LOCATING INDEPENDENT DOMINATING SET PADA GRAF KHUSUS DAN GRAF HASIL OPERASI AMALGAMASI

SKRIPSI

Oleh

Mellisa Piwinta Sari
NIM 121810101075

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER
2016

LOCATING INDEPENDENT DOMINATING SET PADA GRAF KHUSUS DAN GRAF HASIL OPERASI AMALGAMASI

SKRIPSI

diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat
untuk menyelesaikan Program Studi Matematika (S1)
dan mencapai gelar Sarjana Sains

Oleh

Mellisa Piwinta Sari
NIM 121810101075

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER
2016

HALAMAN PERSEMBAHAN

Dengan menyebut nama Allah SWT. Yang Maha Pengasih lagi Maha Penyayang, serta sholawat atas Nabi Muhammad SAW., kupersembahkan sebuah kebahagiaan dalam perjalanan hidupku teriring rasa terima kasihku yang terdalam kepada:

1. orang tuaku terkasih dan tercinta: Ayahanda Mohammad Syafi'i dan Ibunda Wiwin Evi Ariyanti yang senantiasa memberikan cinta, kasih sayang, perhatian, motivasi, kebutuhan materil maupun *nonmateril*, serta do'a yang tidak pernah putus yang selalu mengiringiku untuk meraih cita-cita;
2. Bu Tok, Bapak Tornado, dan saudara-saudara dari keluarga Yusnia serta keluarga Mariatul Kiptiyah yang senantiasa memberikan dukungan dan semangat untuk meraih cita-cita;
3. guru-guru TK R.A. Perwanida Banyuwangi, SD Negeri 1 Kepatihan Banyuwangi, SMP Negeri 1 Banyuwangi, RSBI SMA Negeri 1 Giri Banyuwangi, serta dosen-dosen jurusan Matematika FMIPA Universitas Jember yang telah memberikan ilmu dan membimbing dengan penuh kesabaran;
4. sahabat-sahabatku tercinta yang tidak dapat disebutkan satu persatu yang senantiasa memberikan kebahagian, warna-warni dalam kehidupan, serta pelajaran hidup dalam kebersamaan yang sangat berharga;
5. keluarga besar BATHICS'12 dan UKM SPORA yang memberikan pelajaran tentang arti "mahasiswa" yang sesungguhnya.

MOTO

"Gagal lebih baik daripada diam. Dalam setiap kegagalan pasti ada kesempatan untuk berhasil, sedangkan dalam diam hanya ada suram."

(Hitam Putih)[1]

"Jangan lihat masa lampau dengan penyesalan, jangan pula lihat masa depan dengan ketakutan, tapi lihatlah sekitar kita dengan penuh kesadaran."

(James Thurber)[2]

[1]Deddy Corbuzier. 2013. *Hitam Putih*. Jakarta: Trans7
[2]www.brainyquote.com

PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

nama : Mellisa Piwinta Sari

NIM : 121810101075

menyatakan dengan sesungguhnya bawha karya ilmiah yang berjudul ”*Locating Independent Dominating Set* pada Graf Khusus dan Graf Hasil Operasi Amalgamasi” adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali kutipan yang sudah saya sebutkan sumbernya, belum pernah diajukan pada institusi manapun, dan bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa ada tekanan dan paksaan dari pihak manapun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, Desember 2016

Yang menyatakan,

Mellisa Piwinta Sari

NIM. 121810101075

SKRIPSI

***LOCATING INDEPENDENT DOMINATING SET* PADA GRAF KHUSUS DAN GRAF HASIL OPERASI AMALGAMASI**

Oleh

Mellisa Piwinta Sari
NIM 121810101075

Pembimbing:

Dosen Pembimbing Utama	: Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si.
Dosen Pembimbing Anggota	: Kusbudiono, S.Si., M.Si.

PENGESAHAN

Skripsi berjudul "*Locating Independent Dominating Set* pada Graf Khusus dan Graf Hasil Operasi Amalgamasi" telah diuji dan disahkan pada:

hari, tanggal :

tempat : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam.

Tim Penguji:

Dosen Pembimbing Utama,

Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si.
NIP. 198408012008012006

Dosen Pembimbing Anggota,

Kusbudiono, S.Si., M.Si.
NIP. 197704302005011001

Dosen Penguji I,

Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D.
NIP. 196808021993031004

Dosen Penguji II,

Prof. Drs. I Made Tirta, M.Sc., Ph.D.
NIP. 195912201985031002

Mengesahkan
Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Jember,

Drs. Sujito, Ph.D.
NIP. 196102041987111001

RINGKASAN

***Locating Independent Dominating Set* pada Graf Khusus dan Graf Hasil Operasi Amalgamasi**; Mellisa Piwinta Sari, 121810101075; 2016: 80 halaman; Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Salah satu bagian dari matematika diskrit yaitu teori graf yang ditemukan pada tahun 1736 oleh Leonhard Euler, matematikawan berkebangsaan Swiss. Graf merupakan pasangan himpunan titik dan himpunan sisi. Teori graf diaplikasikan pada beberapa bidang, misalnya pencarian lintasan terpendek, hubungan pada jaringan internet, dan lain sebagainya. Salah satu bidang yang berkembang dalam teori graf yaitu teori *locating independent dominating set*.

Locating independent dominating set merupakan perkembangan dari *independent dominating set* dan *locating dominating set*. *Independent dominating set* adalah suatu konsep penentuan titik seminimal mungkin pada graf dengan ketentuan titik sebagai *independent dominating set* menjangkau titik yang ada di sekitarnya dan tidak bertetangga (*adjacent*). Kardinalitas minimum dari *independent dominating set* disebut *independent domination number* dan dinotasikan dengan $i(G)$. Suatu himpunan titik D pada graf $G = (V, E)$ dikatakan *locating dominating set* jika untuk setiap pasangan titik yang berbeda u dan v pada $V(G) - D$ memenuhi syarat $\emptyset \neq N(u) \cap D \neq N(v) \cap D$ dimana $N(u)$ adalah himpunan titik tetangga dari u. Kardinalitas minimum dari *locating dominating set* disebut *locating domination number* yang disimbolkan dengan $\gamma_L(G)$. Himpunan titik dominator $D \in V$ pada suatu graf $G = (V, E)$ dikatakan *locating independent dominating set* jika himpunan titik $D \in V$ tidak bertetangga (*adjacent*) dan setiap dua titik berbeda u dan v pada $V(G) - D$ memenuhi syarat $\emptyset \neq N(u) \cap D \neq N(v) \cap D$ dimana $N(u)$ adalah himpunan titik tetangga dari u. Kardinalitas minimum dari *locating independent dominating set* disebut *locating independent domination number* yang disimbolkan

dengan $\gamma_{Li}(G)$.

