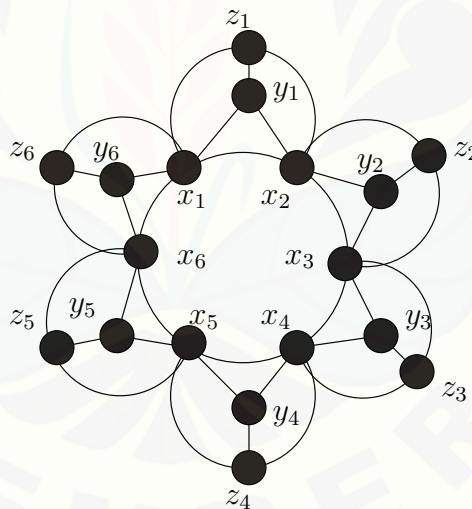
3.2.1 Pewarnaan Titik r -Dinamis

Jika $G = (E, V)$ adalah graf sederhana, konektif, dan graf tidak berarah yang memiliki himpunan titik yaitu V , himpunan sisi yaitu E , dan $d(v)$ adalah derajat dari sebuah titik $v \in V(G)$. Jumlah derajat maksimum dari graf G dinotasikan dengan $\Delta(G)$ dan derajat minimum dari graf G dinotasikan dengan $\delta(G)$ dengan proper k -warna dari graf G merupakan pemetaan $c : V(G) \rightarrow S$ dimana $|S|=k$, hingga tidak ada titik yang bertetangga mempunyai warna yang

sama. r -dinamis k -warna merupakan proper k -warna c dari G sedemikian hingga $|c(N(v))| \geq \min\{r, d(v)\}$ untuk setiap titik v dari $V(G)$ dimana $N(v)$ adalah tetangga dari v dan $c(s) = c(v) : v \in S$ untuk titik subset S . Jumlah warna r -dinamis dari graf G dinotasikan $\chi_r(G)$ merupakan warna minimum k pada graf G .

3.2.2 Graf Operasi $(C_m \supseteq W_3)$ dimana $m = 2 \text{ mod } 4, m > 2$

Graf operasi pada $(C_m \supseteq W_3)$ diperoleh dari hasil operasi comb sisi dengan mengambil satu salinan graf C_m dan salinan graf W_3 sebanyak jumlah sisi graf C_m dan melekatkan satu sisi graf W_3 dari setiap salinan graf W_3 ke setiap sisi graf G akan memiliki himpunan titik $V(C_m \supseteq W_3) = \{x_i; 1 \leq i \leq m\} \cup \{y_i; 1 \leq i \leq m\} \cup \{z_i; 1 \leq i \leq m\}$, dan himpunan sisi $V(C_m \supseteq W_3) = \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq m - 1\} \cup \{x_1 x_m\} \cup \{x_i z_i; 1 \leq i \leq m\} \cup \{x_{i+1} z_i; 1 \leq i \leq m - 1\} \cup \{x_1 z_m\} \cup \{x_1 y_m\} \cup \{x_i y_i; 1 \leq i \leq m\} \cup \{x_{i+1} y_i; 1 \leq i \leq m - 1\}$. Comb sisi pada graf $(C_m \supseteq W_3)$ dimana $m = 2 \text{ mod } 4, m > 2$ dapat dilihat pada gambar 3.1



