



**ANALISA NILAI KROMATIK PEWARNAAN TOTAL r -DINAMIS PADA
OPERASI *COMB PRODUCT* DARI GRAF - GRAF KHUSUS**

SKRIPSI

Oleh

Mira Septiana Dewi

NIM 131810101034

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER
2016**



**ANALISA NILAI KROMATIK PEWARNAAN TOTAL r -DINAMIS PADA
OPERASI *COMB PRODUCT* DARI GRAF - GRAF KHUSUS**

SKRIPSI

diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat
untuk menyelesaikan Program Studi Matematika (S1)
dan mencapai gelar Sarjana Sains

Oleh

Mira Septiana Dewi
NIM 131810101034

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER

2016

PERSEMBAHAN

Dengan menyebut nama Allah yang Maha Pengasih lagi Maha Penyayang, serta Sholawat atas Nabi Muhammad S.A.W, penulis persembahkan skripsi ini sebagai ungkapan kebahagiaan dan rasa terima kasih kepada :

1. orang tuaku tercinta Bapak Mustakim dan Ibu Nurhidayati, kakakku M. Muhlisin serta kedua adikku A. Fahmi Nada dan A. Wahyu Ali Wafi yang telah memberikan rasa cinta dan kasih sayangnya serta dukungan moril, materil dan doa yang tidak pernah berhenti untuk meraih cita-cita;
2. guru dan dosen-dosenku yang telah memberikan ilmu dan membimbing dengan penuh kesabaran;
3. keluarga besar matematika angkatan 2013 (ATLAS'13) yang selalu memberi dukungan dan semangat;
4. teman-teman pejuang graf, serta sahabat - sahabatku funtastic four (lusy, hani dan ria) yang selalu berbagi duka maupun suka, dan selalu memberikan semangat;
5. Alamamater tercinta Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

MOTTO

”Allah meninggikan orang-orang yang beriman diantara kamu dan orang-orang yang diberi ilmu pengetahuan beberapa derajat”

(Al-Mujadillah:11)¹

”Visi tanpa tindakan adalah lamunan, tindakan tanpa visi adalah mimpi buruk.”

”Banyak kegagalan hidup terjadi karena orang - orang tidak menyadari betapa dekatnya kesuksesan ketika mereka menyerah.”

(Thomas Alfa Edison)²

”Tugas kita bukanlah untuk berhasil. Tugas kita adalah untuk mencoba, karena didalam mencoba itulah kita menemukan dan membangun kesempatan untuk berhasil.”

(Mario Teguh)³

¹Departemen Agama Republik Indonesia. 2004. *Al-Qur'an dan Terjemahannya*. Bandung: CV. Penerbit Diponegoro.

²Thomas Alva Edison, penemu mesin telegraf.

³Mario Teguh, motivator dan konsultan Indonesia.

PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : Mira Septiana Dewi

NIM : 131810101034

menyatakan dengan sesungguhnya bahwa karya ilmiah yang berjudul "Analisa Nilai Kromatik Pewarnaan Total r -Dinamis Pada Operasi *Comb Product* dari Graf - Graf Khusus" adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali kutipan yang sudah saya sebutkan sumbernya, belum pernah diajukan pada institusi manapun, dan bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa ada tekanan dan paksaan dari pihak manapun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, Desember 2016

Yang menyatakan,

Mira Septiana Dewi

NIM. 131810101034

SKRIPSI

**ANALISA NILAI KROMATIK PEWARNAAN TOTAL r -DINAMIS PADA
OPERASI *COMB PRODUCT* DARI GRAF - GRAF KHUSUS**

Oleh

Mira Septiana Dewi
NIM 131810101034

Pembimbing:

Dosen Pembimbing Utama : Kusbudiono, S.Si., M.Si.
Dosen Pembimbing Anggota : Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D.

PENGESAHAN

Skripsi berjudul "Analisa Nilai Kromatik Pewarnaan Total r -Dinamis Pada Operasi *Comb Product* dari Graf - Graf Khusus" telah diuji dan disahkan pada:

hari, tanggal :

tempat : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam.

Tim Penguji:

Ketua,

Sekretaris

Kusbudiono, S.Si., M.Si.

Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D.

NIP. 197704302005011001

NIP. 196808021993031004

Anggota I,

Anggota II,

Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si.

Dr. Alfian Futuhul Hadi, S.Si., M.Si.

NIP. 198408012008012006

NIP. 197407192000121001

Mengesahkan

Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Universitas Jember,

Drs. Sujito, Ph.D.

NIP. 196102041987111001

RINGKASAN

Analisa Nilai Kromatik Pewarnaan Total r -Dinamis pada operasi *Comb Product* dari Graf - Graf Khusus; Mira Septianan Dewi, 131810101034; 2016: 132 halaman; Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Jember.

Teori graf pertama kali diperkenalkan oleh seorang matematikawan berkebangsaan Swiss bernama Leonhard Euler pada tahun 1736. Salah satu teori yang dikembangkan dalam teori graf adalah pewarnaan graf (*coloring*). Terdapat tiga macam pewarnaan dalam teori graf, yaitu pewarnaan titik (*vertex coloring*), pewarnaan sisi (*edge coloring*), dan pewarnaan wilayah (*region coloring*). Selanjutnya, H. Lai dan B. Montgomery memperkenalkan konsep pewarnaan dinamis dan menuangkannya dalam sebuah artikel yang berjudul *Dynamic Coloring of Graphs*. Dari penelitian diatas mulai dikembangkan lagi tentang pewarnaan dinamis pada graf. Terdapat tiga macam pewarnaan r -dinamis dalam teori graf yaitu pewarnaan titik r -dinamis, pewarnaan sisi r -dinamis, dan pewarnaan total r -dinamis. Pewarnaan total r -dinamis pada graf G adalah pemetaan $c : V(G) \cup E(G)$ ke himpunan warna sedemikian hingga memenuhi kondisi $\forall v \in V(G), |c(N(v))| \geq \min\{r, d(v) + N(v)\}$ dan $\forall e = uv \in E(G), |c(N(e))| \geq \min\{r, d(u) + d(v)\}$. Bilangan kromatik dari pewarnaan total r -dinamis adalah banyaknya nilai k minimum yang dibutuhkan untuk mewarnai graf G , dan dinotasikan dengan $\chi_r(G)$.

Pewarnaan total r -dinamis dapat diterapkan pada graf khusus maupun graf operasi. Operasi yang digunakan pada penelitian ini yaitu operasi *Comb Product*. Operasi *comb product* dari graf L dan H dinotasikan $L \triangleright H$ adalah operasi graf yang diperoleh dengan mengambil salinan dari graf L dan $|L|$ salinan dari H dan merekatkan salinan ke- i dari graf H di titik cangkok o pada titik ke- i dari graf L . Adapun graf yang digunakan dalam penelitian ini yaitu graf $P_n \triangleright W_{d_{3,3}}$, $L_n \triangleright P_m$,

$P_n \triangleright F_{1,3}, L_n \triangleright S_3, P_n \triangleright H_{2,2}, TL_n \triangleright C_3$ dan $S_n \triangleright C_3$.

Penelitian ini menggunakan metode deduktif dan pendeteksian pola. Tujuan penelitian ini adalah menentukan himpunan titik dan sisi pada graf operasi dan bilangan kromatik pewarnaan total r -dinamis pada graf $P_n \triangleright Wd_{3,3}, L_n \triangleright P_m, P_n \triangleright F_{1,3}, L_n \triangleright S_3, P_n \triangleright H_{2,2}, TL_n \triangleright C_3$ dan $S_n \triangleright C_3$ sehingga dihasilkan 7 teorema baru, diantaranya adalah

Penelitian ini dikategorikan sebagai penelitian eksploratif dan menggunakan metode pendeteksian pola. Tujuan penelitian ini adalah menentukan nilai kromatik total dari beberapa graf khusus dan dihasilkan 7 teorema baru, diantaranya adalah:

1. **Teorema 4.1** Misalkan G adalah graf $P_n \triangleright Wd_{3,3}$ dimana $n \geq 3$ dan titik z sebagai titik cangkok pada graf $Wd_{3,3}$. Bilangan kromatik pewarnaan total r -dinamis pada graf G adalah

$$\chi''_r(G) = \begin{cases} 9, & \text{untuk } 1 \leq r \leq 7 \\ 10, & \text{untuk } r = 8 \\ 12, & \text{untuk } 9 \leq r \leq 10 \\ r + 2, & \text{untuk } 11 \leq r \leq 13 \\ 16, & \text{untuk } 14 \leq r \leq 15 \\ 17, & \text{untuk } r \geq 16 \end{cases}$$

2. **Teorema 4.2** Misalkan G adalah graf $L_n \triangleright P_m$ dimana $n \geq 2, m \geq 3$ dan titik y_1 sebagai titik cangkok pada graf P_m . Bilangan kromatik pewarnaan total r -dinamis pada graf G adalah

$$\chi''_r(G) = \begin{cases} 5, & \text{untuk } 1 \leq r \leq 3 \\ 8, & \text{untuk } r = 4 \\ 10, & \text{untuk } r = 5 \\ 13, & \text{untuk } 6 \leq r \leq 7 \\ 15, & \text{untuk } r \geq 8 \end{cases}$$

3. **Teorema 4.3** Misalkan G adalah graf $P_n \triangleright F_{1,3}$ dimana $n \geq 3$ dan titik y_3 sebagai titik cangkok pada graf $F_{1,3}$. Bilangan kromatik pewarnaan total r -dinamis pada graf G adalah

$$\chi''_r(G) = \begin{cases} 5, & \text{untuk } 1 \leq r \leq 3 \\ 6, & \text{untuk } r = 4 \\ 8, & \text{untuk } r = 5 \\ 10, & \text{untuk } 6 \leq r \leq 7 \\ 11, & \text{untuk } r \geq 8 \end{cases}$$

4. **Teorema 4.4** Misalkan G adalah graf $L_n \triangleright S_3$ dimana $n \geq 2$ dan titik z_3 sebagai titik cangkok pada graf S_3 . Bilangan kromatik pewarnaan total r -dinamis pada graf G adalah

$$\chi''_r(G) = \begin{cases} 5, & \text{untuk } 1 \leq r \leq 3 \\ 6, & \text{untuk } r = 4 \\ 8, & \text{untuk } r = 5 \\ 10, & \text{untuk } r = 6 \\ 12, & \text{untuk } r = 7 \text{ dan } r \geq 8 \end{cases}$$

5. **Teorema 4.5** Misalkan G adalah graf $TL_n \triangleright C_3$ dimana $n \geq 3$ dan titik y_3 sebagai titik cangkok pada graf C_3 . Bilangan kromatik pewarnaan total r -dinamis pada graf G adalah

$$\chi''_r(G) = \begin{cases} 7, & \text{untuk } 1 \leq r \leq 4 \\ 8, & \text{untuk } 5 \leq r \leq 6 \\ 9, & \text{untuk } r = 7 \\ r + 3, & \text{untuk } 8 \leq r \leq 9 \\ 15, & \text{untuk } r = 10 \\ 18, & \text{untuk } r = 11 \\ 20, & \text{untuk } r \geq 12 \end{cases}$$

6. **Teorema 4.6** Misalkan G adalah graf $P_n \triangleright H_{2,2}$ dimana $n \geq 3$ dan titik y_4 sebagai

titik cangkok pada graf $H_{2,2}$. Bilangan kromatik pewarnaan total r -dinamis pada graf G adalah

$$\chi''_r(G) = \begin{cases} 5, & \text{untuk } 1 \leq r \leq 3 \\ 8, & \text{untuk } r = 4 \\ 9, & \text{untuk } 5 \leq r \leq 7 \\ 10, & \text{untuk } r \geq 8 \end{cases}$$

7. **Teorema 4.7** Misalkan G adalah graf $S_n \triangleright C_3$ dimana $n \geq 4$ dan titik z_3 sebagai titik cangkok pada graf C_3 . Bilangan kromatik pewarnaan total r -dinamis pada graf G adalah

$$\chi''_r(G) = \begin{cases} n + 3, & \text{untuk } 1 \leq r \leq n + 2 \\ n + 4, & \text{untuk } r = n + 3 \\ n + 6, & \text{untuk } n + 4 \leq r \leq n + 5 \\ r + 1, & \text{untuk } n + 6 \leq r \leq 2n + 3 \\ 2n + 5, & \text{untuk } r \geq 2n + 4 \end{cases}$$

PRAKATA

Puji syukur kehadiran Tuhan Yang Maha Esa atas segala kuasa-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir yang berjudul "Analisa Nilai Kromatik Pewarnaan Total r -Dinamis Pada Operasi *Comb Product* dari Graf - Graf Khusus". Penulisan tugas akhir ini dilakukan guna memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan Program Studi Matematika (S1) dan mencapai gelar Sarjana Sains pada Jurusan Matematika FMIPA Universitas Jember.

