ANALISIS *LOCATING DOMINATING SET* PADA GRAF KHUSUS DAN HASIL OPERASI COMB SISI

SKRIPSI

Oleh

Imro'atun Rofikah

NIM 131810101042

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS JEMBER

2016

ANALISIS *LOCATING DOMINATING SET* PADA GRAF KHUSUS DAN HASIL OPERASI COMB SISI

SKRIPSI

diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat
untuk menyelesaikan Program Studi Matematika (S1)
dan mencapai gelar Sarjana Sains

Oleh

Imro'atun Rofikah
NIM 131810101042

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER
2016

PERSEMBAHAN

Dengan menyebut nama Allah S.W.T Yang Maha Pengasih lagi Maha Penyayang, serta sholawat atas Nabi Muhammad S.A.W, saya persembahkan skripsi ini kepada:

1. orang tuaku tercinta Ibu Wagirah, bapak Yahyok dan bapak Hariyono;
2. Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D. dan Ibu Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si.;
3. dosen dan guru-guruku sejak taman kanak-kanak sampai dengan perguruan tinggi;
4. keluarga besar matematika angkatan 2013 (ATLAS);
5. motivator dan sahabatku: Arief Budi Kurniawan, Yunita Lufiana dan Mira Septiana Dewi;
6. almamater tercinta Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

MOTO

Allah akan meninggikan orang-orang yang beriman diantara kamu dan
orang-orang yang berilmu pengetahuan beberapa derajat.
(terjemahan Surat Al-Mujadalah ayat 11)*)

Keberhasilan saya diperoleh dari 99% keringat (kerja keras),
1% sisanya inspirasi (IQ).**)

---

*) Departemen Agama Republik Indonesia. 2004. *Al-Qur'an dan Terjemahannya*. Bandung. CV Penerbit J-ART.

**) Thomas Alva Edison, penemu bola lampu pijar.

PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Imro'atun Rofikah

NIM : 131810101042

menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang berjudul "Analisis *Locating Dominating Set* pada Graf Khusus dan Hasil Operasi Comb Sisi" adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali kutipan yang sudah saya sebutkan sumbernya, belum pernah diajukan pada institusi mana pun dan bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa ada tekanan dan paksaan dari pihak mana pun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, 27 Desember 2016

Yang menyatakan,

(Imro'atun Rofikah)

NIM. 131810101042

SKRIPSI

ANALISIS *LOCATING DOMINATING SET* PADA GRAF KHUSUS DAN HASIL OPERASI COMB SISI

Oleh

Imro'atun Rofikah

NIM 131810101042

Pembimbing

Dosen Pembimbing Utama	:	Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D.
Dosen Pembimbing Anggota	:	Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si.

PENGESAHAN

Skripsi berjudul "Analisis *Locating Dominating Set* pada Graf Khusus dan Hasil Operasi Comb Sisi" karya Imro'atun Rofikah telah diuji dan disahkan pada:

hari, tanggal :

tempat : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Tim Penguji :

Ketua,	Sekretaris,
Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D. NIP. 196808021993031004	Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si. NIP. 198408012008012006
Anggota I,	Anggota II,
Kusbudiono, S.Si., M.Si. NIP. 197704302005011001	Dr. Alfian Futuhul Hadi, S.Si., M.Si. NIP. 197407192000121001

Mengesahkan
Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Jember,

Drs. Sujito, Ph.D.
NIP. 196102041987111001

RINGKASAN

Analisis *Locating Dominating Set* pada Graf Khusus dan Hasil Operasi Comb Sisi; Imro'atun Rofikah, 131810101042; 2016: 82 halaman; Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Matematika merupakan ilmu universal yang mendasari perkembangan teknologi dan mempunyai peran penting dalam menyelesaikan berbagai permasalahan. Salah satu cabang matematika yang bermanfaat untuk memecahkan masalah dalam kehidupan sehari-hari adalah teori graf. Meskipun pada awalnya graf digunakan untuk menyelesaikan suatu masalah, namun graf telah mengalami perkembangan yang sangat luas didalam teori graf itu sendiri, diantaranya adalah teori *dominating set* dan perluasan dari teori *dominating set* yaitu teori *locating dominating set*.

Penerapan teori *locating dominating set* dimulai pada tahun 1980 oleh Slater dengan membuat sebuah kode lokasi perlindungan untuk beberapa fasilitas dengan menggunakan jaringan detektor. *Locating dominating set* diartikan sebagai himpunan titik D pada graf $G = (V, E)$ yang memenuhi syarat $N(u) \cap D \neq \emptyset$, $N(v) \cap D \neq \emptyset$ dan $N(u) \cap D \neq N(v) \cap D$ untuk setiap pasangan titik yang berbeda u dan v pada $V(G) - D$ dimana $N(u)$ adalah himpunan titik tetangga dari u dan $N(v)$ adalah himpunan titik tetangga dari v. Kardinalitas minimum dari *locating dominating set* disebut *location domination number* yang disimbolkan dengan $\gamma_L(G)$.

Data dalam penelitian ini berupa graf khusus yang dioperasikan comb sisi. Graf khusus yang digunakan yaitu graf matahari $\mathbb{S}_n$, graf *helm* H_n, graf buku segitiga Bt_n, graf buku B_n, graf lintasan P_n, graf *cycle* C_n dan graf bintang S_n. Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah deskriptif aksiomatik. Pada penelitian ini dihasilkan 12 teorema baru terkait *location domination number* yaitu:

Teorema 4.1 Misal G adalah graf khusus berupa graf buku segitiga Bt_n untuk $n \geq 2$, maka *location domination number* pada graf G adalah $\gamma_L(Bt_n) = n$.

Teorema 4.2 Misal G adalah graf hasil operasi comb sisi dari graf lintasan P_m dan graf matahari $\mathbb{S}_n$ dengan sisi x_1x_n sebagai sisi cangkok di graf $\mathbb{S}_n$ untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 3$, maka *location domination number* pada graf G adalah $\gamma_L(P_m \trianglerighteq \mathbb{S}_n) = mn - n$.

Teorema 4.3 Misal G adalah graf hasil operasi comb sisi dari graf *cycle* C_m dan graf matahari $\mathbb{S}_n$ dengan sisi x_1x_n sebagai sisi cangkok di graf $\mathbb{S}_n$ untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 3$, maka *location domination number* pada graf G adalah $\gamma_L(C_m \trianglerighteq \mathbb{S}_n) = mn$.

Teorema 4.4 Misal G adalah graf hasil operasi comb sisi dari graf bintang S_m dan graf matahari $\mathbb{S}_n$ dengan sisi x_1x_n sebagai sisi cangkok di graf $\mathbb{S}_n$ untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 3$, maka *location domination number* pada graf G adalah $\gamma_L(S_m \trianglerighteq \mathbb{S}_n) = mn$.

Teorema 4.5 Misal G adalah graf hasil operasi comb sisi dari graf *cycle* C_m dan graf

helm H_n dengan sisi x_1x_n sebagai sisi cangkok di graf H_n untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 3$, maka *location domination number* pada graf G adalah $\gamma_L(C_m \trianglerighteq H_n) = mn$.

Teorema 4.6 Misal G adalah graf hasil operasi comb sisi dari graf bintang S_m dan graf *helm* H_n dengan sisi x_1x_n sebagai sisi cangkok di graf H_n untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 3$, maka *location domination number* pada graf G adalah $\gamma_L(S_m \trianglerighteq H_n) = mn$.

Teorema 4.7 Misal G adalah graf hasil operasi comb sisi dari graf lintasan P_m dan graf buku segitiga Bt_n dengan sisi x_1x_2 sebagai sisi cangkok di graf Bt_n untuk $m \geq 4$ dan $n \geq 2$, maka *location domination number* pada graf G adalah $\gamma_L(P_m \trianglerighteq Bt_n) = mn - n - 1$.

