PELABELAN TOTAL SUPER (a,d)-SISI ANTIMAGIC PADA KORONA $C_n \odot P_2$

SKRIPSI

Oleh

Angga Saputra

NIM 111810101004

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS JEMBER

2016

PELABELAN TOTAL SUPER (a, d)-SISI ANTIMAGIC PADA KORONA $C_n \odot P_2$

SKRIPSI

diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan Program Studi Matematika (S1) dan mencapai gelar Sarjana Sains

Oleh
Angga Saputra
NIM 111810101004

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER
2016

PERSEMBAHAN

Dengan menyebut nama Allah yang maha pengasih lagi maha penyayang, serta sholawat atas Nabi Muhammad S.A.W, kupersembahkan sebuah kebahagiaan dalam perjalanan hidupku teriring rasa terima kasihku yang terdalam kepada:

1. Ayahku Kasno dan Ibuku Sri Hartami serta Kakakku Robet Kristiono dan Totok Beta Kurniawan, yang senantiasa mengalirkan rasa cinta dan kasih sayangnya serta doa yang tiada pernah putus yang selalu mengiringiku dalam meraih cita-cita

2. Ibu Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si. dan Bapak Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D. selaku pembimbing skripsi yang dengan sabar telah memberikan ilmu dan bimbingan selama menyelesaikan skripsiku;

3. teman-teman angkatan 2011 Matematika FMIPA yang senantiasa membantuku dan menorehkan sebuah pengalaman indah yang tak terlupakan;

4. teman-teman pejuang graf yang selalu berbagi suka dan duka untuk menemukan rumus dan selalu memberikan dukungan untuk terus semangat;

5. dosen Matematika FMIPA Universitas Jember yang dengan sabar telah memberikan ilmunya kepadaku.

MOTTO

"Kerja Keras tidak akan ada hasilnya jika tidak sertai dengan kerja cerdas"*

PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Angga Saputra

NIM : 111810101004

Menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang berjudul: Pelabelan Total Super (a, d)-sisi Antimagic pada Graf korona $C_n \odot P_2$ adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali jika dalam pengutipan substansi disebutkan sumbernya, dan belum diajukan pada instansi manapun, serta bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa adanya tekanan dan paksaan dari pihak manapun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, November 2016

Yang menyatakan,

Angga Saputra

NIM. 111810101004

SKRIPSI

PELABELAN TOTAL SUPER (a, d)-SISI ANTIMAGIC PADA KORONA $C_n \odot P_2$

Oleh

Angga Saputra
NIM 111810101004

Pembimbing

Dosen Pembimbing Utama : Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si.
Dosen Pembimbing Anggota : Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D.

PENGESAHAN

Skripsi berjudul Pelabelan Total Super (a,d)-sisi Antimagic pada Graf korona $C_n \odot P_2$ telah diuji dan disahkan oleh Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam pada:

Hari :

Tanggal :

Tempat : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember

Tim Penguji :

Dosen Pembimbing Utama,	Dosen Pembimbing Anggota,
Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si. NIP.19840801 200801 2 006	Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D. NIP.19680802 199303 1 004
Dosen Penguji Utama,	Dosen Penguji Anggota,
M. Ziaul Arif, S.Si., M.Sc. NIP.19850111 200812 1 002	Dian Anggraeni, S.Si., M.Si. NIP. 19820216 200604 2 002

Mengetahui,

Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Universitas Jember

Drs. Sujito, Ph.D.

NIP. 19610204 198711 1 001

RINGKASAN

Pelabelan Total Super (a,d)-sisi Antimagic pada Graf korona $C_n \odot P_2$; Angga Saputra, 111810101004; 2016: 61 halaman; Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Jember.

Pelabelan graf merupakan salah satu topik di dalam teori graf mengalami perkembangan. Salah satu jenis pelabelan adalah pelabelan total super(a, d)-sisi antimagic $(SEATL)$, dimana a mendefinisikan bobot total terkecil dan d adalah nilai beda.

Graf korona yang dinotasikan $C_n \odot P_2$ merupakan graf yang belum ditemukan $SEATL$-nya. Graf korona $C_n \odot P_2$tunggal dinotasikan $C_n \odot P_2$ dan Graf korona $C_n \odot P_2$ gabungan saling lepas dinotasikan dengan $m(C_n \odot P_2)$.

Kardinalitas dari Graf korona $C_n \odot P_2$ adalah Jika n adalah banyaknya titik pada graf C_n, maka banyaknya titik dan sisi pada graf korona $C_n \odot P_2$ masing - masing adalah $\mid V(C_n \odot P_2) \mid = 3n$ dan E $(C_n \odot P_2) = 4n$. Himpunan titik dan sisi pada graf korona $C_n \odot P_2$ adalah
$V(C_n \odot P_2) = v_i, 1 \leq i \leq n \cup v_{i,1}, 1 \leq i \leq n \cup v_{i,2}, 1 \leq i \leq n$ dan $E(C_n \odot P_2) = v_iv_{i+1}, 1 \leq i \leq n-1 \cup v_nv_1 \cup v_iv_{i,1}, 1 \leq i \leq n \cup v_iv_{i,2}, 1 \leq i \leq n \cup v_{i,1}v_{i,2}, 1 \leq i \leq n$.

Dari Graf korona $C_n \odot P_2$ menghasilkan 5 teorema. Isi dari teorema tersebut antara lain:

a. Graf korona $C_n \odot P_2$ memiliki $(\frac{7n}{2} + 2, 2)$ pelabelan total sisi antimagic untuk setiap n bilangan ganjil, $n \geq 3$.

b. Graf korona $C_n \odot P_2$ memiliki $(\frac{13n-1}{2} + 3, 0)$ pelabelan total sisi antimagic untuk setiap n bilangan ganjil, $n \geq 3$.

c. Graf korona $C_n \odot P_2$ memiliki $(\frac{11n-9}{2}, 1)$ pelabelan total sisi antimagic untuk setiap n bilangan ganjil, $n \geq 3$.

d. Graf korona $m(C_n \odot P_2)$ memiliki $(\frac{7mn+1}{2} + 2, 2)$ pelabelan total super sisi antimagic untuk setiap m dan n bilangan ganjil, $n \geq 3$.

e. Graf korona $m(C_n \odot P_2)$ memiliki $(\frac{15mn+1}{2}+1, 0)$ pelabelan total sisi antimagic untuk setiap m dan n bilangan ganjil, $n \geq 3$.

f. Graf korona $m(C_n \odot P_2)$ memiliki $(\frac{m(11n-9)}{2}-3, 1)$ pelabelan total sisi antimagic untuk setiap m dan n bilangan ganjil, $n \geq 3$.

KATA PENGANTAR

Puji syukur ke hadirat Allah Swt atas segala rahmat-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul Pelabelan Total Super (a, d)-sisi Antimagic pada Graf korona $C_n \odot P_2$. Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan Program Studi Matematika (S1) pada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih atas bantuan dan bimbingan dalam penyusunan skripsi ini, terutama kepada yang terhormat:

1. Ika Hesti Agustin, S.Si, M.Si. selaku Dosen Pembimbing Utama dan Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D. selaku Dosen Pembimbing Anggota yang telah meluangkan waktu, pikiran, dan perhatian dalam penulisan skripsi ini;
2. Dian Anggraeni, S.Si., M.Si. dan Ziaul, S.Si., M.Sc. selaku dosen penguji yang telah memberikan masukan pada skripsi ini;
3. dosen dan karyawan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
4. teman-teman angkatan 2011 Matematika FMIPA Universitas Jember yang senantiasa membantuku dan menorehkan sebuah pengalaman serta kenangan indah yang tak terlupakan;
5. teman-teman seperjuangan graf kalian mengajarkan bahwa perbedaan bukan alasan untuk tidak saling membantu.

Semoga bantuan, bimbingan, dan dorongan beliau dicatat sebagai amal baik oleh Allah SWT dan mendapat balasan yang sesuai dari-Nya. Selain itu, penulis juga menerima segala kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan skripsi ini. Akhirnya penulis berharap, semoga skripsi ini dapat bermanfaat.

Jember, November 2016

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

BAB 1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Pelabelan adalah bagian dari teori graf. Pelabelan graf pertama kali diperkenalkan oleh Sedlacek pada tahun 1963. Konsep pelabelan graf sangat dikenal dalam teori graf tidak hanya karena tantangan pelabelannya tetapi juga karena aplikasinya pada ilmu lain, sebagai contoh x-ray, kriptografi, astronomi, desain sirkuit, desain jaringan komunikasi dan lain - lain.

Sebuah graf terdiri atas himpunan titik dan himpunan sisi. Pada suatu graf dapat dikenakan pelabelan. Pelabelan adalah pemetaan satu - satu yang memakan himpunan titik atau himpunan sisi suatu graf ke himpunan bilangan (biasanya bulat) yang disebut label. Pelabelan dengan domain himpunan titik disebut pelabelan titik, pelabelan dengan domain himpunan sisi disebut pelabelan sisi, dan pelabelan dengan domain himpunan titik dan sisi disebut pelabelan total.