Pada kesempatan ini, dengan segala hormat penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Dekan Fakultas MIPA Universitas Jember;
2. Ketua Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Jember;
3. Bapak Kusbudiono, S.Si., M.Si. selaku dosen pembimbing utama dan Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D. selaku dosen pembimbing anggota;
4. Ibu Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si. dan Bapak Dr. Alfian Futuhul Hadi, S.Si., M.Si. selaku dosen penguji yang telah memberikan kritik dan saran yang membangun;
5. Dosen dan Karyawan jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
6. serta semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu yang telah membantu dalam penyelesaian skripsi ini.

Penulis menyadari bahwa penelitian ini masih jauh dari sempurna. Oleh karena itu penulis mengharap kritik dan saran demi kesempurnaan penelitian selanjutnya. Semoga tugas ini dapat bermanfaat bagi kita semua.

Jember, Desember 2016

Penulis

DAFTAR ISI

	Halaman
HALAMAN JUDUL	i
PERSEMBAHAN	ii
MOTTO	iii
PERNYATAAN	iv
HALAMAN PEMBIMBING	v
PENGESAHAN	vi
RINGKASAN	vii
PRAKATA	xi
DAFTAR ISI	xii
DAFTAR GAMBAR	xiv
DAFTAR TABEL	xviii
BAB 1. PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	3
1.3 Tujuan Penelitian	3
1.4 Manfaat Penelitian	3
1.5 Kebaharuan Penelitian	4
BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA	5
2.1 Terminologi Graf	5
2.2 Pewarnaan Graf	7
2.2.1 Pewarnaan Titik (<i>Vertex Coloring</i>)	7
2.2.2 Pewarnaan Sisi (<i>Edge Coloring</i>).....	8
2.2.3 Pewarnaan Wilayah (<i>Region Coloring</i>)	8

2.3	Pewarnaan r-Dinamis	9
2.3.1	Pewarnaan Titik r -Dinamis	9
2.3.2	Pewarnaan Sisi r -Dinamis	9
2.3.3	Pewarnaan Total r -Dinamis	10
2.4	Graf-Graf Khusus	12
2.5	Hasil Pewarnaan r-dinamis Sebelumnya	14
BAB 3.	METODE PENELITIAN	22
3.1	Metode Penelitian	22
3.2	Rancangan Penelitian	22
BAB 4.	HASIL DAN PEMBAHASAN	24
4.1	Bilangan Kromatik dan Fungsi Pewarnaan Total r -Dinamis	24
4.2	Pembahasan	121
BAB 5.	PENUTUP	126
5.1	Kesimpulan	126
5.2	Saran	130
DAFTAR PUSTAKA	131

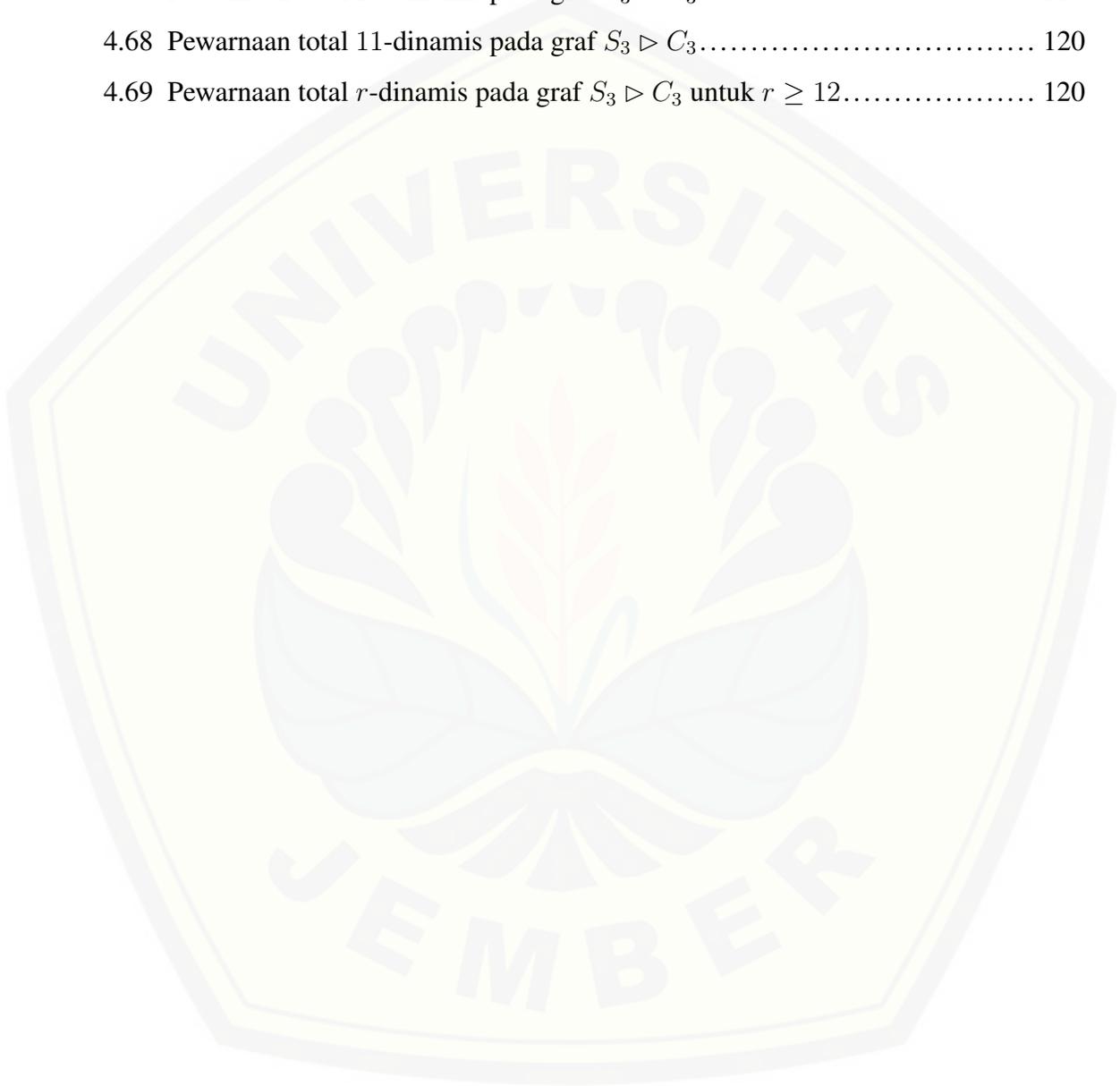
DAFTAR GAMBAR

	Halaman
2.1 Graf G	5
2.2 Pewarnaan titik pada Graf G	8
2.3 Pewarnaan sisi pada Graf G	8
2.4 Pewarnaan total 1-dinamis dan 2-dinamis pada graf P_5	11
2.5 Contoh hasil operasi Comb Product ($C_4 \triangleright C_5$).....	15
3.1 Skema rancangan penelitian	23
4.1 (a) Graf lintasan P_3 dan graf windmill $Wd_{3,3}$ (b) Graf Hasil Operasi <i>comb product</i> ($P_3 \triangleright Wd_{3,3}$) dengan titik z sebagai titik cangkok pada graf $Wd_{3,3}$.	26
4.2 Pewarnaan total r -dinamis pada graf $P_3 \triangleright Wd_{3,3}$ untuk $1 \leq r \leq 7$	36
4.3 Pewarnaan total 8-dinamis pada graf $P_3 \triangleright Wd_{3,3}$	36
4.4 Pewarnaan total r -dinamis dengan 11 warna pada ($P_3 \triangleright Wd_{3,3}$).....	36
4.5 Pewarnaan total 9, 10-dinamis pada graf $P_3 \triangleright Wd_{3,3}$	37
4.6 Pewarnaan total 11-dinamis pada graf $P_3 \triangleright Wd_{3,3}$	37
4.7 Pewarnaan total 12-dinamis pada graf $P_3 \triangleright Wd_{3,3}$	37
4.8 Pewarnaan total 13-dinamis pada graf $P_3 \triangleright Wd_{3,3}$	38
4.9 Pewarnaan total 14, 15-dinamis pada graf $P_3 \triangleright Wd_{3,3}$	38
4.10 Pewarnaan total r -dinamis pada graf $P_6 \triangleright Wd_{3,3}$ untuk $r \geq 16$	38
4.11 (a) Graf ladder L_4 dan graf lintasan P_6 (b) Graf Hasil Operasi <i>comb product</i> ($L_4 \triangleright P_6$) dengan titik y_1 sebagai titik cangkok pada graf P_m	40
4.12 Pewarnaan total r -dinamis pada graf $L_4 \triangleright P_6$ untuk $1 \leq r \leq 3$	49
4.13 Pewarnaan total r -dinamis dengan 6 warna pada ($L_4 \triangleright P_6$)	49
4.14 Pewarnaan total r -dinamis dengan 7 warna pada ($L_4 \triangleright P_6$)	50
4.15 Pewarnaan total 4-dinamis pada graf $L_4 \triangleright P_6$	50
4.16 Pewarnaan total r -dinamis dengan 9 warna pada ($L_4 \triangleright P_6$)	50

4.17	Pewarnaan total 5-dinamis pada graf $L_4 \triangleright P_6$	51
4.18	Pewarnaan total r -dinamis dengan 11 warna pada $(L_4 \triangleright P_6)$	51
4.19	Pewarnaan total r -dinamis dengan 12 warna pada $(L_4 \triangleright P_6)$	51
4.20	Pewarnaan total 6, 7-dinamis pada graf $L_4 \triangleright P_6$	52
4.21	Pewarnaan total r -dinamis dengan 14 warna pada $(L_4 \triangleright P_6)$	52
4.22	Pewarnaan total r -dinamis pada graf $L_4 \triangleright P_6$ untuk $r \geq 8$	52
4.23	(a) Graf lintasan P_3 dan graf kipas $F_{1,3}$ (b) Graf Hasil Operasi <i>comb product</i> $(P_3 \triangleright F_{1,3})$ dengan titik y_3 sebagai titik cangkok pada graf $F_{1,3}$	54
4.24	Pewarnaan total r -dinamis pada graf $P_3 \triangleright F_{1,3}$ untuk $1 \leq r \leq 3$	61
4.25	Pewarnaan total 4-dinamis pada graf $P_3 \triangleright F_{1,3}$	61
4.26	Pewarnaan total r -dinamis dengan 7 warna pada graf $P_3 \triangleright F_{1,3}$	61
4.27	Pewarnaan total 5-dinamis pada graf $P_3 \triangleright F_{1,3}$	62
4.28	Pewarnaan total r -dinamis dengan 9 warna pada graf $P_3 \triangleright F_{1,3}$	62
4.29	Pewarnaan total 6, 7-dinamis pada graf $P_3 \triangleright F_{1,3}$	62
4.30	Pewarnaan total r -dinamis pada graf $P_6 \triangleright F_{1,3}$ untuk $r \geq 8$	62
4.31	(a) Graf ladder L_4 dan graf bintang S_3 (b) Graf Hasil Operasi <i>comb product</i> $(L_4 \triangleright S_3)$ dengan titik z_3 sebagai titik cangkok pada graf S_3	64
4.32	Pewarnaan total r -dinamis pada graf $L_4 \triangleright S_3$ untuk $1 \leq r \leq 3$	74
4.33	Pewarnaan total 4-dinamis pada graf $L_4 \triangleright S_3$	74
4.34	Pewarnaan total r -dinamis dengan 7 warna pada graf $L_4 \triangleright S_3$	75
4.35	Pewarnaan total 5-dinamis pada graf $L_4 \triangleright S_3$	75
4.36	Pewarnaan total r -dinamis dengan 9 warna pada graf $L_4 \triangleright S_3$	76
4.37	Pewarnaan total 6-dinamis pada graf $L_4 \triangleright S_3$	76
4.38	Pewarnaan total r -dinamis dengan 11 warna pada graf $L_4 \triangleright S_3$	77
4.39	Pewarnaan total 7, r -dinamis pada graf $L_4 \triangleright S_3$ untuk $r \geq 8$	77
4.40	(a) Graf triangular ladder TL_4 dan graf lingkaran C_3 (b) Graf Hasil Operasi <i>comb product</i> $(TL_4 \triangleright C_3)$ dengan titik y_3 sebagai titik cangkok pada graf C_3	79

