



ANALISA *RAINBOW CONNECTION* DAN *STRONG RAINBOW CONNECTION* PADA GRAF HASIL OPERASI

SKRIPSI

Oleh

Mokhamad Saiful Hasan

NIM 111810101022

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER**

2015



ANALISA *RAINBOW CONNECTION* DAN *STRONG RAINBOW CONNECTION* PADA GRAF HASIL OPERASI

SKRIPSI

diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan Program Studi Matematika (S1) dan mencapai gelar Sarjana Sains

Oleh

Mokhamad Saiful Hasan

NIM 111810101022

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER**

2015

HALAMAN PERSEMBAHAN

Dengan menyebut nama Allah S.W.T yang maha pengasih lagi maha penyayang, serta sholawat atas Nabi Muhammad S.A.W, kupersembahkan sebuah kebahagiaan dalam perjalanan hidupku teriring rasa terima kasihku yang terdalam kepada:

1. orang tuaku tercinta dan terkasih : Ayahanda Nisun dan Ibunda Sariyas, serta kedua Adikku Sholeh dan Sholeha, yang senantiasa mengalirkan kasih sayang, perhatian, dan doa yang tiada pernah putus yang selalu mengiringiku dalam meraih cita-cita;
2. Ibu Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si. dan Bapak Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D. yang dengan sabar dan tulus ikhlas membimbing sehingga penulisan skripsi ini dapat terselesaikan;
3. semua guru dan dosenku yang telah memberikan ilmu dan membimbing dengan penuh kesabaran;
4. sahabat-sahabat terbaikku dalam Keluarga Besar Matematika Angkatan 2011 (KRAMAT 11) yang senantiasa membantuku dan menorehkan sebuah pengalaman hidup yang tak terlupakan;
5. teman-teman pejuang graf yang selalu berbagi suka maupun duka dan selalu memberikan dukungan untuk terus semangat;
6. Almamater tercinta Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

MOTTO

"Allah meninggikan orang-orang yang beriman diantara kamu dan orang-orang yang diberi ilmu pengetahuan beberapa derajat."

(QS. Al-Mujadilah: 11) *)

"Habis gelap terbitlah terang."

(R. A. Kartini) **)

-
- *) Departemen Agama Republik Indonesia. 2004. *Al-Qur'an dan Terjemahannya*. Bandung. CV Penerbit J-ART.
- ***) Kartini, R. A. 2009. *Habis gelap terbitlah terang/R. A. Kartini*. Terjemahan Armijn Pane. Cetakan 27. Jakarta. Balai Pustaka.

HALAMAN PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Mokhamad Saiful Hasan

NIM :111810101022

Menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang berjudul: *Analisa Rainbow Connection dan Strong Rainbow Connection* pada Graf Hasil Operasi adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali jika dalam pengutipan substansi disebutkan sumbernya, dan belum diajukan pada instansi manapun, serta bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa adanya tekanan dan paksaan dari pihak manapun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, Desember 2015

Yang menyatakan,

Mokhamad Saiful Hasan

NIM. 111810101022

SKRIPSI

ANALISA *RAINBOW CONNECTION* DAN *STRONG RAINBOW CONNECTION* PADA GRAF HASIL OPERASI

Oleh

Mokhamad Saiful Hasan
NIM 111810101022

Dosen Pembimbing 1 : Ika Hesti Agustin, S.Si, M.Si

Dosen Pembimbing 2 : Prof. Dafik, M.Sc., Ph.D.

PENGESAHAN

Skripsi berjudul "Analisa *Rainbow Connection* dan *Strong Rainbow Connection* pada Graf Hasil Operasi" telah diuji dan disahkan oleh Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam pada:

hari :

tanggal :

tempat : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Tim Penguji :

Dosen Pembimbing Utama,

Dosen Pembimbing Anggota

Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si.

Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D.

NIP. 19840801 200801 2 006

NIP. 19680802 199303 1 004

Anggota I,

Anggota II,

Kosala Dwidja Purnomo, S.Si., M.Si.

Ahmad Kamsyakawuni, S.Si., M.Kom.

NIP. 19690828 199802 1 001

NIP. 19721129 199802 1 001

Mengesahkan

Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Universitas Jember,

Prof. Kusno, M.Sc., Ph.D.

NIP. 1961018 198602 1 001

RINGKASAN

Analisa *Rainbow Connection* dan *Strong Rainbow Connection* pada Graf Hasil Operasi; Mokhammad Saiful Hasan, 111810101022; 2015: 81 halaman; Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Jember.

Salah satu teori yang dikembangkan dalam teori graf adalah *rainbow connection* dan *strong rainbow connection*. *Rainbow connection* adalah pemberian warna pada sisi graf dengan syarat dua sisi yang bertetangga boleh diberi warna yang sama. Namun sisi yang masuk dalam *rainbow path* tidak boleh ada dua sisi atau lebih yang memiliki warna sama. Pewarnaan di sini disebut *rainbow coloring*, dan pewarnaan minimal dalam suatu graf G disebut *rainbow connection number* yang dilambangkan dengan $rc(G)$. Untuk pemberian *rainbow coloring* harus menggambarkan pola fungsi agar mudah dalam mencari fungsi dari pewarnaannya.

Graf G dikatakan *strongly rainbow connected* jika untuk setiap dua titik u dan v di G , terdapat suatu *rainbow u - v geodesic*. Dimana *rainbow u - v geodesic* pada G adalah *rainbow u - v path* yang panjangnya $d(u, v)$, dimana $d(u, v)$ adalah jarak antara u dan v (panjang $u - v$ path terpendek di G). Pewarnaan di sini disebut *strong rainbow coloring*, dan pewarnaan minimal dalam suatu graf G disebut *strong rainbow connection number* yang dilambangkan dengan $src(G)$. Untuk pemberian *strong rainbow coloring* harus menggambarkan pola fungsi agar mudah dalam mencari fungsi dari pewarnaannya.

Rainbow connection dapat diterapkan pada graf hasil operasi dari beberapa graf khusus, seperti hasil operasi dari graf lintasan, graf lingkaran, graf roda, graf lengkap dan graf kipas. Operasi graf merupakan operasi terhadap dua buah graf atau lebih sehingga menghasilkan graf baru. Adapun graf-graf hasil operasi yang digunakan dalam penelitian ini yaitu $F_{2,6} \square P_m$, $Amal(F_{1,3}, v = 1, 2) \square P_m$, $Amal(W_4, v = 1, 2) \square P_m$, $P_2[F_{2,n}]$, $P_2[Amal(F_{1,n}, v = 1, 2)]$, $P_2[Amal(W_n, v = 1, 2)]$, $Amal(F_{1,n}, v = 1, 2) + Amal(W_n, v = 1, 2)$, $gshack(K_n, P_2, r)$, $gshack(K_n, C_3, r)$, $gshack(Amal((K_1 + K_n), v = 1, 2), K_n, r)$, $gshack(W_6, C_3, r)$ dan $gshack$

(W_6, C_4^1, r) .

Pada penelitian ini menggunakan metode penelitian eksploratif dan terapan. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk menentukan kardinalitas titik dan sisi, *rainbow connection number*, *strong rainbow connection number*, fungsi *rainbow coloring* dan *strong rainbow coloring* pada graf $F_{2,6} \square P_m$, $Amal(F_{1,3}, v = 1, 2) \square P_m$, $Amal(W_4, v = 1, 2) \square P_m$, $P_2[F_{2,n}]$, $P_2[Amal(F_{1,n}, v = 1, 2)]$, $P_2[Amal(W_n, v = 1, 2)]$, $Amal(F_{1,n}, v = 1, 2) + Amal(W_n, v = 1, 2)$, $gshack(K_n, P_2, r)$, $gshack(K_n, C_3, r)$, $gshack(Amal((K_1 + K_n), v = 1, 2), K_n, r)$, $gshack(W_6, C_3, r)$ dan $gshack(W_6, C_4^1, r)$. Pada penelitian ini dihasilkan 3 akibat dan 12 teorema baru, antara lain:

1. **Akibat 4.1.1** Misal G adalah *cartesian product* dari graf kipas $F_{2,6}$ dan graf lintasan P_m . Untuk $m \geq 2$, *rainbow connection number* dari graf $G = F_{2,6} \square P_m$ adalah $m + 1$;
2. **Teorema 4.1.1** Misal G adalah *cartesian product* dari graf kipas $F_{2,6}$ dan graf lintasan P_m . Untuk $m \geq 2$, *strong rainbow connection number* dari graf $G = F_{2,6} \square P_m$ adalah $m + 1$;
3. **Akibat 4.1.2** Misal G adalah *cartesian product* dari graf $Amal(F_{1,3}, v = 1, 2)$ dan graf lintasan P_m . Untuk $m \geq 2$, *rainbow connection number* dari graf $G = Amal(F_{1,3}, v = 1, 2) \square P_m$ adalah $m + 1$;
4. **Teorema 4.1.2** Misal G adalah *cartesian product* dari graf $Amal(F_{1,3}, v = 1, 2)$ dan graf lintasan P_m . Untuk $m \geq 2$, *strong rainbow connection number* dari graf $G = Amal(F_{1,3}, v = 1, 2) \square P_m$ adalah $m + 1$;
5. **Akibat 4.1.3** Misal G adalah *cartesian product* dari graf $Amal(W_4, v = 1, 2)$ dan graf lintasan P_m . Untuk $m \geq 2$, *rainbow connection number* dari graf $G = Amal(W_4, v = 1, 2) \square P_m$ adalah $m + 1$;
6. **Teorema 4.1.3** Misal G adalah *cartesian product* dari graf $Amal(W_4, v = 1, 2)$ dan graf lintasan P_m . Untuk $m \geq 2$, *strong rainbow connection number* dari graf $G = Amal(W_4, v = 1, 2) \square P_m$ adalah $m + 1$;
7. **Teorema 4.1.4** Misal G adalah *composition* dari graf P_2 dan $F_{2,n}$. Untuk $n \geq 2$, *rainbow connection number* dan *strong rainbow connection number* dari graf $G = P_2[F_{2,n}]$ adalah 2;