Penjumlahan dari label yang dikenakan pada titik dan sisi dari suatu graf disebut bobot. bobot titik adalah penjumlahan label titik dengan label sisi yang berada pada titik tersebut dan bobot sisi adalah penjumlahan label sisi dengan label titik yang dihubungkan oleh sisi tersebut. Bobot - bobot titik atau bobot - bobot sisi yang diperoleh dari penjumlahan label tersebut dapat merupakan bilangan konstan atau berbeda. Jika pelabelan menghasilkan bobot -bobot titik atau bobot - bobot sisi yang konstan disebut pelabelan ajaib. Pelabelan magic diperkenalkan oleh Sedlacek pada tahun 1963. Ia mendefinisikan sebuah graf adalah ajaib jika mempunyai pelabelan titik atau pelabelan sisi sedemikian hingga bobot - bobot titik atau bobot - bobot sisinya konstan.

Jika pelabelan menghasilkan bobot -bobot titik atau bobot - bobot sisi yang berbeda disebut pelabelan antimagic. Pelabelan antimagic ini diperkenalkan oleh Hartsfield dan Ringel pada tahun 1990. Selanjutnya pada tahun 1993 Bodendiek dan Walter menemukan bahwa bobot - bobot titik dan bobot - bobot sisi dari pelabelan anti ajaib tidak hanya berbeda tetapi juga membentuk suatu barisan aritmatika denngan suku pertama $a > 0$ dan beda $d \geq 0$.

Hartsfield dan Ringel mengeluarkan konjektur bahwa setiap graf yang terhubung kecuali K_2 memiliki pelabelan antimagic. Hal ini mendorong para peneliti untuk terus melakukan konstruksi pelabelan anti ajaib seiring ditemukannya kelas - kelas graf yang baru. Salah satu adalah konstruksi pelabelan total super (a, d)-sisi antimagic.

Beberapa penelitian tentang pelabelan total super(a, d)-sisi antimagic yang telah dipublikasikan, yaitu Dafik *et al.* (2011) tentang *Super edge-antimagic total labelings of mK, n, n*,Djoni (2014) tentang pelabelan total super (a,d)-sisi antimagic pada graf Bianglala, Dafik *et al.* (2013) tentang *Super Antimagicness of Triangular Book and Diamond Ladder Graphs*, Hussain *et al.*

Untuk penulis sendiri tertarik untuk melakukan penelitian terhadap pelabelan total super(a, d)-sisi antimagic pada graf operasi $C_n \odot P_2$.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang diatas dapat dirumuskan masalah dalam penelitian ini adalah bagaimana pelabelan total super (a, d)-sisi antimagic pada graf korona $C_n \odot P_2$ tunggal dan gabungan saling lepasnya?

1.3 Batasan Masalah

Untuk menghindari meluasnya permasalahan yang akan diteliti, maka permasalahan hanya difokuskan pada.

a. Graf korona $C_n \odot P_2$, yaitu graf yang tidak mempunyai loop serta bukan graf berarah.

b. Pelabelan total super(a, d)-sisi antimagic pada graf korona $C_n \odot P_2$ beserta gabungannya, untuk nilai n ganjil dan $n \geq 3$, untuk graf tunggal dengan $d = 0, 1, 2$ sedangkan untuk gabungan saling lepasnya dengan $d = 0, 1, 2$.

1.4 Tujuan Penelitian

Sesuai latar belakang dan rumusan masalah diatas, tujuan dari penelitian ini adalah menentukan pelabelan total super(a, d)-sisi antimagic pada graf korona $C_n \odot P_2$ beserta gabungan saling lepasnya.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari penelitian ini sebagai berikut.

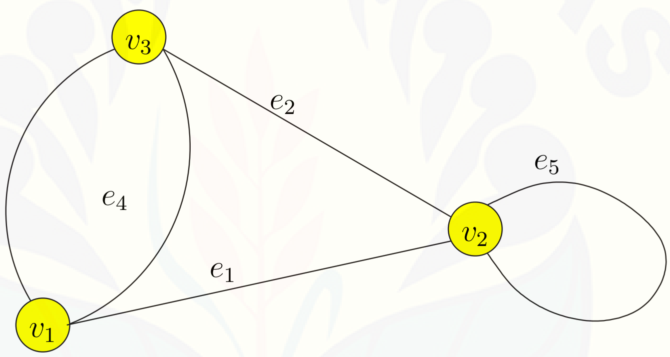
a. menambah pengetahuan baru dalam bidang teori graf, khususnya dalam ruang lingkup pelabelan graf.

b. memberikan motivasi pada peneliti lain untuk meneliti pelabelan super (a, d)-sisi antimagic total pada graf dari jenis yang lain ataupun mengembangkan penelitian ini.

BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Terminologi Dasar Graf

Sebuah graf G adalah himpunan tak kosong berhingga dari objek - objek yang disebut titik, bersama dengan himpunan pasangan tidak terurut dari simpul - simpul yang berbeda dari G yang disebut sisi. Himpunan titik dari G dinotasikan dengan $V(G)$ dan himpunan sisi dinotasikan dengan $E(G)$. Jika $\mid V(G) \mid = p$ dan $\mid E(G) \mid = q$ masing - masing adalah banyaknya titik dan sisi dari G, maka graf tersebut biasa ditulis $G(p, q)$. Jika himpunan sisi dari graf G merupakan himpunan kosong maka graf tersebut disebut graf kosong.



Gambar 2.1 Contoh Sebuah Graf

Pada himpunan titik dan sisi pada graf G (Gambar 2.1) masing - masing adalah $V(G) = v_1, v_2, v_3$ dan $E(G) = e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 = v_1v_2, v_2v_3, v_1v_3, v_1v_3, v_2v_2$. Banyaknya titik adalah $\mid V(G) \mid$ =3 dan banyaknya sisi adalah $\mid E(G) \mid$ =5. Sisi e_1 mempunyai titik awal v_1 dan titik akhir v_2 yang disebut titik ujung.

Jika $e = v_1v_2$ adalah sebuah sisi pada graf G, maka v_1 dan v_2 disebut titik yang bertetangga(*adjacent*) dan sisi e disebut hadir(incident) pada titik v_1 dan v_2. Demikian pula jika e_1 dan e_2 dua sisi berbeda yang hadir pada titik yang sama maka e_1 dan e_2 disebut sisi yang bertetangga. Sebuah graf sederhana disebut graf lengkap (complete graph) jika setiap dua titiknya bertetangga.

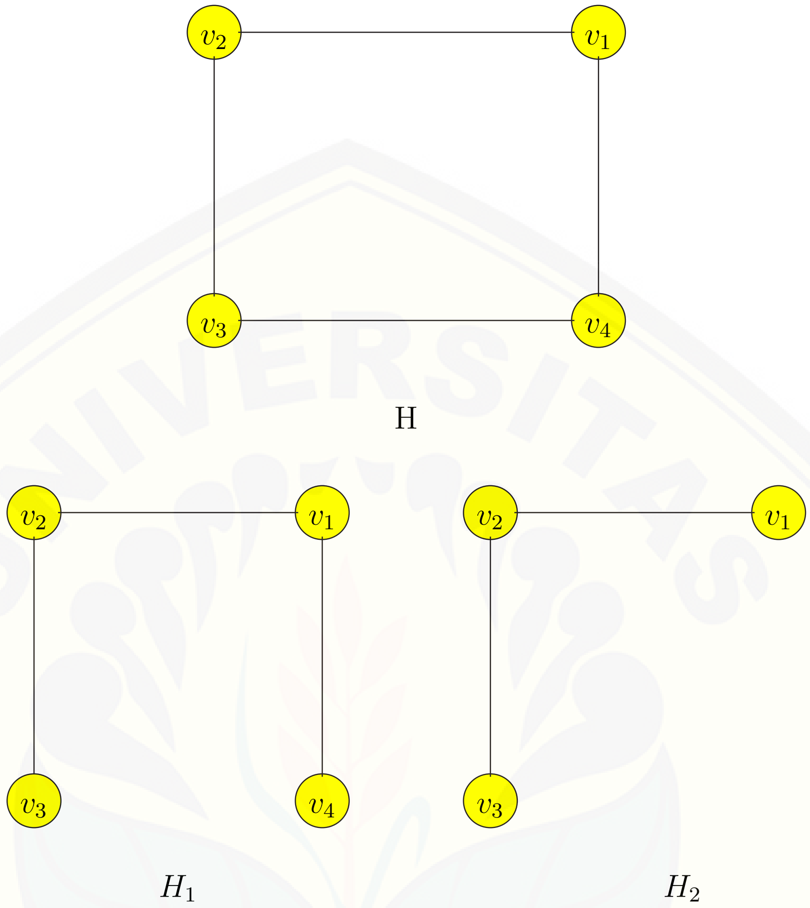
Banyaknya sisi yang hadir pada suatu titik v disebut derajat(degree), dinotasikan dengan *deg* (v). Sebuah titik dengan *deg* $(v) = 0$ disebut titik terpencil dan sebuah titik dengan *deg* $(v) = 1$ disebut titik akhir.

