Digital Repository Universitas Jember

PENENTUAN SOLUSI NUMERIK PERSAMAAN *m*KdV DENGAN METODE PREDIKTOR-KOREKTOR (*ADAMS BASHFORTH-MOULTON*) ORDE SEPULUH

SKRIPSI

Oleh:

Suro Imanul Afif
NIM 121810101038

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER
2017

Digital Repository Universitas Jember

PENENTUAN SOLUSI NUMERIK PERSAMAAN *m*KdV DENGAN METODE PREDIKTOR-KOREKTOR (*ADAMS BASHFORTH-MOULTON*) ORDE SEPULUH

SKRIPSI

disusun guna melengkapi tugas akhir sebagai salah satu persyaratan akademik pada program sarjana (S1) Jurusan Matematika FMIPA Universitas Jember

Oleh:

Suro Imanul Afif
NIM 121810101038

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER
2017

Digital Repository Universitas Jember

PERSEMBAHAN

Skripsi ini saya persembahkan untuk:

1. Ayah Sugito dan Ibu Sugiati yang telah memberikan cinta dan kasih sayangnya;
2. Kedua adik tercinta almarhumah Nafiatun Hasanah dan almarhum Muhammad Aziz.
3. Almarhum kakek Wagiman, Almarhum kakek Kertorani, Almarhumah nenek Tukirah, dan semua keluarga besarku yang selalu memberikan dukungan;
4. Semua guru dan dosen sejak sekolah dasar sampai perguruan tinggi yang telah membimbing dengan tulus dan memberikan ilmu yang bermanfaat;
5. Almamater Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember, SMAN 2 Tanggul, SMP Negeri 3 Tanggul, dan SDN Gambirono 02.

Digital Repository Universitas Jember

MOTO

"Sesungguhnya bersama kesulitan ada kemudahan. Maka apabila engkau telah selesai (dari suatu urusan), tetaplah bekerja keras untuk (urusan lain) dan hanya kepada Tuhanmu lah engkau berharap."

(terjemahan Q.S Al-Insyirah ayat 6-8)[1]

"Persiapan adalah akar untuk mendapatkan proses dan hasil yang tidak mengecewakan"

(Anonim)[2]

1 Departemen Agama Republik Indonesia. 2004. Al – *Qur'an* dan Terjemahannya. Bandung. CV Penerbit: J-ART.

2 Suro Imanul Afif (Penulis)

Digital Repository Universitas Jember

PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Suro Imanul Afif

NIM : 121810101038

Menyatakan dengan sesungguhnya bahwa karya ilmiah yang berjudul "Penentuan Solusi Numerik Persamaan *m*KdV dengan Metode Prediktor-Korektor (*Adams Bashforth-Moulton*) Orde Sepuluh" adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali kutipan yang sudah saya sebutkan sumbernya, belum pernah diajukan pada institusi manapun dan bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa ada tekanan dan paksaan dari pihak manapun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, Mei 2017

Yang menyatakan,

Suro Imanul Afif
NIM 121810101038

Digital Repository Universitas Jember

SKRIPSI

PENENTUAN SOLUSI NUMERIK PERSAMAAN *m*KdV DENGAN METODE PREDIKTOR-KOREKTOR (*ADAMS BASHFORTH-MOULTON*) ORDE SEPULUH

Oleh

Suro Imanul Afif

NIM 121810101038

Pembimbing:

Dosen Pembimbing Utama : M. Ziaul Arif, S.Si., M.Sc.

Dosen Pembimbing Anggota : Ahmad Kamsyakawuni, S.Si., M. Kom.

Digital Repository Universitas Jember

PENGESAHAN

Skripsi berjudul "Penentuan Solusi Numerik Persamaan *m*KdV dengan Metode Prediktor-Korektor (*Adams Bashforth-Moulton*) Orde Sepuluh" telah diuji dan disahkan pada:

hari, tanggal :

tempat : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Tim Penguji:

Ketua,	Anggota I
M. Ziaul Arif, S.Si., M.Sc. NIP. 198501112008121002	Ahmad Kamsayakawuni, S.Si., M. Kom. NIP. 197211291998021001
Anggota II,	Anggota III
Drs. Rusli Hidayat, M. Sc NIP. 196610121993031001	Kusbudiono, S.Si., M.Si. NIP. 197704302005011001

Mengesahkan

Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Universitas Jember

Drs. Sujito, Ph. D.
NIP. 196102041987111001

Digital Repository Universitas Jember

RINGKASAN

Penentuan Solusi Numerik Persamaan *m*KdV Dengan Metode Prediktor-Korektor (*Adams Bashforth-Moulton*) Orde Sepuluh. Suro Imanul Afif, 1218101038; 2017; 61 halaman; Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Fenomena gerakan gelombang air dalam ilmu kelautan sangat penting untuk dipelajari. Model dinamika dari gelombang laut menunjukkan model matematika dalam bentuk sistem persamaan diferensial parsial yang sulit diselesaikan dengan metode analitik. Oleh karena itu, metode yang dapat digunakan untuk menganalisis bentuk dan proses perambatan gelombang laut menuju pantai adalah metode numerik.

Pengetahuan inovatif untuk mengkaji model dinamika dari gelombang laut adalah menganggapnya sebagai deretan pulsa stabil. Fenomena tersebut lazim dikenal dengan nama gelombang soliton (*solitary wave*). Penelitian yang dilakukan yaitu dengan menyelesaikan persamaan KdV yang telah di modifikasi suku-suku perturbatifnya (*m*KdV) menggunakan metode Adams Bashforth-Moulton orde sepuluh dengan batasan persamaan yang digunakan berupa hasil modifikasi persamaan Korteweg-de Vries atau *m*KdV tipe 11.

Tujuan penelitian yang hendak dicapai yaitu menentukan solusi numerik metode Adams Bashforth-Moulton Orde Sepuluh dari persamaan *m*KdV beserta analisis kestabilannya sehingga dapat diperoleh berapa nilai galat ketika syarat kestabilan telah terpenuhi. Lebih jelasnya, metode Adams Bashforth-Moulton Orde Sepuluh dengan diskritisasi beda hingga orde empat untuk turunan pertama terhadap spasial dan metode beda hingga orde dua untuk turunan ketiga terhadap spasial, yang mana di kedua turunan spasial tersebut masing-masing menggunakan skema *one point and two points left and right* dalam mencari dua titik di awal dan di akhir diskritisasi. Sedangkan untuk diskritisasi temporal digunakan metode Adams Bashforth-Moulton yang formula skema numeriknya telah diturunkan dan dibuktikan untuk orde sepuluh serta digunakan metode Runge-Kutta untuk mencari

Digital Repository Universitas Jember

nilai q pada grid $s = 1, 2, \ldots, 9$ sehingga skema Adams Bashforth-Moulton orde sepuluh bisa diterapkan untuk menghitung nilai q pada grid temporal $s = 10, 11, 12, \ldots, N$. Solusi yang diperoleh diverifikasi dengan solusi analitik yang berupa gelombang soliton untuk untuk menunjukkan bahwa skema numerik yang diterapkan memberikan hasil yang bersesuaian dengan solusi yang sesungguhnya.