Teorema 4.8 Misal G adalah graf hasil operasi comb sisi dari graf *cycle* C_m dan graf buku segitiga Bt_n dengan sisi x_1x_2 sebagai sisi cangkok di graf Bt_n untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 2$, maka *location domination number* pada graf G adalah $\gamma_L(C_m \trianglerighteq Bt_n) = mn - 1$.

Teorema 4.9 Misal G adalah graf hasil operasi comb sisi dari graf bintang S_m dan graf buku segitiga Bt_n dengan sisi x_1x_2 sebagai sisi cangkok di graf Bt_n untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 2$, maka *location domination number* pada graf G adalah $\gamma_L(S_m \trianglerighteq Bt_n) = mn$.

Teorema 4.10 Misal G adalah graf hasil operasi comb sisi dari graf lintasan P_m dan graf buku B_n dengan sisi x_1x_2 sebagai sisi cangkok di graf B_n untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 2$, maka *location domination number* pada graf G adalah $\gamma_L(P_m \trianglerighteq B_n) = mn - n + 1$.

Teorema 4.11 Misal G adalah graf hasil operasi comb sisi dari graf *cycle* C_m dan graf buku B_n dengan sisi x_1x_2 sebagai sisi cangkok di graf B_n untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 2$, maka *location domination number* pada graf G adalah $\gamma_L(C_m \trianglerighteq B_n) = mn$.

Teorema 4.12 Misal G adalah graf hasil operasi comb sisi dari graf bintang S_m dan graf buku B_n dengan sisi x_1x_2 sebagai sisi cangkok di graf B_n untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 2$, maka *location domination number* pada graf G adalah $\gamma_L(S_m \trianglerighteq B_n) = mn + 1$.

PRAKATA

Puji syukur ke hadirat Allah SWT. atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul ”Analisis *Locating Dominating Set* pada Graf Khusus dan Hasil Operasi Comb Sisi”. Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat menyelesaikan pendidikan strata satu (S1) pada Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Penyusunan skripsi ini tidak lepas dari bantuan berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan terima kasih kepada:

1. Drs. Sujito, Ph.D., selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
2. Kusbudiono S.Si., M.Si., selaku Ketua Jurusan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
3. Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D., selaku Dosen Pembimbing Utama, Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si., selaku Dosen Pembimbing Anggota, Kusbudiono S.Si., M.Si., selaku dosen Penguji I dan Dr. Alfian Futuhul Hadi, S.Si., M.Si., selaku dosen penguji II yang telah meluangkan waktu, pikiran, dan perhatian dalam penulisan skripsi ini;
4. dosen dan karyawan Jurusan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
5. semua pihak yang telah membantu terselesaikannya skripsi ini.

Penulis juga menerima segala kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan skripsi ini. Akhirnya penulis berharap, semoga skripsi ini dapat bermanfaat.

Jember, 27 Desember 2016

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

Halaman

DAFTAR GAMBAR

Halaman

BAB 1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika merupakan ilmu universal yang mendasari perkembangan teknologi dan mempunyai peran penting dalam menyelesaikan berbagai permasalahan. Salah satu cabang matematika yang bermanfaat untuk memecahkan masalah dalam kehidupan sehari-hari adalah teori graf. Graf merupakan representasi visual yang menyatakan objek sebagai titik *(vertex)* dan hubungan antar objek sebagai sisi *(edge)*. Teori graf pertama kali diperkenalkan oleh Leonhard Euler, seorang matematikawan berkebangsaan Swiss pada tahun 1736 melalui tulisannya yang berisi upaya pemecahan masalah Jembatan Konigsberg yang sangat sulit dipecahkan pada masa itu. Beberapa permasalahan lain yang telah dipecahkan menggunakan teori graf diantaranya adalah jaringan komunikasi, ilmu komputer, riset operasi, ilmu kimia, sosiologi, kartograph, teknik konstruksi, peningkatan keterampilan daya pikir dan sebagainya.

Meskipun pada awalnya graf digunakan untuk menyelesaikan suatu masalah, namun graf telah mengalami perkembangan yang sangat luas didalam teori graf itu sendiri, salah satunya adalah teori *dominating set*. *Dominating set* merupakan suatu konsep penentuan titik pada graf dengan ketentuan titik tersebut menjangkau titik yang ada di sekitarnya dan seminimal mungkin. Kardinalitas minimum dari *dominating set* disebut *domination number* yang disimbolkan dengan $\gamma(G)$. Teori *dominating* telah dipelajari dari tahun 1960, akan tetapi tingkat pengkajian tentang *dominating set* berkembang dan meningkat secara pesat pada pertengahan 1970-an. Salah satu perluasan teori *dominating set* yaitu teori *locating dominating set*. Penerapan teori *locating dominating set* dimulai pada tahun 1980 oleh Slater dengan membuat sebuah kode lokasi perlindungan untuk beberapa fasilitas dengan menggunakan jaringan detektor. *Locating dominating set* diartikan sebagai himpunan titik D pada graf $G = (V, E)$ yang memenuhi syarat $N(u) \cap D \neq \emptyset$, $N(v) \cap D \neq \emptyset$ dan $N(u) \cap D \neq N(v) \cap D$ untuk setiap pasangan titik yang berbeda u dan v pada $V(G) - D$ dimana $N(u)$ adalah himpunan titik tetangga dari u dan $N(v)$ adalah himpunan titik tetangga dari v. Kardinalitas minimum dari *locating dominating set* disebut *location domination number* yang disimbolkan dengan $\gamma_L(G)$.

Penelitian sebelumnya tentang *dominating set* telah banyak dilakukan diantaranya Wardani (2014) melakukan penelitian mengenai *dominating set* pada graf bunga Fl_n, graf gunung berapi $\vartheta_{n,m}$, graf *firecracker* $F_{n,k}$, graf pohon pisang $B_{n,m}$, dan graf tunas kelapa $CR_{n,m}$ serta mengaplikasikan teori *dominating set* pada analisis topologi jaringan *Wide Area Network* (WAN). Kemudian Saputro (2015) melakukan penelitian tentang teori *dominating set* pada hasil operasi graf khusus serta mengaplikasikan teori *dominating set* pada permainan catur. Selain penelitian tentang *dominating set*, penelitian tentang *locating dominating set* juga telah banyak dilakukan diantaranya Argiroffo (2015) melakukan penelitian dengan judul "*A polyhedral approach to locating dominating sets in graph*". Penelitian terbaru dilakukan oleh Foucaud (2016) yang berjudul "*Locating dominating set in twin free graph*" dan Desvandai (2016) menganalisis himpunan dominasi lokasi pada graf kipas F_n, graf *Helm* H_n, graf parasut PC_n, graf roda W_n dan graf lintasan P_n dengan beberapa operasi graf yaitu *joint*, *crown product*, amalgamasi, *shackle* dan *power* graf.

Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan, terlihat bahwa belum ada penelitian mengenai *locating dominating set* pada graf hasil operasi comb sisi. Oleh karena itu, peneliti tertarik untuk menganalisis *locating dominating set* pada graf khusus dan hasil operasi comb sisi. Misal diberikan graf G dengan banyaknya sisi pada graf G adalah $|E(G)|$ dan graf H dengan $e \in E(H)$ dimana $E(H)$ adalah himpunan sisi pada graf H, maka operasi comb sisi diartikan sebagai operasi graf dengan mengambil satu salinan graf G dan $|E(G)|$ salinan graf H, kemudian merekatkan salinan ke-i dari graf H di sisi cangkok e pada sisi ke-i dari graf G. Hasil operasi comb sisi dari graf G dan graf H dinotasikan dengan $G \trianglerighteq H$. Graf khusus yang digunakan pada penelitian ini yaitu graf matahari $\mathbb{S}_n$, graf *helm* H_n, graf buku segitiga Bt_n, graf buku B_n, graf lintasan P_n, graf *cycle* C_n dan graf bintang S_n. Proses awal penelitian ini yaitu menentukan himpunan titik dan himpunan sisi pada graf hasil operasi comb sisi, kemudian menentukan titik-titik yang memenuhi syarat *locating dominating set* dan selanjutnya menghitung *location domination number* pada graf khusus dan operasi comb sisi.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka dapat dirumuskan masalah dalam penelitian ini yaitu:

a. bagaimana *locating dominating set* pada graf Bt_m, $P_m \trianglerighteq \mathbb{S}_n$, $C_m \trianglerighteq \mathbb{S}_n$, $S_m \trianglerighteq \mathbb{S}_n$, $C_m \trianglerighteq H_n$, $S_m \trianglerighteq H_n$, $P_m \trianglerighteq Bt_n$, $C_m \trianglerighteq Bt_n$, $S_m \trianglerighteq Bt_n$, $P_m \trianglerighteq B_n$, $C_m \trianglerighteq B_n$, $S_m \trianglerighteq B_n$?