Terdapat berbagai jenis graf yang termasuk ke dalam graf sederhana, beberapa,yaitu graf Lintasan adalah Sebuah lintasan u,v adalah sebuah jalur dengan titik awal u dan titik akhir v yang berderajat 1 dan yang lainnya disebut titik dalam yang berderajat 2. Graf lingkaran C_n adalah sebuah jalur tertutup $v_1, v_2, ..., v_n, v_1 (n \geq 3)$ dengan n titik v_i yang berbeda.

Jika dilihat berdasarkan arahnya, graf terbagi menjadi dua yaitu graf berarah dan graf tidak berarah. Graf berarah adalah graf yang sisinya mempunyai arah, sedang-kan untuk graf tidak berarah adalah graf yang sisinya tidak berarah. Sisi yang menghubungkan satu titik dengan dirinya sendiri dinamakan *loop*. Dan jika ter-dapat dua atau lebih sisi yang titik ujungnya sama dinamakan sisi parallel. Sebuah graf yang tidak memuat *loop* dan sisi parallel dinamakan graf sederhana. Dan untuk graf yang memuat *loop* dan sisi parallel dinamakan graf tak sederhana. Graf tak sederhana terdiri dari dua macam yaitu graf ganda (multigraph) dan graf semu (*pseudograf*). Graf ganda adalah graf yang hanya mengandung sisi parallel saja sedangkan graf yang mengandung *loop* dan sisi parallel disebut graf semu (*pseudograf*).

Dikatakan mengandung sikel sebuah graf (*cycle*) harus memiliki jalan yang tertutup dengan barisan titik yang berbeda. Panjang dari sikel terpendek disebut *girth*. Jalan disebut tertutup jika titik awal dan titik akhirnya sama dan jika titik awal dan titik akhirnya berbeda disebut jalan terbuka. Pengertian jalan itu sendiri merupakan barisan berhingga dari titik-titik dan sisi-sisi secara bergantian. Panjang dari sebuah jalan adalah banyaknya sisi. Jalan yang sisinya tepat hanya dilewati sekali disebut jejak (*trail*). Untuk jalan yang semuanya titiknya berbeda dikatakan sebuah lintasan (*path*).

Sebuah graf kadangkala menjadi bagian dari graf lain yang lebih besar. Sebuah graf H adalah graf bagian (subgraph) dari graf G. jika $V(H) \subseteq V(G)$ dan $E(H) \subseteq E(G)$. Dinotasikan dengan $H \subset G$. Graf H_1 dan H_2 merupakan subgraf dari graf H jika setiap titik pada H_1 dan H_2 adalah titik pada graf H serta setiap sisi pada graf H_1 dan H_2 adalah sisi pada graf H, dengan kata lain $V(H_1$ dan $H_2)$ $\subseteq V(H)$, $E(H_1$ dan $H_2) \subseteq E(H)$. Diperlihatkan pada Gambar 2.2.



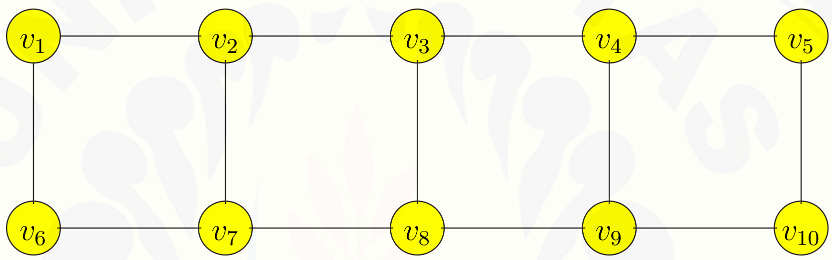
Gambar 2.2 Graf H dan Beberapa Subgraf dari Graf H

Jika terdapat dua buah graf yang dikatakan sama namun bentuknya berbeda disebut graf yang isomorfis. Syarat-syarat yang diperlukan untuk menyatakan dua graf dikatakan isomorfis adalah sebagai berikut: kedua graf mempunyai jumlah sisi yang sama, kedua graf mempunyai jumlah titik yang sama, jumlah titik yang mempunyai derajat tertentu adalah sama, kedua graf mempunyai *girth* yang sama.

2.2 Graf khusus

Graf khusus adalah sebuah graf yang memiliki karakter dan keunikan tertentu. Terdapat beberapa graf khusus, diantaranya adalah graf lengkap, graf siklus, graf petersen, graf roda, graf matahari, graf ladder, graf roda, graf roket, graf siput dan masih banyak graf lainnya. Berikut akan dijelaskan definisi dari beberapa graf khusus.

a. Graf Ladder dilambangkan dengan L_n adalah sebuah graf yang sama dengan $K_2 \times P_n$ dengan titik $V(L_n) = \{u_i,\ v_i\ :\ 1 \leq i \leq n\}$ dan $E(L_n)= \{u_iu_{i+1},\ v_iv_{i+1}\ :\ 1 \leq i \leq n\text{-}1\} \cup \{u_iv_i\ :\ 1 \leq i \leq n\}$. Graf Ladder mempunyai $2n$ titik, dan $3n$-2 sisi. Gambar 2.3 menunjukkan contoh graf Ladder dengan n = 5;

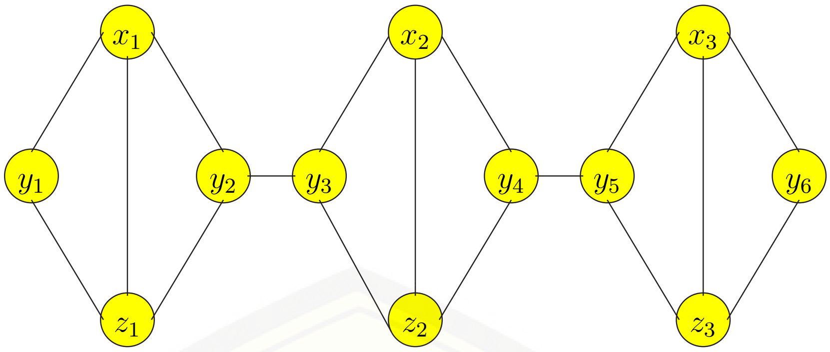


Gambar 2.3 Graf *Ladder* (L_5)

b. Graf Tangga Permata

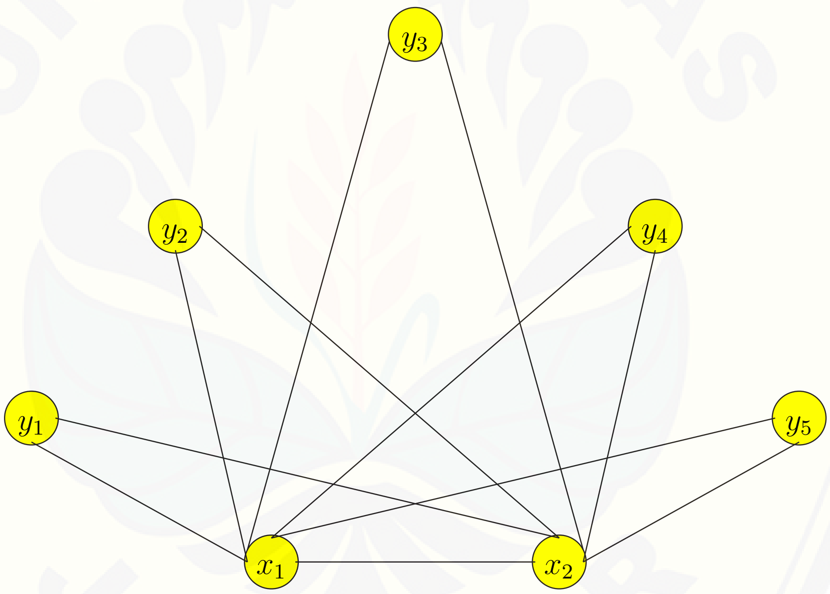
Graf tangga permata adalah salah satu family dari graf tangga yang dinotasikan dengan Dl_n dimana $V(Dl_n) = \{x_i, y_i, z_j; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq 2n\}$ dan $E(Dl_n) = \{x_ix_{i+1}, y_iy_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \bigcup \{x_iy_i; 1 \leq i \leq n\} \bigcup \{z_jz_{j+1}; 2 \leq j \leq 2n-2, j genap\} \bigcup \{x_iz_{2i-1}, y_iz_{2i-1}; 1 \leq i \leq n\}$. Contoh dari graf tanggan permata (Dl_n) ditunjukkan pada Gambar 2.4

c. Graf Buku Segitiga dinotasikan dengan Bt_n adalah suatu graf yang merupakan famili dari graf Komplete tripartite $K_{m,n,l}$ dengan jumlah titik pada m dan n adalah satu dan jumlah titik pada l sebanyak n. Graf Buku Segitiga Bt_n merupakan graf yang terdiri dari n buah segitiga ($n \geq 1$) dengan setiap segitiga memiliki sebuah sisi yang dipakai bersama atau dengan kata lain



Gambar 2.4 Graf Tangga Permata Dl_3

setiap segitiga memiliki 2 titik yang sama. Graf buku tersusun dari 5 buah segitiga.