Penelitian ini sangat dipengaruhi oleh pengambilan nilai Δx dan Δt yang mana keduanya ditentukan dengan adanya analisis kestabilan dari skema Adams Bashforth-Moulton orde 10. Analisis kestabilan ini diperoleh dengan menerapkan analisis kestabilan Von Neumann dan teorema Enestrom-Kakeya sedemikian hingga terpenuhi kondisi faktor amplifikasi $|G| \leq 1$ baik terhadap skema prediktor maupun skema korektor. Dari analisis yang dilakukan diketahui bahwa semakin kecil nilai dari Δx maka nilai dari Δt harus kecil pula yang memenuhi pertidaksamaan $\Delta t \leq \frac{-1{,}468942281 \times 10^{-3} \Delta x^3}{2\sin(\theta)(\mathrm{C}(\cos(\theta)\Delta x^2 - 4\mathrm{C}\Delta x^2) + \cos(\theta) - 1)}$.

Setelah dilakukan simulasi numerik, hasil yang diperoleh menunjukkan metode Adams Bashforth-Moulton Orde 10 dapat diterapkan untuk menyelesaikan pesamaan *m*KdV secara numerik dan memberikan hasil yang mendekati solusi eksak dengan soliton tunggal. Pada kondisi stabil diperoleh galat sebesar $1{,}29 \times 10^{-2}$ dengan galat yang diperoleh semakin lama akan semakin besar dikarenakan adanya galat pemotongan beda hingga yang terakumulasi di setiap iterasinya.

Digital Repository Universitas Jember

PRAKATA

Puji syukur kehadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat, taufik serta karunia-Nya sehingga skripsi yang berjudul “Penentuan Solusi Numerik Persamaan *m*KdV Dengan Metode Prediktor-Korektor (*Adams Bashforth-Moulton*) Orde Sepuluh” dapat terselesaikan. Skripsi ini disusun guna memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan pendidikan strata 1 Studi Matematika (S1) dan mencapai gelar sarjana Sains pada Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Penyusunan skripsi ini tidak terlepas dari bantuan berbagai pihak baik secara langsung maupun tidak langsung. Oleh karena itu, penulis menyampaikan terima kasih kepada:

1. Drs. Sujito, Ph. D. selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam dan Kusbudiono, S.Si., M.Si. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember yang telah memberikan fasilitas-fasilitas hingga terselesaikannya penelitian;
2. M. Ziaul Arif, S.Si., M.Sc., selaku Dosen Pembimbing Utama dan Ahmad Kamsyakawuni, S.Si., M. Kom selaku Dosen Pembimbing Anggota yang telah memberikan bimbingan dan bantuan dalam pengerjaan skripsi ini;
3. Drs. Rusli Hidayat, M. Sc selaku Dosen Penguji I dan Kusbudiono, S.Si., M.Si. selaku Dosen Penguji II yang telah memberikan kritik dan saran yang membangun untuk penyempurnaan skripsi ini;
4. Dr. Alfian Futuhul Hadi, S.Si., M. Si selaku Dosen Pembimbing Akademik yang selama ini telah membimbing dalam pemilihan mata kuliah;
5. Seluruh dosen dan karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember yang telah memberikan ilmu serta membantu selama proses perkuliahan;
6. Ayah Sugito dan Ibu Sugiati yang selalu memberi doa dan dukungan baik lahir maupun batin;
7. Yulia Ismawati yang telah sabar dan memberi semangat, motivasi, dan bantuan moral serta materi untuk pengerjaan skripsi ini;

Digital Repository Universitas Jember

8. Teman-teman satu angkatan Bathic’s 12 yang telah memberi dukungan dalam hal pembelajaran ataupun hal lainnya selama perkuliahan dan terselesaikannya skripsi;
9. Kawan Lembaga Pers Mahasiswa MIPA ALPHA, Dewan Perwakilan Mahasiswa (DPM) P-K 2015 serta “Gens Una Sumus” UKM Catur Universitas Jember yang sudah memberikan wawasan dan menjadi teman saling berbagi ilmu pengetahuan;
10. Sahabat-sahabat tak terlupakan Jejen, Irman, Kiki, Massay, Fadil, Anton, Teddy, Deny, Ilham, Fajar, Mu’is, Rizky, Fenty, Viqe, Ninda, Winda, Devita, Ira dan Fahmi yang telah memberikan semangat dan dukungan moral dalam pengerjaan skripsi ini;
11. Agan-agan “Gretongan” Arif, Mas Beny, Alif, Imam dan Fendi yang selalu memberi inovasi-inovasi dan berbagai pengalaman hidup yang mengesankan;
12. Teman Kos terbaik Handryo Mugiarso dan Mulyadi yang telah banyak memberikan berbagai bantuan dan hiburan selama pengerjaan skripsi;
13. Semua pihak yang membantu terselesaikannya skripsi ini.

Penulis menyadari bahwa dalam menyusun skripsi ini masih banyak kekurangan baik isi maupun penyusunannya. Oleh karena itu, penulis mengharap kritik dan saran demi penyempurnaan penelitian selanjutnya. Akhirnya penulis berharap semoga skripsi ini dapat memberi manfaat dan sumbangan pengetahuan bagi pembaca.

Jember, Mei 2017 Penulis

Digital Repository Universitas Jember

DAFTAR ISI

Halaman

Digital Repository Universitas Jember

Digital Repository Universitas Jember

DAFTAR TABEL

Halaman

Digital Repository Universitas Jember

DAFTAR GAMBAR

Halaman

Digital Repository Universitas Jember

BAB 1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika merupakan ilmu yang sangat luas ruang lingkupnya, pendukung bagi perkembangan ilmu pengetahuan lain. Banyak masalah kehidupan sehari-hari yang sulit dipecahkan dan matematika dapat mengambil peranan untuk menyelesaikannya. Pemanfaatan matematika dalam bidang fisika dapat diterapkan pada teori mekanika, fluida, transfer panas, dan persamaan gelombang.

Fenomena gerakan gelombang air dalam ilmu kelautan sangat penting untuk dipelajari. Gerakan gelombang ini dapat dimodelkan dalam matematika dengan tujuan diperolehnya pendekatan model terkait bentuk dan proses perambatan gelombang laut menuju pantai.

Secara matematis, model dinamika dari gelombang laut menunjukkan model matematika dalam bentuk sistem persamaan diferensial parsial yang sulit diselesaikan dengan metode analitik. Oleh karena itu, metode yang dapat digunakan untuk menganalisis bentuk dan proses perambatan gelombang laut menuju pantai adalah metode numerik.

Metode numerik yang pernah digunakan oleh peneliti lain yaitu Sehah dan J. Amanudin (2009) berupa penentuan solusi numerik persamaan *basic* Korteweig-de Vries (bKdV) dengan metode beda hingga dimana dilakukan dengan menunjukkan analisis *envelope* gelombang pada amplitudo awal dan waktu tertentu.