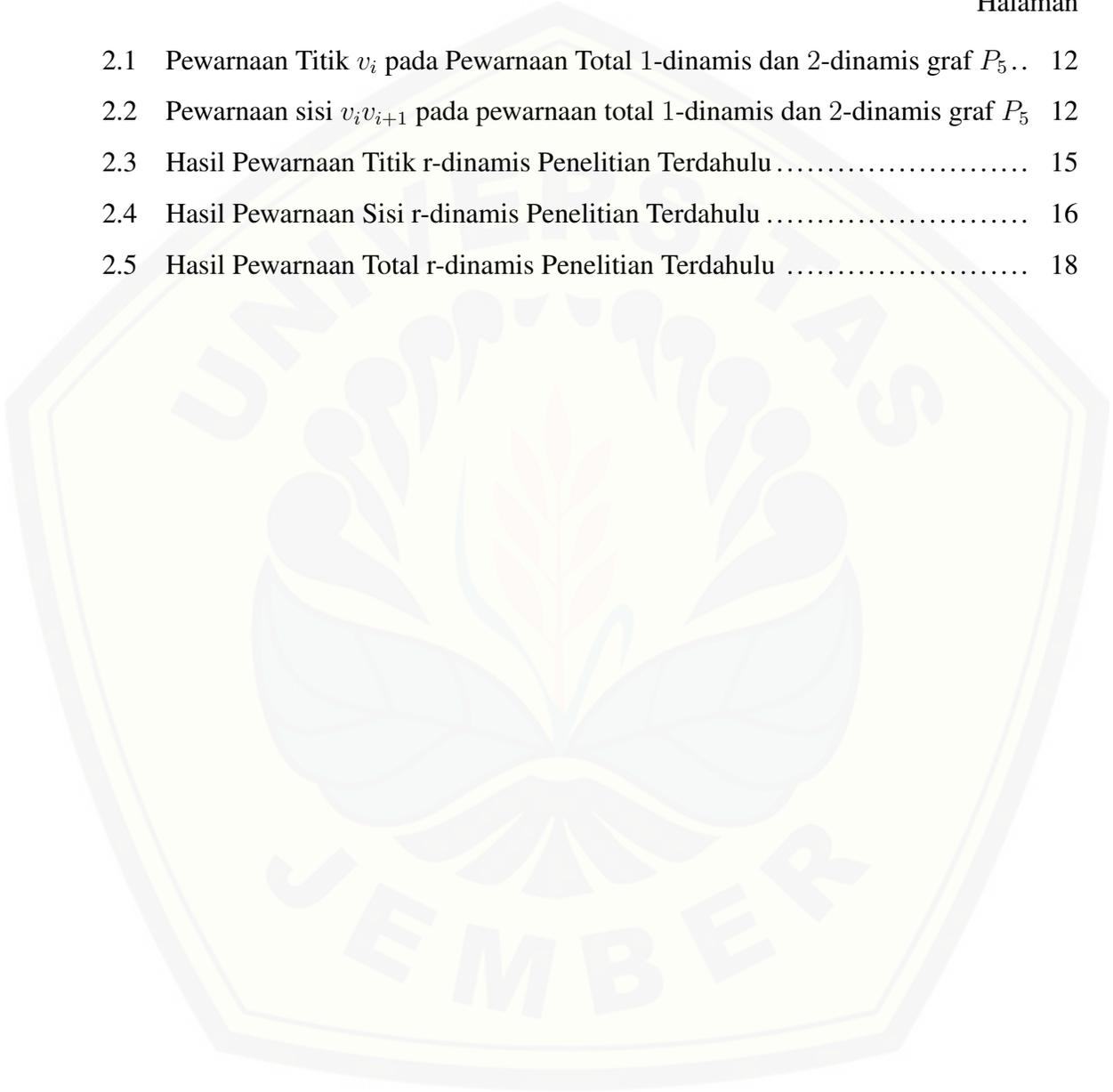
4.41	Pewarnaan total r -dinamis pada graf $TL_4 \triangleright C_3$ untuk $1 \leq r \leq 4$	95
4.42	Pewarnaan total 5, 6-dinamis pada graf $TL_4 \triangleright C_3$	95
4.43	Pewarnaan total 7-dinamis pada graf $TL_4 \triangleright C_3$	96
4.44	Pewarnaan total r -dinamis dengan 10 warna pada graf $TL_4 \triangleright C_3$	96
4.45	Pewarnaan total 8-dinamis pada graf $TL_4 \triangleright C_3$	97
4.46	Pewarnaan total 9-dinamis pada graf $TL_4 \triangleright C_3$	97
4.47	Pewarnaan total r -dinamis dengan 13 warna pada graf $TL_4 \triangleright C_3$	98
4.48	Pewarnaan total r -dinamis dengan 14 warna pada graf $TL_4 \triangleright C_3$	98
4.49	Pewarnaan total 10-dinamis pada graf $TL_4 \triangleright C_3$	99
4.50	Pewarnaan total r -dinamis dengan 16 warna pada graf $TL_4 \triangleright C_3$	99
4.51	Pewarnaan total r -dinamis dengan 17 warna pada graf $TL_4 \triangleright C_3$	100
4.52	Pewarnaan total 11-dinamis pada graf $TL_4 \triangleright C_3$	100
4.53	Pewarnaan total r -dinamis dengan 19 warna pada graf $TL_4 \triangleright C_3$	101
4.54	Pewarnaan total r -dinamis pada graf $TL_5 \triangleright C_3$ untuk $r \geq 12$	101
4.55	(a) Graf lintasan P_6 dan graf cocktail party $H_{2,2}$ (b) Graf Hasil Operasi <i>comb product</i> ($P_n \triangleright H_{2,2}$) dengan titik y_4 sebagai titik cangkok pada graf $H_{2,2}$	103
4.56	Pewarnaan total r -dinamis pada graf $P_6 \triangleright H_{2,2}$ untuk $1 \leq r \leq 3$	109
4.57	Pewarnaan total r -dinamis dengan 6 warna pada graf $P_6 \triangleright H_{2,2}$	109
4.58	Pewarnaan total r -dinamis dengan 7 warna pada graf $P_6 \triangleright H_{2,2}$	109
4.59	Pewarnaan total 4-dinamis pada graf $P_6 \triangleright H_{2,2}$	109
4.60	Pewarnaan total r -dinamis pada graf $P_6 \triangleright H_{2,2}$ untuk $5 \leq r \leq 7$	110
4.61	Pewarnaan total r -dinamis pada graf $P_6 \triangleright H_{2,2}$ untuk $r \geq 8$	110
4.62	(a) Graf bintang S_n dan graf lingkaran C_3 (b) Graf Hasil Operasi <i>comb</i> <i>product</i> ($S_n \triangleright C_3$) dengan titik z_3 sebagai titik cangkok pada graf C_3	111
4.63	Pewarnaan total r -dinamis pada graf $S_3 \triangleright C_3$ untuk $1 \leq r \leq 6$	118
4.64	Pewarnaan total 7-dinamis pada graf $S_3 \triangleright C_3$	118

4.65	Pewarnaan total r -dinamis dengan 9 warna pada graf $S_3 \triangleright C_3$	119
4.66	Pewarnaan total 8, 9-dinamis pada graf $S_3 \triangleright C_3$	119
4.67	Pewarnaan total 10-dinamis pada graf $S_3 \triangleright C_3$	119
4.68	Pewarnaan total 11-dinamis pada graf $S_3 \triangleright C_3$	120
4.69	Pewarnaan total r -dinamis pada graf $S_3 \triangleright C_3$ untuk $r \geq 12$	120



DAFTAR TABEL

	Halaman
2.1 Pewarnaan Titik v_i pada Pewarnaan Total 1-dinamis dan 2-dinamis graf P_5 ..	12
2.2 Pewarnaan sisi $v_i v_{i+1}$ pada pewarnaan total 1-dinamis dan 2-dinamis graf P_5	12
2.3 Hasil Pewarnaan Titik r-dinamis Penelitian Terdahulu	15
2.4 Hasil Pewarnaan Sisi r-dinamis Penelitian Terdahulu	16
2.5 Hasil Pewarnaan Total r-dinamis Penelitian Terdahulu	18



BAB 1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika merupakan ilmu pasti yang mendasari dalam kehidupan manusia yang penerapannya dibutuhkan untuk memecahkan masalah kehidupan sehari - hari. Salah satu cabang ilmu matematika yang digunakan untuk memecahkan masalah yaitu teori graf. Teori graf pertama kali diperkenalkan oleh seorang matematikawan berkebangsaan Swiss bernama Leonhard Euler pada tahun 1736. Euler berhasil memecahkan masalah jembatan yang berada di kota Konisberg. Menurut Ardiana (2016), graf adalah salah satu pokok bahasan yang telah lama dan banyak diaplikasikan di berbagai bidang. Fungsi graf sangat banyak, namun pada umumnya digunakan sebagai alat bantu dalam memodelkan suatu masalah agar lebih mudah dimengerti dan diselesaikan seperti penggambaran rangkaian listrik, senyawa kimia, penyusunan jadwal dan sebagainya.

Salah satu teori yang dikembangkan dalam teori graf adalah pewarnaan graf (*coloring*). Terdapat tiga macam pewarnaan dalam teori graf, yaitu pewarnaan titik (*vertex coloring*), pewarnaan sisi (*edge coloring*), dan pewarnaan wilayah (*region coloring*). Pewarnaan graf tidak boleh memiliki warna yang sama yang saling bertetangga. Pewarnaan dengan k-warna yang minimum pada suatu graf disebut sebagai bilangan kromatik yang dinotasikan dengan $\chi(G)$. Seiring dengan perkembangan zaman, pewarnaan graf mulai dikembangkan menjadi pewarnaan r -dinamis pada graf. H. Lai dan B. Montgomery memperkenalkan konsep pewarnaan dinamis dan menuangkannya dalam sebuah artikel yang berjudul *Dynamic Coloring of Graphs*. Dari penelitian diatas mulai dikembangkan lagi tentang pewarnaan dinamis pada graf. Terdapat tiga macam pewarnaan r -dinamis dalam teori graf yaitu pewarnaan titik r -dinamis, pewarnaan sisi r -dinamis, dan pewarnaan total r -dinamis.

Peneliti sebelumnya banyak meneliti tentang pewarnaan r -dinamis titik dan sisi, untuk pewarnaan total r -dinamis baru diteliti oleh beberapa peneliti. Penelitian untuk pewarnaan dinamis antara lain, M. Alishahi (2011) meneliti tentang pewarnaan dinamis pada graf dan hipergraf. S. Kim, dkk (2013) meneliti tentang pewarnaan dinamis pada graf planar. Irwanto dan Dafik (2014) meneliti tentang bilangan kromatik pada graf roda W_n untuk $n \geq 5$, graf helm F_n untuk $n \geq 4$, graf anti prisma H_m untuk $m \geq 4$, graf prisma H_n untuk $n \geq 4$ dan graf kipas F_n untuk $n \geq 4$. Wulandari (2015) meneliti pewarnaan r -dinamis titik pada hasil operasi graf khusus. Meganingtyas melakukan penelitian pada tahun 2015 yang meneliti pewarnaan titik dan sisi r -dinamis pada graf-graf khusus dan operasinya. Sedangkan untuk peneliti pewarnaan total r -dinamis dilakukan oleh Ardiana (2016) yang meneliti pewarnaan total r -dinamis pada model graf khusus dengan operasi shakel dan generalisasinya, Azizah (2016) meneliti nilai kromatik dan kajian pewarnaan total r -dinamis pada beberapa graf khusus, dan Putri (2016) meneliti pewarnaan total r -dinamis pada graf khusus dan graf hasil operasi.

Berdasarkan uraian diatas, peneliti tertarik untuk meneliti pewarnaan total r -dinamis lebih lanjut pada hasil operasi graf - graf khusus. Operasi yang digunakan pada penelitian ini yaitu operasi *Comb Product*. Operasi *Comb Product* dari graf L dan H yang dinotasikan dengan $L \triangleright H$ merupakan operasi graf yang diperoleh dengan merekatkan graf H ke setiap titik graf L . Sedangkan graf khusus yang digunakan yaitu graf lintasan, graf bintang, graf kipas, graf windmill, graf *cocktail party*, graf *ladder*, dan graf *triangular ladder*. Graf hasil operasi *Comb Product* tersebut akan dikaji pewarnaan total r -dinamis yang meliputi pewarnaan titik sekaligus pewarnaan sisi dan ditentukan warna semimumum mungkin yang digunakan dalam pewarnaan pada graf sehingga akan didapatkan bilangan kromatik pewarnaan total r -dinamis.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang diatas, maka rumusan masalah pada penelitian ini yaitu :

- bagaimana himpunan titik dan sisi pada graf $P_n \triangleright Wd_{3,3}$, $L_n \triangleright P_m$, $P_n \triangleright F_{1,3}$, $L_n \triangleright S_3$, $P_n \triangleright H_{2,2}$, $TL_n \triangleright C_3$ dan $S_n \triangleright C_3$?
- bagaimana nilai kromatik pewarnaan total r -dinamis pada graf $P_n \triangleright Wd_{3,3}$, $L_n \triangleright P_m$, $P_n \triangleright F_{1,3}$, $L_n \triangleright S_3$, $P_n \triangleright H_{2,2}$, $TL_n \triangleright C_3$ dan $S_n \triangleright C_3$?