b. berapa *location domination number* pada graf Bt_m, $P_m \trianglerighteq \mathbb{S}_n$, $C_m \trianglerighteq \mathbb{S}_n$, $S_m \trianglerighteq \mathbb{S}_n$, $C_m \trianglerighteq H_n$, $S_m \trianglerighteq H_n$, $P_m \trianglerighteq Bt_n$, $C_m \trianglerighteq Bt_n$, $S_m \trianglerighteq Bt_n$, $P_m \trianglerighteq B_n$, $C_m \trianglerighteq B_n$, $S_m \trianglerighteq B_n$?

1.3 Tujuan Penelitian

Sesuai dengan rumusan masalah dan latar belakang di atas, maka tujuan dari penelitian ini adalah:

a. menentukan *locating dominating set* pada graf Bt_m, $P_m \trianglerighteq \mathbb{S}_n$, $C_m \trianglerighteq \mathbb{S}_n$, $S_m \trianglerighteq \mathbb{S}_n$, $C_m \trianglerighteq H_n$, $S_m \trianglerighteq H_n$, $P_m \trianglerighteq Bt_n$, $C_m \trianglerighteq Bt_n$, $S_m \trianglerighteq Bt_n$, $P_m \trianglerighteq B_n$, $C_m \trianglerighteq B_n$, $S_m \trianglerighteq B_n$;

b. menentukan *location domination number* pada graf Bt_m, $P_m \trianglerighteq \mathbb{S}_n$, $C_m \trianglerighteq \mathbb{S}_n$, $S_m \trianglerighteq \mathbb{S}_n$, $C_m \trianglerighteq H_n$, $S_m \trianglerighteq H_n$, $P_m \trianglerighteq Bt_n$, $C_m \trianglerighteq Bt_n$, $S_m \trianglerighteq Bt_n$, $P_m \trianglerighteq B_n$, $C_m \trianglerighteq B_n$, $S_m \trianglerighteq B_n$.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat yang didapatkan dari penelitian ini yaitu:

a. menambah pengetahuan dan wawasan baru mengenai teori *dominating set* khususnya *locating dominating set*;

b. hasil penelitian ini diharapkan dapat digunakan sebagai pengembangan atau perluasan ilmu tentang *locating dominating set*.

1.5 Kebaruan Penelitian

Peneliti sebelumnya telah menganalisis *locating dominating set* pada beberapa graf khusus dan hasil operasinya, operasi yang digunakan terdiri dari beberapa operasi. Sedangkan pada penelitian ini, peneliti menganalisis *locating dominating set* pada graf khusus dan hasil operasi comb sisi-nya saja. Graf khusus yang digunakan yaitu graf matahari $\mathbb{S}_n$, graf *helm* H_n, graf buku segitiga Bt_n, graf buku B_n, graf lintasan P_n, graf *cycle* C_n dan graf bintang S_n.

BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

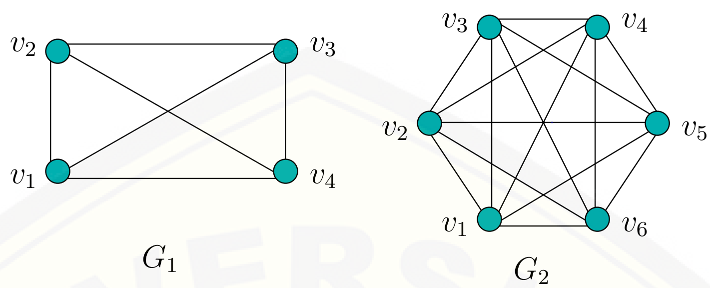
2.1 Terminologi Dasar Graf

Graf G merupakan sekumpulan titik di dalam bidang dua dimensi yang dihubungkan oleh sekumpulan sisi. Dengan kata lain graf G merupakan pasangan terurut himpunan (V, E) dimana V adalah himpunan berhingga tak kosong yang elemennya disebut titik *(vertex)*, sedangkan E adalah himpunan boleh kosong dari pasangan tidak terurut dua titik v_1 dan v_2 dimana $v_1, v_2 \in V$, yang disebut sisi *(edges)*. V disebut himpunan titik dari G, dan E disebut himpunan sisi dari G. Sebuah graf dimungkinkan tidak mempunyai sisi, tetapi mempunyai minimal satu buah titik. Sebuah graf yang tidak mempunyai sisi tetapi memiliki sebuah titik dinamakan graf trivial (Munir, 2009).

Secara umum graf dapat digambarkan sebagai diagram dimana *vertex* (V) merupakan titik pada graf yang dilabeli dengan huruf $\{a, b, c, \ldots, v, w, x, y, z\}$ atau dengan bilangan asli $\{1, 2, 3, \ldots\}$ maupun dengan menggabungkan keduanya. Sedangkan *edge* (E) adalah sisi yang menghubungkan titik-titik (dari titik i ke titik j), sehingga e dapat ditulis sebagai (v_i, v_j) atau $e = (v_i v_j)$ (Douglas, 2001). Gambar 2.1 merupakan contoh graf dengan 4 titik (graf G_1) dan 6 titik (graf G_2).

Menurut Iswadi (2011), banyaknya titik dari sebuah graf G disebut *order* dari G yang dinotasikan dengan p atau $|V(G)|$, sedangkan banyaknya sisi dari sebuah graf G disebut *size* dari G yang dinotasikan dengan q atau $|E(G)|$. Misalkan terdapat suatu graf dengan p buah titik dan q buah sisi maka graf tersebut dinotasikan dengan $G(p, q)$. Pada Gambar 2.1, G_1 adalah graf dengan $|V(G_1)| = 4$ dan $|E(G_1)| = 5$, sedangkan G_2 adalah graf dengan $|V(G_2)| = 6$ dan $|E(G2)| = 15$. G_1 adalah graf yang mempunyai himpunan titik $V(G_1) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan $E(G_1) = \{v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_2v_3, v_3v_4\}$. G_2 adalah graf yang mempunyai himpunan titik $V(G_2) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ dan $E(G_2) = \{v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_1v_5, v_1v_6, v_2v_3,$

$v_2v_4, v_2v_5, v_2v_6, v_3v_4, v_3v_5, v_3v_6, v_4v_5, v_4v_6, v_5v_6\}$.



Gambar 2.1 Contoh graf G_1 dan G_2

Dua buah titik pada graf G dikatakan bertetangga *(adjacent)* apabila terdapat sebuah sisi yang menghubungkan kedua titik tersebut. Sedangkan sebuah titik pada suatu graf dikatakan bersisian *(incident)* dengan sebuah sisi apabila titik tersebut merupakan titik ujung dari sisi tersebut. Sebagai contoh pada graf G_1 Gambar 2.1, v_1 *adjacent* dengan v_2 karena terdapat sisi v_1v_2 yang menghubungkan kedua titik tersebut. Selanjutnya titik v_1 dan v_3 *incident* dengan v_1v_3, karena kedua titik tersebut merupakan titik ujung dari sisi v_1v_3.