Pengetahuan inovatif untuk mengkaji model dinamika dari gelombang laut adalah menganggapnya sebagai deretan pulsa stabil. Fenomena tersebut lazim dikenal dengan nama gelombang soliton (*solitary wave*). Model ini direpresentasikan dalam bentuk Persamaan Korteweg-de Vries atau KdV. Karakteristik gelombang soliton dalam air dapat diketahui dengan melakukan modifikasi terhadap suku-suku gangguan (perturbatif) persamaan KdV (Sehah, 2009). Modifikasi persamaan Koteweg-de Vries atau *m*KdV berupa KdV dengan

Digital Repository Universitas Jember

adanya pengubahan fokus perturbatif sehingga mendeskripsikan perambatan panjang gelombang pada media dispersif (Trogdon, 2012).

Metode numerik yang dapat digunakan untuk memodelkan dinamika gelombang laut dengan persamaan KdV adalah metode prediktor-korektor Adams Bashforth-Moulton yang terbukti dapat digunakan meminimalkan *error* numerik akibat kesalahan pemotongan (*truncation error*) dari deret Taylor. Perhitungan metode ini dikerjakan dengan iterasi berurutan sehingga dapat memudahkan proses pemrograman komputer.

Penelitian terdahulu terkait metode prediktor-korektor Adams Bashforth-Moulton dilakukan oleh Ripin (2012) pada tesisnya yang berjudul Metode Adams Bashford-Moulton Orde Delapan terhadap Metode Runge-Kutta Orde Enam pada Model Penyebaran Virus Avian Influensa. Pada penelitian tersebut metode Adams-Bashford digunakan sebagai prediktor sedangkan metode Adams-Moulton digunakan sebagai korektor dengan hasil yang didapat metode Adams Bashford-Moulton lebih efektif dari pada metode Runge-Kutta. Diperoleh error sebesar $2{,}89439083879119\times 10^{-4}$ untuk metode Adams Bashford-Moulton dan $3{,}164918183387044 \times 10^{-4}$ untuk metode Runge-Kutta, serta didapatkan metode Adams Bashford-Moulton jumlah iterasinya lebih efisien dari metode Runge-Kutta.

Berdasarkan kelebihan metode Adams Bashforth-Moulton sebagai metode prediktor-korektor yang mampu mengurangi nilai galat melebihi dari metode Runge-Kutta tersebut peneliti tertarik untuk menyelesaikan persamaan KdV yang telah di modifikasi suku-suku perturbatifnya (*m*KdV) menggunakan metode Adams Bashforth-Moulton.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, rumusan masalah yang akan dibahas dalam tugas akhir ini adalah sebagai berikut:

a. Bagaimana solusi numerik metode Adams Bashforth-Moulton orde 10 terhadap persamaan *m*KdV?
b. Bagaimana analisis kestabilan metode Adams Bashforth Moulton orde 10 terhadap persamaan *m*KdV?

Digital Repository Universitas Jember

c. Bagaimana galat dari metode Adams Bashforth-Moulton orde 10 terhadap persamaan *m*KdV?

1.3 Batasan Masalah

Batasan masalah yang digunakan pada karya tulis ini adalah persamaan yang digunakan berupa hasil modifikasi persamaan Korteweg-de Vries atau *m*KdV tipe 11 pada jurnal Physic Letter (Fu, 2004).

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan yang akan dicapai dalam tugas akhir ini adalah sebagai berikut:

a. Menentukan solusi numerik metode Adams Bashforth-Moulton dari persamaan *m*KdV gelombang air laut.
b. Menentukan analisis kestabilan metode Adams Bashforth Moulton orde 10 terhadap persamaan *m*KdV.
c. Memperoleh galat dari metode Adams Bashforth-Moulton orde 10 terhadap persamaan *m*KdV.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat yang dapat diambil dari penulisan tugas akhir ini adalah sebagai berikut:

a. Memberikan informasi terkait solusi numerik metode Adams Bashforth-Moulton dari persamaan *m*KdV gelombang air laut.
b. Memberikan informasi analisis kestabilan metode Adams Bashforth Moulton orde 10 terhadap persamaan *m*KdV.
c. Memberikan informasi galat dari metode Adams Bashforth-Moulton orde 10 terhadap persamaan *m*KdV.

Digital Repository Universitas Jember

BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial diperkenalkan oleh Leibniz pada tahun 1676. Persamaan diferensial merupakan persamaan fungsi turunan yang ada dalam permasalahan matematika. Metode yang digunakan untuk solusi persamaan diferensial adalah metode analitik, tetapi ada persamaan yang tidak dapat diselesaikan dengan menggunakan metode analitik sehingga diperlukan adanya metode lain untuk mendekati nilai sebenarnya yaitu dengan menggunakan metode numerik (Glenn, 2005).

Persamaan diferensial dapat dibagi menjadi dua, yaitu persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial.

2.1.1 Persamaan Diferensial Biasa

Persamaan diferensial biasa adalah persamaan yang menyatakan hubungan antara satu fungsi (variabel tak bebas) dengan satu variabel bebas dan turunan dari fungsi tersebut terhadap variabel bebasnya. Variabel *y* biasa digunakan sebagai variabel tak bebas, sedangkan *t* atau *x* biasa digunakan sebagai variabel bebasnya.

Persamaan diferensial biasa linier adalah bentuk persamaan yang di dalamnya hanya terdapat turunan yang berderajat satu dan tidak ada koefisien yang bergantung pada variabel tak bebasnya.
Contoh:

$$\frac{dy}{dx} + ay = F(x)$$

Secara umum persamaan diferensial biasa linier orde *n*, dalam variabel tak bebas *y* dan variabel bebas *x* dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$a_n(x)y^n + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = F(x)$$

dengan $a_n \neq 0$.

Jika terdapat koefisien yang bergantung pada variabel tak bebasnya atau turunan di dalam persamaan berderajat lebih dari satu maka persamaan tersebut disebut persamaan diferensial biasa non-linier (Hoffman, 2001).

Digital Repository Universitas Jember

Contoh:

$$y\frac{dy}{dx} + ay = F(x)$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + ay = F(x)$$

2.1.2 Persamaan Diferensial Parsial

Persamaan diferensial parsial (PDP) adalah persamaan yang memuat hubungan antara variabel bebas, variabel tak bebas dan turunan parsial dari variabel tak bebas tersebut, di mana variabel tak bebas merupakan fungsi yang tidak diketahui dari variabel-variabel bebas.

Contoh:

$$u_x + u_y = 0,$$

dengan $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ dan $u_y = \frac{\partial u}{dy}$ (Pinsky, 2003).

PDP bersifat linier jika fungsinya linier terhadap peubah terikatnya dan semua turunan parsialnya, dan disebut kuasilinier jika fungsinya hanya linier dalam turunan tertingginya.

Contoh:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0,$$

dengan $u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}$ dan $u_{yy} = \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y}$.

Jika suatu PDP tidak linier dan juga tidak kuasilinier, maka persamaan itu disebut PDP nonlinier.