1.3 Tujuan Penelitian

Sesuai dengan rumusan masalah dan latar belakang diatas, maka tujuan pada penelitian ini antara lain:

- menentukan himpunan titik dan sisi pada graf $P_n \triangleright Wd_{3,3}$, $L_n \triangleright P_m$, $P_n \triangleright F_{1,3}$, $L_n \triangleright S_3$, $P_n \triangleright H_{2,2}$, $TL_n \triangleright C_3$ dan $S_n \triangleright C_3$;
- menentukan nilai kromatik pewarnaan total r -dinamis pada graf $P_n \triangleright Wd_{3,3}$, $L_n \triangleright P_m$, $P_n \triangleright F_{1,3}$, $L_n \triangleright S_3$, $P_n \triangleright H_{2,2}$, $TL_n \triangleright C_3$ dan $S_n \triangleright C_3$.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan oleh peneliti antara lain:

- meningkatkan pemahaman dan pengetahuan baru mengenai ruang lingkup pewarnaan total r -dinamis pada graf ;
- memberi motivasi kepada peneliti graf lain untuk memperluas penelitian tentang pewarnaan total r -dinamis pada graf;
- hasil dari penelitian ini diharapkan dapat digunakan sebagai pengembangan atau perluasan ilmu untuk masalah pewarnaan total r -dinamis.

1.5 Kebaharuan Penelitian

Kebaharuan didapatkan dari penelitian ini antara lain:

- a. graf yang digunakan berupa graf hasil operasi *comb product* dari graf - graf khusus;
- b. pewarnaan yang diteliti berupa pewarnaan total r -dinamis.

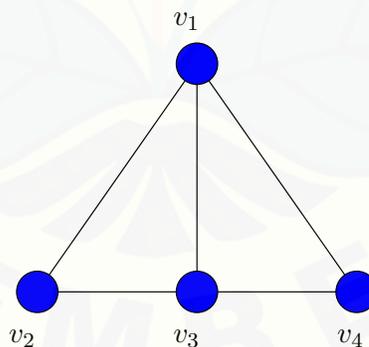


BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Terminologi Graf

Graf G adalah pasangan himpunan dari (V, E) dengan V adalah himpunan tak kosong yang anggotanya disebut himpunan titik (*vertex*) dan E adalah himpunan yang anggotanya tak berurut dari vertex V yang disebut himpunan sisi (*edges*), digambarkan sebagai garis yang menghubungkan sepasang titik. Dari pengertian graf tersebut menyatakan bahwa V tidak boleh kosong, sedangkan E boleh kosong. Jadi sebuah graf dimungkinkan tidak mempunyai sisi dan hanya memiliki satu titik (Slamin, 2009). Graf yang hanya memiliki satu titik dan tidak memiliki sisi disebut graf trivial. Himpunan titik di G dinotasikan dengan $V(G)$ dan himpunan sisi dinotasikan dengan $E(G)$. Sedangkan banyaknya unsur yang berada di V disebut *order* dari G , dilambangkan dengan $p(G)$ dan banyaknya unsur di E disebut *size* dari G , dilambangkan dengan $q(G)$ (Chartrand dan Lesniak, 1996).

Gambar 2.1 berikut ini merupakan contoh dari graf G :



Gambar 2.1 Graf G

Graf G diatas terdiri dari himpunan titik yang dinotasikan dengan $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan himpunan sisi yang dinotasikan dengan $E(G) = \{v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_2v_3, v_3v_4\}$. Banyaknya titik pada suatu graf disebut kardinalitas titik dinotasikan dengan $|V|$ sedangkan banyaknya sisi pada suatu graf

disebut kardinalitas sisi dinotasikan dengan $|E|$ (Nugroho, 2008). Titik v_1 dan v_2 pada graf G dikatakan berdampingan atau tetangga (*adjacent*) jika terdapat sebuah sisi yang menghubungkan antara v_1 dan v_2 , yaitu v_1v_2 . Dengan demikian, v_1 dan v_2 dikatakan bersisian (*incident*) dengan sisi v_1v_2 . Gambar 2.1 menunjukkan jika titik v_2 bertetangga dengan titik v_1 dan v_3 tetapi tidak bertetangga dengan v_4 . Titik v_3 bersisian dengan v_1v_3 , v_2v_3 dan v_4v_3 .

Derajat dari suatu titik v pada G , ditulis $d(v)$ merupakan banyaknya titik dalam G yang incident pada v (Munir, 2012). Graf pada Gambar 2.1 memiliki $d(v_1)=3$, $d(v_2)=2$, $d(v_3)=3$, dan $d(v_4)=2$. Suatu titik dengan derajat nol disebut sebagai titik terisolasi (*isolated vertex*). Derajat terbesar dari suatu graf G dinotasikan $\Delta(G)$ merupakan banyaknya maksimal sisi yang *adjacent* pada suatu titik v_i di graf G diantara titik-titik lainnya, sedangkan derajat minimum pada G dinotasikan dengan $\delta(G)$. Graf pada Gambar 2.1 memiliki $\Delta(G) = 3$. Suatu graf G yang memiliki derajat yang sama disebut dengan graf reguler. Sebuah titik yang memiliki derajat satu disebut dengan anting-anting (*pendant vertex*).

Graf dapat dikelompokkan berdasarkan ada tidaknya sisi ganda dan loop, jumlah titik, atau berdasarkan orientasi arah pada sisi. Berdasarkan ada tidaknya gelang atau sisi ganda pada suatu graf maka graf digolongkan menjadi dua jenis yaitu graf sederhana (*simple graph*) dan graf tak sederhana (*unsimple graph*). Graf sederhana (*simple graph*) merupakan graf yang tidak mengandung gelang maupun sisi ganda. Pada graf sederhana sisi merupakan pasangan tak terurut. Jadi sisi (u, v) sama saja dengan (v, u) . Sedangkan graf tak-sederhana (*unsimple graph*) merupakan graf yang mengandung sisi ganda atau gelang. Ada dua macam graf tak sederhana, yaitu graf ganda (*multigraph*) atau graf semu (*pseudograph*). Graf ganda adalah graf yang mengandung sisi ganda dan graf semu adalah graf yang mengandung gelang (*loop*).

Berdasarkan orientasi arah pada sisi, maka secara umum graf dibedakan atas 2 jenis yaitu graf tak-berarah (*undirected graph*) dan graf berarah (*directed graph* atau

digraph). Graf tak-berarah adalah graf yang sisinya tidak mempunyai orientasi arah. Pada graf tak-berarah, urutan pasangan simpul yang dihubungkan oleh sisi tidak diperhatikan. Jadi, $(u, v) = (v, u)$ adalah sisi yang sama. Sedangkan graf berarah (*directed graph* atau *digraph*) adalah graf yang setiap sisinya diberikan orientasi arah. Pada graf berarah, (u, v) dan (v, u) menyatakan dua buah busur yang berbeda, dengan kata lain $(u, v) \neq (v, u)$. Untuk busur (u, v) simpul u dinamakan simpul asal (*initial vertex*) dan simpul v dinamakan simpul terminal (*terminal vertex*).

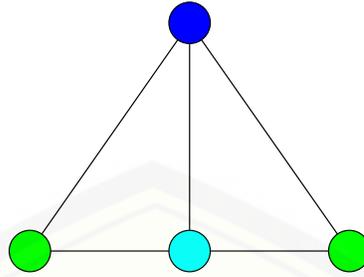
2.2 Pewarnaan Graf

Pewarnaan graf merupakan suatu bentuk pelabelan pada graf dengan cara memberikan warna pada elemen graf. Terdapat tiga macam pewarnaan pada graf, yaitu pewarnaan titik (*vertex coloring*), pewarnaan sisi (*edge coloring*), dan pewarnaan wilayah (*region coloring*).

2.2.1 Pewarnaan Titik (*Vertex Coloring*)

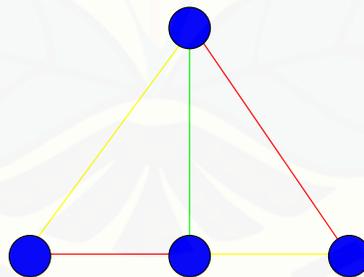
Pewarnaan Titik pada graf G adalah pemberian warna pada titik-titik graf G , satu warna untuk setiap titik, sehingga titik-titik yang bertetangga diwarnai dengan warna yang berbeda (Chartrand dan Zhang, 2009: 147). Adapun warna yang digunakan dapat berupa elemen dari sebarang himpunan (seperti: merah, biru, hijau) ataupun bilangan bulat positif $(1, 2, 3, \dots, k)$. Penggunaan bilangan bulat positif sebagai warna yaitu lebih memudahkan kita apabila membutuhkan jenis warna dalam jumlah yang besar. Dengan demikian, pewarnaan titik dapat dianggap sebagai fungsi $c : V(G) \rightarrow N$, dimana N bilangan bulat positif, sedemikian hingga $c(u) \neq c(v)$ jika u dan v merupakan dua titik yang bertetangga.

Apabila suatu graf G mempunyai pewarnaan titik- k , maka dapat dikatakan titik pada graf G diwarnai dengan k warna. Bilangan bulat positif k yang paling minimum untuk mewarnai titik pada graf G disebut dengan bilangan kromatik yang dinotasikan dengan $\chi(G)$. Pewarnaan titik dapat dilihat pada Gambar 2.2

Gambar 2.2 Pewarnaan titik pada Graf G

2.2.2 Pewarnaan Sisi (*Edge Coloring*)

Pewarnaan sisi pada graf G adalah pewarnaan semua sisi G sedemikian hingga setiap dua sisi yang terkait pada titik yang sama mendapatkan warna yang berbeda (Budayasa, 2007). Sama halnya pada pewarnaan titik, pewarnaan sisi dapat digambarkan sebagai fungsi $c : E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, k\}$ sedemikian hingga $c(e) \neq c(f)$ untuk setiap dua sisi e dan f yang bertetangga pada G . Bilangan bulat positif k yang paling minimum untuk mewarnai sisi pada graf G disebut sebagai indeks kromatik (atau disebut juga bilangan kromatik sisi) graf G dan dinotasikan $\chi'(G)$. Contoh pewarnaan sisi dapat dilihat pada Gambar 2.3

Gambar 2.3 Pewarnaan sisi pada Graf G

2.2.3 Pewarnaan Wilayah (*Region Coloring*)

Pewarnaan wilayah pada graf G adalah memberikan warna pada setiap wilayah pada graf sehingga wilayah yang bertetangga tidak memiliki warna yang sama (Chartrand dan Zhang, 2009:249). Seperti halnya dengan pewarnaan titik dan pewarnaan sisi, pewarnaan wilayah juga dapat dinyatakan sebagai fungsi

$c : R(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, k\}$, sedemikian hingga $c(r) \neq c(s)$ untuk setiap wilayah r dan s merupakan wilayah bertetangga pada G .

2.3 Pewarnaan r -Dinamis

2.3.1 Pewarnaan Titik r -Dinamis

Pewarnaan titik adalah pemberian warna pada setiap titik sedemikian hingga tidak ada warna yang sama pada titik yang bertetangga. Suatu graf G dikatakan k -colorable jika dibutuhkan k warna untuk memberikan pewarnaan graf G , dimana k merupakan bilangan bulat positif. Pada pewarnaan titik terdapat istilah bilangan kromatik yaitu nilai minimum untuk k yang dibutuhkan pada pewarnaan graf G dan dinotasikan dengan $\chi(G)$. Pengembangan dari k warna dinamis sering disebut pewarnaan r -dinamis yang diperkenalkan oleh Montgomery pada tahun 2002. Pewarnaan dinamis pada graf didefinisikan sebagai pewarnaan titik pada graf dimana setiap titik berderajat minimal dua memiliki lebih dari satu warna terhadap titik-titik ketetanggaannya. Himpunan ketetangaan suatu titik v dinotasikan $N(v)$ yaitu himpunan titik-titik yang bertetangga dengan titik v . Derajat dari suatu titik v dinotasikan dengan $d(v)$, derajat titik yang minimum pada graf G dinotasikan $\delta(G)$ dan derajat maksimum pada graf G dinotasikan $\Delta(G)$.