Gambar 2.5 Graf Buku Segitiga (Bt_5)

2.3 Pelabelan Graf

Pelabelan dari sebuah graf didefinisikan sebagai suatu pemetaan satu-satu dan onto yang memetakan himpunan elemen-elemen graf yaitu titik dan sisi ke himpunan bilangan bulat positif. Fungsi f yang memetakan himpunan A (elemen-

elemen graf) ke dalam himpunan B (bilangan bulat positif) disebut fungsi satu-satu jika setiap elemen di A mempunyai pasangan yang berbeda di B, domain memiliki tepat satu pasangan di kodomain. Disebut onto jika semua anggota di B mempunyai pasangan di A, anggota di A boleh mempunyai pasangan yang sama di B. Pemetaan fungsi satu-satu dan onto sering disebut pemetaan bijektif. Pemetaan bijektif merupakan pemetaan yang tidak ada anggota himpunan di A mempunyai pasangan yang sama di B, atau dengan kata lain semua elemen graf diberi nomor atau label dengan bilangan bulat positif yang berbeda. Jadi pelabelan graf $G = (V,E)$ merupakan suatu pemetaan : $D \rightarrow N$, dimana D menyatakan domain dan N menyatakan himpunan label dari graf G. Pelabelan graf terdiri dari 3 macam yaitu sebagai berikut.

a. Ketika *domain*nya adalah berupa titik maka disebut pelabelan titik, dimana hanya titik saja yang diberi label.

b. ketika *domain*nya adalah berupa sisi maka disebut pelabelan sisi, dimana hanya sisi saja yang diberi label.

c. Ketika *domain*nya adalah titik dan sisi maka disebut pelabelan total, dimana titik dan sisi sama-sama diberi label.

Pada tahun 1963, Sedlacek memperkenalkan konsep pelabelan ajaib kemudian pada tahun 1989, Hartsfield dan Ringel memperkenalkan konsep pelabelan antiajaib. Mereka mendefinisikan sebuah pelabelan antiajaib sebagai pelabelan sisi pada graf dengan bilangan bulat positif 1, 2, 3, $\ldots$, n sehingga bobot pada masing-masing titik berbeda dengan bobot titik yang lainnya. Bodendiek dan Walther mendefinisikan konsep pelabelan (a,d)-antiajaib sebagai pelabelan sisi dimana bobot dari titik-titiknya membentuk barisan aritmatika dengan suku awal a dan beda d.

Bobot sisi dalam pelabelan titik dan pelabelan total berbeda. Jika pada pelabelan titik, bobot sisi merupakan jumlah label dua titik dari sisi yang menghubungkan dua titik tersebut. Sedangkan pada pelabelan total, bobot sisi merupakan jumlah label sisi dan jumlah label dua titik dari sisi yang menghubungkan dua titik tersebut.

Nilai bobot sisi menentukan jenis pelabelan titik dan pelabelan total. Jika semua sisi mempunyai bobot sisi yang sama maka disebut pelabelan titik sisi ajaib dan pelabelan total sisi ajaib. Tetapi jika semua sisi mempunyai bobot sisi yang berbeda dan himpunan bobot sisi tersebut membentuk barisan aritmatika dengan a menyatakan bobot sisi terkecil atau suku pertama dan d menyatakan beda dari bobot sisi yang satu dengan yang lain maka disebut pelabelan titik sisi anti ajaib (*edge antimagic vertex labelling*) atau $EAVL$ dan pada pelabelan total disebut pelabelan total sisi anti ajaib.

2.3.1 Pelabelan total super (a, d)-Sisi Antiajaib

Sebuah pemetaan satu-satu f dari $V(G)$ ke himpunan bilangan bulat $1, 2, 3, ..., p$ disebut pelabelan titik (a, d)-sisi Antiajaib jika himpunan bobot sisinya $w(uv) = f(u) + f(v)$ pada semua sisi G adalah $a, a + d, a + 2d, ..., a + (q - 1)d$ untuk $a > 0$ dan $d \geq 0$ keduanya adalah bilangan bulat positif (Sugeng *et al*, 2005). Sedangkan pelabelan super (a, d)-sisi Antiajaib total pada sebuah graf $G = (V, E)$ dapat diartikan sebagai pelabelan titik dengan bilangan bulat $f(V) = \{1, 2, 3, ..., p\}$ dan pelabelan sisi dengan bilangan bulat $f(E) = \{p+1, p+2, p+3, ...p+q\}$ dari sebuah graf G dimana p adalah banyaknya titik dan q adalah banyaknya sisi pada graf G sehingga himpunan bobot sisi yang terbentuk adalah $W = \{a, a+d, a+2d, ..., a+(q-1)d\}$ untuk $a > 0$ dan $d \geq 0$ (Dafik *et al*, 2008). Jika himpunan bobot sisi yang terbentuk adalah $W = \{a, a+d, a+2d, ..., a+(q-1)d\}$ untuk $a > 0$ dan $d = 0$ maka disebut pelabelan super (a, d)-sisi ajaib total.

Pelabelan Total (a, d)-Sisi Anti Ajaib dari sebuah graf $G(p, q)$ adalah sebuah pemetaan satu - satu f dari $V(G) \cup E(G)$ ke himpunan $1, 2, ..., p + q$ sedemikian hingga himpunan bobot sisi $f(u) + f(uv) + f(v) : uv\epsilon E(G)$ sama dengan $a, a + d, a + 2d, ..., a + (q - 1)d$ untuk suatu bilangan bulat $a > 0$ dan $d \geq 0$.

Suatu pelabelan total (a, d)-sisi anti ajaib disebut super, ditulis pelabelan total super (a, d)-sisi anti ajaib jika sisi dari graf G tersebut diberi label $1, 2, ..., p$ dan $f(E(G)) = p + 1, p + 2, ..., p + q$. Jika $d = 0$ maka Suatu pelabelan total$(a, 0)$-sisi anti ajaib tersebut juga merupakan pelabelan total sisi ajaib dengan $k = a$.

♢ **Lemma 2.3.1.** *Jika sebuah graf* (p, q) *adalah pelabelan super* (a, d)*-sisi antimagic total maka* $d \leq \frac{2p+q-5}{q-1}$

Bukti: $f(V) = \{1, 2, 3, ..., p\}$ dan $f(E) = \{p + 1, p + 2, p + 3, ..., p + q\}$.
Misalkan graf (p, q) adalah pelabelan super (a, d)-sisi antimagic total dengan pemetaan $f : V(G) \bigcup E(G) \longrightarrow \{1, 2, 3..., p + q\}$. Nilai minimum yang mungkin dari bobot sisi terkecil $\alpha(u) + \alpha(uv) + \alpha(v) = 1 + (p + 1) + 2 = p + 4$ dan dapat ditulis :$p + 4 \leq a$. Sedangkan pada sisi yang lain, nilai maksimum yang mungkin dari bobot sisi terbesar diperoleh dari jumlah 2 label titik terbesar dan label sisi terbesar atau dapat ditulis $(p - 1) + (p + q) + p = 3p + q - 1$. Akibatnya:

$$\begin{array}{lcl} a + (q-1)d & \leq & 3p + q - 1 \\ d & \leq & \frac{3p+q-1-(p+4)}{q-1} \\ d & \leq & \frac{2p+q-5}{q-1} \end{array}$$

Dari Lemma 2.3.1,telah terbukti dan diperoleh nilai $d \leq \frac{2p+q-5}{q-1}$ dari berbagai jenis atau famili graf. □

Dafik, Robiyatul pada tahun 2014 menemukan lemma yang dapat digunakan untuk mengatakan bahwa lemma berikut digunakan untuk menemukan pelabelan super $(a, 1)$-sisi antimagic total pada graf tunggal untuk jumlah sisi ganjil.

♢ **Lemma 2.3.2.** *Misalkan* Ψ *merupakan sebuah himpunan bilangan berurutan* $\Psi = \{c, c+1, c+2, \ldots, c+k\}$, *dengan* k *genap. Maka terdapat sebuah permutasi* $\Pi(\Psi)$ *dari anggota-anggota himpunan* Ψ *sehingga* $\Psi + \Pi(\Psi)$ *juga merupakan sebuah himpunan bilangan berurutan yaitu* $\Psi + \Pi(\Psi) = \{2c+\frac{k}{2}, 2c+\frac{k}{2}+1, 2c+\frac{k}{2}+2, \ldots, 2c + \frac{3k}{2}\}$.