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah deskriptif aksiomatik. Data dalam penelitian ini menggunakan data sekunder berupa graf-graf khusus dan operasi amalgamasinya. Graf-graf khusus yang digunakan antara lain graf *ladder* (L_n), graf parasut (PC_n), graf semi parasut (SP_{2n-1}), graf helm (H_n), graf bunga matahari (SF_n), dan graf jahangir (J_n) dan operasi yang digunakan yaitu amalgamasi. Pada penelitian ini dihasilkan beberapa teorema sebagai berikut:

1. **Teorema 4.1.** Misal G adalah graf khusus berupa graf *ladder* (L_n) untuk $n \geq 3$, maka *locating independent domination number* dari G adalah $\gamma_{Li}(L_n) = n$.
2. **Teorema 4.2.** Misal G adalah graf hasil operasi amalgamasi dari graf *ladder* (L_n) untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 2$, maka $\gamma_{Li}\ (Amal(L_n, v, m)) = nm$.
3. **Teorema 4.3.** Misal G adalah graf khusus berupa graf parasut (PC_n) untuk $n \geq 5$, maka *locating independent domination number* dari G adalah $\gamma_{Li}\ (PC_n) = n$.
4. **Teorema 4.4.** Misal G adalah graf hasil operasi amalgamasi dari graf parasut (PC_n) untuk $n \geq 5$ dan $m \geq 2$, maka $\gamma_{Li}\ (Amal(PC_n, v, m)) = nm$.
5. **Teorema 4.5.** Misal G adalah graf khusus berupa graf semi parasut (SP_{2n-1}) untuk $n \geq 4$, maka *locating independent domination number* dari G adalah γ_{Li} (SP_{2n-1}) = $n-1$.
6. **Teorema 4.6.** Misal G adalah graf hasil operasi amalgamasi dari graf semi parasut (SP_{2n-1}) untuk $n \geq 4$ dan $m \geq 2$, maka $\gamma_{Li}(Amal(SP_{2n-1}, v, m)) = nm - m$.
7. **Teorema 4.7.** Misal G adalah graf khusus berupa graf helm (H_n) untuk $n \geq 3$, maka *locating independent domination number* dari G adalah $\gamma_{Li}(H_n) = n + 1$.
8. **Teorema 4.8.** Misal G adalah graf hasil operasi amalgamasi dari graf helm (H_n) untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 2$, maka $\gamma_{Li}\ (Amal(H_n, v, m)) = nm + 1$.

9. **Teorema 4.9.** Misal G adalah graf khusus berupa graf bunga matahari (SF_n) untuk $n \geq 3$, maka *locating independent domination number* dari G adalah $\gamma_{Li}(SF_n) = n$.

10. **Teorema 4.10.** Misal G adalah graf hasil operasi amalgamasi dari graf bunga matahari (SF_n) untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 2$, maka $\gamma_{Li}(Amal(SF_n, v, m)) = nm - m + 1$.

11. **Teorema 4.11.** Misal G adalah graf khusus berupa graf jahangir (J_n) untuk $n \geq 3$, maka *locating independent domination number* dari G adalah $\gamma_{Li}(J_n) = n$.

12. **Teorema 4.12.** Misal G adalah graf hasil operasi amalgamasi dari graf jahangir (J_n) untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 2$, maka $\gamma_{Li}\ (Amal(J_n, v, m))$ = nm.

PRAKATA

Puji syukur kehadirat Allah SWT. atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "*Locating Independent Dominating Set* pada Graf Khusus dan Graf Hasil Operasi Amalgamasi". Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat menyelesaikan pendidikan strata satu (S1) dan mencapai gelar Sarjana Sains pada Jurusan Matematika FMIPA Universitas Jember.

Penyusunan skripsi ini tidak lepas dari bantuan berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan terima kasih kepada:

1. Ibu Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si. selaku Dosen Pembimbing Utama dan Bapak Kusbudiono, S.Si., M.Si. selaku Dosen Pembimbing Anggota;
2. Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D. selaku Dosen Penguji I dan Prof. Drs. I Made Tirta, M.Sc., Ph.D selaku Dosen Penguji II yang telah memberikan kritik dan saran yang membangun;
3. Bapak Bagus Juliyanto, S.Si. selaku Dosen Pembimbing Akademik dan Ibu Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si. selaku Dosen Pembimbing Akademik pengganti yang selalu memberikan motivasi dan pengarahan selama penulis menjadi mahasiswa;
4. Dosen dan Karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
5. semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu per satu.

Penulis juga menerima segala kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan skripsi ini. Akhirnya penulis berharap, semoga skripsi ini dapat bermanfaat.

Jember, Desember 2016 Penulis

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR GAMBAR

Halaman

DAFTAR TABEL

Halaman

BAB 1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori graf merupakan salah satu bagian dari matematika diskrit. Teori Graf ditemukan pada tahun 1736 oleh Leonhard Euler, matematikawan berkebangsaan Swiss yang saat itu memikirkan kemungkinan untuk menyeberangi semua jembatan tepat satu kali dan kembali ke tempat semula. Graf merupakan pasangan himpunan titik dan himpunan sisi. Titik-titik yang saling terhubung pada graf membentuk sisi sehingga membentuk pola graf tertentu. Teori graf ini berkembang dan diaplikasikan pada beberapa bidang. Beberapa aplikasi tersebut misalnya adalah pencarian lintasan terpendek, hubungan pada jaringan internet, dan lain sebagainya.

Salah satu bidang dalam teori graf yang berkembang adalah teori *dominating set*. *Dominating set* merupakan suatu konsep penentuan titik seminimal mungkin pada graf dengan ketentuan titik sebagai *dominating set* menjangkau titik yang ada di sekitarnya dan bertetangga (*adjacent*), yang mulai diperkenalkan pada tahun 1850-an. Kardinalitas terkecil dari *dominating set* disebut *domination number* dan dinotasikan dengan $\gamma(G)$. Pada tahun 1960 *independent dominating set* mulai dipelajari, *independent dominating set* merupakan perkembangan dari *dominating set* yaitu suatu konsep penentuan titik seminimal mungkin pada graf dengan ketentuan titik sebagai *independent dominating set* menjangkau titik yang ada di sekitarnya dan tidak bertetangga (*adjacent*). Kardinalitas terkecil dari *independent dominating set* disebut *independent domination number* dan dinotasikan dengan $i(G)$. Pada tahun 1980 Slater menerapkan himpunan dominasi lokasi (*locating dominating set*) dan menurut sejarah teori dominasi telah dipelajari sejak tahun 1960 tetapi tingkat pengkajiannya berkembang secara pesat pada pertengahan tahun 1970-an. Menurut Slater (2002) suatu himpunan titik D pada graf $G = (V, E)$ dikatakan *locating dominating set* jika untuk setiap pasangan titik yang berbeda u dan v pada

$V(G) - D$ memenuhi syarat $\emptyset \neq N(u) \cap D \neq N(v) \cap D$ dimana $N(u)$ adalah himpunan titik tetangga dari u. Kardinalitas minimum dari *locating dominating set* disebut *locating domination number* yang disimbolkan dengan $\gamma_L(G)$. *Dominating set* berkembang menjadi *locating dominating set*, dan *independent dominating set* berkembang menjadi *locating independent dominating set*. Kardinalitas minimum dari *locating independent dominating set* disebut *locating independent domination number* yang disimbolkan dengan $\gamma_{Li}(G)$.

Chen *et. al* (2011) melakukan penelitian tentang *locating dominating set* yang berjudul *"Identifying Codes and Locating Dominating Sets on Paths and Cycles"*, kemudian Canoy *et. al* (2014) mencari *locating dominating set* pada *corona* dan *composition graph*, kemudian Argiroffo (2015) melakukan penelitian yang berjudul *"A Polyhedral Approach to Locating Dominating Sets in Graph"*, dan penelitian terbaru oleh Foucaud (2016) yang berjudul "*Locating Dominating Set in Twin Free Graph"* serta Desvandai (2016) berjudul "Analisa Himpunan Dominasi Lokasi pada Model Topologi Graf Khusus dan Operasinya".