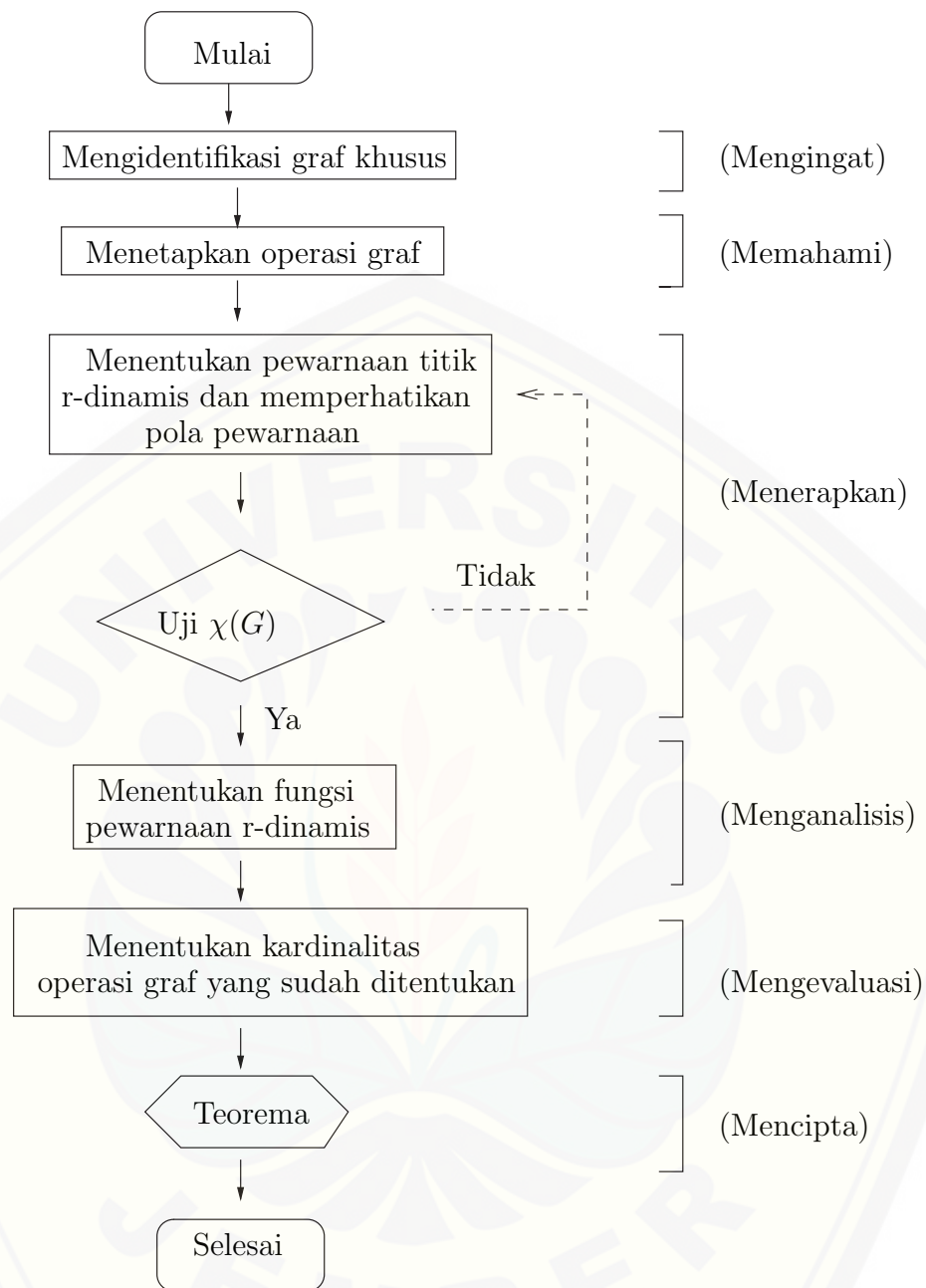
Gambar 3.1 contoh pewarnaan titik r -dinamis pada graf $C_6 \supseteq W_3$

3.3 Teknik Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada eksponensial graf lingkaran/*circle* dan roda/*wheel*. Adapun teknik penelitian adalah sebagai berikut:

1. menetapkan graf khusus sebagai objek penelitian;
2. menerapkan operasi graf comb sisi pada graf khusus;
3. menerapkan pewarnaan titik r -dinamis pada graf comb sisi dan memperhatikan pola pewarnaan;
4. memeriksa keoptimalan nilai kromatik, apabila sudah optimal dapat melanjutkan dengan menentukan fungsi, jika belum optimal maka kembali ke tahap sebelumnya yaitu menerapkan pewarnaan titik r -dinamis pada graf comb sisi;
5. menentukan fungsi pewarnaan r -dinamis;
6. menentukan kardinalitas graf *comb* sisi;
7. pewarnaan titik r -dinamis yang telah didapatkan kemudian dibuktikan sehingga menjadi sebuah teorema.