Bukti: Misal Ψ adalah suatu himpunan bilangan berurutan $\Psi = \{v_i | v_i = c+(i-1), 1 \leq i \leq k + 1\}$ dan k adalah genap. Selanjutnya didefinisikan nilai permutasi $\Pi(\Psi) = \{w_i | 1 \leq i \leq k + 1\}$ dari anggota Ψ adalah sebagai berikut:

$$w_i = \begin{cases} c + i + \frac{k}{2} - 1, & \text{jika } 1 \leq i \leq \frac{k}{2} + 1 \\ c + i - (\frac{k}{2} + 2), & \text{jika } \frac{k}{2} + 2 \leq i \leq k + 1 \end{cases}$$

Untuk membuktikan lemma 2.3.2, langkah pertama yang harus dilakukan adalah mensubstitusikan nilai i sesuai batasan yang diberikan maka akan diperoleh w_i sebagai berikut:
Jika $1 \leq i \leq \frac{k}{2}+1$, maka akan diperoleh hasil:

$$\begin{aligned}
\text{untuk } i &= 1 \rightarrow w_1 = c + \frac{k}{2} \\
\text{untuk } i &= 2 \rightarrow w_2 = c + \frac{k}{2} + 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{untuk } i &= \frac{k}{2} \rightarrow w_{\frac{k}{2}} = c + k - 1 \\
\ldots & \\
\text{untuk } i &= \frac{k}{2} + 1 \rightarrow w_{\frac{k}{2}+1} = c + k
\end{aligned}$$

Jika $\frac{k}{2}+2 \leq i \leq k+1$, maka akan diperoleh hasil:

$$\begin{aligned}
\text{untuk } i &= \frac{k}{2} + 2 \rightarrow w_{\frac{k}{2}+2} = c \\
\text{untuk } i &= \frac{k}{2} + 3 \rightarrow w_4 = c + 1 \\
\ldots & \\
\text{untuk } i &= k \rightarrow w_k = c + \frac{k}{2} - 2 \\
\text{untuk } i &= k + 1 \rightarrow w_{k+1} = c + \frac{k}{2} - 1
\end{aligned}$$

Jika Ψ dinyatakan dalam himpunan v_i dan $\Pi(\Psi)$ dinyatakan dalam himpunan w_i seperti telah disampaikan sebelumnya, maka $\Psi + \Pi(\Psi) = \{v_i + w_i | 1 \leq i \leq k+1\}$.

Berdasarkan subtitusi nilai i, maka diperoleh:

$$\begin{aligned}
\text{untuk } i = 1 \rightarrow v_1 + w_1 &= c + (c + \frac{k}{2}) \\
&= 2c + \frac{k}{2} \\
\text{untuk } i = 2 \rightarrow v_2 + w_2 &= (c+1) + (c + 2 + \frac{k}{2} + 1) \\
&= 2c + \frac{k}{2} + 2 \\
\ldots \\
\text{untuk } i = \frac{k}{2} \rightarrow v_{\frac{k}{2}} + w_{\frac{k}{2}} &= (c + \frac{k}{2} - 1) + (c + \frac{3k}{2} - 2) \\
&= 2c + \frac{3}{2} - 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{untuk } i = \frac{k}{2} + 1 \rightarrow v_{\frac{k}{2}+1} + w_{\frac{k}{2}+1} &= (c + \frac{k}{2}) + (c + k) \\
&= 2c + \frac{3k}{2} \\
\text{untuk } i = \frac{k}{2} + 2 \rightarrow v_{\frac{k}{2}+2} + w_{\frac{k}{2}+2} &= (c + \frac{k}{2} + 1) + (c) \\
&= 2c + \frac{k}{2} + 1 \\
\ldots \\
\text{untuk } i = k \rightarrow v_k + w_k &= (c + k - 1) + (c + \frac{k}{2} - 2) \\
&= 2c + \frac{3}{2} - 3 \\
\text{untuk } i = k + 1 \rightarrow v_{k+1} + w_{k+1} &= (c + k) + (c + \frac{k}{2} - 1) \\
&= 2c + \frac{3k}{2} - 1
\end{aligned}$$

Jika diurutkan mulai dari nilai terkecil hingga terbesar, maka diperoleh: $\{2c + \frac{k}{2}, 2c+\frac{k}{2}+1, 2c+\frac{k}{2}+2, \ldots, 2c+\frac{3k}{2}\}$. Dengan demikian rumusan tersebut terbukti benar. $\square$

Secara hariah, pelabelan total (a,d)-sisi antimagic dan pelabelan total super (a,d)-sisi antimagic memuat perluasan gagasan dari total (a,d)-sisi magic dan pelabelan total super (a,d)-sisi magic (Baca dan Miller, 2007). Selanjutnya teorema 2.3.1 digunakan untuk membuktikan pelabelan super $(a,1)$-sisi antimagic total pada gabungan graf untuk jumlah sisi ganjil.

$\diamondsuit$ **Teorema 2.3.1.** *Misalkan G_i untuk $i = 1, 2, \ldots, m$ adalah graf dengan jumlah titik p dan jumlah sisi q dan memiliki pelabelan super $(a,1)$-EAT. Maka, gabungan saling lepas dari $\cup_{i=1}^{m} G_i$ juga memiliki super $(b,1)$-EAT.*

Bukti. Misalkan G_i, $i = 1, 2, \ldots, m$ adalah sebuah graf yang memiliki p titik dan q sisi. Perlu diketahui bahwa G_i tidak harus isomofis dengan G_j untuk $i = j$. Misalkan untuk setiap G_i, $i = 1, 2, \ldots, m$ memiliki sebuah pelabelan super $(a,1)$-EAT berdasarkan f_i, sedemikian hingga:

$$\begin{aligned} f_i &= V(G_i) \rightarrow \{1, 2, \ldots, p\} \\ &= E(G_i) \rightarrow \{p+1, p+2, \ldots, p+q\} \end{aligned}$$

dan $\{f_i(u) + f_i(v) + f_i(uv); uv \in E(G_i)\} = \{a, a+1, \ldots, a+q-1\}$

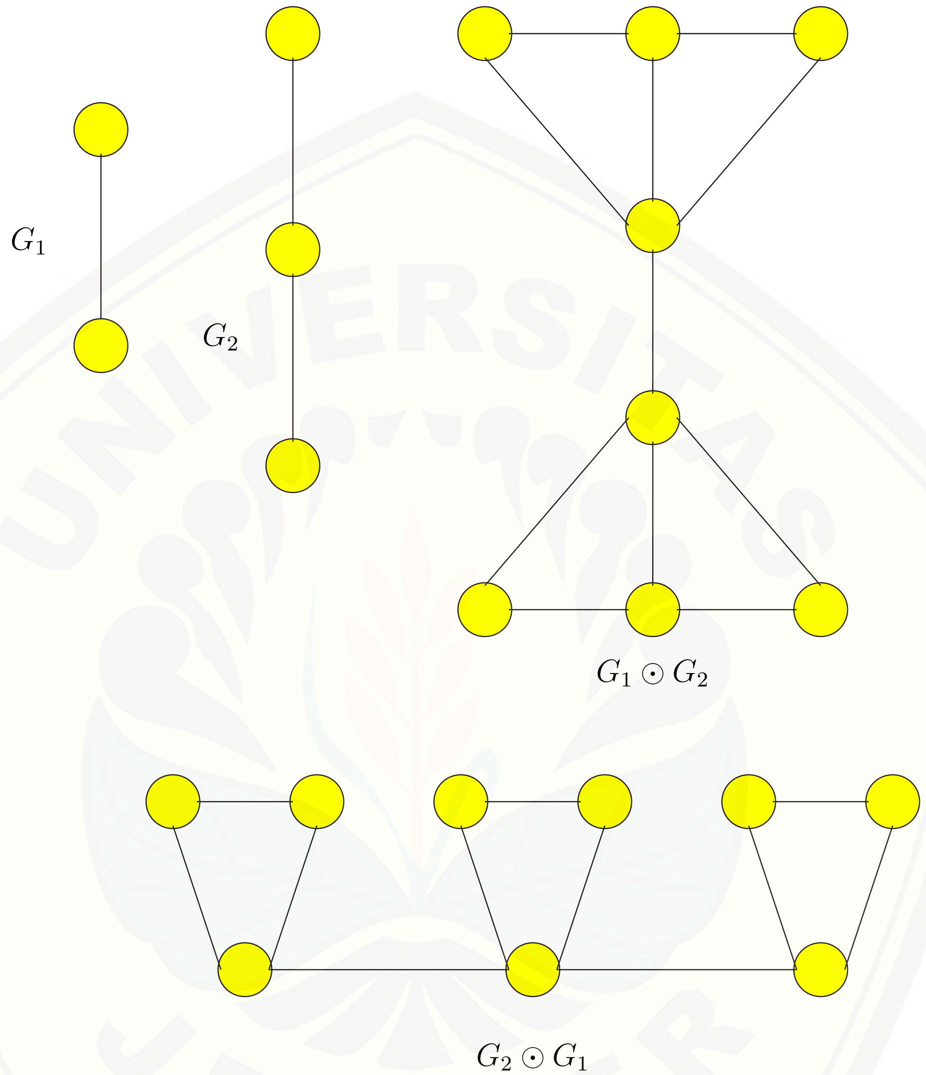
Definisi pelabelan f untuk semua titik dan sisi dari $\cup_{i=1}^{m} G_i$ adalah sebagai berikut:

$$f(x) = \begin{cases} m[f_i(x) - 1] + i, & \text{jika } x \in V(G_i) \\ mf_i(x) + 1 - i, & \text{jika } x \in E(G_i) \end{cases}$$