Berdasarkan uraian tersebut, dapat dilihat bahwa belum ada peneliti yang tertarik untuk meneliti *locating independent dominating set*, oleh karena itu penulis akan meneliti lebih lanjut tentang *locating independent dominating set* pada graf khusus dan graf hasil operasi amalgamasi. Jenis graf yang digunakan pada penelitian ini yaitu graf konektif dan tidak berarah. Proses awal penelitian ini yaitu menentukan kardinalitas titik dan kardinalitas sisi pada graf hasil operasi amalgamasi, kemudian menentukan titik-titik yang memenuhi syarat *locating independent dominating set*, dan menentukan *locating independent domination number*.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang diatas, maka dapat dirumuskan masalah dalam penelitian ini yaitu:

a. bagaimana *locating independent dominating set* pada graf L_n, PC_n, SP_{2n-1},

H_n, SF_n, J_n, $Amal(L_n, v, m)$, $Amal(PC_n, v, m)$, $Amal(SP_{2n-1}, v, m)$, $Amal(H_n, v, m)$, $Amal(SF_n, v, m)$, dan $Amal(J_n, v, m)$?

b. berapa *locating independent domination number* pada graf L_n, PC_n, SP_{2n-1}, H_n, SF_n, J_n, $Amal(L_n, v, m)$, $Amal(PC_n, v, m)$, $Amal(SP_{2n-1}, v, m)$, $Amal(H_n, v, m)$, $Amal(SF_n, v, m)$, dan $Amal(J_n, v, m)$?

1.3 Batasan Masalah

Untuk menghindari meluasnya permasalahan yang akan dipecahkan, maka permasalahan dalam penelitian ini dibatasi sebagai berikut:

a. graf khusus yang digunakan dalam penelitian ini adalah graf *ladder* (L_n), graf parasut (PC_n), graf semi parasut (SP_{2n-1}), graf helm (H_n), graf bunga matahari (SF_n), dan graf jahangir (J_n);

b. operasi graf yang digunakan dalam penelitian ini adalah operasi graf amalgamasi.

1.4 Tujuan Penelitian

Sesuai dengan rumusan masalah dan latar belakang di atas, maka tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

a. menentukan *locating independent dominating set* pada graf L_n, PC_n, SP_{2n-1}, H_n, SF_n, J_n, $Amal(L_n, v, m)$, $Amal(PC_n, v, m)$, $Amal(SP_{2n-1}, v, m)$, $Amal(H_n, v, m)$, $Amal(SF_n, v, m)$, dan $Amal(J_n, v, m)$;

b. menentukan *locating independent domination number* pada graf L_n, PC_n, SP_{2n-1}, H_n, SF_n, J_n, $Amal(L_n, v, m)$, $Amal(PC_n, v, m)$, $Amal(SP_{2n-1}, v, m)$, $Amal(H_n, v, m)$, $Amal(SF_n, v, m)$, dan $Amal(J_n, v, m)$.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

a. menambah pengetahuan dan wawasan baru mengenai teori *locating independent dominating set*;

b. hasil penelitian ini diharapkan dapat digunakan sebagai pengembangan ilmu dalam menentukan *locating independent domination number* untuk graf khusus dan graf hasil operasi yang lainnya;
c. hasil penelitian ini diharapkan dapat digunakan sebagai pengembangan atau perluasan ilmu dan aplikasi dalam masalah *locating independent dominating set*.

1.6 Kebaharuan Penelitian

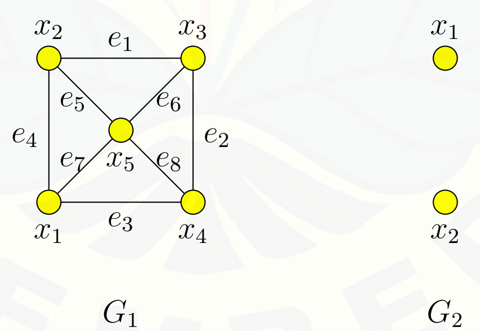
Penelitian terdahulu menganalisa *dominating set*, *independent dominating set*, dan *locating dominating set*, dan penelitian ini menggabungkan syarat-syarat pada *independent dominating set* dan *locating dominating set*.

BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Terminologi Graf

Sebuah graf G didefenisikan sebagai pasangan himpunan yang terdiri dari $(V(G), E(G))$ dimana himpunan simpul atau titik (*vertex*) yang dilambangkan dengan $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, yang berhingga dan tidak kosong. Sedangkan himpunan garis atau sisi (*edge*) yang dilambangkan dengan $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$, yang berhingga dan boleh kosong. Pada setiap sisi pada graf G menghubungkan dua simpul (Manongga dan Nataliani, 2013: 149).

Secara matematis, graf G sebagai pasangan himpunan (V, E) ditulis dengan notasi $(G = V, E)$, dalam hal ini V adalah himpunan tidak kosong dari titik-titik dan E adalah himpunan sisi. Definisi graf diatas menyatakan bahwa V tidak boleh kosong, sedangkan E boleh kosong. Jadi sebuah graf dimungkinkan untuk tidak mempunyai sisi, tetapi harus memiliki minimal satu titik (Slamin, 2009).



Gambar 2.1 Graf G_1 dan G_2

Titik pada graf dapat dinomori dengan huruf, bilangan asli, atau menggunakan huruf dan angka (bilangan asli). Gambar 2.1 merupakan contoh graf secara umum. Pada graf G_1 merupakan graf sederhana yang terdiri dari himpunan titik yang dinotasikan dengan $V(G_1)$ = $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ dan himpunan sisi yang dinotasikan dengan $E(G_1)$ = $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$. Sedangkan pada graf G_2 merupakan contoh *null graph* yang didefinisikan sebagai graf yang tidak mempunyai himpunan sisi. Graf G_2 hanya terdiri dari himpunan titik $V(G_2)$ = $\{x_1, x_2\}$.

Menurut Harary (2007), graf yang terdiri dari satu titik dan himpunan sisinya kosong disebut graf trivial. Banyaknya titik yang terdapat pada graf G dinyatakan sebagai $|V(G)|$ atau $|V|$, dan banyak sisi yang terdapat pada graf G dinyatakan sebagai $|E(G)|$ atau $|E|$. Pada Gambar 2.1 graf G_1 mempunyai $|V(G_1)| = 5$ dan $|E(G_1)| = 8$. Sedangkan graf G_2 mempunyai $|V(G_1)| = 2$ dan tidak memiliki sisi.

Misalkan v_1 dan v_2 adalah titik-titik pada graf G, dapat dikatakan v_1 berdekatan (*adjacent*) dengan v_2 jika terdapat sebuah sisi yang menghubungkan antara titik v_1 dan v_2, dinotasikan dengan sisi e = v_1v_2, dengan kata lain v_1 dan v_2 bertetangga. Selanjutnya, titik v_1 disebut bersisian/bertemu (*incident*) dengan sisi e jika titik v_2 adalah titik ujung dari sisi e. Dapat juga dikatakan bahwa sisi e bersisian/bertemu (*incident*) dengan titik v_1 jika titik v_1 adalah titik ujung dari sisi e (Hartsfield, 1994). Dengan kata lain, sisi e bersisian/bertemu (*incident*) dengan titik v_1 dan v_2 jika sisi e menghubungkan titik u dan v. Dua sisi misalnya e_1 dan e_2 dikatakan bertetangga jika keduanya mempunyai suatu titik ujung yang sama misalnya z, artinya e_1 = v_1z dan e_2 = v_2z (Nugroho, 2008).