Contoh:

$$u_x + uu_y = 0$$

dengan $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ dan $u_y = \frac{\partial u}{dy}$ (Hidayat, 2006).

Digital Repository Universitas Jember

2.2 Deret Taylor

Deret Taylor merupakan dasar yang digunakan untuk menyelesaikan masalah metode numerik, terutama penyelesaian persamaan diferensial. Jika suatu fungsi $T(x)$ diketahui di titik x_r dan semua turunan dari T terhadap x diketahui pada titik tersebut, maka dengan deret Taylor dapat dinyatakan nilai T pada titik x_{r+1} yang terletak pada jarak Δx dari titik x_r.

$$T(x_{r+1}) = T(x_r) + T'(x_r)\frac{\Delta x}{1!} + T'(x_r)\frac{\Delta x}{2!} + \ldots + T^{(s)}(x_r)\frac{\Delta x^s}{n!} + R_s$$

Keterangan:

$T(x_r)$: fungsi di titik x_r,

$T(x_{r+1})$: fungsi di titik x_{r+1},

$T, T', T'', T''', \ldots, T^{(s)}$: turunan pertama, kedua, ketiga, … , ke-s dari fungsi,

Δx : langkah ruang, yaitu jarak antara x_r dan x_{r+1},

R_s : kesalahan pemotongan,

(Triatmojo, 2002).

2.3 Kesalahan Pemotongan

Deret Taylor akan memberikan perkiraan suatu fungsi dengan akurat jika semua suku dalam deret tersebut diperhitungkan. Dalam kenyataannya hanya beberapa suku pertama saja yang diperhitungkan sehingga hasil perkiraan tidak tepat seperti hasil penyelesaian analitik. Kesalahan karena tidak diperhitungkannya suku-suku akhir deret Taylor disebut kesalahan pemotongan (Triatmojo, 2002).

2.4 Metode Beda Hingga

Suatu metode numerik yang memanfaatkan deret Taylor untuk mendekati nilai turunan disebut metode beda hingga. Pendekatan turunan dengan menggunakan rumusan beda hingga dapat dilakukan dari kiri, kanan atau titik tengah yang akan digunakan untuk menentukan nilai fungsi pada titik tertentu yang biasa dikenal dengan beda maju, beda mundur dan beda pusat (Ross, 1984).

Digital Repository Universitas Jember

Berikut ini persamaan-persamaan pendekatan beda mundur, beda maju dan beda pusat untuk turunan pertama dengan kesalahan Δx:

a. Pendekatan Beda Maju untuk Turunan Pertama

Misalkan u adalah suatu fungsi dari variabel spasial x dan variabel temporal t, dengan $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ adalah turunan parsial u terhadap x, maka deret Taylor dari u di titik $x_0 + h$ adalah sebagai berikut:

$$u(x_0 + h, t) = u(x_0, t) + hu_x(x_0, t) + \frac{h^2}{2!}u_{xx}(x_0, t) + \ldots + \frac{h^3}{3!}u_{xxx}(x_0, t) + \frac{h^4}{4!}u_{xxxx}(\xi, t), \text{ untuk suatu } x_0 \leq \xi \leq x_0 + h. \quad (2.1)$$

Berdasarkan persamaan (2.1) maka diperoleh:

$$u_x(x_0, t) = \frac{u(x_0+h,t)-u(x_0,t)}{h} - h\frac{u_x - u(\xi,t)}{h}. \quad (2.2)$$

Jika diambil suatu grid r untuk variabel spasial x, grid s untuk variabel temporal t, $h = \Delta x$ dan $u(x = r\Delta x, t = s\Delta x) = (u_x)_r^s$ maka persamaan (2.2) menjadi:

$$(u_x)_r^s = \frac{u_{r+1}^s - u_r^s}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{2}u_{xx}$$

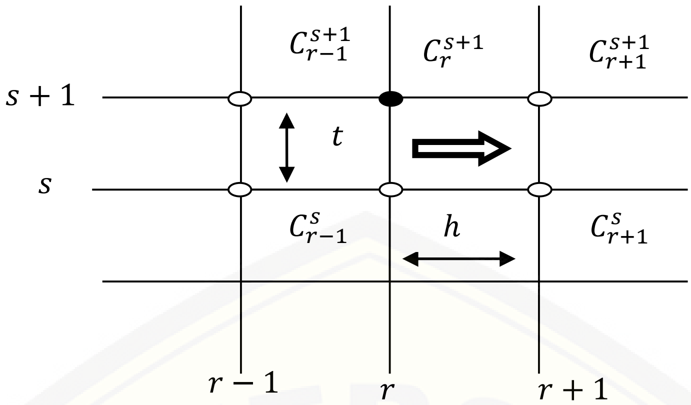
Jika Δx semakin mengecil, maka:

$$(u_x)_r^s \approx \frac{u_{r+1}^s - u_r^s}{\Delta x}. \quad (2.3)$$

Persamaan (2.3) adalah bentuk pendekatan beda maju untuk turunan pertama dengan kesalahan pemotongan Δx.

Menurut Candra (2011) pada skema maju, titik hitung r dihubungkan dengan titik hitung $(r + 1)$. Dimana grid r untuk variabel x dan grid s untuk variabel t yang lebih jelas dapat dilihat pada Gambar 2.1.

Digital Repository Universitas Jember



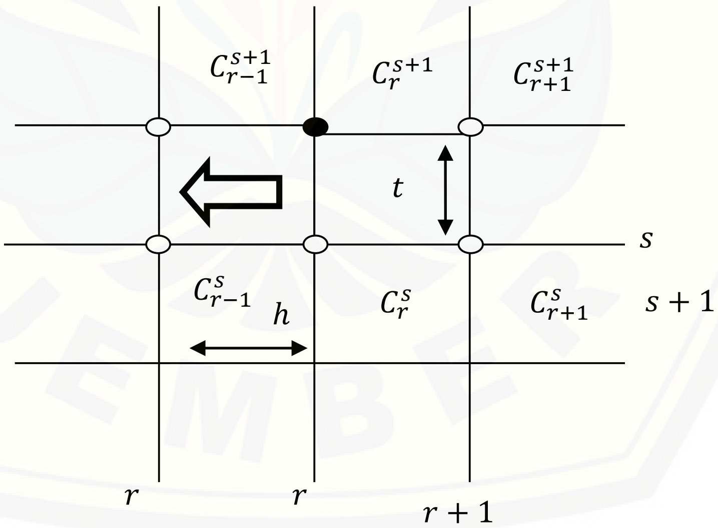
Gambar 2.1 Skema maju

b. Pendekatan Beda Mundur untuk Turunan Pertama

Dengan cara yang sama pada point (a) akan diperoleh bentuk pendekatan beda mundur untuk turunan pertama dengan kesalahan pemotongan Δx:

$$(u_x)_r^s \approx \frac{u_r^s - u_{r-1}^s}{\Delta x}.$$

Seperti skema maju, grid r untuk variabel x dan grid s untuk variabel t yang lebih jelas dapat dilihat pada Gambar 2.2.