Bobot total dari gabungan $\cup_{i=1}^{m} G_i$ adalah $\{f(u) + f(v) + f(uv) : uv \in E(\cup_{i=1}^{m} G_i)\}$ sama dengan $\{m(a-2)+2, m(a-2)+3, \ldots, m(a+q-2)+1\}$. $\square$

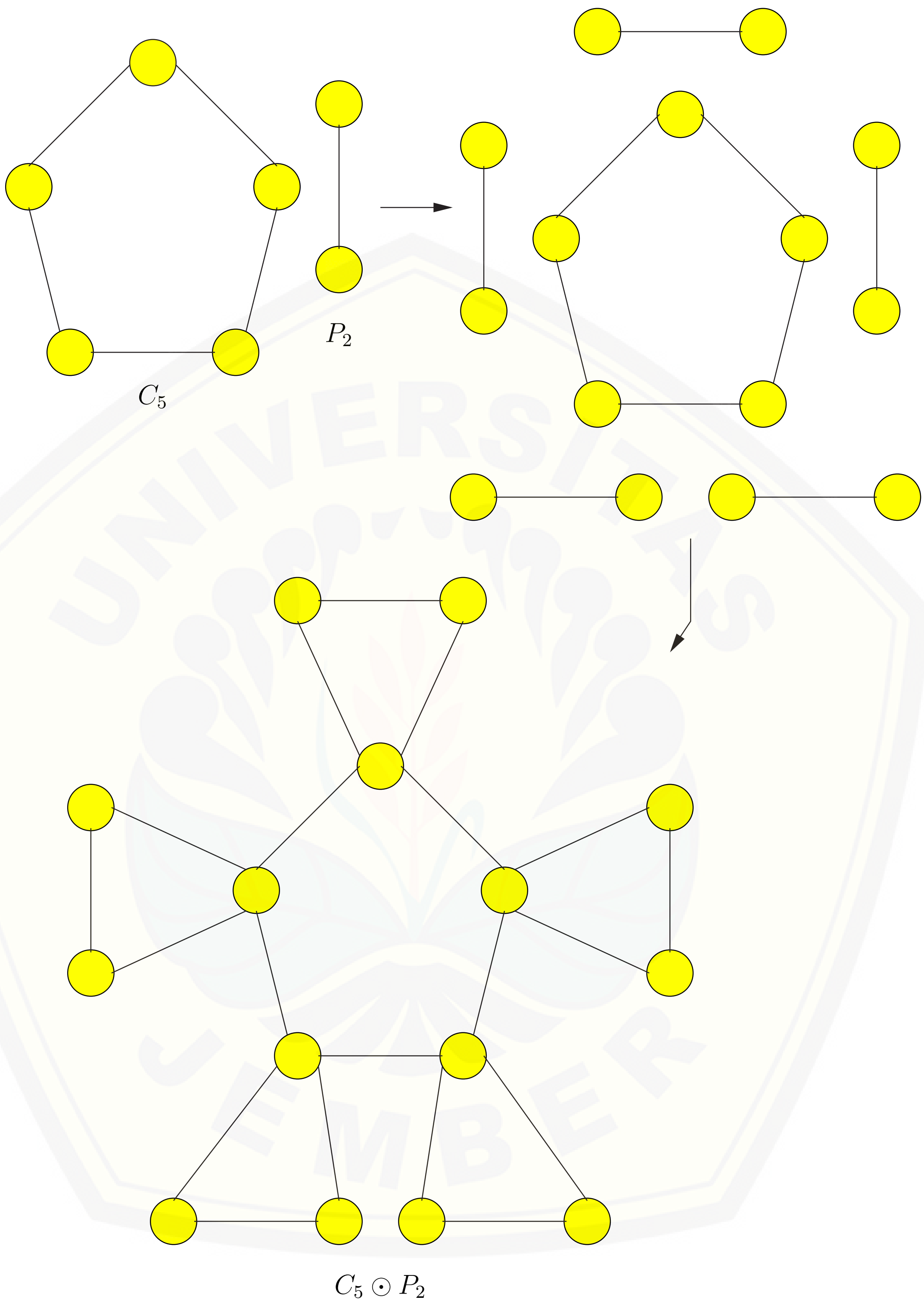
2.4 Graf Hasil Operasi

Terdapat beberapa cara mengoperasikan graf sehingga menghasilkan graf yang baru, salah satunya adalah produk korona yang dinotasikan dengan $G_1 \odot G_2$ adalah hasil operasi dari dua graf G_1 dan G_2 dengan membuat satu penggandaan dari graf G_1 yang mempunyai P_1 titik dan menggandakan graf G_2 sebanyak P_1 kemudian menghubungkan titik ke-i graf G_1 ke setiap titik hasil penggandaan graf G_2 ke-i. Misal diberikan graf G_1 dan G_2, maka dapat dibentuk graf korona $G_1 \odot G_2$ dan $G_2 \odot G_1$ yang berbeda seperti yang ditunjukan pada Gambar 2.6. Contoh Untuk kontruksi graf korona sendiri dapat dilihat pada Gambar 2.7.



Gambar 2.6 Graf G_1 dan G_2 beserta Graf Korona yang dapat dibentuk

Graf Korona $C_n \odot P_2$ Merupakan salah satu graf produk korona yang diperoleh dengan menggandakan graf P_2 sebanyak n, selanjutnya titik ke-i pada graf C_n dihubungkan ke setiap titik P_2, dimana $1 \leq i \leq n$.



Gambar 2.7 Konstruksi Graf Korona

2.5 Fungsi dan Barisan Aritmatika

2.5.1 Fungsi

Fungsi atau pemetaan dari himpunan A ke himpunan B merupakan suatu relasi yang memasangkan atau memetakan setiap anggota dari A dengan anggota pada B. Fungsi tersebut dapat dinotasikan dengan:

$$f : \mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}$$

Ada beberapa istilah dalam fungsi yaitu daerah asal (domain), daerah kawan (kodomain) dan hasil (range). Domain merupakan daerah asal fungsi f dilambangkan dengan D_f. Kodomain merupakan daerah kawan fungsi f dilambangkan dengan K_f. Dan range merupakan himpunan daerah hasil pemetaan. Range fungsi f dilambangkan dengan R_f. Ada beberapa jenis fungsi yang berhubungan dengan penelitian ini.

a. Fungsi f: A→B dikatakan fungsi satu-satu atau injektif jika dan hanya jika domain mempunyai tepat satu pasangan yang berbeda di kodomain, dan anggota kodomain boleh tidak mempunyai pasangan di domain.

b. Fungsi f: A→B dikatakan fungsi onto atau surjektif jika dan hanya jika semua kodomain mempunyai pasanyan di domain, dan anggota kodomain boleh mempunyai pasangan di yang sama di domain.

c. Fungsi f: A→B dikatakan fungsi bijektif jika dan hanya jika fungsi yang injektif sekaligus fungsi yang surjektif. Pelabelan dalam penelitian ini adalah fungsi bijektif. Domain dalam fungsi ini merupakan gabungan dari himpunan titik dan himpunan sisi, kodomainnya adalah himpunan bilangan bulat positif sedangkan range-nya adalah label titik dan sisi. Pelabelan total super (a,d)-sisi antimagic dikatakan fungsi injektif karena himpunan elemen-elemen graf mempunyai hanya satu pasangan di kodomain dan setiap pasangan berbeda. Dikatakan surjektif karena semua kodomain (himpunan bilangan bulat positif) berpasangan dengan domain.

2.5.2 Barisan Aritmatika

Barisan Aritmatika yaitu barisan yang suku-sukunya diperoleh dengan menambah suatu bilangan tetap ke suku sebelumnya. Bilangan tetap tersebut dikatakan sebuah beda dilambangkan dengan d, sedangkan suku yang pertama dinotasikan dengan a.