Definisi 2.1. *Pewarnaan titik r -dinamis suatu graf G didefinisikan sebagai pemetaan c dari V ke himpunan warna sedemikian hingga memenuhi kondisi sebagai berikut:*

- a. jika $uv \in E(G)$, maka $c(u) \neq c(v)$, dan
- b. $\forall v \in V(G), |c(N(v))| \geq \min\{r, d(v)\}$

(Lai dan Montgomery, 2002)

2.3.2 Pewarnaan Sisi r -Dinamis

Pewarnaan sisi r -dinamis dikembangkan dari definisi pada pewarnaan titik r -dinamis yang disesuaikan dengan kondisi atau syarat pada pewarnaan sisi graf. Nilai

k yang minimal sehingga graf G memenuhi pewarnaan k warna sisi r -dinamis disebut bilangan kromatik sisi r -dinamis dan dinotasikan dengan $\lambda_r(G)$. Untuk bilangan kromatik pada pewarnaan titik 1-dinamis dinotasikan dengan $\lambda(G)$, sedangkan untuk bilangan kromatik pada pewarnaan titik 2-dinamis dinotasikan dengan $\lambda_d(G)$.

Definisi 2.2. *Pewarnaan sisi r -dinamis suatu graf G didefinisikan sebagai pemetaan c dari E ke himpunan warna sedemikian hingga memenuhi kondisi sebagai berikut:*

- a. jika $e_1 = uv, e_2 = vw \in E(G)$, maka $c(e_1) \neq c(e_2)$, dan
- b. $\forall e = uv \in E(G), |c(N(e))| \geq \min\{r, d(v) + d(u) - 2\}$

(Dafik dan Meganingtyas, 2015)

2.3.3 Pewarnaan Total r -Dinamis

Pewarnaan total r -dinamis pada graf G merupakan penentuan warna sisi dan titik pada graf G yang menggabungkan dua metode pewarnaan r -dinamis yaitu pewarnaan titik r -dinamis dan pewarnaan sisi r -dinamis, dimana warna yang diberikan kepada titik dan sisi dalam suatu graf tidak boleh mempunyai warna yang sama dengan sisi dan titik yang berada didekatnya atau bertetangga dan tetap memprioritaskan jumlah pewarnaan yang digunakan pada sisi dan titik. Bilangan kromatik dari pewarnaan total r -dinamis adalah banyaknya nilai k minimum yang dibutuhkan untuk mewarnai graf G , dan dinotasikan dengan $\chi''_r(G)$. Untuk bilangan kromatik pada pewarnaan total 1-dinamis dinotasikan dengan $\chi''(G)$, sedangkan untuk bilangan kromatik pada pewarnaan total 2-dinamis dinotasikan dengan $\chi''_d(G)$.

Konjektur 2.1. *Pewarnaan total harus memenuhi $\chi''(G) \geq \Delta(G) + 1$, dimana $\Delta(G)$ adalah derajat maksimum dari graf G . Menurut Behzad dan Vizing, bilangan kromatik total untuk setiap graf G harus memenuhi $\Delta(G) + 1 \leq \chi''(G) \leq \Delta(G) + 2$. (Geetha et al.)*

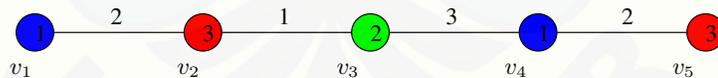
Pewarnaan total dari graf G dapat dianggap sebagai fungsi pemetaan $c : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ dimana $\{1, 2, \dots, k\}$ adalah himpunan yang memenuhi kondisi berikut:

- a. jika $u, v \in V(G)$, maka $c(u) \neq c(v)$
- b. jika $e, e' \in E(G)$, maka $c(e) \neq c(e')$
- c. $c(v) \neq c(e)$, untuk setiap titik $v \in V(G)$ dan sembarang sisi $e \in E(G)$ yang bersisian di titik v . (Kowalik *et al.*, 2008)

Definisi 2.3. Misalkan $D = \{1, 2, 3, \dots, k\}$ adalah himpunan warna dengan k warna dan c adalah fungsi yang memetakan setiap titik dan sisi pada G ke himpunan warna. Pewarnaan total r -dinamis pada suatu graf G didefinisikan sebagai pemetaan c dari $(V(G) \cup E(G))$ ke D sedemikian hingga memenuhi kondisi berikut :

- a. $\forall v \in V(G), |c(N(v))| \geq \min[r, d(v) + |N(v)|]$ dan
- b. $\forall e = uv \in E(G), |c(N(e))| \geq \min[r, d(v) + d(u)]$ (Putri, 2016)

Contoh pewarnaan total r -dinamis dapat dilihat pada Gambar 2.4



Gambar 2.4 Pewarnaan total 1-dinamis dan 2-dinamis pada graf P_5

Pada gambar 2.4 graf P_5 terdiri dari himpunan titik yang dinotasikan dengan $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, himpunan sisi yang dinotasikan dengan $E(G) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5\}$. Pewarnaan total dapat dikatakan sebagai pewarnaan total r -dinamis jika memenuhi kondisi $\forall v \in V(G), |c(N(v))| \geq \min\{r, d(v) + |N(v)|\}$ dan $\forall e = uv \in E(G), |c(N(e))| \geq \min\{r, d(u) + d(v)\}$ dimana $|N(v)|$ merupakan

banyaknya himpunan titik - titik yang bertetangga dengan titik v , $|c(N(v))|$ merupakan banyaknya warna ketetanggaan titik v dan $|c(N(e))|$ merupakan banyaknya warna ketetanggaan sisi e . Pada $|c(N(v))|$ dan $|c(N(e))|$ warna yang sama dihitung satu warna. Misalkan titik v_2 pada gambar 2.4 maka himpunan titik - titik yang bertetangga dengan titik v_2 yaitu $N(v_2) = \{v_1, v_3\}$ sehingga $|N(v)| = 2$. Himpunan warna yang bertetangga dengan titik v_2 yaitu $c(N(v)) = \{1, 2, 1, 2\}$ sehingga $|c(N(v))| = 2$. Untuk sisi v_2v_3 maka himpunan warna yang bertetangga dengan sisi v_2v_3 yaitu $c(N(e)) = \{2, 3, 2, 3\}$ sehingga $|c(N(e))| = 2$.

Berikut ini tabel 2.1 menunjukkan pewarnaan titik v_i pada pewarnaan total 1, 2-dinamis graf P_5 . Tabel 2.2 menunjukkan pewarnaan sisi $v_i v_{i+1}$ pada pewarnaan total 1, 2-dinamis graf P_5 .

Tabel 2.1 Pewarnaan Titik v_i pada Pewarnaan Total 1-dinamis dan 2-dinamis graf P_5

i	$c(v_i)$	$ c(N(v_i)) $	r	$d(v) + N(v_i) $	$\min\{r, d(v) + N(v_i) \}$	$ c(N(v_i)) \geq \min\{r, d(v) + N(v_i) \}$
1	1	2	1	2	1	YA
2	3	2	1	4	1	YA
3	2	2	1	4	1	YA
4	1	2	1	4	1	YA
5	3	2	1	2	1	YA

Tabel 2.2 Pewarnaan sisi $v_i v_{i+1}$ pada pewarnaan total 1-dinamis dan 2-dinamis graf P_5

$e = uv$	$c(e)$	$ c(N(e)) $	r	$d(u) + d(v)$	$\min\{r, d(u) + d(v)\}$	$ c(N(e)) \geq \min\{r, d(u) + d(v)\}$
$v_1 v_2$	2	2	1	3	1	YA
$v_2 v_3$	1	2	1	4	1	YA
$v_3 v_4$	3	2	1	4	1	YA
$v_4 v_5$	2	2	1	3	1	YA

2.4 Graf-Graf Khusus

Graf khusus adalah sebuah graf dengan karakteristik dan keunikan yang dimilikinya. Keunikannya adalah graf khusus tidak isomorfis dengan graf lainnya. Karakteristik bentuknya dapat diperluas sampai *order* n tetapi tetap simetris. Suatu

graf dikatakan isomorfis dengan graf lainnya, apabila terdapat korespondensi satu-satu antara keduanya dan antara sisi-sisi keduanya sedemikian sehingga jika sisi e bersisian dengan *vertex* u dan v disuatu graf G_1 , maka sisi e pada graf G_2 juga harus bersisian dengan *vertex* u dan v di G_2 . Dua graf dapat isomorfis apabila mempunyai V dan E yang sama. Berikut ini adalah beberapa contoh graf khusus :

a. Graf lintasan *Path Graph*

Graf lintasan adalah graf sederhana yang terdiri dari satu lintasan. Graf lintasan dengan n titik yang dinotasikan dengan P_n , dimana $n \geq 2$ yang terdiri dari $|V(P_n)| = n$ dan $|E(P_n)| = n - 1$ (Damayanti, 2011).

b. Graf Windmill

Graf windmill adalah graf kincir dengan satu titik pusat yang dipakai bersama yang dinotasikan dengan $Wd_{n,m}$ dengan $n \geq 3$ dan $m \geq 2$. Graf *windmill* mempunyai titik sebanyak $((n - 1)m) + 1$ dan sisi sebanyak $\frac{mn(n-1)}{2}$ (Ardiansyah dan Darmaji, 2013).

c. Graf Bintang (*Star Graph*)

Graf bintang adalah graf pohon yang terdiri dari satu titik yang berderajat n dan n titik yang berderajat 1. Jadi, graf bintang S_n terdiri dari $n + 1$ titik dan n sisi dengan $n \geq 3$ (Harsya, 2014).

d. Graf *Triangular ladder*

Graf *triangular ladder* adalah graf yang diperoleh dari graf ladder $TL_n = P_n \times P_2$ ($n \geq 2$) dengan penambahan sisi $\{u_i u_{i+1}\}$ untuk $1 \leq i \leq n - 1$ dimana titik - titik kedua P_n adalah $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ dan $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ dengan sisi $\{u_i v_i\}$ memiliki $|V(TL_n)| = 2n + 2$ dan $|E(TL_n)| = 4n + 1$ (Jeyanthi dan Maheswari, 2015).

e. Graf tangga (*ladder graph*)

Graf tangga (*ladder graph*) memiliki himpunan titik $V(L_n) = \{x_i, y_i; 1 \leq i \leq n\}$

dan himpunan sisi $E(L_n) = \{x_i y_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_i y_{i+1}; 1 \leq i \leq n\}$. Dengan demikian, $|V(L_n)| = 2n$ dan $|E(L_n)| = n + 2(n - 1)$ (Tarmidzi, 2015).

f. Graf kipas (*fan graph*)

Graf kipas yang dinotasikan F_n dengan $n \geq 2$ memiliki himpunan titik $V(F_n) = \{x_1\} \cup \{y_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(F_n) = \{x_1 y_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_i y_{i+1}; 1 \leq i \leq n - 1\}$. Dengan demikian, $|V(F_n)| = n + 1$ dan $|E(F_n)| = 2n - 1$.

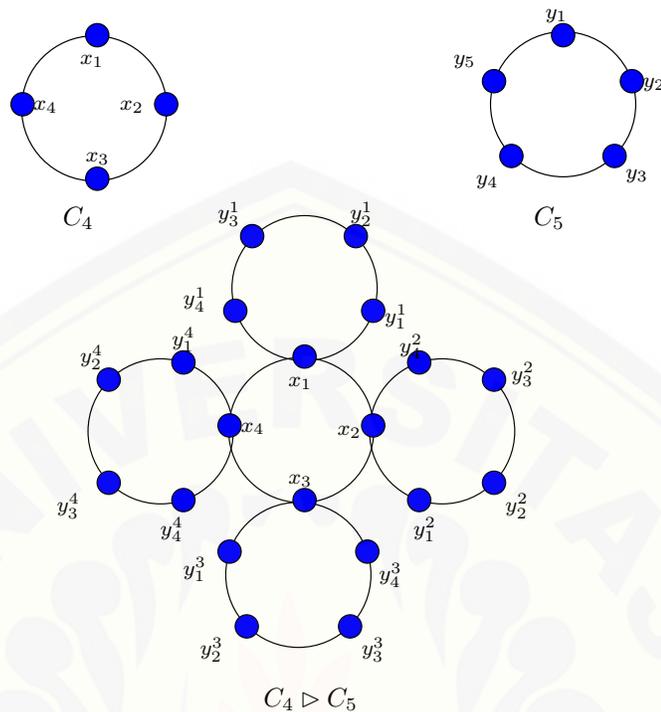
Operasi graf merupakan suatu cara untuk menghasilkan graf baru dengan mengoperasikan dua buah graf. Operasi graf yang digunakan dalam penelitian ini adalah operasi *Comb Product*.