8. **Teorema 4.1.5** Misal G adalah *composition* dari graf P_2 dan $Amal(F_{1,n}, v = 1, 2)$. Untuk $n \geq 2$, *rainbow connection number* dan *strong rainbow connection number* dari graf $G = P_2[Amal(F_{1,n}, v = 1, 2)]$ adalah 2;
9. **Teorema 4.1.6** Misal G adalah *composition* dari graf P_2 dan $Amal(W_n, v = 1, 2)$. Untuk $n \geq 2$, *rainbow connection number* dan *strong rainbow connection number* dari graf $G = P_2[Amal(W_n, v = 1, 2)]$ adalah 2;
10. **Teorema 4.1.7** Misal G adalah *joint* dari graf $Amal(F_{1,n}, v = 1, 2)$ dan $Amal(W_n, v = 1, 2)$. Untuk $n \geq 2$, *rainbow connection number* dan *strong rainbow connection number* dari graf $G = Amal(F_{1,n}, v = 1, 2) + Amal(W_n, v = 1, 2)$ adalah 2;
11. **Teorema 4.1.8** Misal G adalah graf hasil operasi *generalized shackle* dari graf lengkap K_n , dimana $n \geq 4$ dan $r \geq 2$, *rainbow connection number* dan *strong rainbow connection number* dari graf $G = gshack(K_n, P_2, r)$ adalah r ;
12. **Teorema 4.1.9** Misal G adalah graf hasil operasi *generalized shackle* dari graf lengkap, dimana $n \geq 3$ dan $r \geq 2$, *rainbow connection number* dan *strong rainbow connection number* dari graf $G = gshack(K_n, C_3, r)$ adalah r ;
13. **Teorema 4.1.10** Misal G adalah graf hasil operasi *generalized shackle* dari graf $Amal((K_1 + K_n), v = 1, 2)$, dimana $n \geq 3$ dan $r \geq 2$, *rainbow connection number* dan *strong rainbow connection number* dari graf $G = gshack(Amal((K_1 + K_n), v = 1, 2), K_n, r)$ adalah $2r$;
14. **Teorema 4.1.11** Misal G adalah graf hasil operasi *generalized shackle* dari graf roda W_6 , dimana $r \geq 2$, *rainbow connection number* dan *strong rainbow connection number* dari graf $G = gshack(W_6, C_3, r)$ adalah $2r$;
15. **Teorema 4.1.12** Misal G adalah graf hasil operasi *generalized shackle* dari graf roda W_6 , dimana $r \geq 3$ dengan r ganjil, *rainbow connection number* dan *strong rainbow connection number* dari graf $G = gshack(W_6, C_4^1, r)$ adalah $r + 1$.

KATA PENGANTAR

Puji syukur ke hadirat Allah SWT atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul *Analisa Rainbow Connection dan Strong Rainbow Connection* pada Graf Hasil Operasi. Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan pendidikan strata satu (S1) pada Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih atas bantuan dan bimbingan dalam penyusunan skripsi ini, terutama kepada yang terhormat:

1. Prof. Drs. Kusno, DEA., Ph.D., selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
2. Kosala Dwidja Purnomo S.Si., M.Si., selaku Ketua Jurusan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
3. Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si., selaku Dosen Pembimbing Utama, Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D., selaku Dosen Pembimbing Anggota, Kosala Dwidja Purnomo, S.Si., M.Si., selaku dosen Penguji I dan Ahmad Kamsyakawuni, S.Si., M.Kom., selaku dosen penguji II yang telah meluangkan waktu, pikiran, dan perhatian dalam penulisan skripsi ini;
4. dosen dan karyawan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
5. semua pihak yang telah membantu terselesaikannya skripsi ini.

Semoga bantuan, bimbingan, dan dorongan beliau dicatat sebagai amal baik oleh Allah SWT dan mendapat balasan yang sesuai dari-Nya. Selain itu, penulis juga menerima segala kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan skripsi ini. Akhirnya penulis berharap, semoga skripsi ini dapat bermanfaat.

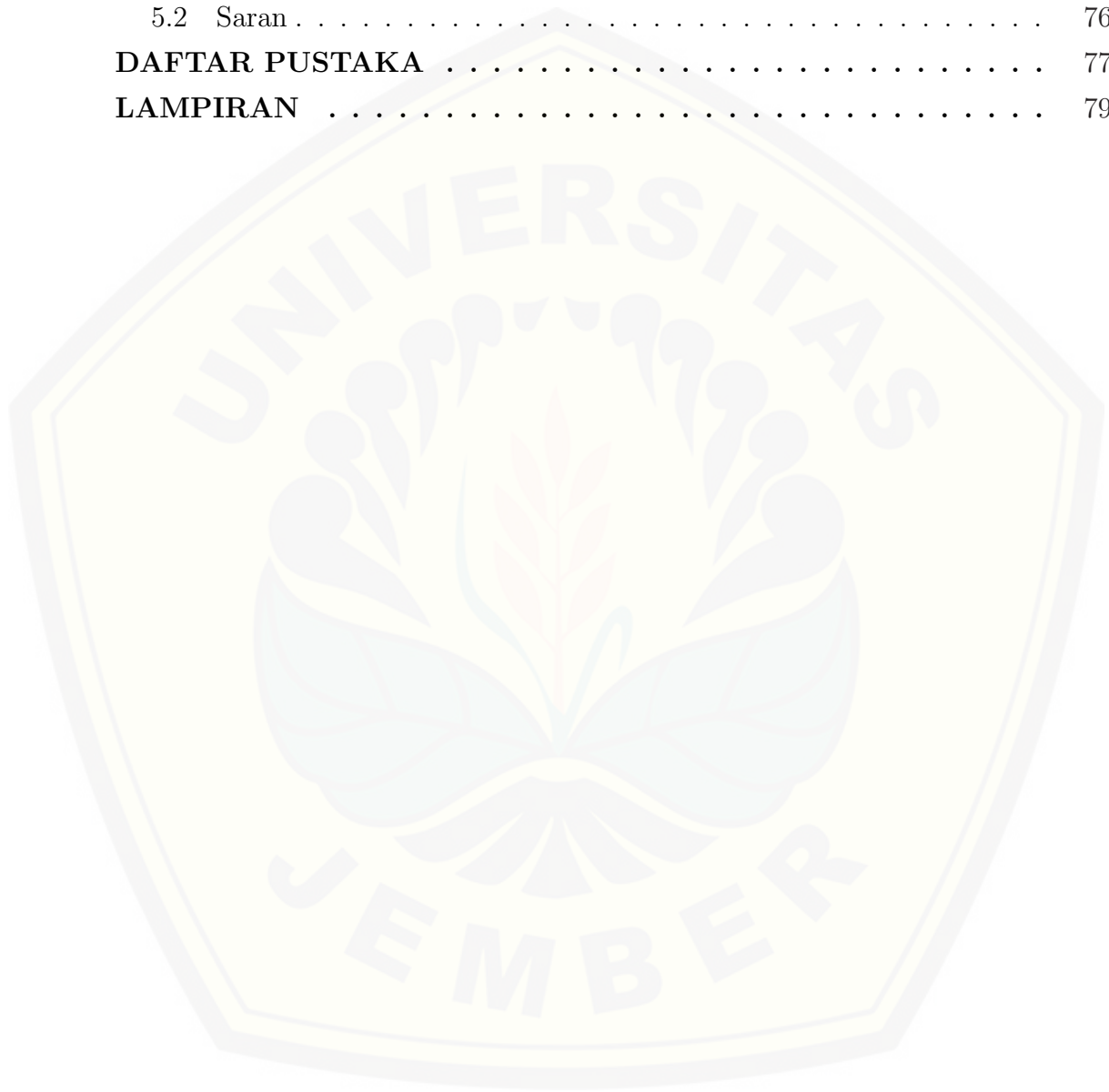
Jember, Desember 2015

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PERSEMBAHAN	ii
HALAMAN MOTTO	iii
HALAMAN PERNYATAAN	iv
HALAMAN PENGESAHAN	vi
RINGKASAN	vii
KATA PENGANTAR	x
DAFTAR ISI	xii
DAFTAR GAMBAR	xiv
DAFTAR TABEL	xv
1 PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang Masalah	1
1.2 Rumusan Masalah	3
1.3 Batasan Masalah	3
1.4 Tujuan Penelitian	3
1.5 Manfaat Penelitian	4
2 TINJAUAN PUSTAKA	5
2.1 Konsep Dasar dan Terminologi Graf	5
2.2 Graf Khusus dan Operasi Graf	9
2.2.1 Graf Khusus	9
2.2.2 Operasi Graf	11
2.3 <i>Rainbow Connection</i> dan <i>Strong Rainbow Connection</i>	15
2.4 Aplikasi <i>Rainbow Connection</i> dan <i>Strong Rainbow Connection</i> pada Proses Distribusi	17
2.5 Hasil-hasil <i>Rainbow Connection</i>	19
3 METODE PENELITIAN	21
3.1 Jenis Penelitian	21
3.2 Data Penelitian	21
3.3 Rancangan Penelitian	21