Berdasarkan tanda nilai beda, barisan aritmatika terbagi menjadi dua yaitu barisan aritmatika naik dan barisan aritmatika turun. Dikatakan barisan arit-matika naik jika nilai beda bertanda positif. Sedangkan jika nilai beda bertanda negatif maka dikatakan barisan tersebut barisan aritmatika turun. Rumus umum untuk barisan aritmatika adalah:

$$U_n = a + d(n-1)$$

dan untuk mencari nilai bedanya adalah:

$$d = U_n \text{ - } U_{n-1}$$

Berikut contoh barisan aritmatika:

a. 23, 30, 37, 42, 49, ...

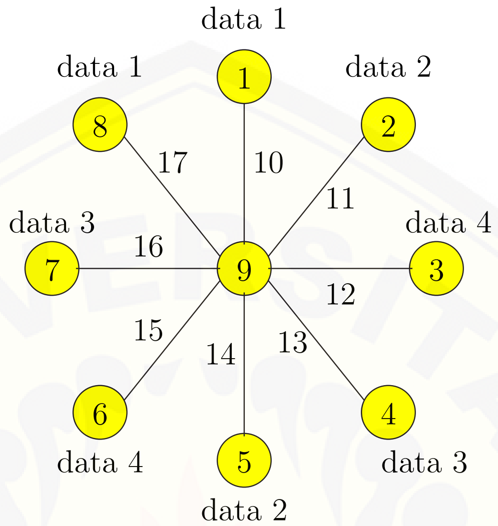
b. 25, 20, 15, 10, 5, ...

Pada penelitian ini, nilai bobot sisi dari semua sisi harus membentuk barisan aritmatika. Jika nilai $d = 0$ maka pelabelan tersebut dikatakan magic, tetapi jika nilai $d > 0$ maka dikatakan pelabelan antimagic. Rumus umum dari barisan aritmatika akan digunakan untuk menentukan fungsi titik dan fungsi sisi dari graf sisir konektif dan diskonektif.

2.6 Aplikasi Graf pada Pengkodean Pengiriman Data Rahasia Sebuah Negara

Penerapan teori graf saat ini sangat luas dalam kehidupan sehari-hari serta sudah banyak dipakai dalam berbagai bidang ilmu. Seperti dalam riset operasi, dan ilmu komputasi. Banyak permasalahan yang dapat diselesaikan dengan model graf. Seperti, permasalahan untuk merencanakan rute yang efektif untuk pengiriman surat atau pencarian rute terpendek, dipecahkan dengan model yang menggunakan representasi jalur dalam graf.

Penerapan dari pelabelan graf sendiri juga luas, salah satunya adalah pengkodean pengiriman data rahasia sebuah negara. Pengkodean ini bertujuan untuk menjaga keamanan data ketika data rahasia sebuah negara akan dikirim ataupun diterima. Karena keamanan pengiriman data rahasia bertanggung jawab atas keamanan sebuah negara, sehingga jika data yang dikirim mampu dibajak oleh pihak yang tidak bertanggung jawab maka data tersebut akan sulit diterjemahkan karena data rahasia sudah diubah menjadi mode pengkodean.



Gambar 2.8 Pelabelan Total Super Pada Graf Bintang

Pengkodean data yang terbentuk dari representasi graf tersebut dengan penggunaan empat data yang diubah menjadi pengkodean adalah:
Data 1 : 1109178 ; Data 2 : 2119145 ; Data 3 : 4139167 ; Data 4 : 3129156

2.7 Hasil-Hasil Pelabelan Total Super (a,d)-Sisi Antiajaib

Pada bagian ini disajikan beberapa rangkuman hasil pelabelan total super (a,d)-Sisi Antiajaib pada graf konektif dan diskonektif yang dapat digunakan sebagai rujukan penelitian ini.

Tabel 2.1: Ringkasan Pelabelan Total Super (a,d)-Sisi Antiajaib Pada Graf Konektif.

Graf	d	Hasil
Graf Tangga(St_n) (Ira, 2011)	$d \leq 2$	$d \in \{0,1,2\}$; $n \geq 2$
Graf Daun (Lg_n) (Yunika, 2015)	$d \leq 2$	$d \in$\{0,1,2\}; $n \geq 1$
Graf Sisir (S_n) (Muafa, 2015)	$d \leq 2$	$d \in$\{0,1,2\}; $n \geq 2$ $s \geq 3$
Graf Semi Parasut (SP_{2n-1}) (Aprilia, 2015)	$d \leq 2$	$d \in$\{0,1,2\}; $n \geq 1$

Tabel 2.2: Ringkasan Pelabelan Total Super (a,d)-Sisi Antiajaib Pada Graf Diskonektif.

Graf	d	Hasil	Open Problem
mDl_n	$d < 3$	• $d \in \{0,1,2\}$ untuk $m \geq 3$ ganjil • $d \in \{1\}$ untuk $m \geq 2$ dan m sembarang (L. Syakdiyah, 2011)	• jika $d \in \{0,2\}$ untuk $1 \leq j \leq m$ genap
mSt_n	$d \leq 2$	• $d \in \{0,1,2\}$ untuk $m \geq 3$ ganjil	• jika $d \in \{0,2\}$ untuk $m \geq 2$ genap

Graph	d	Hasil	Open Problem
		$n \geq 2$ • $d \in \{0,1,2\}$ untuk $m \geq 2$ sembarang $n \geq 2$ (Ira, 2011)	dan $n \geq 2$
$cDf_{m,n}$	< 3	• $d \in \{0,1,2\}$ $n \geq 1$ $m \geq 2$ dan genap $c \geq 3$ dan ganjil (Agnes, 2014)	• jika $d \in \{0,1,2\}$ untuk n genap • jika $d \in \{0,1,2\}$ untuk c genap
mLg_n	< 3	• $d \in \{0,2\}$ $n \geq 1$ dan n ganjil $m \geq 3$ dan m ganjil $m \geq 3$ untuk n ganjil dan $m = 1$ *mod* 4 (Yunika, 2015)	• jika $d \in \{0,2\}$ untuk $n \geq 1$ $m = 3$ *mod* 4 • jika $d = 1$ untuk $n \geq 2$ dan n genap $m \geq 3$
mSP_{2n-1}	< 3	• $d \in \{0,1,2\}$ untuk $n \geq 2$ dan genap • $d \in \{0,1,2\}$ untuk $m \geq 3$, $n \geq 2$ dan m ganjil • $d \in \{0,1,2\}$ untuk $n \geq 2$ $m = 1$ *mod* 4, n genap (Aprilia, 2015)	• jika $d = 1$ untuk n ganjil • jika $d = 1$ untuk $n \geq 2$ dan $m = 3$ *mod* 4 • jika $d \in \{0,1,2\}$ untuk $n \geq 2$ dan m genap

BAB 3. METODE PENELITIAN

3.1 Metode Penelitian

Dalam penelitian ini metode yang digunakan adalah deskriptif aksiomatik, dimana metode tersebut menurunkan teorema yang telah ada, selanjutnya akan diterapkan pada penelitian ini baik untuk graf tunggal maupun gabungan saling lepasnya. Dalam penelitian ini, terlebih dahulu akan ditentukan label titik, jika polanya terdeteksi, langkah selanjutnya adalah melabeli sisi lalu kita tentukan nilai batas atas dari graf korona $C_n \odot P_2$. Nilai tersebut akan digunakan dalam pelabelan total super(a, d)-sisi antimagic pada graf korona $C_n \odot P_2$.

3.2 Teknik Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada graf $C_n \odot P_2$. Adapun teknik penelitian adalah sebagai berikut.

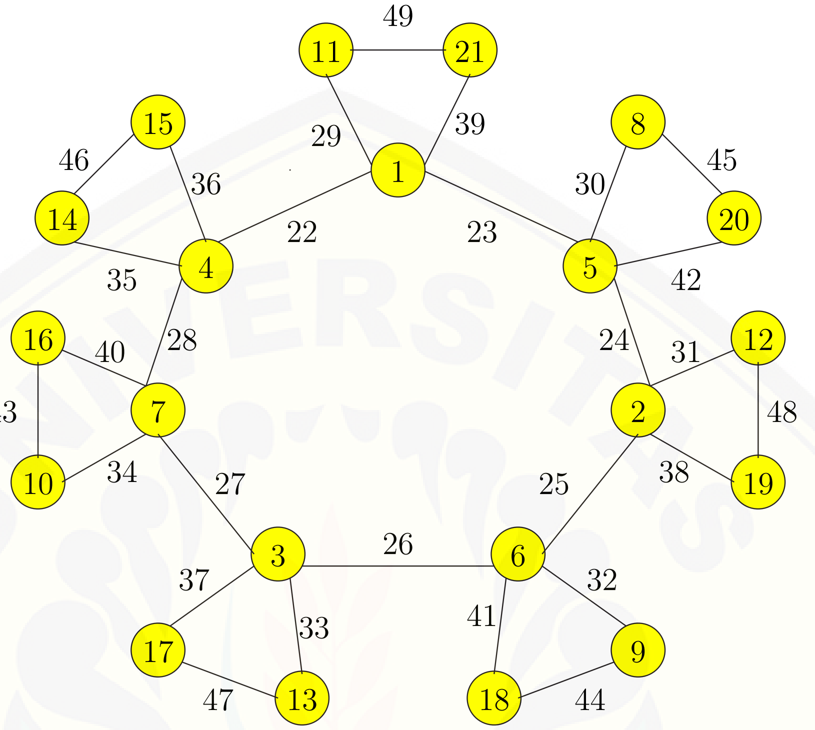
a. menghitung jumlah titik p dan sisi q pada graf $C_n \odot P_2$.

b. melabeli graf $C_n \odot P_2$, dengan $SEATL$ *(super (a, d)-Sisi Antimagic total labeling)* atau pelabelan total super (a, d)-sisi Antimagic dengan nilai beda d yang *feasible*, apabila label $EAVL$ berlaku untuk beberapa graf baik secara *heuristik* maupun *determinatik* maka dikatakan pelabelan itu *expandable*sehingga dilanjutkan menentukan algoritma $EAVL$ pada graf $C_n \odot P_2$.

c. menentukan fungsi bijektif pelabelan total super (a, d)-Sisi Antimagic pada graf $C_n \odot P_2$.