Definisi 2.4. Misalkan L dan H adalah graf terhubung dan o adalah titik di H . Operasi *Comb Product* dari graf L dan H dinotasikan $L \triangleright H$, merupakan operasi graf yang diperoleh dengan mengambil salinan dari graf L dan $|L|$ salinan dari H dan merekatkan salinan ke- i dari graf H di titik cangkok o pada titik ke- i dari graf L dengan demikian, himpunan titik dan sisi dari graf $L \triangleright H$ adalah sebagai berikut : $V(L \triangleright H) = \{(a, v) | a \in V(L), v \in V(H)\}$ dan $(a, v)(b, w) \in (L \triangleright H)$ jika $a = b$ dan $vw \in E(H)$ atau $ab \in E(L)$ dan $v = w = o$ (Saputro dkk, 2013.)

Contoh operasi *Comb Product* dapat dilihat pada Gambar 2.5.

2.5 Hasil Pewarnaan r -dinamis Sebelumnya

Pada penelitian sebelumnya didapatkan beberapa hasil pewarnaan titik r -dinamis, pewarnaan sisi r -dinamis dan pewarnaan total r -dinamis yang dapat digunakan sebagai rujukan penelitian ini. Adapun beberapa hasil penelitian terdahulu mengenai pewarnaan titik r -dinamis bisa dilihat pada Tabel 2.3, hasil penelitian terdahulu mengenai pewarnaan sisi r -dinamis bisa dilihat pada Tabel 2.4 dan hasil penelitian terdahulu mengenai pewarnaan total r -dinamis bisa dilihat pada Tabel 2.5.



Gambar 2.5 Contoh hasil operasi Comb Product ($C_4 \triangleright C_5$)

Tabel 2.3: Hasil Pewarnaan Titik r-dinamis Penelitian Terdahulu

Graf	Bilangan kromatik r-dinamis	Keterangan
$P_2 \otimes C_n, n$ ganjil	$\chi(G) = 6$	Harsya, dkk 2014
$P_2 \otimes C_n, n$ genap	$\chi(G) = 4$	Harsya dkk 2014
$P_3 \odot C_n, n$ ganjil	$\chi(G) = 6$	Harsya dkk 2014
Graf Cycle(C_6)	$\chi(G) = 2$	Sesa, J. 2014
Graf Kipas(F_n), $n \geq 4$	$\chi(G) = 3$	Irwanto, dkk 2014
Graf Roda(W_n), $n \geq 5$	$\chi(G) = 4$	Irwanto dkk 2014
Graf Helm(H_n), $n \geq 4$	$\chi(G) = 3$	Irwanto dkk 2014
Graf Anti Prisma(H_m), $n \geq 4$	$\chi(G) = 4$	Irwanto dkk 2014
Graf Prisma(H_m), $n \geq 5$	$\chi(G) = 4$	Irwanto dkk 2014
$C_n \odot C_m$	$\chi(G) = 4$	Puspasari dkk 2014
$C_n \otimes C_m$	$\chi(G) = 3$	Puspasari dkk 2014
$S_n \otimes C_m$	$\chi(G) = 3$	Dewi, N.L dkk 2014

Graf	Bilangan kromatik r-dinamis	Keterangan
<i>graf Particular</i>	$\chi(G) = 2$	Lai, dkk 2002
$W_n + P_m = W_n + P_m, n$ genap	$\chi(G) = \chi_d(G) = \chi_3(G) = \chi_4(G) = 5$	Wulandari dkk 2015
$W_n + P_m = W_n + P_m, n$ ganjil	$\chi(G) = \chi_d(G) = \chi_3(G) = \chi_4(G) = 6$	Wulandari dkk 2015
$W_n \odot P_m$	$\chi(G) = \chi_d(G) = 4$	Wulandari dkk 2015
$P_m \odot W_n, n$ genap	$\chi(G) = \chi_d(G) = \chi_3(G) = 5$	Wulandari dkk 2015
$P_m \odot W_n, n$ ganjil	$\chi(G) = \chi_d(G) = \chi_3(G) = 5$	Wulandari dkk 2015
<i>Graf Kipas</i> (F_n), $n \geq 3$	$\chi(G) = \chi_d(G) = 3$	Dicky dkk 2015
<i>Graf Triangular Book</i> (BT_n), $n \geq 2$	$\chi(G) = \chi_d(G) = 3$	Dicky dkk 2015
<i>Graf Tangga Tiga Siklus</i> (TCL_n), $n \geq 2$	$\chi(G) = \chi_d(G) = 3$	Dicky dkk 2015
<i>Graf Tangga</i> (L_n), $n \geq 2$	$\chi(G) = 2$	Dicky dkk 2015
<i>Shackel Graf Triangular Book</i> <i>Shack</i> ($BT_3, v = 1, m$), $m \geq 2$	$\chi(G) = \chi_d(G) = 3$	Dicky dkk 2015
<i>Graf Banana Tree</i> ($B_{m,4}$), $m \geq 2$	$\chi_r(G) = r + 1$	Dicky dkk 2015

Tabel 2.4: Hasil Pewarnaan Sisi r-dinamis Penelitian Terdahulu

Graf	Bilangan kromatik r-dinamis	Keterangan
Graf Lintasan (P_n); $n \geq 2$	$\lambda(P_n) = 2; n \geq 2$ $\lambda_2(P_n) = \lambda_r(P_n) = 3;$ $n \geq 2, r \geq 2$	Meganingtyas, 2015
Graf Sikel (C_n); $n \geq 3$	$\lambda(C_n) = 2; n$ genap $\lambda(C_n) = 3; n$ ganjil $\lambda_{r \geq 2}(C_n) = 3;$	Meganingtyas, 2015

Graf	Bilangan kromatik r-dinamis	Keterangan
	$n = 3k, k \in N$ $\lambda_{r \geq 2}(C_n) = 4;$ $n = 3k + 1, k \in N$ $\lambda_{r \geq 2}(C_n) = 5;$ $n = 3k + 2, k \in N$	
Graf Bintang (S_n); $n \geq 3$	$\lambda_{r \geq 1}(S_n) = n$	Meganingtyas, 2015
Graf Roda (W_n); $n \geq 5$	$\lambda_{r \leq n-1}(W_n) = n;$ $1 \leq r \leq n - 1$ $\lambda_{r \geq n}(W_n) = 10;$ $n = 5, r \geq n$ $\lambda_{r \geq n}(W_n) = n + 3;$ $n = 3k + 3, k \in N, r \geq n$ $\lambda_{r \geq n}(W_n) = n + 4;$ n lainnya, $r \geq n$	Meganingtyas, 2015
Graf Friendship (F_n); $n \geq 3$	$\lambda_{r \leq 2n-1}(F_n) = 2n,$ $\lambda_{r \geq 2n}(F_n) = 2n + 1,$	Meganingtyas, 2015
Graf Amalgamasi Lintasan(P_n); $n \geq 2, m \geq 3$	$\lambda(amal(P_n, v, m)) =$ $\lambda_2(amal(P_n, v, m)) = m,$ $\lambda_{r \geq 3n}(amal(P_n, v, m)) = m + 1,$	Meganingtyas, 2015
Graf Prisma (P_n); $n \geq 3$	$\lambda(P_n) = \lambda_2(P_n) = 2;$ n genap $\lambda(P_n) = \lambda_2(P_n) = 3;$ n ganjil $\lambda_3(P_n) = 4; n = 3$ $\lambda_3(P_n) = 5;$ n lainnya $\lambda_{r \geq 4}(P_n) = 9; n = 3$ $\lambda_{r \geq 4}(P_n) = 6;$ $n = 4k, k \in N$ $\lambda_{r \geq 4}(P_n) = 8;$	Meganingtyas, 2015

Graf	Bilangan kromatik r-dinamis	Keterangan
	$n = 5, 6, 4k + 7k \in N$ $\lambda_{r \geq 4}(P_n) = 7;$ n lainnya	
Graf Tangga (L_n); $n \geq 3$	$\lambda(L_n) = \lambda_2(L_n) = 3,$ $\lambda_3(L_n) = 5,$ $\lambda_4(L_n) = \lambda_r(L_n) = 6,$	Meganingtyas, 2015

Tabel 2.5: Hasil Pewarnaan Total r-dinamis Penelitian Terdahulu

Graf	Bilangan kromatik r-dinamis	Keterangan
Tangga Tiga Siklus ; Triangular Cycle Ladder Graph (TCL_n); $n \geq 2$	$\chi''(TCL_n) = \chi''_d(TCL_n) =$ $\chi''_3(TCL_n) = 7$ $\chi''_4(TCL_n) = 8$ $\chi''_5(TCL_n) = 9$ $\chi''_6(TCL_n) = 11$ $\chi''_7(TCL_n) = 14$ $\chi''_8(TCL_n) = 15$ $\chi''_9(TCL_n) = 18$ $\chi''_r(TCL_n) = 19, r \geq 10$	Azizah, 2016
Diamond Ladder Graph (DL_n); $n \geq 2$	$\chi''(DL_n) = \chi''_d(DL_n) =$ $\chi''_3(DL_n) = 6$ $\chi''_4(DL_n) = 7$ $\chi''_5(DL_n) = 8$ $\chi''_6(DL_n) = 10$ $\chi''_7(DL_n) = 11$ $\chi''_8(DL_n) = 14$ $\chi''_9(DL_n) = 16$ $\chi''_r(DL_n) = 17, r \geq 10$	Azizah, 2016
Triangular Ladder Graph (TL_n);	$\chi''(TL_n) = \chi''_d(TL_n) =$ $\chi''_3(TL_n) = 5$	Azizah, 2016

Graf	Bilangan kromatik r-dinamis	Keterangan
$n \geq 2$	$\chi''_4(TL_n) = 6$ $\chi''_5(TL_n) = 8$ $\chi''_6(TL_n) = 10$ $\chi''_7(TL_n) = 12$ $\chi''_r(TL_n) = 14, r \geq 8$	
Tangga Ladder Graph (L_n); $n \geq 2$	$\chi''(L_n) = \chi''_d(L_n) =$ $\chi''_3(L_n) = 4$ $\chi''_4(L_n) = 7$ $\chi''_5(L_n) = 8$ $\chi''_r(L_n) = 10, r \geq 6$	Azizah, 2016
Star Graph (S_n); $n \geq 3$	$\chi''(S_n) = \chi''_d(S_n) = \chi''_3(S_n),$ $\chi''_r(S_n) = r + 1, r \geq 3$	Azizah, 2016
Banana Tree Graph ($B_{n,4}$) $n \geq 3$	$\chi''(B_{n,4}) = \chi''_d(B_{n,4}) =$ $\chi''_3(B_{n,4})$ $\chi''_r(B_{n,4}) = n + r - 1, r \geq 3$	Azizah, 2016
$gshack(Wd_3^2, e, n);$ $n \geq 2$	$\chi''(G) = \chi''_d(G) =$ $\chi''_3(G) = 5$ $\chi''_4(G) = 6$ $\chi''_5(G) = 7$ $\chi''_6(G) = 9$ $\chi''_7(G) = \chi''_8(G) = \chi''_r(G) = 12$	Ardiana, 2016
$gshack(W_3, v, n);$ $n \geq 2$	$\chi''(G) = \chi''_d(G) =$ $\chi''_3(G) = \chi''_4(G) = 8$ $\chi''_r(G) = r + 4$ untuk $5 \leq r \leq 8$ $\chi''_9(G) = \chi''_{10}(G) = 14$ $\chi''_r(G) = r + 4$ untuk $r = 11$ $\chi''_r(G) = 16$ untuk $r \geq 12$	Ardiana, 2016
$gshack(F_{1,3}, v, n);$ $n \geq 2$	$\chi''(G) = \chi''_d(G) = 5$ $\chi''_r(G) = r + 3$ untuk $3 \leq r \leq 7$ $\chi''_r(G) = 11$ untuk $r \geq 8$	Ardiana, 2016
$gshack(C_4, v, n);$	$\chi''(G) = \chi''_d(G) = \chi''_3(G) = 6$	Ardiana, 2016