4 HASIL DAN PEMBAHASAN	24
4.1 <i>Rainbow Connection</i> dan <i>Strong Rainbow Connection</i>	25
4.2 Pembahasan	72
5 KESIMPULAN DAN SARAN	75
5.1 Kesimpulan	75
5.2 Saran	76
DAFTAR PUSTAKA	77
LAMPIRAN	79



DAFTAR GAMBAR

2.1	Contoh Graf dengan $ V(G) = 7$ dan $ E(G) = 12$	5
2.2	Graf Pohon (a) dan Graf Hutan (b)	7
2.3	Graf G (a), Subgraf G (b) dan <i>Spanning Subgraph</i> G (c)	8
2.4	Graf G (a) dan Contoh Graf yang Isomorfis dengan Graf G (b)	9
2.5	Graf Lintasan P_3 dan P_6	9
2.6	Graf Lengkap K_4 dan K_6	10
2.7	Graf Roda W_4 dan W_6	10
2.8	Graf Kipas $F_{1,3}$ dan $F_{2,6}$	11
2.9	Graf <i>Cycle</i> C_3 dan C_6	11
2.10	Graf Hasil Operasi <i>Joint</i> dari W_4 dan P_3	12
2.11	Graf Hasil Operasi <i>Cartesian Product</i> dari W_4 dan P_3	13
2.12	Graf Hasil Operasi <i>Composition</i> dari P_2 dan W_4	13
2.13	Graf Hasil Operasi <i>gshackle</i> dari W_6	14
2.14	Graf Hasil Operasi <i>Amalgamation</i> dari W_4	15
2.15	Graf Buku dengan $rc(G) = 4$ (a) dan $src(G) = 5$ (b)	16
2.16	Contoh Aplikasi $rc(G)$ (a) dan Contoh Aplikasi dalam <i>Spanning Tree</i> (b)	18
2.17	Contoh Aplikasi $src(G)$ (a) dan Contoh Aplikasi dalam <i>Spanning Tree</i> (b)	19
3.1	Skema Penelitian	23
4.1	Graf Hasil Operasi <i>Cartesian Product</i> dari $F_{2,6}$ dan P_4	26
4.2	Contoh <i>Rainbow Coloring</i> $F_{2,6} \square P_4$	29
4.3	Graf Hasil Operasi <i>Cartesian Product</i> dari $Amal(F_{1,3}, v = 1, 2)$ dan P_4	31
4.4	Contoh <i>Rainbow Coloring</i> $Amal(F_{1,3}, v = 1, 2) \square P_4$	34
4.5	Graf Hasil Operasi <i>Cartesian Product</i> dari $Amal(W_4, v = 1, 2)$ dan P_4	36
4.6	Contoh <i>Rainbow Coloring</i> $Amal(W_4, v = 1, 2) \square P_4$	39

4.7	Graf Hasil Operasi <i>Composition</i> dari P_2 dan $F_{2,4}$	41
4.8	Contoh <i>Rainbow Coloring</i> $P_2[F_{2,4}]$	43
4.9	Graf Hasil Operasi <i>Composition</i> dari P_2 dan $Amal(F_{1,3}, v = 1, 2)$.	44
4.10	Contoh <i>Rainbow Coloring</i> $P_2[Amal(F_{1,3}, v = 1, 2)]$	46
4.11	Graf Hasil Operasi <i>Composition</i> dari P_2 dan $Amal(W_3, v = 1, 2)$.	48
4.12	Contoh <i>Rainbow Coloring</i> $P_2[Amal(W_3, v = 1, 2)]$	50
4.13	Graf Hasil Operasi <i>Joint</i> dari $Amal(F_{1,3}, v = 1, 2)$ dan $Amal(W_3, v =$ $1, 2)$	52
4.14	Contoh <i>Rainbow Coloring</i> $Amal(F_{1,3}, v = 1, 2) + Amal(W_3, v = 1, 2)$	54
4.15	Graf Hasil Operasi <i>Generalized Shackle</i> dari K_6	55
4.16	Contoh <i>Rainbow Coloring</i> $gshack(K_6, P_2, 3)$	57
4.17	Graf Hasil Operasi <i>Generalized Shackle</i> dari K_6	59
4.18	Contoh <i>Rainbow Coloring</i> $gshack(K_6, C_3, 3)$	61
4.19	Graf Hasil Operasi <i>Generalized Shackle</i> dari $Amal((K_1 + K_5), v = 1, 2)$	63
4.20	Contoh <i>Rainbow Coloring</i> $gshack(Amal((K_1 + K_5), v = 1, 2), K_5, 2)$	65
4.21	Graf Hasil Operasi <i>Generalized Shackle</i> dari W_6	66
4.22	Contoh <i>Rainbow Coloring</i> $gshack(W_6, C_3, 3)$	68
4.23	Graf Hasil Operasi <i>Generalized Shackle</i> dari W_6	70
4.24	Contoh <i>Rainbow Coloring</i> $gshack(W_6, C_4^1, 5)$	72

DAFTAR TABEL

2.1 Hasil Penelitian Terdahulu $rc(G)$ dan $src(G)$ 20



BAB 1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Teori graf pertama kali diperkenalkan oleh seorang ahli matematikawan Swiss Leonhard Euler pada tahun 1736. Euler adalah orang pertama yang berhasil memecahkan masalah jembatan Königsberg (kota Königsberg, sebelah timur Prussia, Jerman sekarang) di sungai Pregal yang sangat terkenal di Eropa. Permasalahan yang muncul pada jembatan Königsberg adalah kemungkinan bisa atau tidaknya melewati ketujuh jembatan di Königsberg yang masing-masing tepat satu kali dan kembali lagi ketempat semula. Euler mempresentasikan permasalahan tersebut dalam graf yaitu, empat daratan sebagai titik, dan tujuh jembatan sebagai sisi. Euler memberikann jawaban bahwa perjalanan melewati ketujuh jembatan tetapi tidak boleh melewati jembatan yang sama lebih dari satu kali tidak mungkin dilakukan. Akar permasalahan ini menjadi awal perkembangan dari teori graf. Teori graf sangat unik karena memiliki pokok bahasan yang sederhana yaitu bisa disajikan dengan titik (simpul atau *vertex*) dan garis (sisi atau *edge*). Representasi visual dari graf tersebut adalah menyatakan objek sebagai titik (*vertex*), sedangkan hubungan antara objek dinyatakan dengan sisi (*edge*). Pewarnaan graf terdapat tiga macam yaitu pewarnaan titik (*vertex colouring*), pewarnaan sisi (*edge colouring*), dan pewarnaan wilayah (*face colouring*). Pewarnaan wilayah sebenarnya merupakan bentuk lain dari pewarnaan titik, karena memiliki konsep pewarnaan yang sama.

Perkembangan teori graf salah satunya adalah *Rainbow Connection*, yang merupakan perkembangan pewarnaan graf. Konsep *rainbow connection* pada graf pertama kali diperkenalkan oleh Chartrand dkk, pada tahun 2006. *Rainbow Connection* sendiri adalah pemberian warna pada sisi graf, dimana dua sisi yang bertetangga boleh berwarna sama. *Rainbow path* adalah sebuah lintasan yang terdapat dalam sebuah graf, sisi dinamakan *rainbow path* jika tidak ada dua sisi di lintasan yang memiliki warna sama. Pewarnaan di sini disebut *rainbow coloring*,

dan pemberian warna minimal dalam suatu graf G disebut *rainbow connection number* yang dilambangkan dengan $rc(G)$ (Chartrand,dkk,2008). Penelitian mengenai *rainbow connection* juga bisa dicari pada hasil operasi graf khusus. Operasi graf merupakan operasi dua buah graf atau lebih sehingga menghasilkan graf baru. Jenis-jenis operasi graf diantaranya operasi *joint*, *cartesian product*, *composition*, *generalized shackle*, dan *amalgamation*. Operasi graf sendiri juga berkembang, khususnya operasi *shackle*, dimana sebelumnya dalam operasi *shackle* terdapat tepat satu titik yang sama yang disebut *vertex linkage* atau titik penghubung, dimana *vertex linkage* semua berbeda. Pada tahun 2015, Dafik, Setiawani dan Azizah dalam paper yang berjudul *Generalized Shackle of Fans is a Super (a, d)-edge Antimagic Total Graph*, menyatakan *generalized shackle* diartikan satu titik umum terbagi oleh G_i dan G_{i+1} digantikan dengan satu subgraf umum H sebagai subgraf penghubungnya, dimana subgraf penghubungnya semuanya berbeda. Mengingat banyaknya graf khusus dan operasi graf, memungkinkan semakin banyak lagi graf baru yang akan ditemukan serta *rainbow connection* dan *strong rainbow connection* pada graf baru tersebut.