3.3 Observasi Awal

Pengembangan awal untuk pelabelan super (a, d)-sisi Antimagic total pada graf $C_n \odot P_2$ sudah dilakukan oleh peneliti.



Gambar 3.1 (27,2)Pelabelan total sisi anti ajaib pada graf $C_7 \odot P_2$

n = 7

$| V(C_7 \odot P_2) | = 3n$

$| E(C_7 \odot P_2) | = 4n$

$V(C_n \odot P_2) = \{v_i, 1 \leq i \leq n\} \cup \{v_{i,1}, 1 \leq i \leq n\} \cup \{v_{i,2}, 1 \leq i \leq n\}$

$$E(C_n \odot P_2) = \{v_i v_{i+1}, 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{v_n v_1\} \cup \{v_i v_{i,1}, 1 \leq i \leq n\} \cup \{v_i v_{i,2}, 1 \leq i \leq n\} \cup \{v_{i,1} v_{i,2}, 1 \leq i \leq n\}$$

Label titik $C_7 \odot P_2$ adalah sebagai berikut :

$\alpha_1(v_i)$ $=\frac{i+1}{2}, i\ ganjil$ dan $\frac{i+8}{2}, i\ genap$

$\alpha_1(v_i, 1)$ $=\frac{21+i}{2}, i\ ganjil$ dan $\frac{14+i}{2}, i\ genap$

$\alpha_1(v_i, 2)$ $=21 - i + 1,\ 1 \leq i \leq 7$

Label sisi $C_7 \odot P_2$ adalah sebagai berikut :

$\alpha_1(v_i v_{i+1})$ $=22 + i, 1 \leq i \leq 6$ dan $22, i = 7$

$\alpha_1(v_i v_{i,1})$ $=29, 1 \leq i \leq 6$

$\alpha_1(v_i v_{i,2})$ $=\frac{79-i}{2}\ , i\ ganjil,$ dan $\frac{86-i}{2}, i\ genap$

$\alpha_1(v_{i,1}) v_{i,2}$ $=\frac{99-i}{2}, i\ ganjil$ dan $\frac{92-i}{2}, i\ genap$

BAB 5. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan pada penelitan ini dapat ditarik kesimpulan, yaitu Graf korona $C_n \odot P_2$ memiliki pelabelan total super yaitu $(\frac{7n}{2}+2,2)$, $(\frac{13n-1}{2}+3,0)$, $(\frac{11n-9}{2},1)$ untuk setiap n bilangan ganjil, $n \geq 3$ pada graf tunggal. Untuk gabungan saling lepas Graf korona $C_n \odot P_2$ memiliki pelabelan total super yaitu $(\frac{7mn+1}{2}+2,2)$, $(\frac{15mn+1}{2}+1,0)$, dan $(\frac{m(11n-9)}{2}-3,1)$ untuk setiap m dan n bilangan ganjil, $n \geq 3$.

5.2 Saran

Berdasarkan hasil penelitian mengenai pelabelan total super $(a,\ d)$-sisi antimagic yang telah ditemukan, maka peneliti memberikan saran kepada pembaca agar dapat melakukan penelitian pada pelabelan total super (a,d)-sisi antimagic pada jenis graf lain yang belum ditemukan.

DAFTAR PUSTAKA

Alfin, *et all*. 2012. *Super Antimagicness of a Well-defined Graph.* Jember: Universitas Jember. 14, 106-118.

Aman, Rido. Tanpa Tahun. *Pelabelan Total* (a, d)*- Titik Antiajaib Super Pada Graf Petersen P(n, 2) dengan* N *ganjil,* $N \geq 5$. Padang: UNAND. 1, 61-64

Aprilia, K. R. *et al.* 2015. *pelabelan total super (a, d)-sisi antimagic pada graf semi parasut* $SP_2n - 1$.Jember: Universitas Jember.

Arianti, I.Y, Dafik, and Slamin,S. *et all.* 2014. Super (a,d)-edge-Antimagic Total Labellings of connected disc brake Graphs. *In Prosiding Seminar Matematika dan Pendidikan Matematika.* volume 1. 309, 6048-6054.

Baca, M *et all*. 2009. *On super (a, d)-edge-antimagic total labeling of disconnected graphs.* Discrete Mathematics 309, 4909-4915

Baca, M., Dafik, Miller, M., and Ryan, J., *et all.* 2008. Antimagic Labellings of Disjoint Union of stars. *The Australasian Journal of Combinatorics.* 42: 35-44.

Baca, M., Dafik, Miller, M., and Ryan, J., *et all.* 2009. *Antimagic Labellings of Disjoint Union of s-Crowns Utilitas Mathematica.* Discreate Mathematics. 79: 193-205.

Dafik. 2007. *Structural Properties and Labeling of Graph.* (Tesis) Australia: The University of information technology and mathematical University of Ballarat.

Dafik,and Miladiyah, K. Fajriatin,A. *et all.* 2012. *Expanding Super (a,d)-edge-Antimagic Total Labellings of Disconnected Graphs.* Discreate Mathematics. 309, 6048-6054.

Dafik, Slamin, Fuad M, and Rahmad, R. R. *et all.* 2013. Super Antimagicnes of Triangular Book and Diamond Ladder Graphs and Diamond Ladder Graph.*Proceedings of IndoMS International Conference of Mathematics and Application (IICMA).* UGM Yogyakarta: 1-11.

Fuad, *et all.* 2009. *Super Edge-Antimagic Total labelling of Disjoint Union of Triangular Lader and Lobster Graphs.*

Hartsfied, N. and Ringgel G., *et all.* 1990. *Perals in Graph Theory.* Acadwmic Press. Boston - San Diego - New York - London.

Hartsfield, Nora and Ringel, Gerhard. 1994.*Pearls in Graph Theory.* London: Academic Press.

Nurvitaningrum, A, I. Dafik, D. and Setiwani, S.K.*et all.* 2014. Pelabelan total super (a, d)-sisi antimagic pada graf buah naga. *In Prosiding Seminar Mathematika dan Pendidikan.* volume 1.

Permana, Iranisa. Tanpa Tahun. *Pelabelan Total* (a, d)*- Titik Antiajaib Super Pada Graf Petersen yang diperumum P(n, 3) dengan N ganjil,* $N \geq 7$.Padang: Universitas Andalas. 3: 78-84.

Sudarsana, *et all.* 2012. *Super Antimagicicnes of a Welldefined Graph.* saintika. Vol. 14. No.. 1:106-118.

Sugeng, *et all.* 2009. *Expanding Super (a,d)-edge-Antimagic Total Labellings of Disconnected Graphs.* Discreate Mathematics. 309, 6048-6054.

Sya'diyah, Laelatus, *et all.* 2013. Super Antimagicnes of Triangular Book and Diamond Ladder Graph.*Proceedings of IICMA.*

Yani, Riza. Tanpa tahun. *Graf Ajaib Total.* Padang: Universitas Andalas. 2: 86-91.

Yunika *et al.*2015. *pelabelan total super (a,d)-sisi antimagic pada graf daun.*Jember: Universitas Jember.

Adawiyah, R. 2014. *Pelabelan Total Super(a,d)-Sisi Antimagic pada Graf Lampion.* Universitas Jember. (vol.6 No 1).

Ermita Rizki . 2014. *Pelabelan Total Super* (a, d)*-sisi Antimagic pada Graf Rantai Pentagon.* Tidak dipublikasikan (Skripsi) Jember: Universitas Jember.

Mahmudah, Muhlisatul. 2014. *Pelabelan Total Super* (a, d)*-sisi Antimagic pada Graf Tribun.* Tidak dipublikasikan (Skripsi) Jember: Universitas Jember.