Graf	Bilangan kromatik r-dinamis	Keterangan
$n \geq 2$	$\chi''_4(G) = 7$ $\chi''_5(G) = 8$ $\chi''_r(G) = r + 3$ untuk $5 \leq r \leq 7$ $\chi''_r(G) = 12$ untuk $r \geq 8$	
$gshack(H_3, v, n);$ $n \geq 2$	$\chi''(G) = \chi''_d(G) = \chi''_3(G) = 6$ $\chi''_r(G) = r + 3$ untuk $4 \leq r \leq 6$ $\chi''_7(G) = 12$ $\chi''_r(G) = 13$	Ardiana, 2016
$gshack(BT_3, v, n);$ $n \geq 2$	$\chi''(G) = \chi''_d(G) = \chi''_3(G) = 6$ $\chi''_4(G) = 7$ $\chi''_5(G) = 8$ $\chi''_6(G) = \chi''_7(G) = 12$ $\chi''_r(G) = 14$	Ardiana, 2016
$gshack(K_4, v, n);$ $n \geq 2$	$\chi''(G) = \chi''_d(G) =$ $\chi''_3(G) = \chi''_4(G) = 7$ $\chi''_5(G) = 8$ $\chi''_6(G) = \chi''_7(G) = 10$ $\chi''_8(G) = 12$ $\chi''_9(G) = \chi''_{10}(G) = 16$ $\chi''_{11}(G) = 17$ $\chi''_r(G) = 18$	Ardiana, 2016
$P_n;$ $n \geq 3$	$\chi''_r(G) = 3$ untuk $1 \leq r \leq 2$ $\chi''_r(G) = 4$ untuk $r = 3$ $\chi''_r(G) = 5$ untuk $r \geq 4$	Putri, 2016
$P_n \odot P_2;$ $n \geq 2, m = 2$	$\chi''_r(G) = 4$ untuk $1 \leq r \leq 2$ $\chi''_r(G) = r + 2$ untuk $3 \leq r \leq 4$ $\chi''_r(G) = 7$ untuk $r \geq 5$	Putri, 2016
$n \geq 3, m = 2$	$\chi''_r(G) = 5$ untuk $1 \leq r \leq 3$ $\chi''_r(G) = r + 2$ untuk $4 \leq r \leq 5$ $\chi''_r(G) = 8$ untuk $6 \leq r \leq 7$ $\chi''_r(G) = 9$ untuk $r \geq 8$	

Graf	Bilangan kromatik r-dinamis	Keterangan
$Shack(G_{3,3}, v, n);$ $n \geq 2$	$\chi''_r(G) = 5$ untuk $1 \leq r \leq 4$ $\chi''_r(G) = 7$ untuk $r = 5$ $\chi''_r(G) = 9$ untuk $r = 6$ $\chi''_r(G) = 10$ untuk $r \geq 7$	Putri, 2016
$Shack(S_5, v, n);$ $n \geq 2$	$\chi''_r(G) = 6$ untuk $1 \leq r \leq 3$ $\chi''_r(G) = 7$ untuk $4 \leq r \leq 5$ $\chi''_r(G) = 8$ untuk $r = 6$ $\chi''_r(G) = 10$ untuk $7 \leq r \leq 9$ $\chi''_r(G) = 11$ untuk $r \geq 10$	Putri, 2016
$Shack(H_{2,2}, v, n);$ $n \geq 2$	$\chi''_r(G) = 5$ untuk $1 \leq r \leq 3$ $\chi''_r(G) = 7$ untuk $4 \leq r \leq 5$ $\chi''_r(G) = 10$ untuk $6 \leq r \leq 7$ $\chi''_r(G) = 11$ untuk $r \geq 8$	Putri, 2016
$Shack(B_2, v, n);$ $n \geq 2$	$\chi''_r(G) = 5$ untuk $1 \leq r \leq 3$ $\chi''_r(G) = 6$ untuk $r = 4$ $\chi''_r(G) = 9$ untuk $r = 5$ $\chi''_r(G) = 10$ untuk $r \geq 6$	Putri, 2016
$gshack(F_4, e, n);$ $n \geq 2$	$\chi''_r(G) = 9$ untuk $1 \leq r \leq 5$ $\chi''_r(G) = 10$ untuk $6 \leq r \leq 8$ $\chi''_r(G) = 11$ untuk $r = 9$ $\chi''_r(G) = 12$ untuk $r = 10$ $\chi''_r(G) = 16$ untuk $11 \leq r \leq 15$ $\chi''_r(G) = 17$ untuk $r \geq 16$	Putri, 2016

BAB 3. METODE PENELITIAN

3.1 Metode Penelitian

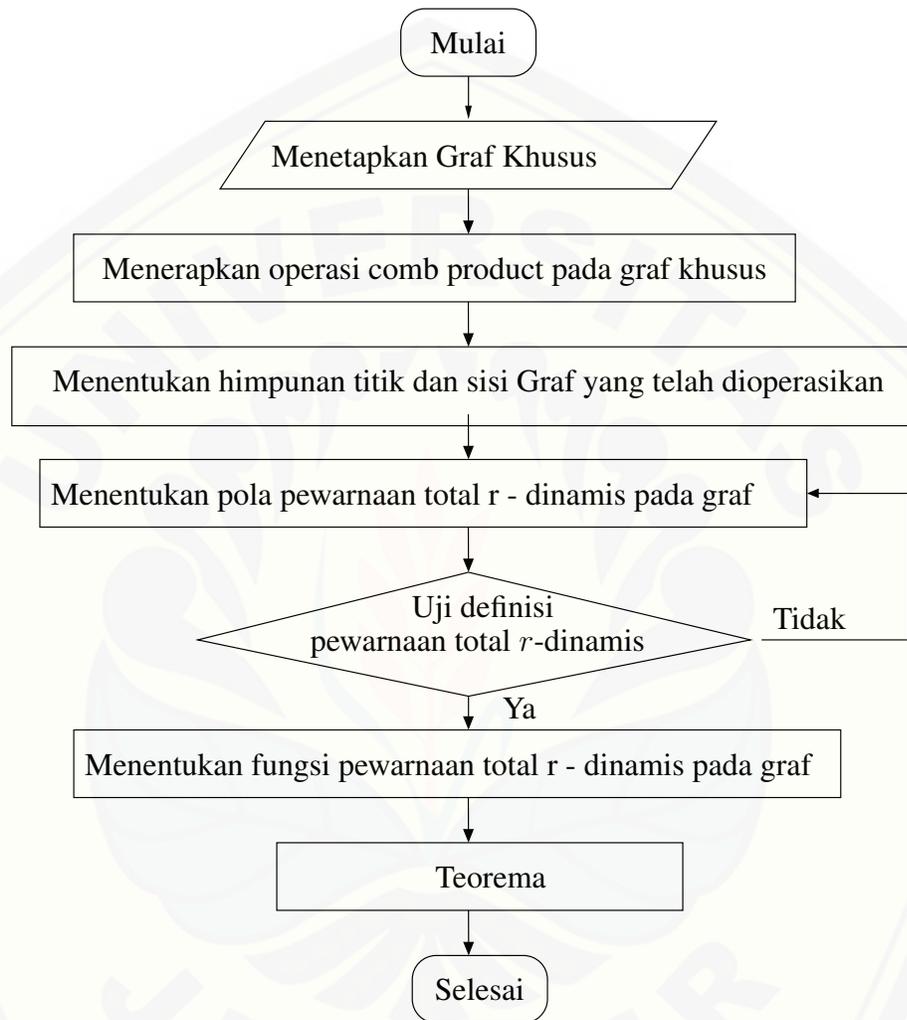
Metode yang digunakan dalam penelitian ini yaitu metode deduktif aksiomatik. Metode deduktif menggunakan prinsip - prinsip pembuktian deduktif yang berlaku dalam logika matematika dengan menggunakan aksioma dan teorema yang telah ada untuk memecahkan masalah. Dalam proses deduktif mungkin juga diawali dengan proses induktif yang meliputi penyusunan konjektur, model matematika, analogi dan generalisasi melalui pengamatan terhadap suatu data. Penelitian ini pada prosesnya menggunakan metode pendeteksian pola (*pattern recognition*), yaitu dengan merumuskan bagaimana pola pewarnaan total r -dinamis sedemikian hingga diperoleh bentuk pola umumnya.

3.2 Rancangan Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada graf khusus. Adapun teknik penelitian adalah sebagai berikut:

- a. menentukan graf-graf khusus sebagai objek penelitian;
- b. menerapkan operasi *comb product* pada graf khusus yang telah ditentukan;
- c. menentukan himpunan titik dan sisi graf-graf khusus yang telah dioperasikan;
- d. menentukan pola pewarnaan total r -dinamis pada graf yang meliputi pewarnaan titik r -dinamis dan pewarnaan sisi r -dinamis;
- e. memeriksa definisi pewarnaan total r -dinamis, jika memenuhi definisi maka akan dilanjutkan ke tahap selanjutnya, apabila tidak memenuhi akan kembali ke tahap sebelumnya yaitu menentukan pola pewarnaan total r -dinamis;
- f. menentukan fungsi pewarnaan total r -dinamis pada masing-masing graf yang kemudian dibuktikan;
- g. diperoleh teorema baru.

Adapun skema dari rancangan penelitian ini dapat dilihat pada gambar 3.1.



Gambar 3.1 Skema rancangan penelitian

BAB 5. PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan diperoleh kesimpulan terkait himpunan titik dan himpunan sisi dari graf yang diteliti serta nilai kromatik pewarnaan total r -dinamis dari graf tersebut. Adapun graf yang digunakan dalam penelitian ini adalah graf $P_n \triangleright Wd_{3,3}$, $L_n \triangleright P_m$, $P_n \triangleright F_{1,3}$, $L_n \triangleright S_3$, $P_n \triangleright H_{2,2}$, $TL_n \triangleright C_3$ dan $S_n \triangleright C_3$.

a. Himpunan titik dan himpunan sisi graf $P_n \triangleright Wd_{3,3}$ dengan titik z sebagai titik cangkok pada graf $Wd_{3,3}$ yaitu $V(P_n \triangleright Wd_{3,3}) = \{x_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_{ij}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq 6\}$, $E(P_n \triangleright Wd_{3,3}) = \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_i y_{ij}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq 6\} \cup \{y_{ij} y_{ij+1}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq 6, j \text{ ganjil}\}$ sehingga $|V(P_n \triangleright Wd_{3,3})| = 7n$ dan $|E(P_n \triangleright Wd_{3,3})| = 10n - 1$.

Himpunan titik dan himpunan sisi graf $L_n \triangleright P_m$ dengan titik y_1 sebagai titik cangkok pada graf P_m yaitu $V(L_n \triangleright P_m) = \{x_i; 1 \leq i \leq 2n+2\} \cup \{y_{ij}; 1 \leq i \leq 2n+2, 2 \leq j \leq m\}$, $E(L_n \triangleright P_m) = \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq 2n+1, i \text{ ganjil}\} \cup \{x_i x_{i+2}; 1 \leq i \leq 2n+1, i \text{ ganjil}\} \cup \{x_i x_{i+2}; 1 \leq i \leq 2n+2, i \text{ genap}\} \cup \{x_i y_{ij}; 1 \leq i \leq 2n+2, j = 2\} \cup \{y_{ij} y_{ij+1}; 1 \leq i \leq 2n+2, 2 \leq j \leq m-1\}$ sehingga $|V(L_n \triangleright P_m)| = 2nm + 2m$ dan $|E(L_n \triangleright P_m)| = n + 2nm + 2m - 1$.

Himpunan titik dan himpunan sisi graf $P_n \triangleright F_{1,3}$ dengan titik y_3 sebagai titik cangkok pada graf $F_{1,3}$ yaitu $V(P_n \triangleright F_{1,3}) = \{x_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_{ij}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq 2\}$, $E(P_n \triangleright F_{1,3}) = \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_i y_{ij}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq 2\} \cup \{y_{ij} y_{ij+1}; 1 \leq i \leq n, j = 1\}$ sehingga $|V(P_n \triangleright F_{1,3})| = 4n$ dan $|E(P_n \triangleright F_{1,3})| = 6n - 1$.

Himpunan titik dan himpunan sisi graf $L_n \triangleright S_3$ dengan titik z_3 sebagai titik

cangkok pada graf S_3 yaitu $V(L_n \triangleright S_3) = \{x_i; 1 \leq i \leq 2n + 2\} \cup \{y_{i1}; 1 \leq i \leq 2n + 2\} \cup \{z_{ik}; 1 \leq i \leq 2n + 2, 1 \leq k \leq 3\}$, $E(L_n \triangleright S_3) = \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq 2n + 1, i \text{ ganjil}\} \cup \{x_i x_{i+2}; 1 \leq i \leq 2n + 1, i \text{ ganjil}\} \cup \{x_i x_{i+2}; 1 \leq i \leq 2n + 2, i \text{ genap}\} \cup \{x_i y_{i1}; 1 \leq i \leq 2n + 2\} \cup \{y_i z_{ik}; 1 \leq i \leq 2n + 2, 1 \leq k \leq 2\}$ sehingga $|V(L_n \triangleright S_3)| = 8n + 8$ dan $|E(L_n \triangleright S_3)| = 9n + 7$.