Terdapat beberapa hasil penelitian *rainbow connection* sebelumnya, seperti Xeuliang Li pada beberapa artikel ilmiah yang telah dipublikasikan diantaranya pada tahun 2010 dan 2011, penelitian tersebut diantara lain *Rainbow connection in 3-connected Graph*, *Rainbow connection numbers of complementary graphs*, *Rainbow connections of graphs-A Survey*, dan *Rainbow connections of line graphs*. Histamedika (2012) melakukan penelitian yang mengkaji tentang *rainbow connection* pada beberapa graf. Pada tahun berikutnya Yulianti (2013) melakukan penelitian terkait *rainbow connection* pada graf kipas (*fan graph*) dan graf matahari (*sun graph*). Alfarisi (2014) melakukan pengembangan *rainbow connection* pada sebarang graf khusus. Pada penelitian ini, penulis akan mengangkat masalah bagaimana menghasilkan graf hasil operasi dari beberapa graf khusus dan bagaimana menemukan *rainbow connection* dan *strong rainbow connection* dari graf hasil operasi tersebut. Sehingga dalam penelitian ini penulis memilih judul "Analisa *Rainbow Connection* dan *Strong Rainbow Connection* pada Graf Hasil Operasi".

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka dapat dirumuskan masalah dalam penelitian ini yaitu:

- bagaimana kardinalitas titik dan sisi pada graf-graf hasil operasi?
- bagaimana *rainbow connection number* dan *strong rainbow connection number* pada graf-graf hasil operasi?
- bagaimana fungsi *rainbow coloring* dan *strong rainbow coloring* pada graf-graf hasil operasi?

1.3 Batasan Masalah

Adapun batasan masalah dalam penelitian ini antara lain:

- graf yang digunakan dalam penelitian ini adalah graf sederhana, graf tidak berarah dan konektif;
- graf hasil operasi yang digunakan dalam penelitian ini adalah $F_{2,6} \square P_m$, $Amal(F_{1,3}, v = 1, 2) \square P_m$, $Amal(W_4, v = 1, 2) \square P_m$, $P_2[F_{2,n}]$, $P_2[Amal(F_{1,n}, v = 1, 2)]$, $P_2[Amal(W_n, v = 1, 2)]$, $Amal(F_{1,n}, v = 1, 2) + Amal(W_n, v = 1, 2)$, $gshack(K_n, P_2, r)$, $gshack(K_n, C_3, r)$, $gshack(Amal((K_1 + K_n), v = 1, 2), K_n, r)$, $gshack(W_6, C_3, r)$ dan $gshack(W_6, C_4^1, r)$.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini meliputi:

- menentukan kardinalitas titik dan sisi pada graf-graf hasil operasi;
- menentukan *rainbow connection number* dan *strong rainbow connection number* pada graf-graf hasil operasi;
- menentukan fungsi *rainbow coloring* dan *strong rainbow coloring* pada graf-graf hasil operasi.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari hasil penelitian ini, yaitu:

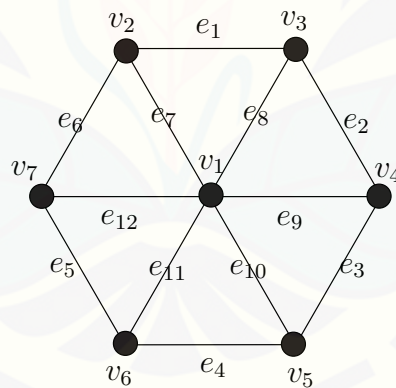
- a. menambah pengetahuan baru dalam bidang teori graf, terutama yang mempelajari *rainbow connection* dan *strong rainbow connection*;
- b. memberikan motivasi pada peneliti lain untuk meneliti lebih luas tentang pencarian *rainbow connection* dan *strong rainbow connection* pada graf-graf hasil operasi yang lain.



BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Konsep Dasar dan Terminologi Graf

Sebuah graf G merupakan pasangan himpunan $(V(G), E(G))$ dimana $V(G)$ adalah sebuah himpunan berhingga tak kosong yang memiliki elemen berupa titik (*vertex*), dan $E(G)$ adalah himpunan sisi (*edge*) dari G yang anggotanya tak terurut dua titik u, v serta boleh kosong. Jadi sebuah graf G dimungkinkan tidak mempunyai sisi, tetapi harus memiliki titik minimal satu (Slamin, 2009). Sebuah graf yang tidak mempunyai sisi tetapi hanya memiliki sebuah titik disebut graf *trivial*. *Order* atau ordo adalah banyaknya titik dalam suatu graf G , dinotasikan dengan p atau $|V(G)|$, sedangkan *size* adalah banyaknya sisi pada graf G , dan dinotasikan dengan q atau $|E(G)|$. Gambar 2.1 adalah sebuah graf dengan $|V(G)| = 7$ dan $|E(G)| = 12$, memiliki himpunan titik $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ dan himpunan sisi $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, \dots, e_{12}\}$.



Gambar 2.1 Contoh Graf dengan $|V(G)| = 7$ dan $|E(G)| = 12$

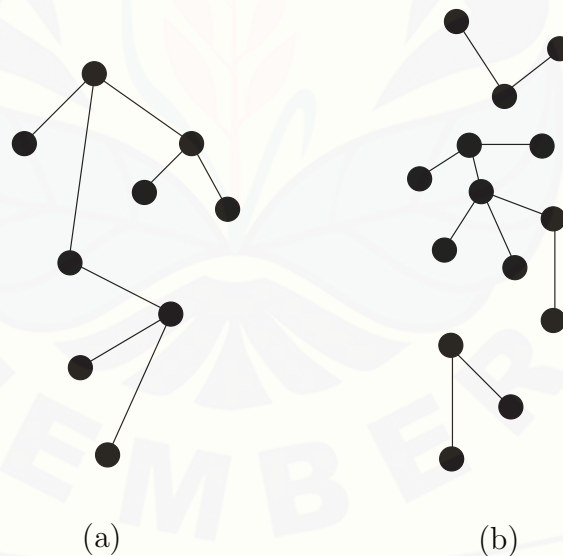
Dua buah titik v_1, v_2 dari graf G adalah bertetangga (*adjacent*) jika v_1v_2 adalah sebuah sisi pada graf G . Dapat dikatakan juga bertetangga bila keduanya terhubung langsung yaitu pada sisi e ditulis dengan $e = v_1v_2$. Sebagai contoh dapat dilihat pada Gambar 2.1, titik v_2 bertetangga dengan v_1, v_3 dan v_7 . Jika

$e = v_1v_2$ adalah sebuah sisi dari graf G , maka e dikatakan bersisian atau *incident* dengan titik v_1 dan v_2 . Untuk sembarang sisi $e = (v_1, v_2)$ dikatakan e bersisian dengan titik v_1 jika v_1 merupakan titik ujung dari e atau e bersisian dengan titik v_2 , jika v_2 merupakan titik ujung dari e .

Derajat (*degree*) dari sebuah titik v adalah banyaknya sisi yang bersisian atau *incident* dengan v . Derajat dari titik pada graf dinotasikan dengan d_i dimana i menunjukkan titik ke- i pada graf. Sebagai contoh dapat dilihat pada Gambar 2.1, derajat dari titik v_2 adalah 3 (tiga). Jika setiap titik dari graf tersebut mempunyai derajat yang sama maka graf G dikatakan *regular*, jika sebaliknya maka dikatakan *non-regular*. Titik yang mempunyai derajat satu disebut titik akhir (*end vertex*) atau daun (*leaf*). Sedangkan sebuah titik yang mempunyai derajat 0 (nol) atau tidak bertetangga dengan titik lain disebut titik terisolasi (*isolated vertex*). Banyaknya sisi minimal yang bersisian pada suatu titik v di graf G diantara titik-titik lainnya di graf G disebut derajat terkecil dinotasikan dengan $\delta(G)$. Sedangkan banyaknya maksimal sisi yang bersisian pada suatu titik di graf G disebut derajat terbesar, dinotasikan dengan $\Delta(G)$ (Hartsfield dan Ringel, 1990). Sebagai contoh dapat dilihat pada Gambar 2.1, memiliki derajat terkecil sama dengan 3 (tiga) dan derajat terbesar sama dengan 6 (enam).