Derajat *(degree)* didefinisikan sebagai banyaknya sisi yang *incident* pada suatu titik. Derajat dinotasikan dengan d_i (*index* i menunjukkan titik ke-i pada graf). Derajat terkecil dari sebuah graf G adalah banyaknya sisi paling sedikit yang *incident* dengan titik v_i. Derajat terkecil dari graf G dinotasikan dengan $\delta(G)$. Derajat terbesar dari graf G adalah banyaknya sisi paling banyak yang *incident* dengan titik v_i. Derajat terbesar dari graf G dinotasikan dengan $\Delta(G)$. Sebagai contoh graf G_1 pada Gambar 2.1 memiliki $\delta(G_1) = 3$ dan $\Delta(G_1) = 3$.

Menurut Douglas (2001), Barisan titik dan sisi yang diawali dan diakhiri dengan titik pada sebuah graf dinamakan sebagai jalan $(walk)$. Jika titik awal dan titik akhir yang dilalui sama maka jalan tersebut dikatakan tertutup. Jika titik dan jalan yang yang dilalui berbeda maka disebut lintasan $(path)$. Jalan tertutup dengan barisan titik yang berbeda dinamakan sikel $(cycle)$. Panjang suatu jalan didefinisikan sebagai banyaknya sisi yang terdapat dalam jalan tersebut.

Graf dapat dikelompokan menjadi beberapa kategori bergantung pada sudut pandang pengelompokannya. Berdasarkan titik yang terhubung pada suatu graf, graf dibedakan atas dua jenis yaitu graf terhubung dan graf tidak terhubung. Graf G dikatakan terhubung jika untuk setiap dua titik yang berbeda v_i dan v_j di G terdapat lintasan dari v_i ke v_j. Sedangkan graf G dikatakan tak terhubung jika ada minimal dua titik yang berbeda v_i dan v_j di G yang tidak terdapat lintasan dari v_i ke v_j. Berdasarkan orientasi arah pada suatu graf, maka graf dibedakan atas dua jenis yaitu graf tak berarah dan graf berarah. Graf tak berarah (*undirect graph*) adalah graf yang sisinya tidak mempunyai orientasi arah. Sedangkan graf berarah (*direct graph*) adalah graf yang setiap sisinya mempunyai orientasi arah. Graf berarah merupakan pasangan himpunan $(V(G), E(G))$ dimana $V(G)$ adalah himpunan berhingga tak kosong dari elemen berbeda yang disebut titik, dan $E(G)$ adalah himpunan pasangan terurut (u, v) dari titik yang berbeda dimana $u, v \in V(G)$ yang disebut sisi berarah.

2.2 Graf Khusus

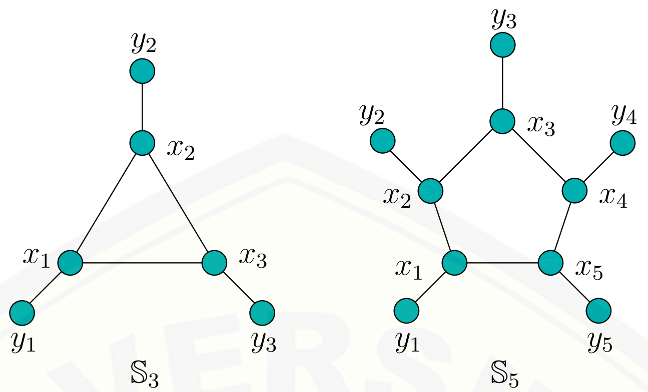
Graf khusus adalah graf yang memiliki ciri-ciri tertentu yang mudah dikenali serta memiliki keunikan dan karakteristik dalam bentuk khusus yaitu dapat diperbanyak sampai order n tetapi tetap simetris. Berikut adalah contoh-contoh graf khusus.

a. Graf Matahari (*Sun Graph*)

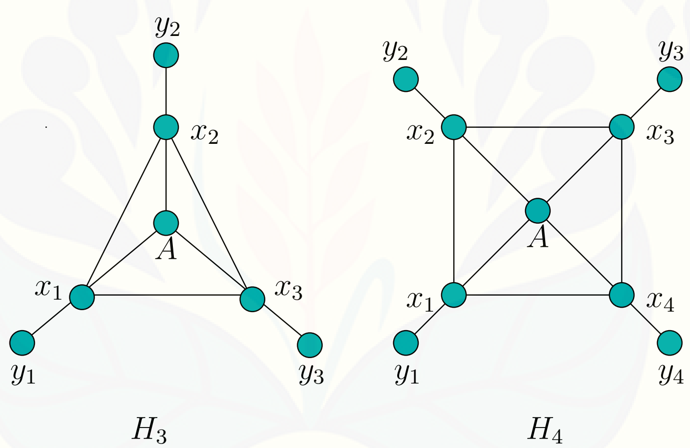
   Graf matahari dinotasikan dengan $\mathbb{S}_n$ merupakan sebuah graf dengan $V(\mathbb{S}_n) = \{x_i, y_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan $E(\mathbb{S}_n) = \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_1 x_n\} \cup \{x_i y_i; 1 \leq i \leq n\}$. Graf matahari $\mathbb{S}_n$ terdiri dari $2n$ titik dan $2n$ sisi dengan $n \geq 3$ (Wijaya, 2010). Contoh graf matahari dapat dilihat pada Gambar 2.2.

b. Graf *Helm*

   Graf *helm* adalah sebuah graf yang dinotasikan dengan H_n dimana $V(H_n) = \{A\} \cup \{x_i, y_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan $E(H_n) = \{Ax_i, x_i y_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_1 x_n\}$. Contoh graf *helm* dapat dilihat pada Gambar 2.3.



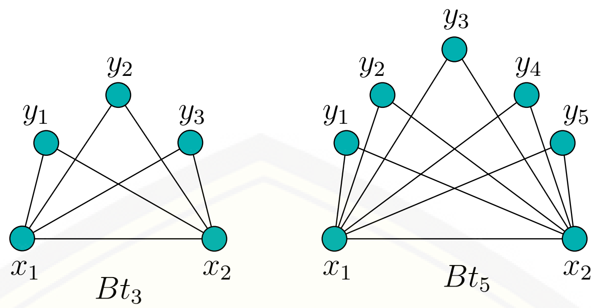
Gambar 2.2 Graf matahari $\mathbb{S}_3$ dan $\mathbb{S}_5$



Gambar 2.3 Graf *helm* H_3 dan H_4

c. Graf Buku Segitiga *(Triangular Book Graph)*

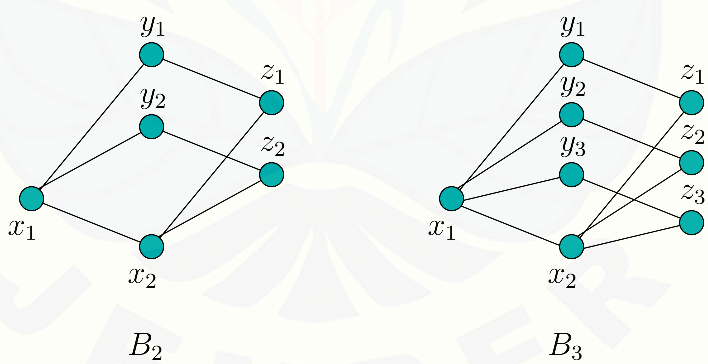
Menurut Dafik *et al.* (2013) graf buku segitiga yang dinotasikan dengan Bt_n merupakan graf terhubung dengan himpunan titik $V(Bt_n) = \{x_i; 1 \leq i \leq 2\} \cup \{y_j; 1 \leq j \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(Bt_n) = \{x_1x_2\} \cup \{x_1y_j, x_2y_j; 1 \leq j \leq n\}$, sehingga $|V(Bt_n)| = n + 2$ dan $|E(Bt_n)| = 2n + 1$ dengan $n \geq 2$. Contoh graf buku segitiga dapat dilihat pada Gambar 2.4.