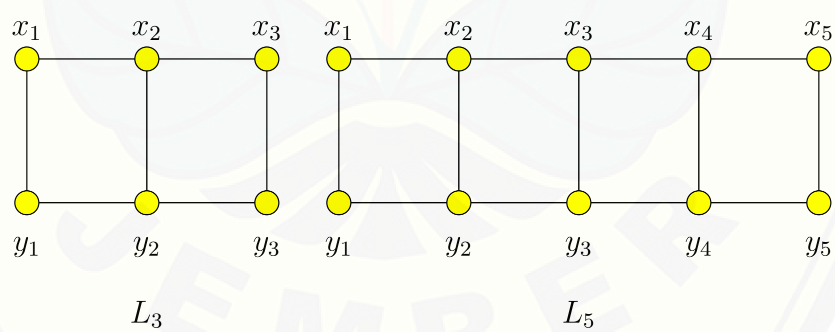
Banyaknya sisi yang *incident* pada suatu titik dinamakan derajat (*degree*). Sebuah titik yang mempunyai derajat 0 (nol) disebut titik terisolasi (*isolated vertex*) yang artinya titik tersebut tidak bertetangga dengan titik lain. Jika ada suatu graf yang setiap titiknya memiliki derajat yang sama, maka graf tersebut dinamakan graf regular. Derajat terkecil dari suatu graf G adalah banyaknya minimal sisi yang *incident* pada suatu titik v_i di graf G diantara titik-titik lainnya di graf G yang dinotasikan dengan $\delta(G)$. Derajat terbesar dari suatu graf G adalah banyaknya maksimal sisi yang *incident* pada suatu titik v_i di graf G diantara titik-titik lainnya di graf G yang dinotasikan dengan $\Delta(G)$. Contohnya pada graf G_1 Gambar 2.1 memiliki $\delta(G)$ = 3 dan $\Delta(G)$ = 4.

2.2 Graf Khusus

Graf khusus adalah graf yang mempunyai keunikan dan karakteristik bentuk khusus. Keunikan graf khusus adalah tidak isomorfis dengan graf lainnya. Karakteristik bentuknya dapat diperluas sampai order n dan tetap simetris. Suatu graf dikatakan isomorfis dengan graf lainnya, apabila terdapat korespondensi satu-satu antara keduanya dan antara sisi-sisi keduanya sedemikian sehingga jika sisi e bersisian dengan *vertex* v_1 dan v_2 disuatu graf G_1, maka sisi e pada graf G_2 juga harus bersisian dengan *vertex* v_1 dan v_2 di G_2. Dua graf dapat isomorfis apabila mempunyai V dan E yang sama. Berikut ini adalah beberapa contoh graf khusus.

a. Graf Tangga (*Ladder*)

Graf *ladder* yang dinotasikan dengan L_n, $n \geq 2$ adalah sebuah graf dengan titik $V(L_n) = \{x_i, y_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan $E(L_n) = \{x_i x_{i+1}, y_i y_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_i y_i; 1 \leq i \leq n\}$ (Sugeng, 2005). Graf *ladder* mempunyai $2n$ titik dan $3n-2$ sisi (Dafik, 2009). Gambar 2.2 menunjukkan contoh dari graf matahari.

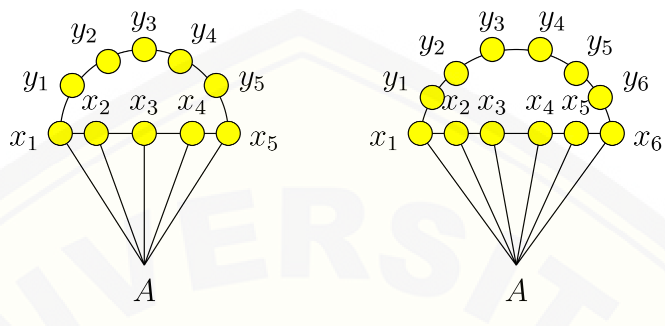


Gambar 2.2 Graf Tangga (*Ladder*) L_3 dan L_5

b. Graf Parasut

Graf parasut dinotasikan PC_n dengan $n \geq 3$ adalah sebuah graf dengan himpunan titik $V(PC_n) = \{x_i, y_i, A; 1 \leq i \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(PC_n) = \{y_n x_1, y_1 x_n, A x_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_i x_{i+1}, y_i y_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\}$

(Agustin, 2014). Gambar 2.3 menunjukkan contoh dari graf parasut.

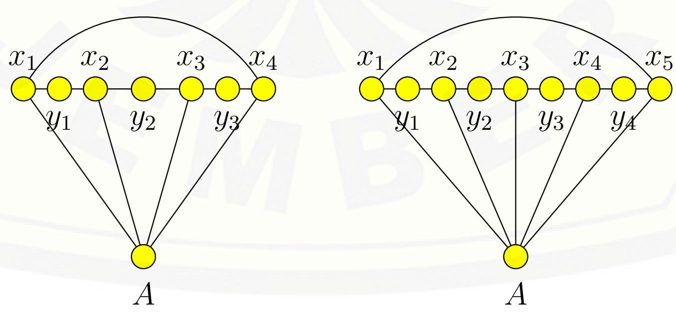


PC_5 PC_6

Gambar 2.3 Graf Parasut PC_5 dan PC_6

c. Graf Semi Parasut

Graf semi parasut dinotasikan SP_{2n-1} adalah sebuah graf yang memiliki himpunan *vertex*, $V = \{x_i, y_i, A; 1 \leq i \leq n; 1 \leq i \leq n-1\}$ dan himpunan *edge*, $E = \{Ax_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_1x_n\} \cup \{x_iy_i; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{y_ix_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\}$ (Aprilia, 2015). Gambar 2.4 menunjukkan contoh dari graf semi parasut.