Sebuah jalan (*walk*) dari suatu graf G dinotasikan dengan $W(G)$ adalah sebuah barisan berhingga yang bergantian antara titik dan sisi yang diawali dan diakhiri dengan titik dimana titik dan sisinya boleh berulang. Sebagai contoh dapat dilihat pada Gambar 2.1, jalan dari titik v_7 ke titik v_4 yaitu $v_7, e_{12}, v_1, e_7, v_2, e_6, v_7, e_{12}, v_1, e_9, v_4$, tetapi barisan ini tidak bersifat tunggal, masih ada alternatif barisan yang lain. Cara mengetahui panjang sebuah jalan W yaitu dengan menghitung banyaknya sisi yang dilintasi oleh jalan W tersebut. Sebuah jalan tertutup apabila titik $v_1 = v_n$ yaitu jalan yang berawal dan berakhir dengan titik yang sama, apabila $v_1 \neq v_n$ maka jalan tersebut dinamakan jalan terbuka. Jalan trivial merupakan sebuah jalan yang tersusun hanya dari satu titik. Sebuah jalan merupakan jejak (*trail*) jika jalan tidak memiliki sisi yang berulang sedangkan titiknya boleh berulang. Sebagai contoh dapat dilihat pada Gambar 2.1, jejak titik v_2 ke titik v_3 yaitu $v_2, e_6, v_7, e_{12}, v_1, e_7, v_2, e_1, v_3$.

Sebuah lintasan (*Path*) pada graf G didefinisikan sebagai sebuah jalan dengan titik dan sisi yang berbeda dan tidak ada titik maupun sisinya yang dipakai berulang. Sebagai contoh dapat dilihat pada Gambar 2.1, lintasan dari v_7 ke titik v_4 yaitu v_7, v_2, v_3, v_4 . Jika sebuah *trail* memiliki titik-titik ujung sama, lintasan ini disebut *trail* tertutup, biasa disebut dengan Siklus (*Cycle*) atau Sirkuit (*Circuit*). Definisi lebih lanjut tentang siklus yaitu sebuah jalan tertutup dengan panjang setidaknya 3 (tiga), dan tidak ada sisi yang dipakai berulang serta hanya ada satu titik yang berulang (sebagai titik awal sekaligus titik akhir). Sebagai contoh siklus dapat dilihat pada Gambar 2.1, lintasan dari v_7 ke titik v_4 yaitu $v_7, v_2, v_3, v_4, v_1, v_7$. Panjang dari siklus (*cycle*) terpendek di G disebut *girth* dari sebuah graf G tersebut (Hartsfield dan Ringel, 1990). Apabila suatu graf tidak memiliki siklus yang terhubung, maka disebut pohon dan apabila graf tanpa siklus terhubung tersebut memiliki komponen lebih dari sama dengan satu, maka disebut hutan. Sebagai contoh, perhatikan Gambar 2.2.



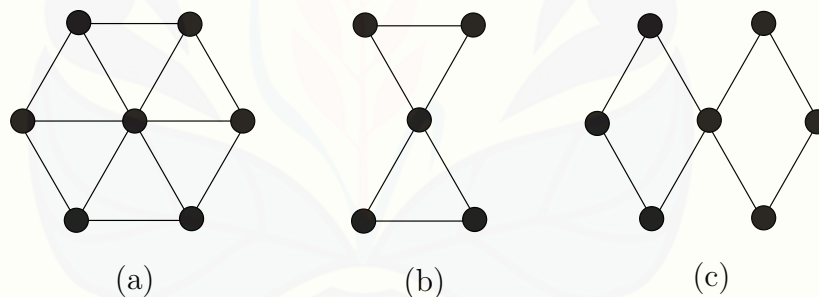
Gambar 2.2 Graf Pohon (a) dan Graf Hutan (b)

Jarak atau *distance* dinotasikan $d(v_i, v_j)$ yang artinya jarak antara dua titik v_i dan v_j . Jarak pada graf G adalah panjang lintasan terpendek dari titik v_i

ke titik v_j . Jika tidak ada lintasan dari titik v_i ke v_j , maka didefinisikan jarak $d(v_i, v_j) = \infty$. Sebagai contoh, perhatikan Gambar 2.1 $d(v_7, v_4) = 2$. Jarak maksimum antara dua titik sebarang pada graf G disebut diameter, dinotasikan $diam G = \max\{e(v) : v \in V\}$. Sebagai contoh, perhatikan Gambar 2.1 memiliki diameter sama dengan 2 (dua).

Dua buah titik v_1 dan v_2 disebut terhubung jika terdapat lintasan dari v_1 ke v_2 . G disebut graf terhubung (*connected graph*) jika untuk setiap pasang titik v_1 dan v_2 dalam himpunan V terdapat lintasan dari v_1 ke v_2 . Jika tidak, maka G disebut graf tak-terhubung (*disconnected graph*) (Purwanto dkk, 2006). Graf trivial disebut juga graf terhubung karena titik tunggalnya terhubung dengan dirinya sendiri.

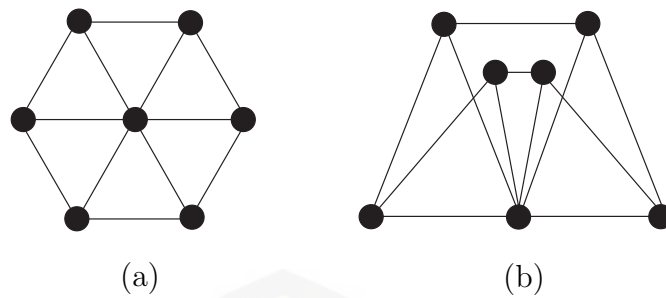
Misalkan $G = (V, E)$ adalah graf, $G_1 = (V_1, E_1)$ adalah subgraf dari G jika $V_1 \subseteq V$ dan $E_1 \subseteq E$. Jumlah maksimum subgraf terhubung dalam graf G disebut komponen graf (*connected component*). Subgraf G_1 adalah sebuah *spanning subgraph* dari G jika G_1 mengandung semua titik dari graf G , atau $V(G_1) \subseteq V(G)$. Sebagai contoh, perhatikan Gambar 2.3.



Gambar 2.3 Graf G (a), Subgraf G (b) dan *Spanning Subgraph* G (c)

Dua buah graf atau lebih dikatakan isomorfis jika mempunyai jumlah titik, sisi, dan derajat yang sama. Sedangkan dua buah graf atau lebih mempunyai bentuk geometri yang sama, tetapi jumlah titik, sisi dan derajat yang berbeda, maka dikatakan homomorfis (Munir, 2009). Sebagai contoh dua graf yang isomorfis, perhatikan Gambar 2.4.

Suatu graf dinamakan graf Kosong jika sebuah graf $G = (V, E)$ dengan $E = \emptyset$, graf Kosong dinotasikan dengan N_n dimana n adalah banyaknya titik

Gambar 2.4 Graf G (a) dan Contoh Graf yang Isomorfis dengan Graf G (b)

pada graf tersebut. Sebuah graf dengan $V = v$ dan $E = \emptyset$ dinamakan graf trivial, yaitu suatu graf yang memiliki suatu titik dan tidak memiliki satu pun sisi.

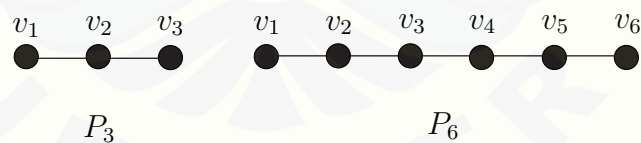
2.2 Graf Khusus dan Operasi Graf

2.2.1 Graf Khusus

Terdapat beberapa jenis graf khusus, berikut definisi dari beberapa graf khusus tersebut:

1. Graf Lintasan (*Path Graph*)

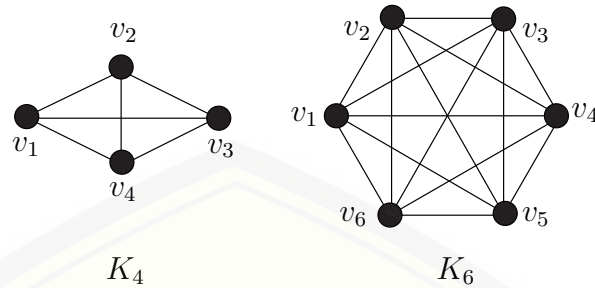
Graf Lintasan adalah graf yang hanya terdiri dari satu lintasan dengan n titik. Graf Lintasan dinotasikan dengan P_n , dimana $n \geq 2$ yang terdiri dari n titik dan $n - 1$ sisi. Contoh graf lintasan dapat dilihat pada Gambar 2.5.