Gambar 2.4 Graf *triangular book* Bt_3 dan Bt_5

d. Graf Buku *(Book Graph)*

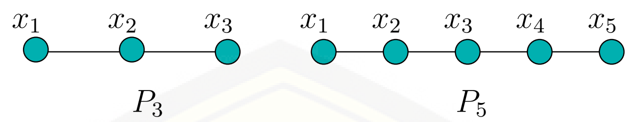
Graf buku yang dinotasikan dengan B_n merupakan graf terhubung dengan himpunan titik $V(B_n) = \{x_i; 1 \leq i \leq 2\} \cup \{y_j, z_j; 1 \leq j \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(B_n) = \{x_1x_2\} \cup \{x_1y_j, x_2z_j, y_jz_j; 1 \leq j \leq n\}$, sehingga $|V(Bt_n)| = 2n + 2$ dan $|E(Bt_n)| = 3n + 1$ dengan $n \geq 2$. Contoh graf buku dapat dilihat pada Gambar 2.5.



Gambar 2.5 Graf *book* B_2 dan B_3

e. Graf Lintasan *(Path Graph)*

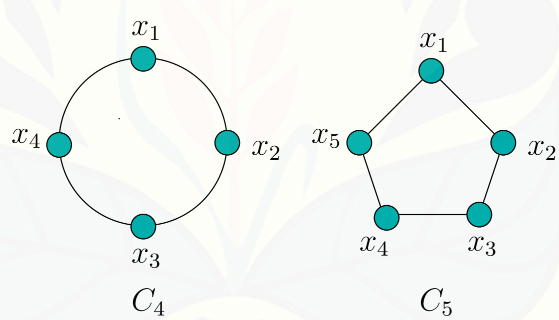
Graf lintasan atau *Path Graph* adalah graf yang terdiri dari satu lintasan. Graf lintasan dengan n buah titik dilambangkan dengan P_n. Banyaknya sisi pada graf lintasan yang terdiri dari n titik adalah $n-1$ (Damayanti, 2011). Contoh graf lintasan dapat dilihat pada Gambar 2.6.



Gambar 2.6 Graf lintasan P_3 dan P_5

f. Graf Siklus *(Cycle Graph)*

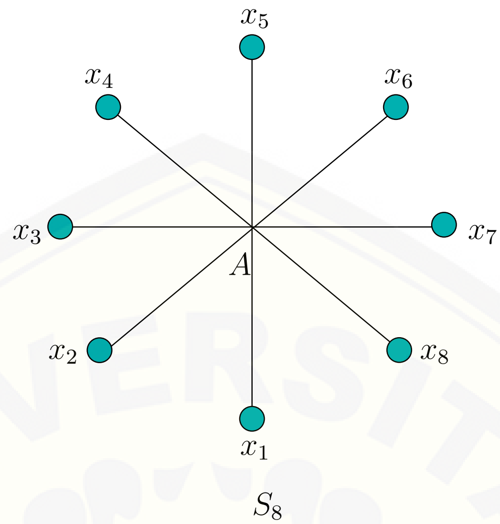
Graf siklus yang dinotasikan dengan C_n merupakan graf yang setiap titiknya berderajat dua dan banyaknya sisi sama dengan banyaknya titik yang dimiliki (Ardiyansah, R. dan Darmaji, 2013). Graf Siklus C_n hanya dapat dibentuk dengan $n \geq 3$. Contoh graf *cycle* dapat dilihat pada Gambar 2.7.



Gambar 2.7 Graf siklus C_4 dan C_5

g. Graf Bintang *(Star Graph)*

Graf bintang dinotasikan S_n dengan $n \geq 3$ adalah graf yang terdiri dari satu titik pusat yang mempunyai derajat n, $n+1$ titik dan n sisi. Himpunan titik dan himpunan sisi pada graf bintang yaitu $V(S_n) = \{A\} \cup \{x_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan $E(S_n) = \{Ax_i; 1 \leq i \leq n\}$. Contoh graf bintang dapat dilihat pada Gambar 2.8.



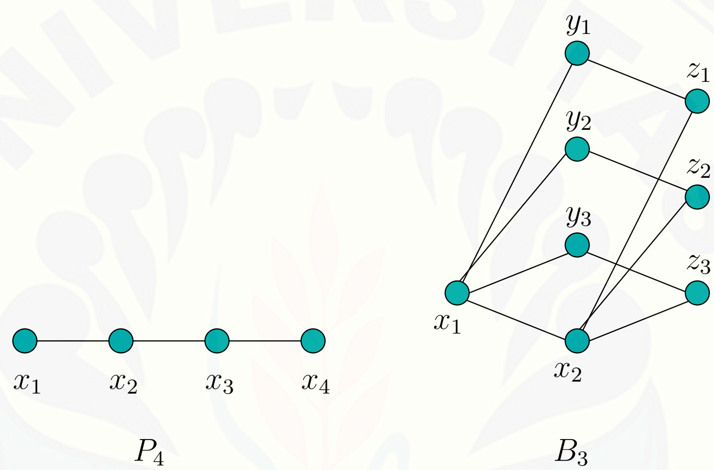
Gambar 2.8 Graf bintang S_8

2.3 Operasi Graf Comb sisi

Operasi graf merupakan operasi dua buah graf atau lebih sehingga menghasilkan graf baru. Terdapat beberapa operasi graf diantaranya operasi *joint*, *crown product*, *tensor*, *shackle*, amalgamasi, comb sisi dan lain sebagainya. Salah satu operasi yang sering digunakan untuk menghasilkan graf baru adalah operasi comb sisi. Berikut ini adalah definisi operasi comb sisi.

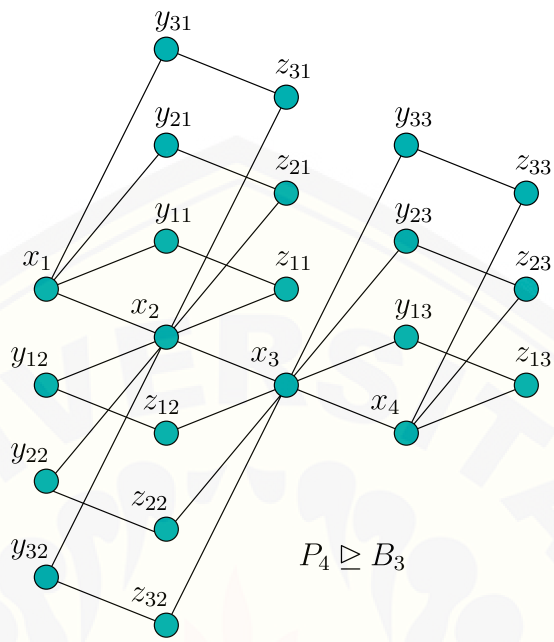
Definisi 2.1. Misalkan G dan H adalah graf terhubung dan $e \in E(H)$. Operasi comb sisi dari graf G dan H yang dinotasikan dengan $G \trianglerighteq H$ merupakan operasi graf dengan mengambil satu salinan graf G dan $|E(G)|$ salinan graf H, kemudian merekatkan salinan ke-i dari graf H di sisi cangkok e pada sisi ke-i dari graf G. Misal graf G dengan titik sebanyak $|V(G)| = p_1$ dan sisi sebanyak $|E(G)| = q_1$, serta graf H dengan titik sebanyak $|V(H)| = p_2$ dan sisi sebanyak $|E(H)| = q_2$. Maka banyaknya titik dan sisi pada graf $G \trianglerighteq H$ adalah $|V(G \trianglerighteq H)| = q_1(p_2 - 2) + p_1$ dan $|E(G \trianglerighteq H)| = q_1q_2$ (Dafik *et al.*, 2016).

Jika graf lintasan P_4 dan graf buku B_3 seperti pada Gambar 2.9 dioperasikan comb sisi, maka akan menghasilkan graf baru $P_4 \trianglerighteq B_3$ seperti Gambar 2.10. Sehingga dapat diilustrasikan bahwa untuk menggambar graf $P_m \trianglerighteq B_n$ diawali dengan menggambar satu salinan graf lintasan P_m dan $|E(P_m)|$ salinan graf buku B_n, kemudian merekatkan salinan ke-i dari graf buku B_n di sisi cangkok $x_1x_2 \in E(B_n)$ pada sisi ke-i dari graf lintasan P_m. Graf $P_m \trianglerighteq B_n$ dapat di-*expand* dengan menambahkan banyaknya titik dan sisi pada graf P_m dan B_n.