Penelitian ini akan menemukan pola nilai kromatik pewarnaan titik r -dinamis dengan batas atas bilangan kromatik yang ditentukan. Teknik penelitian yang dilakukan pada graf khusus dan operasi graf. Secara umum, langkah-langkah penelitian di atas dapat juga disajikan dalam bagan alir pada gambar 3.2



Keterangan:

- = Kegiatan Penelitian ⬡ = Hasil
- ◇ = Hasil analisis - - - - -> = Aliran kegiatan pengecekan
- = kegiatan awal dan akhir ———> = Aliran kegiatan utama

Gambar 3.2 Rancangan Penelitian

3.4 Observasi

Sebelum penelitian lanjutan pada operasi graf khusus, telah dilakukan observasi awal sebagai pedoman observasi selanjutnya. Namun observasi awal ini dapat berubah. Observasi awal untuk nilai m pada $(C_m \supseteq W_3)$, dimana $m=2 \bmod 4$, $m > 2$ sebagai strategi untuk mendeteksi pola pewarnaan titik serta nilai kromatik r -dinamis. Pendeteksian pola pada $(C_m \supseteq W_3)$, dimana $m=2 \bmod 4$, $m > 2$ sangatlah penting untuk menemukan nilai kromatik untuk graf $(C_m \supseteq W_3)$ dimana $m=2 \bmod 4$, $m > 2$ diperumum, dengan terpolanya pewarnaan maka dapat dipakai sebagai pedoman untuk membangun fungsi pewarnaan titiknya pada $(C_m \supseteq W_3)$ dimana $m=2 \bmod 4$, $m > 2$. Sedangkan kaitannya dengan Taksonomi Bloom, maka proses pewarnaan r -dinamis pada graf $(C_m \supseteq W_3)$ dimana $m=2 \bmod 4$, $m > 2$ dapat dijelaskan sebagai berikut: 1) mengingat definisi dan teorema yang telah dibuktikan pada pewarnaan titik r -dinamis (tahap mengingat); 2) memahami definisi dan teorema tersebut (tahap memahami); 3) menggunakan definisi dan teorema pada pewarnaan titik r -dinamis yaitu mencari pewarnaan titik dan nilai nilai kromatik pada operasi graf $(C_m \supseteq W_3)$ dimana $m=2 \bmod 4$, $m > 2$ (tahap menerapkan); 4) tahap penerapan ini dimulai dengan mewarnai titik $\{x_i; 1 \leq i \leq m\}$; 5) selanjutnya titik $\{y_i; 1 \leq i \leq m\}$; 6) setelah titik $\{z_i; 1 \leq i \leq m\}$ dilanjutkan dengan melihat pola nilai kromatik r -dinamis.

Pewarnaan r -dinamis titik pada graf $(C_m \supseteq W_3)$, dimana $m=2 \bmod 4$, $m > 2$ untuk $1 \leq r \leq \delta$ pewarnaan dapat dilihat pada Gambar 3.3. Fungsi pewarnaan titik r -dinamis dengan $\chi_{1 \leq r \leq \delta}(C_m \supseteq W_3) = 4$, didefinisikan pewarnaan titik $c : V(C_m) \supseteq W_3 \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, k\}$ sebagai berikut:

Berdasarkan pewarnaan titik 1,2, dan 3 dinamis pada graf $(C_m \supseteq W_3)$ dimana $m=2 \bmod 4$, $m > 2$ dengan fungsi berpola sebagai berikut:

$$c_1(x_i) = \begin{cases} 2; & 1 \leq i \leq m, i = \text{ganjil} \\ 1; & 1 \leq i \leq m, i = \text{genap} \end{cases}$$

$$c_1(y_i) = 3; 1 \leq i \leq m$$

$$c_1(z_i) = 4; 1 \leq i \leq m$$

Pewarnaan r -dinamis titik pada $(C_m \supseteq W_3)$, dimana $m = 2 \bmod 4$, $m > 2$ untuk pewarnaan $\delta+1 \leq r \leq \Delta-1$ -dinamis dapat dilihat pada gambar 3.4. Fungsi pewarnaan titik r -dinamis dengan $\chi_{\delta+1 \leq r \leq \Delta-1}(C_m \supseteq W_3) = r + 1$, didefinisikan pewarnaan titik $c : V(C_m) \supseteq W_3 \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, k\}$ sebagai berikut:

$$c_2(x_i) = \begin{cases} 2; & 1 \leq i \leq m, i = \text{ganjil} \\ 1; & 1 \leq i \leq m, i = \text{genap} \end{cases}$$

$$c_2(y_i) = \begin{cases} 4; & 1 \leq i \leq m, i = \text{ganjil} \\ 3; & 1 \leq i \leq m, i = \text{genap} \end{cases}$$

$$c_2(z_i) = \begin{cases} 5; & 1 \leq i \leq m, i = \text{ganjil} \\ 6; & 1 \leq i \leq m, i = \text{genap} \end{cases}$$

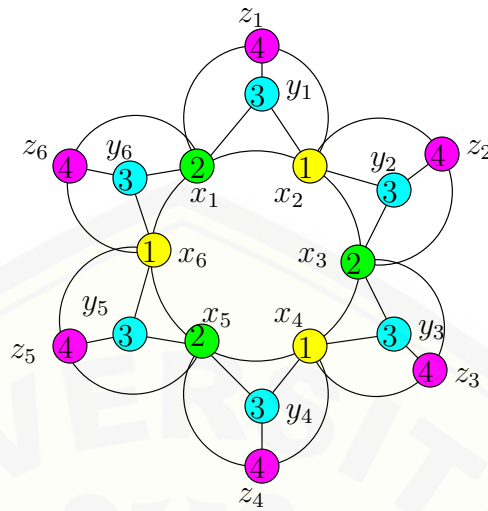
Pewarnaan r -dinamis titik pada $(C_m \supseteq W_3)$, dimana $m = 2 \bmod 4$, $m > 2$ untuk pewarnaan $r \geq \Delta$ -dinamis dapat dilihat pada gambar 3.5. Fungsi pewarnaan titik r -dinamis dengan $\chi_{r \geq \Delta}(C_m \supseteq W_3) = \Delta + 1$, didefinisikan pewarnaan titik $c : V(C_m) \supseteq W_3 \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, k\}$ sebagai berikut:

$$c_3(x_i) = \begin{cases} 1; & 1 \leq i \leq m, i \equiv 1 \bmod 3 \\ 2; & 1 \leq i \leq m, i \equiv 2 \bmod 3 \\ 3; & 1 \leq i \leq m, i \equiv 0 \bmod 3 \end{cases}$$

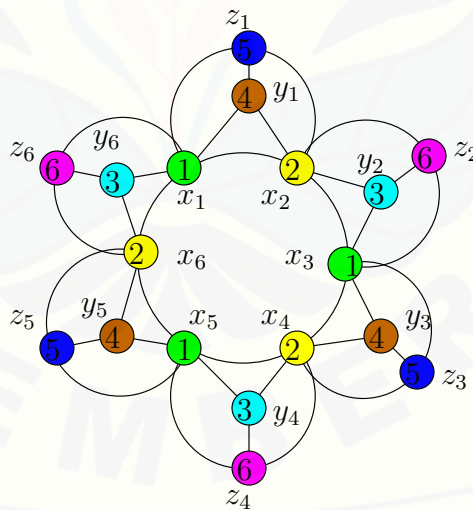
$$c_3(y_i) = \begin{cases} 4; & 1 \leq i \leq m, i = \text{ganjil} \\ 5; & 1 \leq i \leq m, i = \text{genap} \end{cases}$$

$$c_3(z_i) = \begin{cases} 6; & 1 \leq i \leq m, i = \text{ganjil} \\ 7; & 1 \leq i \leq m, i = \text{genap} \end{cases}$$