Gambar 2.2 Skema mundur

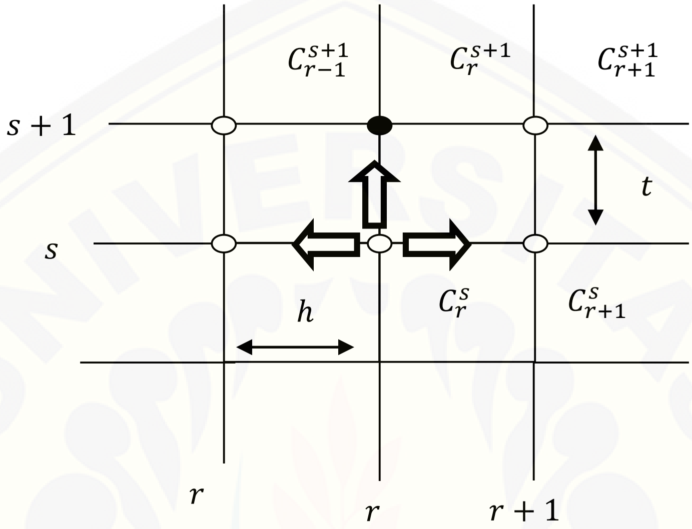
c. Pendekatan Beda Pusat untuk Turunan Pertama

Dengan cara yang sama pada point (a) akan diperoleh bentuk pendekatan beda terpusat untuk turunan pertama dengan kesalahan pemotongan Δx:

Digital Repository Universitas Jember

$$(u_x)_r^s \approx \frac{u_{r-2}^s - 8u_{r-1}^s + 8u_{r+1}^s - u_{r+2}^s}{12\Delta x}$$

Beda hingga pusat dilakukan di titik x_{r-1} dan x_{r+1}, dan grid r untuk variabel x serta grid s untuk variabel t yang lebih jelas dapat dilihat pada Gambar 2.3.



Gambar 2.3 Skema tengah

keterangan:

$(u_x)_r^s$: pendekatan turunan u terhadap x pada grid spasial r dan grid temporal s,

u_{r-2}^s, u_{r-1}^s, u_r^s, u_{r+1}^s, u_{r+2}^s : nilai fungsi u pada grid spasial $r-2$, $r-1$, r, $r+1$, $r+2$ grid temporal s,

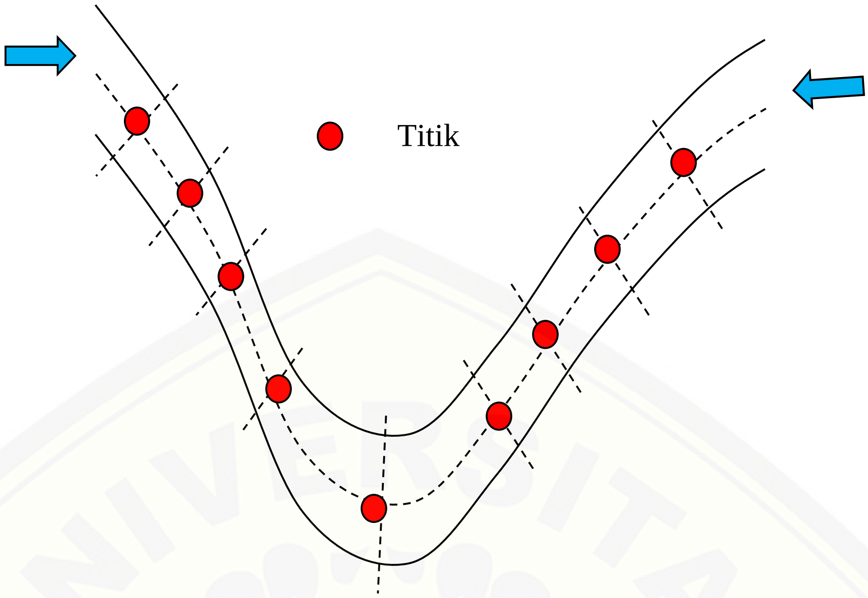
Δx : nilai kesalahan pemotongan.

(Sahid, 2004).

2.5 Diskritisasi

Diskritisasi sering disebut dengan cacahan. Diskritisasi ini merupakan bagian-bagian kecil hasil dari potongan atau bagi sebuah benda atau struktur yang akan dianalisis. Bagian kecil tersebut disebut grid. Banyaknya grid yang dibentuk tergantung pada bentuk benda yang dianalisis. Berikut ini contoh diskritisasi aliran sungai.

Digital Repository Universitas Jember



Gambar 2.4 Contoh diskritisasi aliran sungai

Dengan adanya diskritisasi, grid yang lebih kecil tidak mengurangi sistem yang asli karena sistem yang asli merupakan suatu keseluruhan benda sebelum dicacah. Daerah kompleks yang mendefinisikan kontinuitas akan mengalami diskritisasi atau dibagi menjadi sejumlah sub daerah atau potongan-potongan geometrik sederhana yang tidak saling tumpang tindih (Candra, 2011).

2.6 Metode Prediktor-Korektor (*Adams Bashforth-Moulton*)

Metode Prediktor-Korektor (*Adams Basforth-Moulton*) merupakan salah satu metode numerik banyak langkah. Metode ini dinamakan metode banyak langkah karena metode ini menggunakan lebih dari satu nilai titik sebelumnya untuk menentukan nilai pendekatan titik berikutnya. Akan tetapi metode ini tidak mempunyai nilai di titik sebelumnya yang akan digunakan untuk menentukan nilai pendekatan di titik selanjutnya. Pada kasus ini, metode lain (Runge-Kutta, Euler's dan lain-lain) diperlukan dalam menentukan nilai awal.

Terdapat dua bagian dalam metode ini, yaitu Prediktor dan Korektor. Bagian Prediktor digunakan untuk memprediksi nilai dari suatu fungsi yang tidak diketahui pada titik tertentu. Sedangkan bagian Korektor digunakan untuk mengoreksi atau mengembangkan keakuratan dari hasil yang sudah diprediksi oleh Prediktor (McCuen dan Ayyub, 1996).

Digital Repository Universitas Jember

Persamaan diferensial biasa yang berbentuk,

$$y' = f(x,y) \qquad a \le x \le b,\ y(a) = \alpha$$

dapat diselesaikan dengan metode banyak langkah dengan cara menentukan pendekatan nilai y_{i+1} pada titik x_{i+1} yang diwakili persamaan berikut:

$$y_{i+1} = a_{m-1}y_i + a_{m-2}y_{i-1} + \ldots + a_0 y_{i+1-m} +$$
$$h[b_m f(x_{i+1}, y_{i+1}) + b_{m-1} f(x_i, y_i) + \ldots + b_0 f(x_{i+1-m}, y_{i+1-m})] \qquad (2.4)$$

dengan m adalah bilangan bulat lebih besar dari 1, $i = m - l, l, \ldots, N - l,$ dan nilai awal,

$$y_0 = \alpha,\ \ y_1 = \alpha_1, \qquad y_2 = \alpha_2, \ldots, y_{m-1} = \alpha_{m-1},$$

Serta $h = \frac{b-a}{N}$.