Gambar 2.5 Graf Lintasan P_3 dan P_6

2. Graf Lengkap (*Complete Graph*)

Graf Lengkap ialah graf sederhana yang setiap titiknya mempunyai sisi ke semua titik lainnya. Graf Lengkap dengan n buah titik dilambangkan dengan K_n . Jumlah sisi pada graf Lengkap yang terdiri dari n buah titik

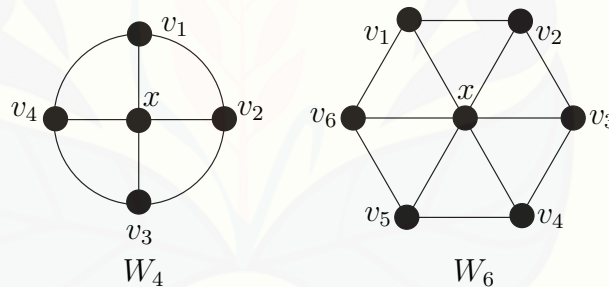
adalah $n(n - 1)/2$ (Purwanto dkk, 2006). Contoh graf lengkap dapat dilihat pada Gambar 2.6.



Gambar 2.6 Graf Lengkap K_4 dan K_6

3. Graf Roda (*Wheel Graph*)

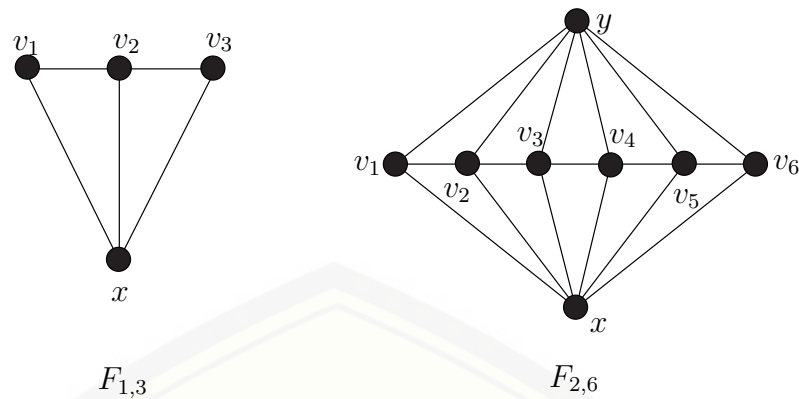
Graf Roda dinotasikan W_n dengan $n \geq 3$ adalah graf yang didapatkan dengan menghubungkan semua titik dari graf Siklus C_n dengan suatu titik yang disebut pusat. Jadi W_n terdiri dari $n + 1$ titik dan $2n$ sisi. Contoh graf roda dapat dilihat pada Gambar 2.7.



Gambar 2.7 Graf Roda W_4 dan W_6

4. Graf Kipas (*Fan Graph*)

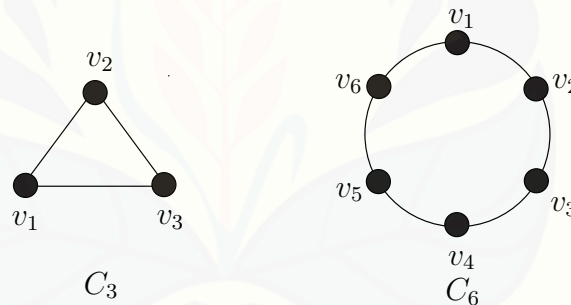
Graf Kipas atau *fan graph* dinotasikan dengan $F_{n,m}$, merupakan graf yang terbentuk dari menghubungkan semua titik m yang berupa graf lintasan P_m pada sebanyak n titik pusat. Sehingga graf kipas terdiri dari $n + m$ titik dan $mn + m - 1$ sisi, dimana $n \geq 1$ dan $m \geq 2$. Contoh graf kipas dapat dilihat pada Gambar 2.8.



Gambar 2.8 Graf Kipas $F_{1,3}$ dan $F_{2,6}$

5. Graf Siklus (*Cycle Graph*)

Graf Siklus dinotasikan dengan C_n adalah graf yang setiap titiknya berderajat sama yaitu berderajat dua dan memiliki jumlah titik dan jumlah sisi yang sama. Graf Siklus C_n hanya dapat dibentuk dengan $n \geq 3$ (Purwanto dkk, 2006). Contoh graf *cycle* dapat dilihat pada Gambar 2.9.



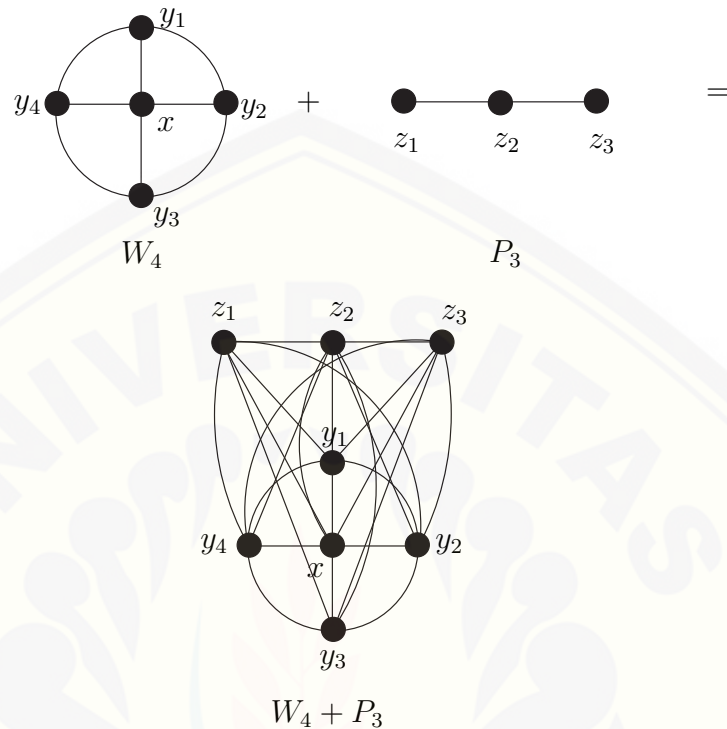
Gambar 2.9 Graf *Cycle* C_3 dan C_6

2.2.2 Operasi Graf

Dalam teori graf, ada yang dinamakan operasi graf, yaitu pengoperasian beberapa graf sehingga menjadi graf baru dengan menggunakan beberapa operasi graf seperti berikut:

Definisi 2.2.1. *Joint* dari graf $G_1(V_1, E_1)$ dan $G_2(V_2, E_2)$ adalah graf G dimana $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ dan $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{uv \mid u \in V(G_1), v \in$

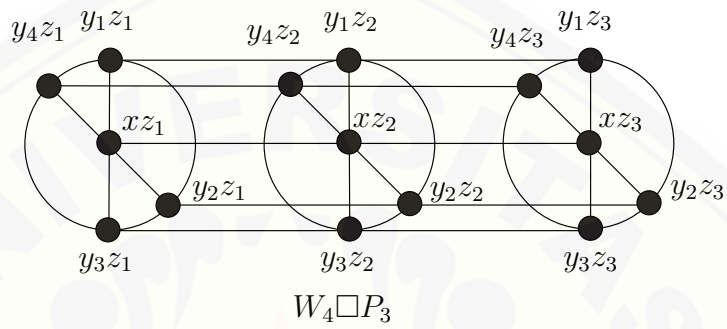
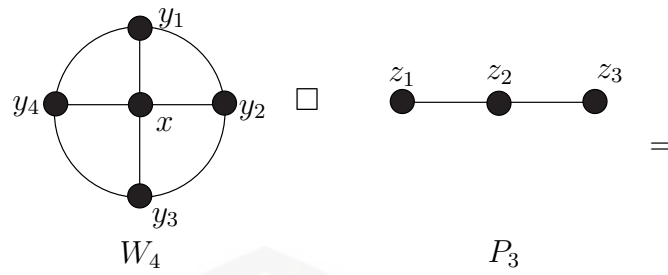
$V(G_2)\}$, dan dinotasikan dengan $G = G_1 + G_2$ (Harary, 2007). Contoh operasi *joint* dapat dilihat pada Gambar 2.10.



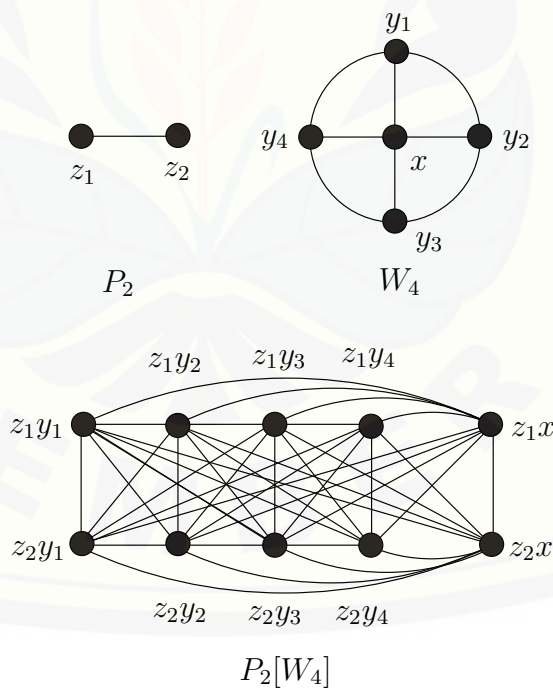
Gambar 2.10 Graf Hasil Operasi *Joint* dari W_4 dan P_3

Definisi 2.2.2. *Cartesian product* dari graf $G_1(V_1, E_1)$ dan $G_2(V_2, E_2)$ dinotasikan dengan $G = G_1 \square G_2$, yaitu graf dengan himpunan titik $V(G_1) \times V(G_2)$, dua titik (u_1, u_2) dan (v_1, v_2) di G adjacent jika dan hanya jika salah satu dari dua hal berikut berlaku: $(u_1 = v_1 \text{ dan } u_2 v_2 \in E_2)$ atau $(u_2 = v_2 \text{ dan } u_1 v_1 \in E_1)$ (Harary, 2007). Contoh operasi *cartesian product* dapat dilihat pada Gambar 2.11.