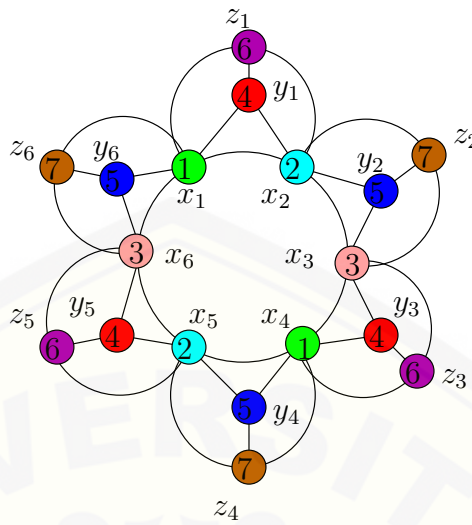
Ilustrasi pada Gambar 3.3-3.5 dan tabel 3.1-3.4 merupakan pewarnaan r -dinamis pada Observasi graf hasil operasi $(C_m \supseteq W_3)$ dimana $m = 2 \bmod 4$, $m > 2$ yaitu sebagai berikut:



Gambar 3.3 observasi graf $C_6 \supseteq W_3$ untuk $1 \leq r \leq \delta$ -dinamis



Gambar 3.4 observasi graf $C_6 \supseteq W_3$ untuk $\delta + 1 \leq r \leq \Delta - 1$ -dinamis



Gambar 3.5 observasi graf $C_6 \supseteq W_3$ untuk r -dinamis

Tabel 3.1 Pewarnaan titik 1, 2, 3-dinamis graf $(C_6 \supseteq W_3)$ dimana $1 \leq i \leq 6m$

v	$c(v)$	$ c(N(v)) $	r	$d(v)$	$\min\{r, d(v)\}$	$ c(N(v)) \geq \min\{r, d(v)\}$
$x_{i_{ganjil}}$	2	3	1,2,3,4	6	1,2,3,4	YA, YA, YA, TIDAK
$x_{i_{genap}}$	1	3	1,2,3,4	6	1,2,3,4	YA, YA, YA, TIDAK
y_i	3	3	1,2,3,4	3	1,2,3,3	YA, YA, YA, YA
z_i	4	3	1,2,3,4	3	1,2,3,3	YA, YA, YA, YA

Tabel 3.2 Pewarnaan titik 4-dinamis graf $(C_6 \supseteq W_3)$ dimana $1 \leq i \leq 6m$

v	$c(v)$	$ c(N(v)) $	r	$d(v)$	$\min\{r, d(v)\}$	$ c(N(v)) \geq \min\{r, d(v)\}$
$x_{i_{ganjil}}$	2	4	4,5	6	4,5	YA, TIDAK
$x_{i_{genap}}$	1	4	4,5	6	4,5	YA, TIDAK
$y_{i_{ganjil}}$	4	3	4,5	3	3,3	YA, YA
$y_{i_{genap}}$	3	3	4,5	3	3,3	YA, YA
z_i	5	3	4,5	3	3,3	YA, YA

Tabel 3.3 Pewarnaan titik 5-dinamis graf $(C_6 \supseteq W_3)$ dimana $1 \leq i \leq 6m$

v	$c(v)$	$ c(N(v)) $	r	$d(v)$	$\min\{r, d(v)\}$	$ c(N(v)) \geq \min\{r, d(v)\}$
$x_{i_{ganjil}}$	1	5	5,6	6	5,6	YA, TIDAK
$x_{i_{genap}}$	2	5	5,6	6	5,6	YA, TIDAK
$y_{i_{ganjil}}$	4	3	5,6	3	3,3	YA, YA
$y_{i_{genap}}$	3	3	5,6	3	3,3	YA, YA
$z_{i_{ganjil}}$	5	3	5,6	3	3,3	YA, YA
$z_{i_{genap}}$	6	3	5,6	3	3,3	YA, YA