Gambar 2.9 Graf lintasan P_4 dan graf buku B_3

Misal diketahui graf lintasan P_m dengan $V(P_m) = \{x_i; 1 \leq i \leq m\}$, $E(P_m) = \{x_ix_{i+1}; 1 \leq i \leq m-1\}$, $p_1 = |V(P_m)| = m$, $q_1 = |E(P_m)| = m-1$ dan graf buku B_n dengan $V(B_n) = \{x_i; 1 \leq i \leq 2\} \cup \{y_j, z_j; 1 \leq j \leq n\}$, $E(B_n) = \{x_1x_2\} \cup \{x_1y_j, x_2z_j, y_jz_j; 1 \leq j \leq n\}, p_2 = |V(B_n)| = 2n{+}2, q_2 = |E(B_n)| = 3n{+}1$. Operasi comb sisi dari P_m dan B_n yang dinotasikan dengan $P_m \trianglerighteq B_n$ dengan sisi x_1x_2 sebagai sisi cangkok pada graf B_n untuk $m \geq 2$ dan $n \geq 2$, maka himpunan titik dan sisinya dapat disajikan dalam $V(P_m \trianglerighteq B_n) = \{x_i; 1 \leq i \leq m\} \cup \{y_{i,j}, z_{i,j}; 1 \leq i \leq m-1, 1 \leq j \leq n\}$ dan $E(P_m \trianglerighteq B_n) = \{x_ix_{i+1}; 1 \leq i \leq m-1\} \cup \{x_iy_{i,j}, x_{i+1}z_{i,j}, y_{i,j}z_{i,j}; 1 \leq i \leq m-1, 1 \leq j \leq n\}$. Sehingga $|V(P_m \trianglerighteq B_n)| = q_1(p_2 - 2) + p_1 = 2mn + m - 2n$ dan $|E(P_m \trianglerighteq B_n)| = q_1q_2 = 3mn + m - 3n - 1$.



Gambar 2.10 Graf hasil operasi comb sisi P_4 dengan B_3

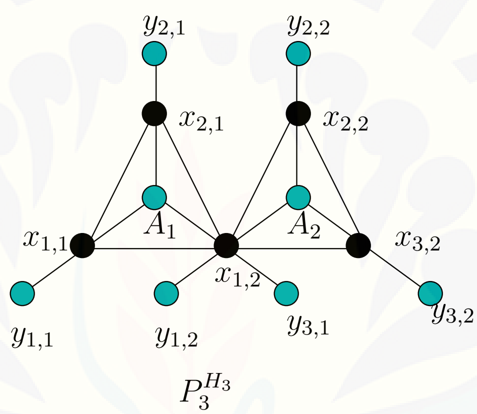
2.4 *Locating Dominating Set*

Suatu konsep penentuan titik pada graf dengan ketentuan titik sebagai *dominating set* menjangkau titik yang ada di sekitarnya dan seminimal mungkin disebut sebagai *dominating set*. Misalnya diberikan graf $G = (V,\ E)$, himpunan D dari titik graf sederhana G dikatakan *dominating set* jika setiap titik $u \in V - D$ *adjacent* ke beberapa titik $v \in D$. Kardinalitas terkecil dari *dominating set* disebut *domination number* yang dinotasikan dengan $\gamma\ (G)$. Berikut ini adalah definisi terkait *dominating set*.

Definisi 2.2. Diberikan sebuah graf terhubung $G = (V, E)$, $D \subseteq V$ merupakan *dominating set* dari titik di G sedemikian sehingga untuk semua titik $v \in V$ salah satu dari: $v \in D$ atau sebuah tetangga u dari v ada di D dimana $u \in D$ (Haynes *et al.*, 1998).

Sebagai contoh *dominating set* pada graf $P_3^{H_3}$ dapat dilihat pada Gambar 2.11, dimana titik yang berwarna hitam merupakan titik dominatornya. Titik dominator pada

$P_3^{H_3}$ adalah $D = \{x_{1,1}, x_{2,1}, x_{1,2}, x_{2,2}, x_{3,2}\}$ dan titik selain dominatornya adalah $V - D = \{A_1, A_2, y_{1,1}, y_{2,1}, y_{3,1}, y_{1,2}, y_{2,2}, y_{3,2}\}$, sehingga $N(V-D) \cap D$ diperoleh $N(A_1) \cap D = \{x_{1,1}, x_{2,1}, x_{1,2}\}$, $N(A_2) \cap D = \{x_{1,2}, x_{2,2}, x_{3,2}\}$, $N(y_{1,1}) \cap D = \{x_{1,1}\}$, $N(y_{2,1}) \cap D = \{x_{2,1}\}$, $N(y_{3,1}) \cap D = \{x_{1,2}\}$, $N(y_{1,2}) \cap D = \{x_{1,2}\}$, $N(y_{2,2}) \cap D = \{x_{2,2}\}$ dan $N(y_{3,2}) \cap D = \{x_{3,2}\}$. Untuk $u \in (V - D)$ terlihat bahwa $N(u) \cap D \neq \emptyset$, yang artinya titik dominator D menjangkau semua titik $V - D$, sehingga D memenuhi Definisi 2.2 dan diperoleh $\gamma(P_4^{H_3}) = 5$.



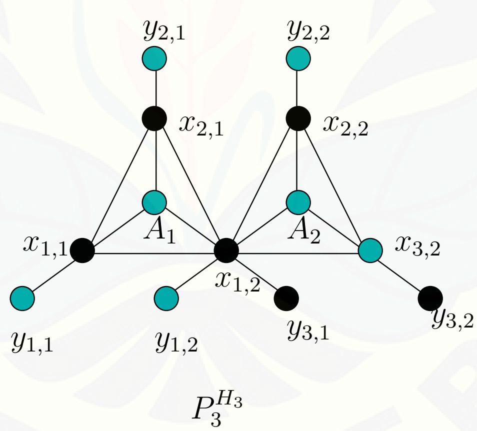
Gambar 2.11 *Dominating set* pada graf $P_3^{H_3}$

Locating dominating set merupakan perluasan konsep *dominating set*, karena *locating dominating set* merupakan *dominating set* dengan tambahan syarat. Sebuah graf $G = (V, E)$ dikatakan *locating dominating set* jika *dominating set* D memenuhi syarat setiap titik yang berbeda diluar D memiliki tetangga yang berbeda di D. Berikut ini adalah definisi terkait *locating dominating set*.

Definisi 2.3. Diberikan sebuah graf terhubung $G = (V, E)$, *locating dominating set* pada G adalah *dominating set* D pada G dengan syarat setiap dua titik berbeda u dan v dimana $u, v \in V - D$ berlaku $N(u) \cap D \neq N(v) \cap D$ (Slater, 1987).

Kardinalitas dari *locating dominating set* dinotasikan dengan $|D|$. Kardinalitas minimum dari *locating dominating set* disebut *location domination number* yang dinotasikan dengan $\gamma_L(G)$.

Sebagai contoh *locating dominating set* pada graf $P_3^{H_3}$ dapat dilihat pada Gambar 2.12, dimana titik yang berwarna hitam merupakan titik dominatornya. Titik dominator pada $P_3^{H_3}$ adalah $D = \{x_{1,1}, x_{2,1}, x_{1,2}, y_{3,1}, x_{2,2}, y_{3,2}\}$ dan titik selain dominatornya adalah $V - D = \{A_1, A_2, y_{1,1}, y_{2,1}, y_{1,2}, y_{2,2}, x_{3,2}\}$, sehingga $N(V - D) \cap D$ diperoleh $N(A_1) \cap D = \{x_{1,1}, x_{2,1}, x_{1,2}\}$, $N(A_2) \cap D = \{x_{1,2}, x_{2,2}\}$, $N(y_{1,1}) \cap D = \{x_{1,1}\}$, $N(y_{2,1}) \cap D = \{x_{2,1}\}$, $N(y_{1,2}) \cap D = \{x_{1,2}\}$, $N(y_{2,2}) \cap D = \{x_{2,2}\}$, $N(x_{3,2}) \cap D = \{x_{1,2}, x_{2,2}, y_{3,2}\}$. Untuk $u, v \in (V - D)$ terlihat bahwa $N(u) \cap D \neq \emptyset$ dan $N(v) \cap D \neq \emptyset$, yang artinya titik dominator D menjangkau semua titik $V - D$, sehingga D memenuhi Definisi 2.2. Selain itu terlihat bahwa $N(u) \cap D \neq N(v) \cap D$ yang artinya D memenuhi syarat *locating dominating set*, sehingga D memenuhi Definisi 2.3 dan diperoleh $\gamma_L(P_4^{H_3}) = 6$ (Desvandai, 2016).