Jika $b_m = 0$, maka persamaan (2.4) disebut persamaan eksplisit, tapi jika $b_m \neq 0$ maka disebut persamaan implisit (Richard dan Douglas, 1989).

2.6.1 Prediktor (Adams-Bashforth)

Metode Prediktor disebut juga sebagai metode eksplisit. Metode ini digunakan untuk memprediksi nilai suatu fungsi pada titik tertentu. Untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa yang berbentuk,

$$y' = f(x,y)\ \ a \le x \le b, y(a) = \alpha$$

dapat ditentukan dengan mengekspansi deret Taylor maju dari fungsi y sebagai berikut:

$$y_{i+1} = y_i + f_i h + \frac{f_i'}{2}h^2 + \frac{f_i^n}{6}h^3 + \cdots$$

atau dapat ditulis sebagai berikut:

$$y_{i+1} = y_i + h(f_i + \frac{f_i'}{2}h + \frac{f_i''}{6}h^2 + \cdots)$$

Dengan menggunakan pendekatan beda hingga pada turunan di ruas kanan maka berbagai persamaan eksplisit atau prediktor (*Adams-Bashforth*) dapat dicari persamaan dan kesalahan pemotongan (Chapra dan Canale, 2002). Persamaan Prediktor tersebut antara lain:

Digital Repository Universitas Jember

a. Adams-Bashforth orde dua,

$$y_0 = \alpha, y_1 = \alpha_1$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[3f(x_i, y_i) - f(x_{i-1}, y_{i-1})] + \frac{5}{12}y^m(\xi)h^2,$$

dimana $i = 1, 2, \dots, N-1$, dan $x_{i-1} \leq \xi < x_{i+1}$.

b. Adams-Bashforth orde tiga,

$$y_0 = \alpha, \qquad y_1 = \alpha_1, \qquad y_2 = \alpha_2$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{12}[13f(x_i, y_i) - 16f(x_{i-1}, y_{i-1})] + 5f(x_{i-2}, y_{i-2})$$

$$+\frac{3}{8}y^4(\xi)h^3.$$

dimana $i = 1, 2, \dots, N-1$, $x_{i-1} \leq \xi \leq x_{i+1}$ dan seterusnya. Jadi, semakin tinggi ordenya maka diperlukan nilai awal yang semakin banyak pula (Richard dan Douglas, 1989).

2.6.2 Korektor (Adams-Moulton)

Metode Korektor disebut juga sebagai metode implisit. Metode ini digunakan untuk mengoreksi atau mengembangkan keakuratan pendekatan nilai suatu fungsi pada titik tertentu yang sudah diprediksi atau dicari oleh Prediktor. Untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa yang berbentuk,

$$y' = f(x, y) \;\; a \leq x \leq b, y(a) = \alpha$$

dapat ditentukan dengan mengekspansi deret Taylor mundur dari fungsi y sebagai berikut:

$$y_{i+1} = y_i + f_i h + \frac{f_i'}{2}h^2 + \frac{f_i^n}{6}h^3 + \dots$$

atau dapat ditulis sebagai berikut:

$$y_{i+1} = y_i + h(f_{i+1} - \frac{f_{i+1}'}{2}h + \frac{f_{i+1}''}{6}h^2 + \dots)$$

Dengan menggunakan pendekatan beda hingga pada turunan di ruas kanan maka berbagai persamaan eksplisit atau korektor (*Adams-Moulton*) dapat dicari persamaan dan kesalahan pemotongan (Chapra dan Canale, 2002). Persamaan Korektor tersebut antara lain:

Digital Repository Universitas Jember

a. Adams-Moulton orde tiga,

$$y_0 = \alpha, \qquad y_1 = \alpha_1,$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{12}[5f(x_{i+1}, y_{i+1}) + 8f(x_i, y_i) - f(x_{i-1}, y_{i-1})] - \frac{1}{24}y^4(\xi)h^3$$

dimana $i = 1, 2, \dots, N-1$, dan $x_{i-1} \le \xi \le x_{i+1}$.

b. Adams-Moulton orde empat,

$$y_0 = \alpha, \qquad y_1 = \alpha_1, \qquad y_2 = \alpha_2$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}[9f(x_{i+1}, y_{i+1}) - 19f(x_i, y_i) - 5f(x_{i-1}, y_{i-1}) + f(x_{i-2}, y_{i-2})]$$
$$- \frac{19}{720}y^5(\xi)h^3$$

dimana $i = 1, 2, \dots, N-1$, $x_{i-1} \le \xi \le x_{i+1}$ dan seterusnya. Jadi, semakin tinggi ordenya maka diperlukan nilai awal yang semakin banyak pula (Richard dan Douglas, 1989).

2.7 Analisis Kestabilan

Penerapan suatu skema numerik pada suatu persamaan differensial parsial menghasilkan suatu persamaan beda hingga. Solusi numerik dari persamaan beda hingga tersebut belum tentu menghasilkan solusi yang sama dengan solusi eksak dari persamaan differensial parsial tersebut. Suatu persamaan beda hingga dikatakan stabil jika skema tersebut menghasilkan solusi yang terbatas (berhingga) dan jika solusi yang diperoleh dari skema tersebut tidak terbatas, maka dikatakan tidak stabil.

Dalam menganalisis kestabilan suatu persamaan beda, ada beberapa metode yang dapat digunakan. Salah satu metode yang banyak digunakan dalam menganalisis kestabilan persamaan beda hingga diantaranya metode V*on Neumann*. Dalam metode ini, suatu solusi dari persamaan beda hingga diekspansi dengan menggunakan sebuah komponen *Deret Fourier* sebagai

$$C_r^s = \rho^s e^{IP(\Delta x)r} \qquad (2.5)$$

dengan:

$C_{r,t}^s$: konsentrasi polutan saat s pada indeks r, t

ρ^s : amplitude pada waktu s

Digital Repository Universitas Jember

I : bilangan imajiner $\sqrt{-1}$

P : gelombang pada arah x

Q : gelombang pada arah y

Persamaan (2.5) di atas disubstitusikan ke dalam persamaan beda yang akan dianalisis kemudian ditentukan kondisi bagi Δx dan Δt agar $|\rho| \leq 1$ yang artinya untuk kondisi tersebut persamaan beda yang dibuat menghasilkan solusi yang berhingga. Kondisi kestabilan dari metode *Von Neumann* dapat dituliskan sebagai berikut:

a. Jika untuk nilai Δx dan Δt tertentu, $|p| \leq 1$ maka persamaan beda yang dibuat bersifat stabil bersyarat.
b. Jika $|p| \leq 1$ untuk semua nilai Δx dan Δt, maka persamaan beda yang dibuat bersifat stabil tak bersyarat.
c. Jika tidak dapat ditemukan Δx dan Δt sehingga $|p| \leq 1$, maka persamaan beda tersebut bersifat tidak stabil.

(Greenberg, 1978).