Himpunan titik dan himpunan sisi graf $TL_n \triangleright C_3$ dengan titik y_3 sebagai titik cangkok pada graf C_3 yaitu $V(TL_n \triangleright C_3) = \{x_i; 1 \leq i \leq 2n + 2\} \cup \{y_{ij}; 1 \leq i \leq 2n + 2, 1 \leq j \leq 3\}$, $E(TL_n \triangleright C_3) = \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq 2n + 1, i \text{ ganjil}\} \cup \{x_i x_{i+2}; 1 \leq i \leq 2n + 1, i \text{ ganjil}\} \cup \{x_i x_{i+3}; 1 \leq i \leq 2n + 2, i \text{ ganjil}\} \cup \{x_i x_{i+2}; 1 \leq i \leq 2n + 2, i \text{ genap}\} \cup \{x_i y_{ij}; 1 \leq i \leq 2n + 2, 1 \leq j \leq 2\} \cup \{y_{ij} y_{ij+1}; 1 \leq i \leq 2n + 2, j = 1\}$ sehingga $|V(TL_n \triangleright C_3)| = 6n + 6$ dan $|E(TL_n \triangleright C_3)| = 10n + 7$.

Himpunan titik dan himpunan sisi graf $P_n \triangleright H_{2,2}$ dengan titik y_4 sebagai titik cangkok pada graf $H_{2,2}$ yaitu $V(P_n \triangleright H_{2,2}) = \{x_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_{ij}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq 3\}$, $E(P_n \triangleright H_{2,2}) = \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{x_i y_{ij}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq 2\} \cup \{y_{i1} y_{i3}; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_{i2} y_{i3}; 1 \leq i \leq n\}$ sehingga $|V(P_n \triangleright H_{2,2})| = 4n$ dan $|E(P_n \triangleright H_{2,2})| = 5n - 1$.

Himpunan titik dan himpunan sisi graf $S_n \triangleright C_3$ dengan titik z_3 sebagai titik cangkok pada graf C_3 yaitu $V(S_n \triangleright C_3) = \{x\} \cup \{y_j; 1 \leq j \leq n\} \cup \{z_{jk}; 1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq 2\} \cup \{z_k; 1 \leq k \leq 2\}$, $E(S_n \triangleright C_3) = \{x y_j; 1 \leq j \leq n\} \cup \{x z_k; 1 \leq k \leq 2\} \cup \{z_1 z_2\} \cup \{y_j z_k; 1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq 2\} \cup \{z_{j1} z_{j2}; 1 \leq j \leq n\}$ sehingga $|V(S_n \triangleright C_3)| = 3n + 3$ dan $|E(S_n \triangleright C_3)| = 4n + 3$.

- b. Hasil dari pembahasan Bab sebelumnya diperoleh 7 teorema dengan bilangan kromatik pewarnaan total r -dinamis.

Misalkan G adalah graf $P_n \triangleright Wd_{3,3}$ dimana $n \geq 3$ dan titik z sebagai titik cangkok

pada graf $Wd_{3,3}$. Bilangan kromatik pewarnaan total r -dinamis pada graf G adalah

$$\chi''_r(G) = \begin{cases} 9, & \text{untuk } 1 \leq r \leq 7 \\ 10, & \text{untuk } r = 8 \\ 12, & \text{untuk } 9 \leq r \leq 10 \\ r + 2, & \text{untuk } 11 \leq r \leq 13 \\ 16, & \text{untuk } 14 \leq r \leq 15 \\ 17, & \text{untuk } r \geq 16 \end{cases}$$

Misalkan G adalah graf $L_n \triangleright P_m$ dimana $n \geq 2$, $m \geq 3$ dan titik y_1 sebagai titik cangkok pada graf P_m . Bilangan kromatik pewarnaan total r -dinamis pada graf G adalah

$$\chi''_r(G) = \begin{cases} 5, & \text{untuk } 1 \leq r \leq 3 \\ 8, & \text{untuk } r = 4 \\ 10, & \text{untuk } r = 5 \\ 13, & \text{untuk } 6 \leq r \leq 7 \\ 15, & \text{untuk } r \geq 8 \end{cases}$$

Misalkan G adalah graf $P_n \triangleright F_{1,3}$ dimana $n \geq 3$ dan titik y_3 sebagai titik cangkok pada graf $F_{1,3}$. Bilangan kromatik pewarnaan total r -dinamis pada graf G adalah

$$\chi''_r(G) = \begin{cases} 5, & \text{untuk } 1 \leq r \leq 3 \\ 6, & \text{untuk } r = 4 \\ 8, & \text{untuk } r = 5 \\ 10, & \text{untuk } 6 \leq r \leq 7 \\ 11, & \text{untuk } r \geq 8 \end{cases}$$

Misalkan G adalah graf $L_n \triangleright S_3$ dimana $n \geq 2$ dan titik z_3 sebagai titik cangkok

pada graf S_3 . Bilangan kromatik pewarnaan total r-dinamis pada graf G adalah

$$\chi''_r(G) = \begin{cases} 5, & \text{untuk } 1 \leq r \leq 3 \\ 6, & \text{untuk } r = 4 \\ 8, & \text{untuk } r = 5 \\ 10, & \text{untuk } r = 6 \\ 12, & \text{untuk } r = 7 \text{ dan } r \geq 8 \end{cases}$$

Misalkan G adalah graf $TL_n \triangleright C_3$ dimana $n \geq 3$ dan titik y_3 sebagai titik cangkok pada graf C_3 . Bilangan kromatik pewarnaan total r-dinamis pada graf G adalah

$$\chi''_r(G) = \begin{cases} 7, & \text{untuk } 1 \leq r \leq 4 \\ 8, & \text{untuk } 5 \leq r \leq 6 \\ 9, & \text{untuk } r = 7 \\ r + 3, & \text{untuk } 8 \leq r \leq 9 \\ 15, & \text{untuk } r = 10 \\ 18, & \text{untuk } r = 11 \\ 20, & \text{untuk } r \geq 12 \end{cases}$$

Misalkan G adalah graf $P_n \triangleright H_{2,2}$ dimana $n \geq 3$ dan titik y_4 sebagai titik cangkok pada graf $H_{2,2}$. Bilangan kromatik pewarnaan total r-dinamis pada graf G adalah

$$\chi''_r(G) = \begin{cases} 5, & \text{untuk } 1 \leq r \leq 3 \\ 8, & \text{untuk } r = 4 \\ 9, & \text{untuk } 5 \leq r \leq 7 \\ 10, & \text{untuk } r \geq 8 \end{cases}$$

Misalkan G adalah graf $S_n \triangleright C_3$ dimana $n \geq 4$ dan titik z_3 sebagai titik cangkok

pada graf C_3 . Bilangan kromatik pewarnaan total r -dinamis pada graf G adalah

$$\chi''_r(G) = \begin{cases} n + 3, & \text{untuk } 1 \leq r \leq n + 2 \\ n + 4, & \text{untuk } r = n + 3 \\ n + 6, & \text{untuk } n + 4 \leq r \leq n + 5 \\ r + 1, & \text{untuk } n + 6 \leq r \leq 2n + 3 \\ 2n + 5, & \text{untuk } r \geq 2n + 4 \end{cases}$$

5.2 Saran

Berdasarkan hasil dari penelitian mengenai pewarnaan total r -dinamis pada graf hasil operasi *comb product* dari graf khusus yaitu graf $P_n \triangleright Wd_{3,3}$, $L_n \triangleright P_m$, $P_n \triangleright F_{1,3}$, $L_n \triangleright S_3$, $P_n \triangleright H_{2,2}$, $TL_n \triangleright C_3$ dan $S_n \triangleright C_3$, maka peneliti memberikan saran kepada pembaca untuk dapat mengembangkan pewarnaan total r -dinamis pada graf hasil operasi dari graf khusus lainnya. Misalkan pada graf hasil operasi amalgamasi, *joint* dan lain sebagainya.

DAFTAR PUSTAKA

- Alishahi, M. 2011. On The Dynamic Coloring. *Discrete Applied Mathematics*. **159**: 152-156.
- Ardiana, F.E. 2016. *Pewarnaan Total r -Dynamic Pada Model Graf Khusus Dengan Operasi Shakel dan Generalisasinya*. Skripsi. Jember: Jurusan Matematika FMIPA Universitas Jember [Tidak Dipublikasikan].
- Ardiansyah, R dan Darmaji. 2013. Bilangan Kromatik Graf Hasil Amalgamasi Dua Buah Graf. *Jurnal Sains dan Seni Pomits*. **2**(1): 2337-3520.
- Azizah, F.H. 2016. *Nilai Kromatik dan Kajian Pewarnaan Total r Dinamis pada Beberapa Graf Khusus*. Skripsi. Jember: Jurusan Matematika FMIPA Universitas Jember [Tidak Dipublikasikan].
- Budayasa, K. 2007. *Teori Graf dan Aplikasinya*. Universitas Negeri Surabaya.
- Chartrand, G dan Lesniak, L. 1996. *Graphs and Digraphs Third Edition*. California: Chapman & Hall.
- Chartrand, G dan Zhang, Ping. 2009. *Chromatic Graph Theory*. California: Chapman & Hall.
- Dafik dan Meganingtyas, D. 2015. On Edge r -Dynamic Coloring of Graphs. *Graph Master Workshop: UNEJ*.
- Damayanti, R.T. 2011. Automorfisme Graf Bintang dan Graf Lintasan. *CAUCHY*. **2** (1): 35-40.
- Geetha, J. dan Somasundaran, K. 2016. Total Chromatic Number and Some Topological Indices. *Electronic Notes in Descrete Mathematics*. **53**: 363-371.
- Harsya, A.Y., Dafik, dan Agustin, I.H., 2014. *Pewarnaan Titik Pada Graf Sikel dengan Graf Lintasan*. Artikel (Tidak dipublikasikan). Jember: UNEJ.
- Irwanto, J. dan Dafik. 2014. Pewarnaan Titik pada Graf Spesial dan Graf Operasinya. *Prosiding Seminar Matematika dan Pendidikan Matematik*. 196-201.

- Jeyanti.P , Maheswari A. 2015. One Modulo Three Mean Labeling Of Cycle Related Graphs. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, **103** (4):625-633.
- Kim, S.J., Lee, S.J., dan Park, W.J. 2013. Dynamic Coloring and List Dynamic Coloring of Planar Graphs. *Discrete Applied Mathematics*. **161**: 2207-2212.
- Kowalik, L., Sereni, J., dan Skrekovski, R. 2008. Total Coloring of Plane Graphs with Maximum Degree Nine. *Society for Industrial and Applied Mathematics*. **22**(4): 1462-1479.
- Lai, H., dan Montgomery, B. 2002. *Dynamic Coloring of Graphs*. Artikel (Tidak Dipublikasikan). Morgantown: West Virginia University.
- Meganingtyas, D.E.W. 2015. *Analisis Pewarnaan r -Dinamis pada Graf Khusus*. Tidak diterbitkan. Tesis. Jember: Universitas Jember.
- Munir, R. 2012. *Matematika Diskrit Revisi Kelima*. Bandung: Informatika.
- Nugroho, D.B. 2008. *Catatan Kuliah (2 SKS) MX 324 Pengantar Teori Graf*. Universitas Kristen Satya Wacana.
- Putri, D.F. 2016. *Analisa Pewarnaan Total r -Dinamis pada Graf Khusus dan Graf Hasil Operasi*. Skripsi. Jember: Jurusan Matematika FMIPA Universitas Jember [Tidak Dipublikasikan].
- Saputro, S.W., Mardiana, N., dan Purwasih, I.A. 2013. The Metric Dimension of Comb Product Graphs. *Graph Theory Conference in honor of Egawa's 60th birthday*: 1-2.
- Slamin. 2009. *Desain Jaringan: Pendekatan Teori Graf*. Jember: Jember University Press.
- Tarmidzi, M. D. 2015. *Nilai Kromatik dan Pewarnaan Titik r -Dinamis pada Graf Khusus dan Operasi shakel*. Tidak Diterbitkan. Skripsi. Jember: Universitas Jember.
- Wulandari, N.I. 2015. *Analisis r -Dynamic Vertex Coloring pada Hasil Operasi Graf Khusus*. Skripsi. Jember: Jurusan Matematika FMIPA Universitas Jember [Tidak Dipublikasikan].