Definisi 2.2.3. *Composition* dari graf $G_1(V_1, E_1)$ dan $G_2(V_2, E_2)$ dinotasikan dengan $G = G_1[G_2]$, yaitu graf dengan himpunan titik $V(G_1) \times V(G_2)$ dan dua titik (u_1, u_2) dan (v_1, v_2) di G adjacent ketika $(u_1 \text{ adj } v_1)$ atau $(u_1 = v_1 \text{ dan } u_2 \text{ adj } v_2)$ dan memiliki sifat $G_1[G_2] \neq G_2[G_1]$ (Harary, 2007). Contoh operasi *composition* dapat dilihat pada Gambar 2.12.



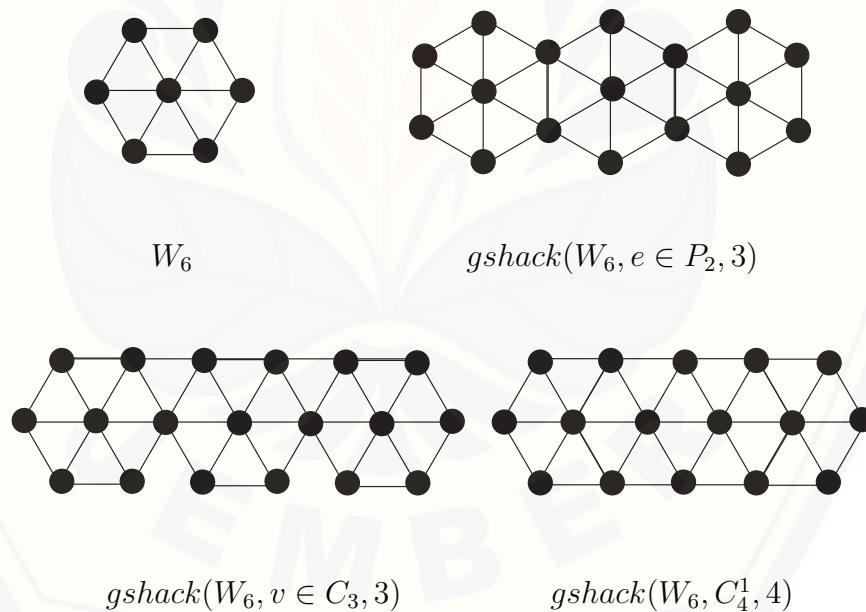
Gambar 2.11 Graf Hasil Operasi *Cartesian Product* dari W_4 dan P_3



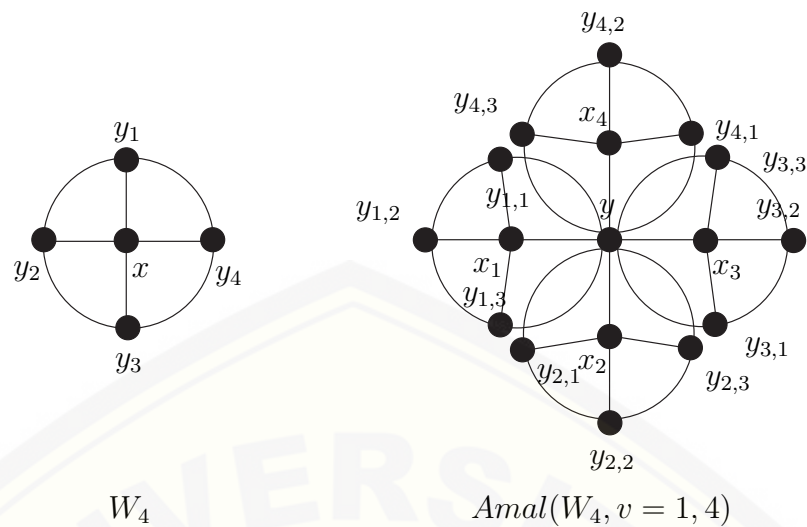
Gambar 2.12 Graf Hasil Operasi *Composition* dari P_2 dan W_4

Definisi 2.2.4. *Generalized Shackle* atau *shackle tergeneralisir* diartikan apabila satu titik umum terbagi oleh G_i dan G_{i+1} digantikan dengan satu subgraf umum H yang sama sebagai subgraf penghubungnya. Jika tidak semua anggota dari H terbagi maka graf shackle tergeneralisir dinotasikan sebagai berikut : $gshack(G, v \in H, r)$, $gshack(G, e \in H, r)$ atau $gshack(G, K \subseteq H, r)$ dengan K merupakan sebuah subgraf dari H , r menyatakan banyaknya graf G yang akan di-shackle dimana $r-1$ subgraf penghubungnya semua berbeda (Dafik, 2015). Contoh *generalized shackle* dapat dilihat pada Gambar 2.13.

Definisi 2.2.5. *Amalgamation* dinotasikan dengan $Amal(H_i, v, r)$. Misalkan $\{H_i\}$ adalah suatu keluarga graf berhingga dan setiap H_i mempunyai suatu titik v yang disebut titik terminal, dan r menyatakan banyaknya graf H_i yang akan diamalgamation, sehingga semua H_i dengan seluruh terminalnya direkatkan menjadi satu titik (Ardiyansah, 2013). Contoh operasi *amalgamation* dapat dilihat pada Gambar 2.14.



Gambar 2.13 Graf Hasil Operasi *gshackle* dari W_6



Gambar 2.14 Graf Hasil Operasi *Amalgamation* dari W_4

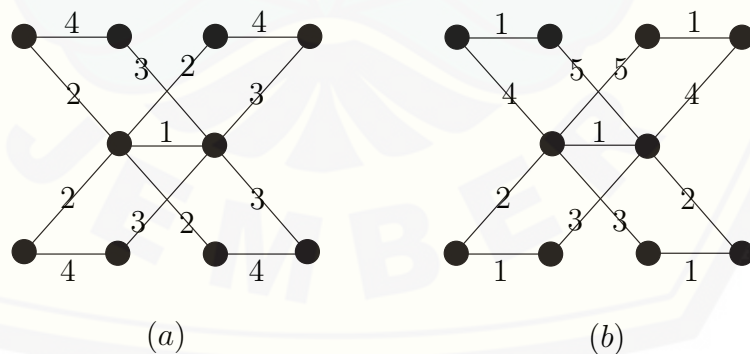
2.3 *Rainbow Connection* dan *Strong Rainbow Connection*

Misalkan $G = (V(G), E(G))$ adalah suatu graf terhubung tak-trivial. Suatu pewarnaan terhadap sisi-sisi di G didefinisikan sebagai $c : E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$, $k \in \mathbb{N}$, dimana dua sisi yang bertetangga boleh berwarna sama. Suatu lintasan $u - v$ path di G dinamakan *rainbow path* jika tidak terdapat dua sisi di lintasan yang berwarna sama. Graf G disebut *rainbow connected* dengan pewarnaan c jika G memuat suatu *rainbow* $u - v$ path untuk setiap dua titik $u, v \in G$. Dalam hal ini, pewarnaan c dikatakan *rainbow coloring* di G . Jika terdapat k warna di G maka c dikatakan *rainbow k -coloring*. Minimum k sehingga terdapat *rainbow k -coloring* di G disebut *rainbow connection number*, ditulis $rc(G)$. Suatu *rainbow coloring* yang menggunakan $rc(G)$ warna dikatakan *minimum rainbow coloring* di G (Chartrand, 2008).

Misalkan G adalah graf terhubung tak-trivial dan definisikan pewarnaan sisi $c : E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$, $k \in \mathbb{N}$, sedemikian sehingga dua sisi yang bertetangga boleh memiliki warna yang sama. Suatu $u - v$ path di G dikatakan *rainbow path* jika tidak ada dua sisi di lintasan yang memiliki warna sama. Graf G dikatakan *rainbow connected* jika setiap dua titik yang berbeda di G dihubungkan oleh *rainbow path*.

Pewarnaan sisi yang menyebabkan G bersifat *rainbow connected* dikatakan *rainbow coloring*. Jelas, jika G adalah *rainbow connected*, maka G terhubung. Sebaliknya, setiap graf terhubung memiliki pewarnaan sisi trivial sehingga *rainbow connected* memiliki pewarnaan sisi dengan warna berbeda. *Rainbow connection number* dari graf terhubung G , ditulis $rc(G)$, didefinisikan sebagai banyaknya warna minimal yang diperlukan untuk membuat graf G bersifat *rainbow connected* (Histamedika, 2012).