Gambar 2.12 *Locating dominating set* pada graf $P_3^{H_3}$

Pada bagian berikut akan disajikan beberapa rangkuman terkait *location domination number* yang dapat digunakan sebagai rujukan. Beberapa hasil penelitian tersebut diantaranya dapat dilihat pada Tabel 2.1.

Tabel 2.1 *Location domination number* pada graf khusus dan graf hasil operasi

$Graf$	$\gamma_L(G)$	Keterangan
Graf Lengkap (K_n)	$n-1, n>1$	Slater
$K_{r,n-r}$	$n-2, r>1, n>4$	Slater
P_n	$\lceil\frac{2n}{5}\rceil, n>3$	Slater
C_n	$\lceil\frac{2n}{5}\rceil, n>6$	Slater
Graf Roda $(W_{1,n-1})$	$\lceil\frac{2n-2}{5}\rceil, n>7$	Slater
Thin Sun (T_n)	$n, n\geq 4$	Argiroffo *et al.*, 2015
Twin Free (G)	$\frac{n}{2}$	Foucaud *et al.*, 2016
Trees (T)	$\frac{n}{2}, n\geq 2$	Foucaud *et al.*, 2016
Helm (H_n)	$n, n\geq 3$	Desvandai, 2016
Amal(H_n, v, m)	$n\times m, n\geq 3, m\geq 2$	Desvandai, 2016
Shack(H_n, v, m)	$n\times m, n\geq 3, m\geq 2$	Desvandai, 2016
$P_n^{H_m}$	$m(n-1), n\geq 3, m\geq 3$	Desvandai, 2016
$W_n^{F_{1,2}}$	$n, n\geq 3$	Desvandai, 2016
Parasut (PC_n)	$\lceil\frac{4n}{5}\rceil, n\geq 4$	Desvandai, 2016
Kipas (F_n)	$\lceil\frac{2n}{5}\rceil, n\geq 4, n\neq 5$	Desvandai, 2016
$P_n + H_m$	$\lceil\frac{2n}{5}\rceil + m, n\geq 2, m\geq 3$	Desvandai, 2016
$P_n \odot H_m$	$m\times n, n\geq 2, m\geq 3$	Desvandai, 2016
Amal(PC_n, v, m)	$\lceil\frac{4n}{5}\rceil + m, n\geq 5, m\geq 2$	Desvandai, 2016
Shack(F_n, v, m)	$\lceil\frac{2mn-2m+2}{5}\rceil, n\geq 5, m\geq 3$	Desvandai, 2016

BAB 3. METODE PENELITIAN

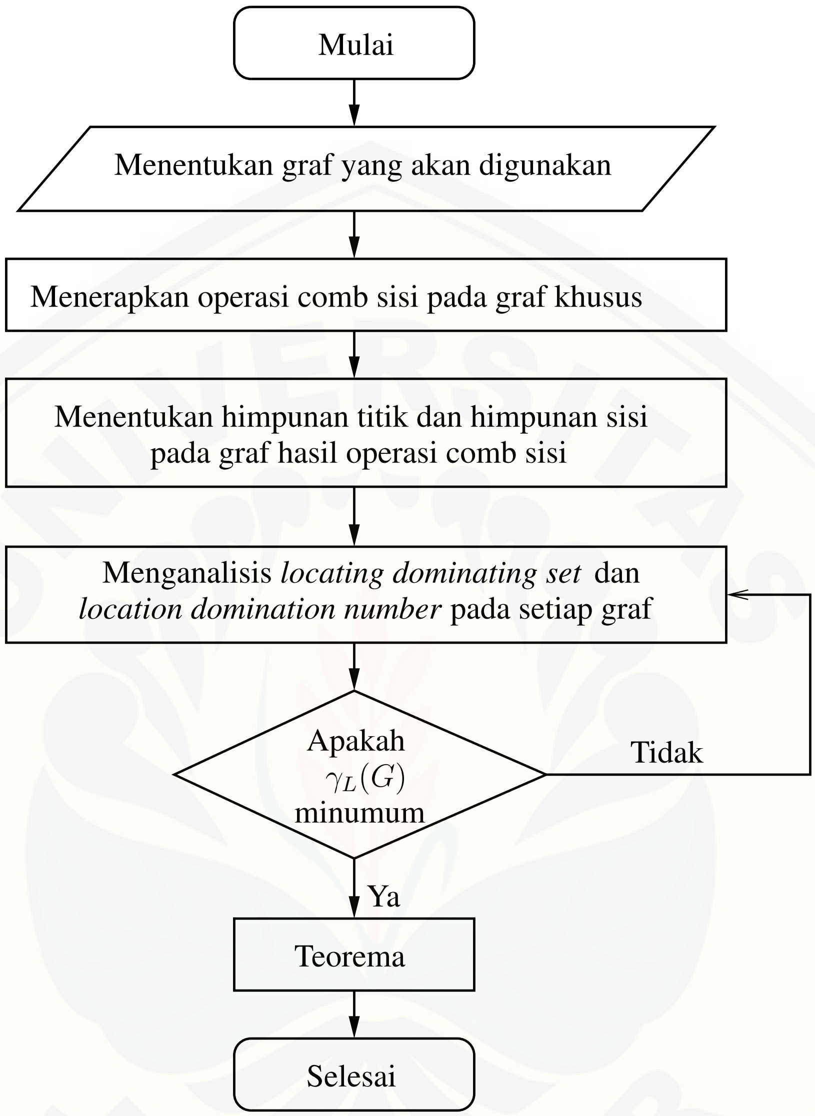
3.1 Jenis Penelitian

Penelitian ini dikategorikan ke dalam penelitian eksploratif yaitu penelitian yang bertujuan menggali hal-hal yang ingin diketahui oleh peneliti dan hasil penelitian dapat digunakan sebagai dasar penelitian selanjutnya. Data dalam penelitian ini berupa graf khusus yang dioperasikan comb sisi. Graf khusus yang digunakan adalah graf matahari (*sun graph*), graf *helm*, graf buku segitiga (*triangular book graph*), graf buku (*book graph*), graf lintasan (*path graph*), graf siklus (*cycle graph*) dan graf bintang (*star graph*).

3.2 Rancangan Penelitian

Pada penelitian ini menggunakan metode deduktif aksiomatik yang diawali dengan istilah yang didefinisikan. Metode ini menggunakan prinsip-prinsip pembuktian deduktif yang berlaku dalam logika matematika. Rancangan penelitian untuk *locating dominating set* pada graf khusus dan operasinya digambarkan dalam bagan yang diilustrasikan oleh Gambar 3.1. Uraian dari rancangan penelitian ini sebagai berikut:

a. menentukan graf khusus yang akan digunakan;
b. menerapkan operasi comb sisi pada graf khusus yang telah ditentukan;
c. menentukan himpunan titik dan himpunan sisi pada graf hasil operasi comb sisi;
d. menganalisis *locating dominating set* pada graf khusus dan graf hasil operasi comb sisi, sehingga diperoleh *location domination number* ($\gamma_L(G)$);
e. menganalisis apakah *location domination number* ($\gamma_L(G)$) sudah minimum. Apabila $\gamma_L(G)$ sudah minimum maka dihasilkan teorema tentang *location domination number* ($\gamma_L(G)$), sedangkan jika $\gamma_L(G)$ belum minimum maka dianalisis kembali *locating dominating set*-nya.