2.8 Teorema Enestrom-Kakeya

Jika $p(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j$ merupakan sebuah polinolimial dengan derajat n dengan koefisien kompleks dimana $|Rea_j| = \alpha_j$ dan $Ima_j = \beta$ untuk $j = 0,1,2,\ldots,n$, memenuhi $0 \leq \alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \ldots \leq \alpha_n, \alpha_n \neq 0$, maka semua pembuat nol dari p terletak di dalam:

$$\frac{1}{2M_1^2}\left[-R^2|b|(M_1 - |a_0|) + \{4|a_0|R^2M_1^3 + R^4|b|^2(M_1 - |a_0|)^2\}^{\frac{1}{2}}\right] \leq |z| \leq R$$

dengan:

$$R = \frac{c}{2}\left(\frac{1}{\alpha_n} - \frac{1}{M_2}\right) + \left\{\frac{c^2}{4}\left(\frac{1}{\alpha_n} - \frac{1}{M_2}\right)^2 + \frac{M_2}{\alpha_n}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

dan $M_1 = \alpha_n r$, $M_2 = R^n[(\alpha_n + |\beta_n|)R + \alpha_n r - (\alpha_0 + |\beta_0|)\,]$,

$c = |a_n - a_{n-1)}|$, $b = a_1 - a_0$, $r = 1 + \frac{1}{\alpha\_n}\left(2\sum_{j=0}^{n-1}|\beta_j| + |\beta_n|\,\right)$.

(Gardner dan Govil, 2014).

Digital Repository Universitas Jember

2.9 Persamaan *modified* Korteweg-de Vries (*m*KdV)

Persamaan *modified* Korteweg-de Vries (*m*KdV) merupakan pengembangan dari persamaan Korteweg-de Vries (KdV) yang telah dimodifikasi suku-suku gangguan atau suku perturbatifnya. Persamaan KdV dan *m*KdV merepresentasikan model dinamika *solitary wave* $q(x,t)$ yang menunjukkan pergerakan gelombang di posisi *x* pada waktu *t*. Model persamaan KdV adalah sebagai berikut:

$$q_t + 6qq_x + q_{xxx} = 0$$
$$q(x,0) = q_0(x) \in \mathbb{R}$$

Sedangkan model persamaan *m*KdV adalah sebagai berikut:

$$\begin{gathered} q_t + 6q^2q_x + q_{xxx} = 0 \\ q(x,0) = q_0(x) \in \mathbb{R} \\ \{-L \le x \le L\} \text{ dan } t \ge 0 \end{gathered} \tag{2.6}$$

dengan syarat batas:

$$q(-L,t) = 0\ ,\ q(L,t) = 0 \quad \text{dan } q_x(L,t) = 0$$

Keterangan:

$q(x,0)$: solusi fungsi pada saat waktu t = 0
q_t : turunan pertama terhadap fungsi *t*
q_x : turunan pertama terhadap fungsi *x*
q_{xxx} : turunan ketiga terhadap fungsi *x*
L : panjang selang x
t : lama waktu
(Deconinck, 2006).

2.10 Solusi Eksak Persamaan *modified* Korteweg-de Vries (*m*KdV)

Berdasarkan jurnal yang ditulis oleh Ismail, H. N yang berjudul “Solitary Wave solutions for the general KDV equation by Adomian decomposition method” ada halaman 17-19, solusi eksak dari persamaan *m*KdV adalah sebagai berikut:

$$q(x,t) = \left[\frac{c(p+1)(p+2)}{2\epsilon}\operatorname{sech}^2\big(k(x - xo - ct)\big)\right]^{\frac{1}{p}} \tag{2.7}$$

Digital Repository Universitas Jember

dengan $k = \left(\frac{p}{2}\right)\sqrt{\frac{c}{\mu}}$, ϵ adalah koefisien dari $q^p q_x$, μ adalah koefisien dari q_{xxx}, dan p adalah derajat polinom mKdV pada suku $q^p q_x$.

Solusi eksak dari persamaan (2.6) dengan $c = 1, p = 2, \mu = 1, dan\ \epsilon = 6$ maka berdasarkan persamaan (2.7) diperoleh sebagai berikut:

$$q(x,t) = \left[\frac{1(2+1)(2+2)}{2(6)}\operatorname{sech}^2\left((\frac{2}{2}\sqrt{\frac{1}{1}}(x - 1(t))\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[\frac{12}{12}\operatorname{sech}^2\left((x - t)\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \operatorname{sech}(x - t)$$

(Ismail, 2004).

2.11 MATLAB

MATLAB adalah bahasa pemrograman level tinggi yang dikhususkan untuk komputasi teknis. Semakin tinggi level bahasa semakin mudah cara menggunakannya. Bahasa dalam MATLAB mengintegrasikan kemampuan komputasi, visualisasi, dan pemrograman dalam suatu lingkungan yang tunggal dan mudah untuk digunakan. Selain itu, MATLAB juga menggunakan konsep *array*/matrik sebagai standar variabel elemennya. Dalam lingkungan pendidikan ilmiah, MATLAB menjadi alat pemrograman standar bidang Matematika. Sedangkan dalam lingkungan industri, MATLAB dapat menjadi pilihan paling produktif untuk riset, pengembangan dan analisa.

Dengan adanya MATLAB maka dapat memberikan jawaban sekaligus tantangan. MATLAB juga menyediakan beberapa pilihan untuk dipelajari. Mempelajari metode visualisasi saja, pemrograman saja atau kedua – keduanya. Selain itu, MATLAB juga memberikan keuntungan bagi programmer – developer program yaitu untuk menjadi program pembanding yang sangat handal, hal tersebut dapat dilakukan karena kekayaannya akan fungsi matematika, fisika, statistik dan visualisasi (Away, 2010).

Digital Repository Universitas Jember

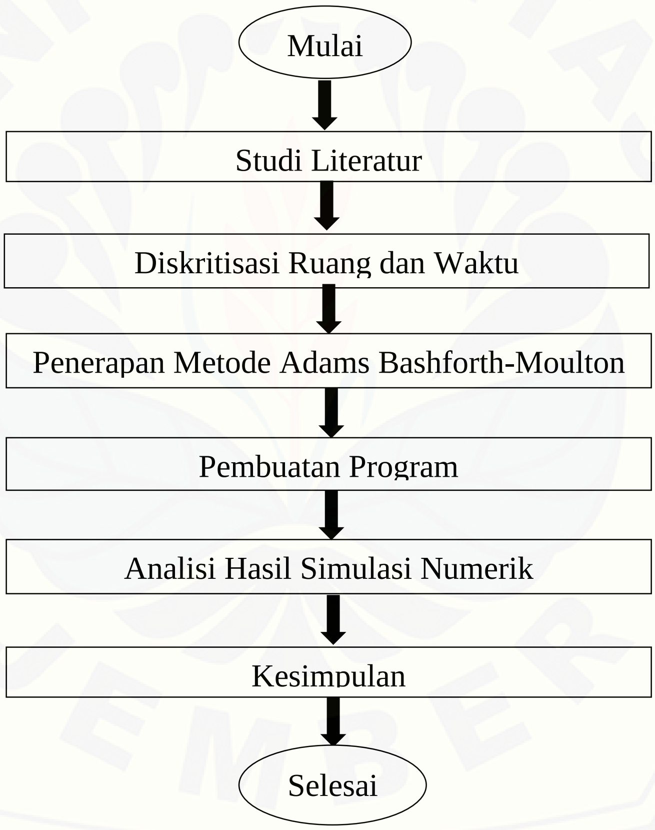
BAB 3. METODE PENELITIAN

3.1 Data Penelitian

Data penelitian yang digunakan adalah data sekunder berupa persamaan *m*KdV.