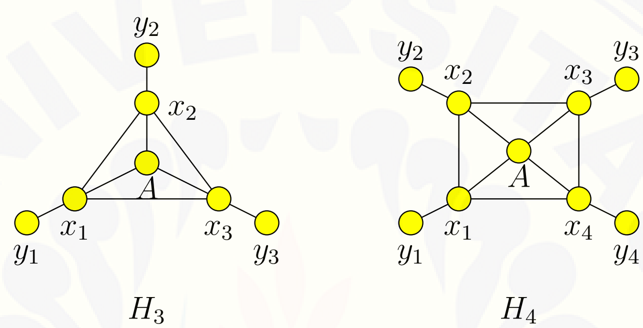


$SP_{2n-1}; n = 4$ $SP_{2n-1}; n = 5$

Gambar 2.4 Graf Semi Parasut SP_{2n-1} dengan $n = 4$ dan SP_{2n-1} dengan $n = 5$

d. Graf Helm

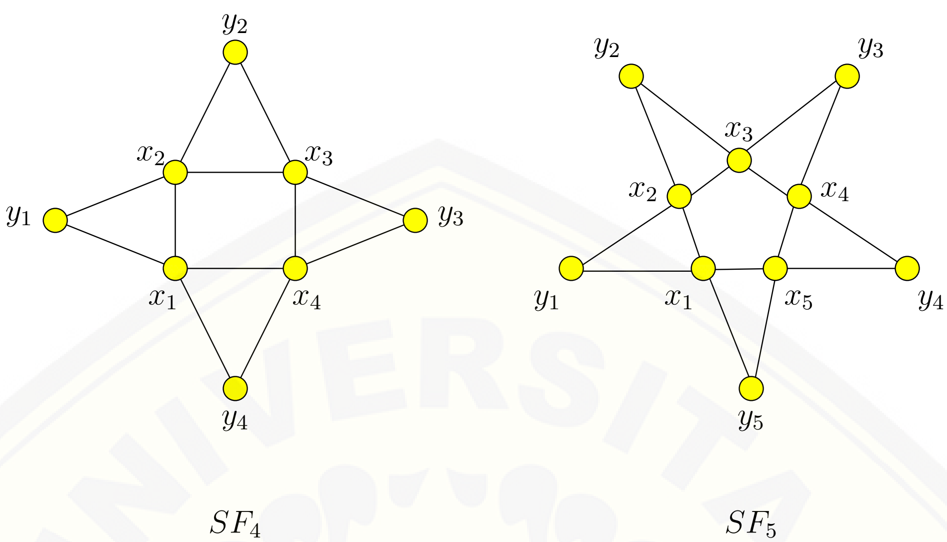
Graf helm adalah jenis graf dari *family* graf roda. Graf helm adalah sebuah graf yang dinotasikan dengan H_n dimana $V(H_n)$ = $\{A, x_i, y_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan $E(H_n)$ = $\{x_n x_1, Ax_i, x_i y_i; 1 \leq i \leq n\}$, $\cup$ $\{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\}$ (Ardiyansah dan Darmaji, 2013). Gambar 2.5 menunjukkan contoh dari graf helm.



Gambar 2.5 Graf Helm H_3 dan H_4

e. Graf Bunga Matahari (*Sun Flower Graph*)

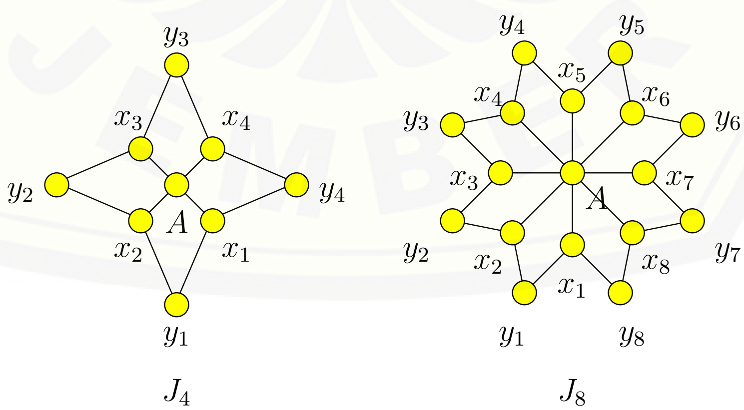
Graf bunga matahari dinotasikan dengan SF_n adalah graf yang dibentuk dari graf *cycle* C_n dan n buah titik y_i dengan $i = 1, 2, 3, ..., n$ sedemikian hingga jika x_i adalah titik ke-*i* dari C_n maka y_i *adjacent* dengan x_i dan x_{i+1} untuk setiap $i = 1, 2, 3, ..., n$. Graf bunga matahari mempunyai himpunan titik $V(SF_n) = \{x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_n\}$ dan himpunan sisi $E(SF_n) = \{a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n, c_1, c_2, ..., c_n\}$ dengan $a_i = (x_i x_{i+1})$ untuk $i = 1, 2, 3, ..., n-1$ dan $a_n = (x_n x_1)$, $b_i = (x_i y_i)$ untuk $i = 1, 2, 3, ..., n$, dan $c_i = (x_{i+1} y_i)$ untuk $i = 1, 2, 3, ...n-1$, serta $c_n = (x_1 y_n)$. Dengan demikian graf bunga matahari mempunyai $2n$ titik dan $3n$ sisi (Wijaya, 2010). Gambar 2.6 menunjukkan contoh dari graf bunga matahari.



Gambar 2.6 Graf Bunga Matahari (*Sun Flower*) SF_4 dan SF_5

f. Graf Jahangir

Graf jahangir memiliki $V = \{x_i, y_i, p; 1 \leq i \leq n; 1 \leq i \leq n\}$ dan $E = \{px_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_i x_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{y_n x_1\}$. Graf jahangir adalah generalisasi dari graf roda dengan menambahkan satu titik diantara dua titik yang bertetangga (kecuali titik pusat). Graf jahangir dinotasikan dengan J_n (Ali and Tomescu, 2007). Gambar 2.7 menunjukkan contoh dari graf jahangir.

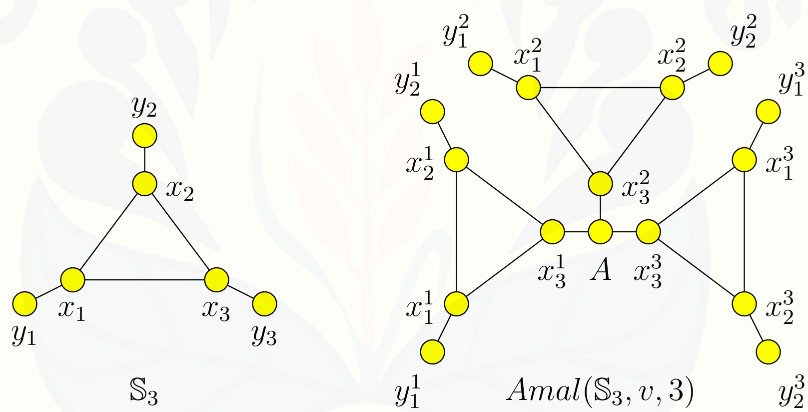


Gambar 2.7 Graf Jahangir J_4 dan J_8

2.3 Operasi Graf

Operasi graf merupakan salah satu cara untuk mendapatkan graf baru dengan cara melakukan operasi terhadap dua graf atau lebih. Berikut ini adalah operasi graf amalgamasi beserta contohnya.

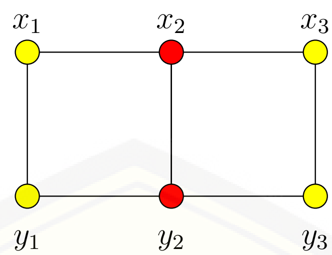
Definisi 2.1. Amalgamasi dinotasikan dengan $Amal(G, v, r)$ dimana setiap G mempunyai suatu titik v yang disebut titik terminal, dan r menyatakan banyaknya graf G yang akan diamalgamasi. Jika terminalnya adalah suatu sisi, maka amalgamasi tersebut dinamakan amalgamasi sisi yang dinotasikan dengan $Amal(G, e, r)$ (Ardiyansah dan Darmaji, 2013). Gambar 2.8 merupakan contoh operasi amalgamasi.