Gambar 3.1 Rancangan penelitian

BAB 5. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dari pembahasan pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa:

a. *locating dominating set* pada graf khusus dan graf hasil operasi comb sisi dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. $D(Bt_n) = \{x_1\} \cup \{y_j; 1 \leq j \leq n-1\}$, untuk $n \geq 2$;
2. $D(P_m \trianglerighteq \mathbb{S}_n) = \{x_{i,j}; 1 \leq i \leq m-1, 1 \leq j \leq n-1\} \cup \{y_{i,n}; 1 \leq i \leq m-1\}$, untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 3$;
3. $D(C_m \trianglerighteq \mathbb{S}_n) = \{y_{i,j}; 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$, untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 3$;
4. $D(S_m \trianglerighteq \mathbb{S}_n) = \{y_{i,j}; 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$, untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 3$;
5. $D(C_m \trianglerighteq H_n) = \{x_{i,j}; 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n-1\} \cup \{y_{i,1}; 1 \leq i \leq m\}$, untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 3$;
6. $D(S_m \trianglerighteq H_n) = \{x_{i,j}; 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n-1\} \cup \{y_{i,n}; 1 \leq i \leq m\}$, untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 3$;
7. $D(P_m \trianglerighteq Bt_n) = \{x_{i+1}; 1 \leq i \leq m-2\} \cup \{y_{i,j}; 1 \leq i \leq m-1, 1 \leq j \leq n-1\}$, untuk $m \geq 4$ dan $n \geq 2$;
8. $D(C_m \trianglerighteq Bt_n) = \{x_i; 1 \leq i \leq m-1\} \cup \{y_{i,j}; 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n-1\}$, untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 2$;
9. $D(S_m \trianglerighteq Bt_n) = \{x_i; 1 \leq i \leq m\} \cup \{y_{i,j}; 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n-1\}$, untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 2$;
10. $D(P_m \trianglerighteq B_n) = \{x_m\} \cup \{y_{i,j}; 1 \leq i \leq m-1, 1 \leq j \leq n\}$, untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 2$;
11. $D(C_m \trianglerighteq B_n) = \{y_{i,j}; 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$, untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 2$;

12. $D(S_m \trianglerighteq B_n) = \{A\} \cup \{y_{i,j}; 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$, untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 2$.

b. *location domination number* pada graf khusus dan graf hasil operasi comb sisi dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. $\gamma_L(Bt_n) = n$, untuk $n \geq 2$;
2. $\gamma_L(P_m \trianglerighteq \mathbb{S}_n) = mn - n$, untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 3$;
3. $\gamma_L(C_m \trianglerighteq \mathbb{S}_n) = mn$, untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 3$;
4. $\gamma_L(S_m \trianglerighteq \mathbb{S}_n) = mn$, untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 3$;
5. $\gamma_L(C_m \trianglerighteq H_n) = mn$, untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 3$;
6. $\gamma_L(S_m \trianglerighteq H_n) = mn$, untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 3$;
7. $\gamma_L(P_m \trianglerighteq Bt_n) = mn - n - 1$, untuk $m \geq 4$ dan $n \geq 2$;
8. $\gamma_L(C_m \trianglerighteq Bt_n) = mn - 1$, untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 2$;
9. $\gamma_L(S_m \trianglerighteq Bt_n) = mn$, untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 2$;
10. $\gamma_L(P_m \trianglerighteq B_n) = mn - n + 1$, untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 2$;
11. $\gamma_L(C_m \trianglerighteq B_n) = mn$, untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 2$;
12. $\gamma_L(S_m \trianglerighteq B_n) = mn + 1$, untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 2$.

5.2 Saran

Berdasarkan hasil penelitian berkaitan *locating dominating set* pada graf khusus dan graf hasil operasi comb sisi, maka peneliti memberikan saran kepada pembaca untuk meneliti *locating dominating set* pada operasi graf yang lainnya seperti operasi amalgamasi, *cartesian product*, tensor dan lain sebagainya.

DAFTAR PUSTAKA

Agustin, I. H., dan Dafik. 2014. On The Domination Number of Some Families of Special Graphs. *Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika*. 1(1): 139-143.

Ardiyansah, R., dan Darmaji. 2013. Bilangan Kromatik Graf Hasil Amalgamasi Dua Buah Graf. *Jurnal Sains dan Seni Pomits*. 2(1): 2337-3520.

Argiroffo, G. R., dan S.M. Bianchi. 2015. A Polyhedral Approach to Locating-Dominating Sets in Graphs. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*. 50: 89-94.

Canoy, S. R., dan G. A. Malacas. 2014. Locating-Dominating Sets in Graphs. *Journal of Applied Mathematical Sciences*. 8(88): 4381-4388.

Dafik, A. I. Kristiana, A. C. Prihandoko, dan D. A. R. Wardani. 2016. On the Total r-Dynamic Coloring of Graph: a New Graph Coloring Study. *Proceeding of International Conference on Mathematics: Education, Theory & Application (ICMETA)*.

Dafik, Slamin, F. R. Eka, dan L. Sya'diyah. 2013. Super Antimagicness of Triangular Book and Diamond Ladder Graphs. *Proceeding of International Conference on Mathematics and Its Aplications (IICMA)*. 1-8.

Dafik, Slamin, Tanna, A. S. Fenovcikova, dan M. Baca. 2016. Constructions of H-antimagic Graphs Using Smaller Edge-antimagic Graph. *Ars Combinatoria*.

Damayanti, R. T. 2011. Automorfisma graf bintang dan graf lintasan. http://ejournal.unega.ac.id/article/6101/29/article/pdf. [Diakses pada 27 Agustus 2016].

Desvandai, R. B. 2016. Analisa Himpunan Dominasi Lokasi pada Model Topologi Graf Khusus dan Operasinya. *Skripsi*. Jember: Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Douglas, B. W. 2001. *Introduction to Graph Theory*. $2^{nd}ed$. New Jersey: Prentice-Hall.

Foucaud, F., dan M. A. Henning. 2016. Locating-Dominating Sets in Twin-Free Graphs. *Journal of Discrete Applied Mathematics*. 23(3): 1-18.

Haynes, T. W., S. T. Hedetniemi, dan P. J. Slater. 1998. *Fundamental of Domination in Graphs*. New York: Marcel Dekker, Inc.

Haynes, T. W., dan M. A. Henning. 2002. Total Domination Good Vertices in Graphs. *Australasian Journal of Combinatorics*. 26: 305-315.

Honkala, I., T. Laihonen, dan S. Ranto. 2002. On strongly identifying codes. *Discrete Mathematics*. 254: 191-205.

Iswadi, H. 2011. Batas Atas Bilangan Dominasi Lokasi Metrik dari Graf Hasil Operasi Korona. *University of Surabaya Repository*. 1979-3960

Muharromah, A., I. H. Agustin, dan Dafik. 2014. Graf-graf Khusus dan Bilangan Dominasinya, *Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika*. 543-548.

Munir, R. 2009. *Matematika Diskrit*. Edisi ketiga. Bandung: Informatika Bandung.

Saputro, H. D. 2015. Dominating Set pada Hasil Operasi Graf Khusus dan Aplikasinya. *Skripsi*. Jember: Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Slater, P. J. 1987. Domination and Location in Acyclic Graphs. *John Wiley & Sons, Inc*. 17: 55-64.

Slater, P. J. 2002. Fault-Tolerant Locating-Dominating Sets. *Discrete Mathematics*. 249: 179-189.

Soleha, S. A. 2016. Independent Domination Number pada Beberapa Graf Operasi. *Skripsi*. Jember: Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Wardani, D. A. R., I. H. Agustin, Dafik. 2014. Bilangan Dominasi dari Graf-graf Khusus. *Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika*. 1: 78-82.

Wijaya, W. 2010. Pelabelan Elegant pada Graf Kipas, Graf Matahari dan Graf Bunga Matahari. *Skripsi*. Jember: Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.