Tabel 3.4 Pewarnaan titik r -dinamis graf $(C_6 \supseteq W_3)$ dimana $1 \leq i \leq 6m$

v	$c(v)$	$ c(N(v)) $	r	$d(v)$	$\min\{r, d(v)\}$	$ c(N(v)) \geq \min\{r, d(v)\}$
x_1	1	6	6,7,...	6	6,6,...	YA, YA, ...
x_2	2	6	6,7,...	6	6,6,...	YA, YA, ...
x_3	3	6	6,7,...	6	6,6,...	YA, YA, ...
x_4	1	6	6,7,...	6	6,6,...	YA, YA, ...
x_5	2	6	6,7,...	6	6,6,...	YA, YA, ...
x_6	3	6	6,7,...	6	6,6,...	YA, YA, ...
$y_{i_{ganjil}}$	4	3	6,7,...	3	3,3,...	YA, YA, ...
$y_{i_{genap}}$	5	3	6,7,...	3	3,3,...	YA, YA, ...
$z_{i_{ganjil}}$	6	3	6,7,...	3	3,3,...	YA, YA, ...
$z_{i_{genap}}$	7	3	6,7,...	3	3,3,...	YA, YA, ...

Keterangan: Jika memenuhi syarat $|c(N(v))| \geq \min\{r, d(v)\}$ maka YA dan jika tidak memenuhi syarat $|c(N(v))| \geq \min\{r, d(v)\}$ maka TIDAK

Jadi pada observasi awal didapatkan bilangan kromatik dari graf $(C_m \supseteq W_3)$, dimana $m = 2 \pmod 4$, $m > 2$ adalah sebagai berikut:

◇ **Teorema 3.4.1.**

$$\chi_r(C_m \supseteq W_3) = \begin{cases} 4; & 1 \leq r \leq \delta \\ r + 1; & \delta + 1 \leq r \leq \Delta - 1 \\ \Delta + 1; & r \geq \Delta \end{cases}$$

BAB 5. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil-hasil dari pembahasan pada bab sebelumnya telah dijelaskan mengenai kardinalitas elemen dan pewarnaan r -dinamis pada graf hasil operasi *edge comb product* diantaranya graf siklus dengan roda ($C_m \triangleright W_3$) untuk $m = 2 \pmod 4$, $m > 2$, graf bintang dan siklus ($S_m \triangleright C_3$) untuk $m \geq 3$, graf lintasan dan siklus ($P_m \triangleright C_3$) untuk $m \geq 2$, graf tangga dan siklus ($L_{3m} \triangleright C_3$) untuk $m \geq 1$, graf siklus dan siklus ($C_{6m} \triangleright C_3$) untuk $m \geq 1$, graf siklus dan buku ($C_{6m} \triangleright B_2$) untuk $m \geq 1$, dan graf siklus dan siklus, didapat 3 teorema sebagai berikut:

1. Kardinalitas elemen dari graf hasil operasi *edge comb product* adalah

- ($C_m \triangleright W_3$) dimana $m = 2 \pmod 4$, $m > 2$, maka $|V(C_m \triangleright W_3)| = p = 18m$ dan $|E(C_m \triangleright W_3)| = q = 30m$;
- ($S_m \triangleright C_3$) dimana $m \geq 3$, maka $|V(S_m \triangleright C_3)| = p = 2m+1$ dan $|E(S_m \triangleright C_3)| = q = 3m$;
- ($P_m \triangleright C_3$) dimana $m \geq 2$, maka $|V(P_m \triangleright C_3)| = p = m+1$ dan $|E(P_m \triangleright C_3)| = q = m$;
- ($L_{3m} \triangleright C_3$) dimana $m \geq 1$, maka $|V(L_{3m} \triangleright C_3)| = p = 15m - 2$ dan $|E(L_{3m} \triangleright C_3)| = q = 27m - 6$;
- ($C_{6m} \triangleright C_3$) dimana $m \geq 1$, maka $|V(C_{6m} \triangleright C_3)| = p = 12m$ dan $|E(C_{6m} \triangleright C_3)| = q = 18m$;
- ($C_{6m} \triangleright B_2$) dimana $m \geq 1$, maka $|V(C_{6m} \triangleright B_2)| = p = 18m$ dan $|E(C_{6m} \triangleright B_2)| = q = 30m$.