Gambar 2.8 Graf Hasil Operasi Amalgamasi dari $\mathbb{S}_3$

2.4 *Locating Dominating Set* dan *Locating Independent Dominating Set*

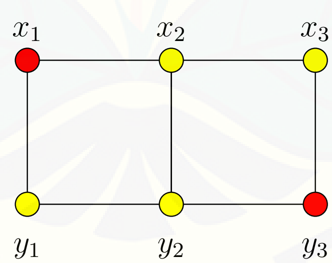
Menurut Haynes dan Henning dalam Agustin dan Dafik (2014), himpunan D dari titik graf sederhana G dinamakan *dominating set* jika setiap titik $u \in V(G) - D$ *adjacent* ke beberapa titik $v \in D$. Kardinalitas terkecil dari *dominating set* disebut *domination number* yang dinotasikan dengan $\gamma\ (G)$. Gambar 2.9 merupakan contoh *dominating set* pada graf G dimana titik yang berwarna merah merupakan titik dominatornya.



L_3

Gambar 2.9 *Dominating Set* pada L_3

Menurut de jaenish dalam Haynes dan Henning (2002) himpunan titik dominator D dari graf sederhana G dikatakan *independent dominating set* jika menjangkau titik yang ada disekitarnya dan tidak bertetangga (*adjacent*). Kardinalitas terkecil dari *independent dominating set* disebut *independent domination number* yang dinotasikan dengan $i(G)$. Gambar 2.10 merupakan contoh *independent dominating set*, dimana titik yang berwarna merah merupakan titik dominatornya.



L_3

Gambar 2.10 *Independent Dominating Set* pada L_3

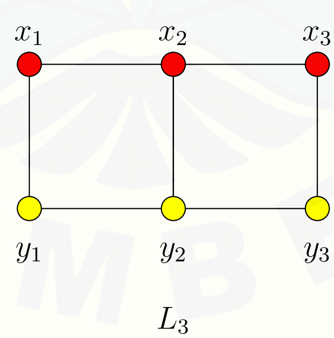
Locating dominating set merupakan *dominating set* dengan tambahan syarat. Suatu graf $G = (V, E)$ dikatakan *locating dominating set* jika himpunan titik dominator D memenuhi syarat setiap titik yang berbeda diluar D yaitu $V - D$ memiliki irisan yang berbeda dengan D. Misal V himpunan titik dan E himpunan sisi dari graf G sehingga $\{u, v \in V - D\}$ maka berlaku :

1. $N(u) \cap D \neq \emptyset$ dan $N(v) \cap D \neq \emptyset$.
2. $u \neq v$ maka $N(u) \cap D \neq N(v) \cap D$ (Honkala, 2002).

Menurut Foucaud (2016), konsep *locating dominating set* pertama kali dikenalkan dan dipelajari oleh Slater pada tahun 1987. *Locating domination number* merupakan kardinalitas minimum dari *locating dominating set* yang disimbolkan dengan $\gamma_L(G)$. Gambar 2.11 merupakan contoh *locating dominating set* dimana titik yang berwarna merah merupakan titik dominatornya. Pada contoh Gambar 2.11 diperoleh himpunan titik $V = \{x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3\}$ dan titik dominator $D = \{x_1, x_2, x_3\}$, $V - D = \{y_1, y_2, y_3\}$ sehingga menurut syarat *locating dominating set* diperoleh :

$$\{N(y_1) \cap D = \{x_1\}, N(y_2) \cap D = \{x_2\}, N(y_3) \cap D = \{x_3\}\}.$$

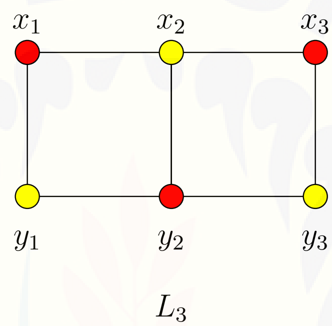
Berdasarkan hasil diatas maka kedua syarat *locating dominating set* terpenuhi sehingga *locating domination number* $\gamma_L(G) = 3$.



Gambar 2.11 *Locating Dominating Set* pada L_3

Locating independent dominating set merupakan perkembangan dari *independent dominating set* dan *locating dominating set*. Suatu graf $G = (V, E)$ dikatakan *locating independent dominating set* jika himpunan titik dominator D

memenuhi syarat setiap titik yang berbeda diluar D yaitu $V - D$ memiliki irisan yang berbeda dengan D dimana himpunan titik dominator D tidak bertetangga (*adjacent*). Kardinalitas minimum dari *locating independent dominating set* disebut *locating independent domination number* yang disimbolkan dengan $\gamma_{Li}(G)$. Gambar 2.12 merupakan contoh *locating independent dominating set* dimana titik yang berwarna merah merupakan titik dominatornya.



Gambar 2.12 *Locating Independent Dominating Set* pada L_3

Pada contoh Gambar 2.12 diperoleh himpunan titik $V = \{x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3\}$ dan titik dominator $D = \{x_1, x_3, y_2\}$, $V - D = \{x_2, y_1, y_3\}$ sehingga menurut syarat *locating independent dominating set* diperoleh :

$$\{N(x_2) \cap D = \{x_1, x_3, y_2\}, N(y_1) \cap D = \{x_1, y_2\}, N(y_3) \cap D = \{x_3, y_2\}\}.$$

Berdasarkan hasil diatas maka kedua syarat *locating independent dominating set* terpenuhi sehingga *locating independent domination number* $\gamma_{Li}(G) = 3$.

2.5 Hasil-hasil Penelitian

Pada bagian berikut akan disajikan beberapa rangkuman terkait *locating dominating set* yang dapat digunakan sebagai rujukan. Beberapa hasil penelitian tersebut diantaranya dapat dilihat pada tabel berikut:

Tabel 2.1 *Locating Domination Number* pada Graf Khusus dan Graf Hasil Operasi

$Graph$	$\gamma_L(G)$	Keterangan
P_2	1	Slater
P_3	2	Slater
P_n	$\lceil\frac{2n}{5}\rceil, n > 3$	Slater
C_4, C_5	2	Slater
C_6	3	Slater
C_n	$\lceil\frac{2n}{5}\rceil, n > 6$	Slater
Graf Lengkap, K_n	$n-1, n > 1$	Slater
$K_{1,n-1}$	$n-1, n > 2$	Slater
$K_{r,n-r}$	$n-2, r > 1, n > 4$	Slater
Graf Roda $W_{1,4}$	2	Slater
$W_{1,5}, W_{1,6}$	3	Slater
$W_{1,n-1}$	$\lceil\frac{2n-2}{5}\rceil, n > 7$	Slater
Graf Thin Sun (T_n)	$n, n \geq 4$	Argiroffo *et al.*, 2015
Graf Twin Free (G)	$\gamma_L \leq \frac{2n}{3}$	Foucaud *et al.*, 2016
Graf Trees (T)	$\gamma_L(T) = \frac{n}{2}, n \geq 2$	Foucaud *et al.*, 2016
(H_n)	$n, n \geq 3$	Desvandai
$(Amal(H_n, v, m))$	$n \times m, n \geq 3, m \geq 3$	Desvandai
$(Shack(H_n, v, m))$	$n \times m, n \geq 3, m \geq 2$	Desvandai
$(W_n^{F_{1,2}})$	$n, n \geq 3$	Desvandai
$(P_n^{H_m})$	$m(n-1), n \geq 3, m \geq 3$	Desvandai
(PC_n)	$\lceil\frac{4n}{5}\rceil, n \geq 4$	Desvandai
(F_n)	$\lceil\frac{2n}{5}\rceil, n \geq 4, n \neq 5$	Desvandai
$(P_n + H_m)$	$\lceil\frac{2n}{5}\rceil + m, n \geq 3, m \geq 3$	Desvandai
$(P_n \odot H_m)$	$m \times n, n \geq 3, m \geq 3$	Desvandai
$(Amal(PC_n, v, m))$	$(\lceil\frac{4n}{5}\rceil) \times m, n \geq 4, m \geq 2$	Desvandai
$(Shack(F_n, v, m))$	$\lceil\frac{2mn-2m+2}{5}\rceil, n \geq 5, m \geq 3$	Desvandai