3.2 Langkah-langkah Penelitian

Skema sistematik, langkah-langkah penelitian yang akan dilakukan dapat dilihat pada Gambar 3.1



Gambar 3.1 Skema langkah-langkah penelitian

Digital Repository Universitas Jember

Adapun penjelasan dari skema langkah-langkah penelitian pada Gambar 3.1 adalah sebagai berikut:

a. Studi Literatur

Langkah awal yang dilakukan adalah mengumpulkan berbagai *literature* tentang metode Prediktor-Korektor (*Adams Bashforth-Moulton*) dan Persamaan *modified* Korteweg-de Vries (*m*KdV) dari artikel ilmiah, skripsi, tesis maupun buku-buku beserta solusi trivial persamaan *m*KdV.

b. Penerapan Metode Prediktor-Korektor

Penerapan metode Prediktor-Korektor tak lepas dai metode beda hingga yang digunakan untuk deskritisasi spasial atau ruang. Sedangkan penerapan metode Adams Bashforth-Moulton digunakan untuk simulasi deskritisasi ruang atau waktu. Penerapan metode dalam skripsi ini adalah metode Adams Bashforth-Moulton orde 10.

c. Pembuatan Program

Langkah penelitian berikutnya adalah pembuatan program yang menggunakan software matematika yaitu MATLAB 6.5. Pada langkah ini, penulis akan membuat script program berdasarkan metode yang digunakan.

d. Simulasi Numerik

Hasil dari simulasi numerik akan dibandingkan dengan solusi trivial dari *m*KdV.

e. Kesimpulan

Penarikan kesimpulan diberikan untuk memberikan penegasan dan penjelasan kembali secara global tentang pencapaian perolehan pembandingan solusi eksak dengan solusi yang diperoleh menggunakan metode Prediktor-Korektor (*Adams Bashforth-Moulton*) Orde 10.

Digital Repository Universitas Jember

BAB 5. PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan yang telah dikemukakan pada bab 4, dapat disimpulkan beberapa hal sebagai berikut:

a. Metode Adams Bashforth-Moulton Orde 10 dapat diterapkan untuk menyelesaikan pesamaan mKdV secara numerik dan memberikan hasil yang mendekati solusi eksak dengan soliton tunggal.
b. Analisis kestabilan metode Adams Bashforth-Moulton orde 10 terhadap persamaan mKdV dapat ditentukan dengan menerapkan teorema Enestrom-Kakeya sedemikian hingga diperoleh kondisi stabil bersyarat.
c. Galat dari metode Adams Bashfort-Moulton orde 10 pada kondisi stabil yang terlihat dalam Gambar 4.1 sebesar $1{,}29 \times 10^{-2}$. Dapat dilihat bahwa galat yang diperoleh semakin lama akan semakin besar dikarenakan adanya galat pemotongan beda hingga yang terakumulasi di setiap iterasinya.

5.2 Saran

Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan, disarankan untuk peneliti selanjutnya agar penentuan syarat kestabilan dapat ditentukan kondisi $|G| \leq 1$ dengan langsung diperoleh hasil modulusnya meskipun itu polynomial berderajat tinggi tanpa menggunakan teorema tertentu. Hal tersebut bisa dilakukan dengan bantuan program tertentu selain Matlab, Maple dan Mathematica yang sudah peneliti saat ini gunakan tetapi tidak dapat memperoleh hasil modulus dari faktor amplifikasi jika berupa polinomial berderajat tinggi.

Digital Repository Universitas Jember

DAFTAR PUSTAKA

Away, G. A. 2010. *The Shortcut of MATLAB Programming*. Bandung: Informatika.

Bukaryo, S. R. 2014. Efektivitas Metode Adams Bashforth-Moulton Orde Delapan terhadap Metode Runge-Kutta Orde Enam pada Model Penyebaran Virus Avian Influenza. *Tesis*. Jember: Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Candra, R. 2011. Analisis Stabilitas Metode Forward Time Center Space (FTCS) dan Lax Wendroff pada Simulasi Penyelesaian Persamaan Adveksi. *Skripsi*. Medan: Universitas Sumatera Utara.

Chapra, S.C. dan R.P. Canale. 2002. *Numerical Methods for Engineers: with software and programming applications*. Fourth Edition. New York: McGraw-Hill Higher Education.

Fu, Z., S. Liu, dan S. Liu. 2004. New Solution to mKdV equation. *Physics Letters A*. 326: 364–374.

Gardner, R.B. dan N.K. Govil. 2014. *Eneström–Kakeya Theorem and Some of Its Generalizations*. Dalam Current Topics in Pure and Computational Complex Analysis. Hal:171-199. India: Springer.

Glenn, L. 2005. *Differential Equation: a modelling approach*. New York: McGraw-Hill Higher Education.

Greenberg, M. D. 1978. *Foundation of Applied Mathematics*. United States: Prentice – Hall, Inc.

Hidayat, R. 2006. *Matematika Teknik*. Jember: Unej Press.

Hoffman, J. D. 2001. *Numerical for Engineers and Scientists 2*PthP *Edition Revised and Expanded*. New York: Marcel Dekker, inc.

Ismail, H.N., K.R. Raslan, dan G.S. Salem. 2004. Solitary wave solutions for the general KDV equation by Adomian decomposition method. *Applied mathematics and computation*, 154(1):17-29.

Man, C. dan W. C. Tsai. 2008. A higher-order predictor-corector scheme for two-dimensional advection-diffusion equation. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 56: 401-418.

McCuen, R. H. dan B.M. Ayyub. 1996. *Numerical Methods for Engineers*. New Jersey: Prentice hall.

Digital Repository Universitas Jember

Richard, L.B. dan J.D. Faires. 1989. *Numerical Analysis*. New York: PSW-Kent Publishing Company.

Ross, L.S. 1984. *Differential Equation 3rd Edition*. New York: John Wiley and sons, inc.

Sehah, S. dan J. Aminuddin. 2009. Penentuan Solusi Numerik Persamaan Bkdv Dengan Metode Beda Hingga. *Jurnal Berkala Fisika*, 12: 27-33.

Supriyanto. 2006. *Metode Euler*. Jakarta: Universitas Indonesia.

Triatmojo, B. 2002. *Metode Numerik*. Yogyakarta: Beta Offset.

Trogdon, T., S. Olver dan B. Deconinck. 2012. Numerical inverse scattering for the Korteweg–de Vries and modified Korteweg–de Vries equations. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 241: 1003-1025.