2. Nilai kromatik pewarnaan titik r -dinamis pada graf hasil operasi *edge comb product* adalah

- Graf sikel dan roda ($C_m \supseteq W_3$) dimana $m = 2 \pmod 4, m > 2$

$$\chi_r(C_m \supseteq W_3) = \begin{cases} 4; & 1 \leq r \leq \delta \\ r + 1; & \delta + 1 \leq r \leq \Delta - 1 \\ \Delta + 1; & r \geq \Delta \end{cases}$$

- Graf bintang dan sikel ($S_m \supseteq C_3$) dimana $m \geq 3$

$$\chi_r(S_m \supseteq C_3) = \begin{cases} 3; & 1 \leq r \leq \delta \\ r + 1; & \delta + 1 \leq r \leq \Delta - 1 \\ 2m + 1; & r \geq \Delta \end{cases}$$

- Misalkan graf G merupakan graf hasil operasi dari graf lintasan dan sikel $P_m \supseteq C_3$ dimana $m \geq 2$, graf tangga dan sikel $L_{3m} \supseteq C_3$ dimana $m \geq 1$, graf sikel dan sikel $C_{6m} \supseteq C_3$ dimana $m \geq 1$, dan graf sikel dan buku $C_{6m} \supseteq B_2$ dimana $m \geq 1$

$$\chi_r(G) = \begin{cases} 3; & 1 \leq r \leq \delta \\ r + 1; & \delta + 1 \leq r \leq \Delta - 1 \\ \Delta + 1; & r \geq \Delta \end{cases}$$

3. Kaitan antara keterampilan berpikir tingkat tinggi dengan pewarnaan titik r -dinamis pada graf hasil operasi yaitu dalam mengidentifikasi famili graf, menentukan kardinalitas elemen pada graf hasil operasi *edge comb product* yang akan diterapkan pada pewarnaan titik, menerapkan dan menentukan pewarnaan titik r -dinamis pada *edge comb product graph*, menentukan pola nilai kromatik r -dinamis, menentukan fungsi pewarnaan r -dinamis serta mengevaluasi dalam membuktikan kebenaran fungsi, dan menemukan teorema baru.

5.2 Saran

Berdasarkan hasil penelitian mengenai pewarnaan titik r -dinamis pada graf *edge comb product graph* maka penulis menyarankan kepada pembaca agar dapat

mengembangkan pewarnaan titik r -dinamis pada jenis graf hasil operasi lainnya, terutama pada graf hasil operasi graf \supseteq roda dan graf \supseteq buku.