BAB 3. METODE PENELITIAN

3.1 Jenis dan Data Penelitian

Penelitian ini dikategorikan ke dalam penelitian eksploratif. Penelitian eksploratif adalah jenis penelitian yang bertujuan menggali hal-hal yang ingin diketahui oleh peneliti dan hasil penelitian dapat digunakan sebagai dasar penelitian selanjutnya.

Data dalam penelitian ini menggunakan data sekunder berupa graf-graf khusus dan operasi graf. Graf-graf khusus yang digunakan adalah graf *ladder* (L_n), graf parasut (PC_n), graf semi parasut (SP_{2n-1}), graf helm (H_n), graf bunga matahari (SF_n), dan graf jahangir (J_n). Graf operasi yang digunakan adalah amalgamasi.

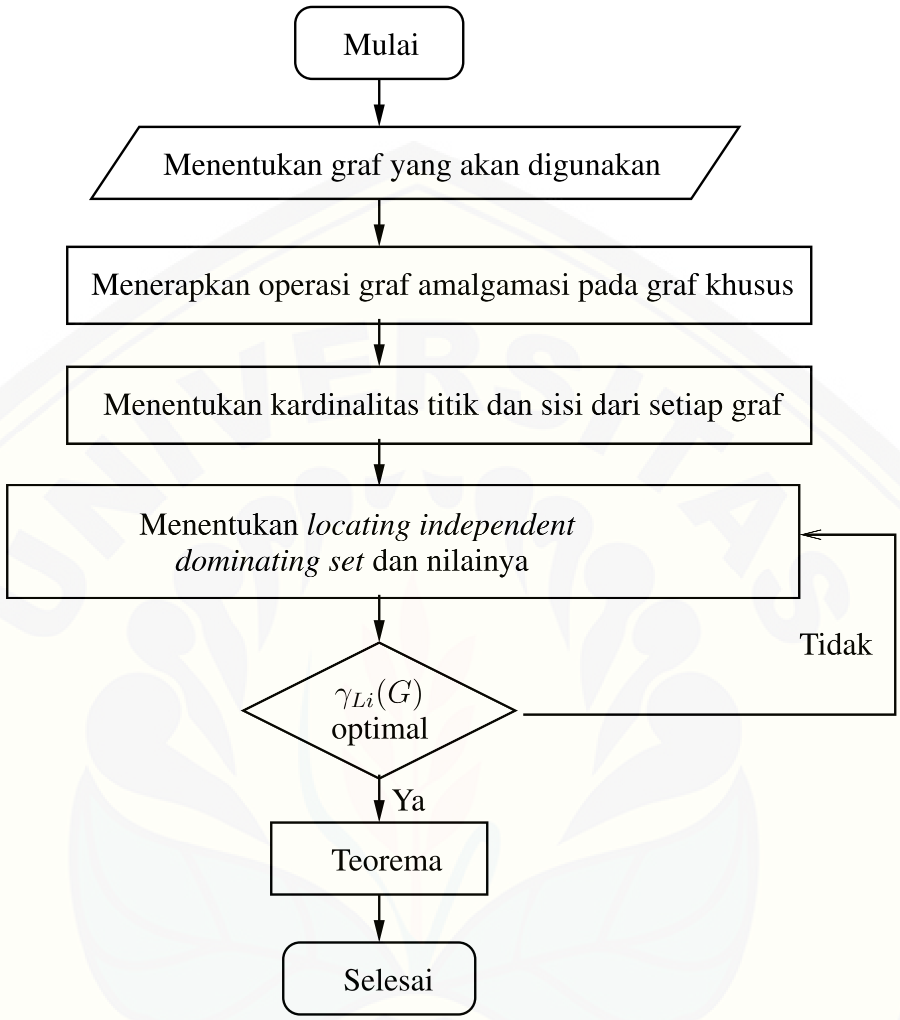
3.2 Rancangan Penelitian

Penelitian ini menggunakan metode deduktif aksiomatik dalam menyelesaikan permasalahan. Metode deduktif aksiomatik merupakan metode penelitian yang menggunakan prinsip-prinsip pembuktian deduktif yang berlaku dalam logika matematika dengan menggunakan aksioma atau teorema yang telah ada untuk memecahkan suatu masalah. Rancangan penelitian untuk *locating independent dominating set* pada graf khusus dan graf hasil operasi amalgamasi digambarkan dalam bagan yang diilustrasikan oleh Gambar 3.1. Uraian dari rancangan penelitian ini sebagai berikut:

a. menentukan objek penelitian berupa graf khusus dan graf hasil operasi amalgamasi;
b. menentukan banyak titik dan banyak sisi pada graf hasil operasi amalgamasi;
c. menentukan *locating independent dominating set* pada graf khusus dan graf hasil operasi amalgamasi;

d. menganalisa graf khusus dan graf hasil operasi amalgamasi dengan teori *locating independent dominating set*, sehingga dihasilkan teorema dan akibat tentang nilai *locating independent dominating set* ($\gamma_{Li}(G)$) dari graf khusus dan graf hasil operasi amalgamasi;

e. Menganalisa keoptimalan dari nilai *locating independent dominating set*.



Gambar 3.1 Rancangan Penelitian

BAB 5. PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dari pembahasan pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa:

a. *Locating independent dominating set* pada graf khusus dan graf hasil operasi amalgamasi adalah sebagai berikut:

1. Untuk $n \geq 3$, maka *locating independent domination set* dari graf L_n yaitu $D = \{x_i; 1 \leq i \leq n; i = \text{ganjil}\} \cup \{y_i; 1 \leq i \leq n; i = \text{genap}\}$.
2. Untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 2$, maka *locating independent domination set* dari graf $Amal(L_n, v, m)$ yaitu$D = \{x_i^j; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m; i = \text{ganjil}\} \cup \{y_i^j; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m; i = \text{genap}\}$.
3. Untuk $n \geq 5$, maka *locating independent domination set* dari graf PC_n yaitu $D = \{x_i; 1 \leq i \leq n; i = \text{ganjil}\} \cup \{y_i; 1 \leq i \leq n; i = \text{genap}\}$.
4. Untuk $n \geq 5$ dan $m \geq 2$, maka *locating independent domination set* dari graf $Amal(PC_n, v, m)$ yaitu $D = \{x_i^j; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m; i = \text{ganjil}\} \cup \{y_i^j; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m; i = \text{genap}\}$.
5. Untuk $n \geq 4$, maka *locating independent domination set* dari graf SP_{2n-1} yaitu D = $\{x_i; 1 \leq i \leq n-1\}$.
6. Untuk $n \geq 4$ dan $m \geq 2$, maka *locating independent domination set* dari graf $Amal(SP_{2n-1})$ yaitu $D = \{x_i^j; 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq j \leq m\}$.
7. Untuk $n \geq 3$, maka *locating independent domination set* dari graf H_n yaitu $D = \{A\} \cup \{y_i; 1 \leq i \leq n\}$.
8. Untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 2$, maka *locating independent domination set* dari graf $Amal(H_n, v, m)$ yaitu $D = \{A\} \cup \{A^j; 1 \leq j \leq m\} \cup \{y_i^j; 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq j \leq m\}$.