DAFTAR PUSTAKA

- Acharya, U.P. dan Mehta, H.S. 2014. *2-Cartesian Product of Special Graphs*.
Jurnal: International Journal of Mathematics and Soft Computing, Vol. 4,
No. 1, page 140.
- Budayasa, K. 2007. *Teori Graf dan Aplikasinya*. Universitas Negeri Surabaya.
- Chartrand, Gary dan Zhang, Ping. 2009. *Chromatic Graph Theory of a Graph*.
USA: CRC Press.
- Dafik, Slamun, Tanna, D. 2016. *Constructions of H-antimagic graphs using
smaller edge-antimagic graphs*. (arc Combinatoria).
- Daoud, Salama N. 2013. *Complexity of stacked book graph and cone graphs*.
Journal of Taibah University for Science 7 (2013) 162172, page 165-166.
- Dewi, N.L. dan Dafikk. 2014. *Pengembangan Pewarnaan Titik Pada Operasi
Graf Khusus*. Prosiding Seminar Nasional Matematika 2014 Vol. 1 No. 1:
Universitas Jember.
- Harsya, A.Y., Dafik, dan Agustin, I.H..2014.*Pewarnaan Titik Pada Graf Sikel
dengan Graf Lintasan*. Prosiding Seminar Nasional Matematika 2014 Vol.
1 No. 1: Universitas Jember.
- Hartsfield, N. and Ringel, G. 1994. *Pearls in Graph Theory*. United Kingdom:
Academi Press Limited.
- Heong, Y. M.,Othman, W.D.,Md Yunos, J., Kiong, T.T., Hassan, R., dan
Mohamad, M.M. 2011.*The Level of Marzano Higher Order Thinking Skills
Among Technical Education Students*. International Journal of Social and
humanity, Vol. 1,No. 2, July 2011, page.121.
- Irwanto, J. Dan Dafik. 2014.*Pewarnaan Titik Pada Graf Spesial dan Operasinya*.
Prosiding Seminar Nasional Matematika 2014 Vol. 1 No. 1: Universitas
Jember.
- Kaiser, T. 2014.*Strong parity vertex colouring of plane graphs*. University of
Primorska, Vol(16):14315.

- Lai, Hong-Jian dan Montgomery, Bruce. 2002. *Dynamic Coloring of Graphs*. (Artikel). West Virginia University, Morgantown, WV 26506-6310, page 12
- Lai, Hong-Jian, Montgomery, dan Hoifung. 2003. *Upper Bounds of Dynamic Chromatic Number*. (Artikel). West Virginia University, Morgantown, WV 26506-6310, page 193.
- Lewy, Zulkardi, dan Aisyah, Nyimas . 2009. *Pengembangan Soal untuk mengukur Kemampuan Berpikir Tingkat Tinggi Pokok Bahasan Barisan dan Deret Bilangan di Kelas IX Ak-selerasi SMP Xaverius Maria Palembang*. Jurnal Pendidikan Matematika, UNSRI.
- Lu, H. 2013. *Vertex colouring edge weighting of bipartite graphs with two edge weight*. Jurnal: Xian Jiatong University.
- Meena, dan Vaithilingam. 2012. *Prime Labeling For Some Fan Related Graphs*. P International Journal of Engineering Research dan Technology (IJERT), ISSN: 2278-0181, Vol. 1, page 2-3.
- Puspasari, D.T. dan Dafik. 2014. *Pewarnaan Titik Pada Graf Khusus: Operasi dan Aplikasinya*. Prosiding Seminar Nasional Matematika 2014 Vol. 1 No. 1: Universitas Jember.
- Santrock, John. 2008. *Psikologi Komunikasi*. Jakarta: Salemba Humanika.
- Sesa, J. 2014. *Penentuan Bilangan Kromatik Fraksional pada Operasi Amalgamasi Graf Lintasan dan Graf Siklus*. Jurnal Matematika Statistika dan Komputasi: Universitas Hasanuddin Vol. 6(2).
- Slamin. 2009. *Desain Jaringan: Pendekatan Teori Graf*. Jember: Jember University Press.
- Utari, Retno. 2008. *Taksonomi Bloom: Apa dan Bagaimana Cara Menggunakannya*. Pusdiklat KNKP, Widya Swara Madya.
- Vasudev, C. 2006. *Graph theory with application*. India: New age international publisher.
- Wibisono, Samuel. 2008. *MATEMATIKA DISKRIT edisi 2*. Yogyakarta: Graha ilmu.

Wulandari, N.I., Dafik, dan Agustin, I.H. 2015. *Analisis r -Dynamic Vertex Coloring Pada Hasil Operasi Graf Khusus*. Prosiding Seminar Nasional Matematika 2015 Vol. 1 No. 1: Universitas Jember.

Ye Chen, Suohai Fan, Lai, Huimin, Lei Sun.2012. *On dynamic coloring for planar graphs and graphs of higher genus*. Journal: Discrete Applied Mathematics 160 (2012) 10641071.