9. Untuk $n \geq 3$, maka *locating independent domination set* dari graf SF_n yaitu $D = \{y_i; 1 \leq i \leq n\}$.
10. Untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 2$, maka *locating independent domination set* dari graf $Amal(SF_n, v, m)$ yaitu $D = \{A\} \cup \{y_i^j; 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq j \leq m\}$.
11. Untuk $n \geq 3$, maka *locating independent domination set* dari graf J_n yaitu $D = \{x_i; 1 \leq i \leq n\}$.
12. Untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 2$, maka *locating independent domination set* dari graf $Amal(J_n, v, m)$ yaitu $D = \{x_i^j, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$.

b. *Locating independent domination number* pada graf khusus dan graf hasil operasi amalgamasi adalah sebagai berikut:

1. $\gamma_{Li}(L_n) = n$, untuk $n \geq 3$.
2. $\gamma_{Li}\left(Amal(L_n, v, m)\right) = nm$, untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 2$.
3. $\gamma_{Li}(PC_n) = n$, untuk $n \geq 5$.
4. $\gamma_{Li}\left(Amal(PC_n, v, m)\right) = nm$, untuk $n \geq 5$ dan $m \geq 2$.
5. $\gamma_{Li}(SP_{2n-1}) = n - 1$, untuk $n \geq 4$.
6. $\gamma_{Li}\left(Amal(SP_{2n-1}, v, m)\right) = nm - m$, untuk $n \geq 4$ dan $m \geq 2$.
7. $\gamma_{Li}(H_n) = n + 1$, untuk $n \geq 3$.
8. $\gamma_{Li}\left(Amal(H_n, v, m)\right) = nm + 1$, untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 2$.
9. $\gamma_{Li}(SF_n) = n$, untuk $n \geq 3$.
10. $\gamma_{Li}\left(Amal(SF_n, v, m)\right) = nm - m + 1$, untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 2$.
11. $\gamma_{Li}(J_n) = n$, untuk $n \geq 3$.
12. $\gamma_{Li}\left(Amal(J_n, v, m)\right) = nm$, untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 2$.

5.2 Saran

Berdasarkan hasil penelitian berkaitan *locating independent dominating set* pada graf khusus dan graf hasil operasi amalgamasinya maka peneliti memberikan saran kepada pembaca untuk meneliti *locating independent dominating set* pada operasi graf yang lainnya seperti operasi *cartesian product*, *t*ensor dan lain sebagainya. Selain itu penelitian selanjutnya bisa memberikan penerapan aplikasi pada teori *locating independent dominating set*.

DAFTAR PUSTAKA

Agustin, I. H. 2014. *Penerapan Teori Dominating Set dalam Instalasi Client Hub untuk Jaringan Intranet di Universitas Jember*. Jurusan Matematika FMIPA Universitas Jember.

Agustin, I. H. dan Dafik. 2014. On The Domination Number of Some Families of Special Graphs. *Prosiding* Seminar Matematika dan Pendidikan Matematika Universitas Jember, **1** (1): 139-143

Ali, E. T. B. and Tomescu, I. 2007. 2014. On the ramzey number of paths and jahangir graphs j3. *International Conference on 21st Century Mathematics*.

Aprilia, K. R., Agustin, I. H., dan Dafik. 2014. Pelabelan Total Super (a,d)-sisi Antimagic pada Graf Semi Parasut SP_{2n-1}. *Prosiding* Seminar Matematika dan Pendidikan Matematik, **1** (1): 89-94

Ardiyansah, R. dan Darmaji. 2013. *Bilangan Kromatik Graf Hasil Amalgamasi Dua Buah Graf*. Jurnal Sains dan Seni Pomits, **2** (1): 2337-3520

Argiroffo, G.R., Bianchi, S.M .2015. *A Polyhedral Approach to Locating-Dominating Sets in Graphs*. Electronic Notes in Discrete Mathematics, **50**: 89-94.

Canoy, S.R., Jr., Malacas, G.A. 2014. *Locating-Dominating Sets in Graphs*. Journal of Applied Mathematical Sciences, **8** (88): 4381-4388.

Chen, C., Lu, C., Miao, Z. 2011. *Identifying Codes and LocatingDominating Sets on Paths and Cycles*. Jurnal: Discrete Applied Mathematics, **159**: 1540-1547.

Dafik, Slamin, Fuad and Riris. 2009. *Super Edge-antimagic Total Labeling of Disjoint Union of Triangular Ladder and Lobster Graphs*. Yogyakarta: *Prosiding* of IndoMS International Conference of Mathematics and Applications (IICMA) 2009.

Desvandai, R.B. 2016. *Analisa Himpunan Dominasi Lokasi pada Model Topologi Graf Khusus dan Operasinya*. Jember: Jurusan Matematika FMIPA Universitas Jember.

Foucaud,F., Henning,M.A. 2016. *Locating-Dominating Sets in Twin-Free Graphs*. Journal of Discrete Applied Mathematics, **200**: 52-58.

Harary, F. 2007. *Graph Theory*, New London: Wesley.

Hartsfield, N. dan Ringel, G. 1994. *Pearls in Graph Theory*. London: Accademic Press Limited.

Haynes, T.W. 1998. *Fundamental of Domination in Graphs*. New York: Marcel Dekker, INC.

Haynes, T.W and Henning, M.A. 2002. *Total Domination Good Vertices in Graphs*. Australasian Journal of Combinatorics, **26**: 305-315.

Honkala,I., Laihonen,T., Ranto,S. 2002. *On strongly identifying codes*. Jurnal: Discrete Math, **254** (13): 191205.

Manongga dan Nataliani. 2013. *Matematika Diskrit*. Salatiga: Kencana Prenada Media Grup.

Munir, R. 2001. *Matematika Diskrit*: Buku Teks Ilmu Komputer. Bandung: Informatika Bandung.

Nugroho, D.B. 2008. *Pengantar Teori Graf*. Universitas Kristen Satya Wacana.

Slamin. 2009. *Desain Jaringan: Pendekatan Teori Graf*. Jember: Universitas Jember.

Slater, P. J. 2002. *Fault-Tolerant Locating-Dominating Sets*. Jurnal: Discrete Mathematics, **249**: 179-189.

Sugeng, K. A., Miller, M., and Bača, M. 2006. *Super Edge-antimagic Total Labelings*. Utilitas Math. **71** (2006): 131-141

Wijaya, A. K. 2010. *Pelabelan Elegant pada Graf Kipas, Graf Matahari, dan Graf Bunga Matahari*. Jember: Jurusan Matematika FMIPA Universitas Jember.