Suatu *rainbow coloring* yang menggunakan sebanyak $rc(G)$ warna dikatakan *minimum rainbow coloring*. Misalkan c adalah *rainbow coloring* dari graf terhubung G . Untuk dua titik u dan v di G , *rainbow u - v geodesic* pada G adalah *rainbow u - v path* yang panjangnya $d(u, v)$, dimana $d(u, v)$ adalah jarak antara u dan v (panjang $u - v$ path terpendek di G). Graf G dikatakan *strongly rainbow-connected* jika untuk setiap dua titik u dan v di G , terdapat suatu *rainbow u - v geodesic*. Dalam kasus ini, pewarnaan c dikatakan *strong rainbow coloring* di G . Minimum k yang terdapat pada pewarnaan $c : E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ sedemikian sehingga G adalah *strongly rainbow-connected* dikatakan *strong rainbow connection number* ($src(G)$) di G . Suatu *strong rainbow-coloring* di G yang menggunakan $src(G)$ warna dikatakan *minimum strong rainbow coloring* di G (Chartrand, 2008). Dari definisi, jelas bahwa $rc(G) \leq src(G)$ untuk setiap graf terhubung G . Pada Gambar 2.15 diperlihatkan contoh *rainbow connection* dan *strong rainbow connection* pada graf Buku.



Gambar 2.15 Graf Buku dengan $rc(G) = 4$ (a) dan $src(G) = 5$ (b)

Hubungan $k(G)$, $rc(G)$, $src(G)$ dan banyak sisi m pada suatu graf terhubung G ditunjukkan oleh pertidaksamaan berikut: $k(G) \leq rc(G) \leq src(G) \leq m$.

Teorema yang digunakan untuk batas atas dan bawah dari *rainbow connection* adalah sebagai berikut:

Teorema 2.3.1. *Andaikan G adalah graf terhubung dengan $d(G) \geq 2$. Jika G adalah interval graf, maka $k(G) \leq rc(G) \leq k(G) + 1$, sedangkan yang lainnya jika G unit interval graf, maka $k(G) = rc(G)$ (Li dan Sun, 2011).*

Teorema *rainbow connection* yang digunakan untuk graf hasil operasi dari *cartesian product* adalah sebagai berikut:

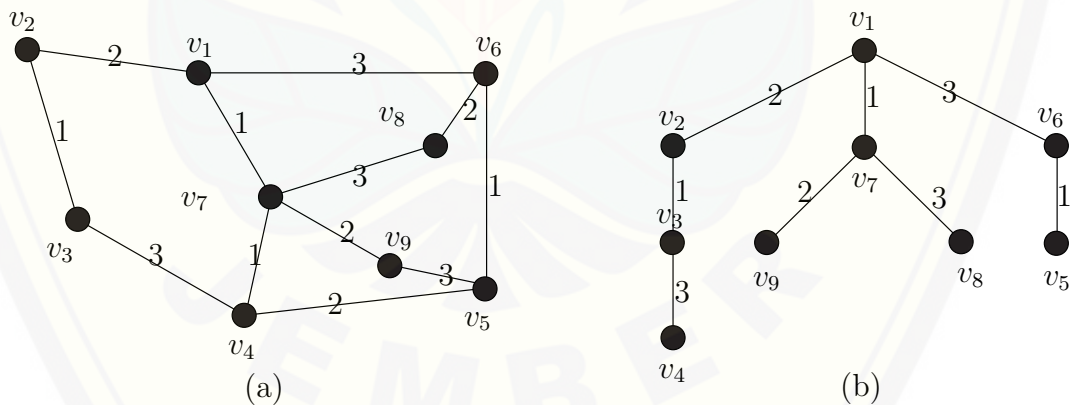
Teorema 2.3.2. *Andaikan $G_* = G_1 \square G_2 \square \dots \square G_k$ ($k \geq 2$), dimana setiap G_i ($1 \leq i \leq k$) terhubung. Maka $rc(G_*) \leq \sum_{i=1}^k rc(G_i)$. Selain itu, jika $diam(G_i) = rc(G_i)$ untuk setiap G_i , maka persamaan tersebut dipertahankan (Li dan Sun, 2011).*

2.4 Aplikasi *Rainbow Connection* dan *Strong Rainbow Connection* pada Proses Distribusi

Konsep *rainbow connection* dapat diaplikasikan pada proses distribusi, misalnya digunakan dalam pengantaran kertas soal Seleksi Bersama Masuk Perguruan Tinggi Negeri (SBMPTN) ke lokasi ujian SBMPTN diselenggarakan. Pengiriman perlu pengawalan dan pengawasan yang ketat karena merupakan dokumen negara yang rahasia dan agar tidak terjadi masalah yang tidak diinginkan. Pengantaran soal SBMPTN sampai ke tempat diselenggarakan seleksi ditakutkan terjadi penyelewangan soal oleh salah satu pihak apabila tidak diantarkan oleh pihak yang berwenang, yaitu dari dinas pendidikan sebagai pengawas pertama, polres sebagai pengawas kedua dan panitia pelaksana sebagai pengawas ketiga. Jadi hal-hal buruk seperti kebocoran soal dapat dihindari. Dengan demikian, dapat dipilih jalur yang bisa menjangkau kecamatan terbanyak dan jalur yang dilewati tidak ada penjaga dari tim yang sama. Jadi apabila terjadi kecurangan dari tim pengawas yang menjaga diwilayah pertama, tim pengawas berikutnya dengan tim pengawas yang berbeda akan mengetahui kecurangan tersebut. Karena apabila

dalam satu jalur pengiriman dengan tim pengawas yang sama, ditakutkan ada kerja sama dalam melakukan kecurangan seperti kebocoran soal. Serta harus ditentukan jumlah minimal tim pengawas yang dibutuhkan dalam mengawasi pendistribusian kertas soal. Situasi inilah yang dapat dimodelkan dalam bilangan *rainbow connection*.

Pada Gambar 2.16 (a) memiliki $k = 3$, yang menurut Teorema 2.3.1 adalah $k(G) \leq rc(G) \leq k(G) + 1$, maka batas bawah dan batas atas dari $rc(G)$ adalah $3 \leq rc(G) \leq 3 + 1$, maka $3 \leq rc(G) \leq 4$, setelah diwarnai $c : E(G) \rightarrow 1, 2, 3$ sehingga $rc(G) = 3$. Jadi yang harus dibentuk adalah 3 tim pengawas dan disebar menurut *rainbow coloring* dari $rc(G)$ seperti pada Gambar 2.16 (a). Kemudian diambil lintasan yang dapat menjangkau titik terbanyak dengan warna sisi harus berbeda. Kondisi tersebut dapat dimodelkan dalam bentuk *spanning tree* seperti Gambar 2.16 (b). Pada Gambar 2.16 (b) dimisalkan pengirim soal berpusat di v_1 . Untuk menuju ke titik v_4 harus melewati v_2 dan v_3 diperiksa oleh tim 2, 1, dan 3 secara berturut-turut. Untuk menuju ke titik v_9 harus melewati v_7 diperiksa oleh tim 1 dan 2 secara berturut-turut, diperlukan tambahan kendaraan menuju titik v_8 diperiksa oleh tim 3. Untuk menuju ke titik v_5 harus melewati v_6 diperiksa oleh tim 3 dan 1 secara berturut-turut.

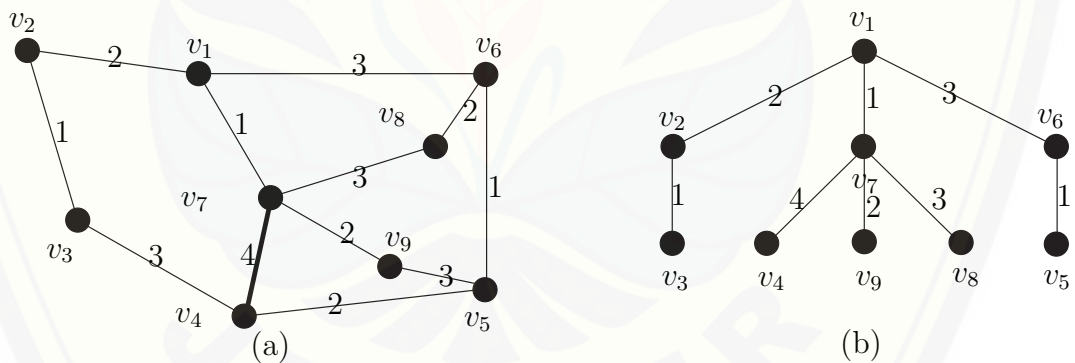


Gambar 2.16 Contoh Aplikasi $rc(G)$ (a) dan Contoh Aplikasi dalam *Spanning Tree* (b)

Konsep *strong rainbow connection* juga dapat diaplikasikan pada proses distribusi kertas soal SBMPTN. Sedikit berbeda dengan *rainbow connection*, perbe-

daannya adalah tim pengawas minimal sama dengan konsep *rainbow connection* namun waktu yang dibutuhkan untuk pendistribusian minimal sama atau bisa lebih cepat (diasumsikan anatara dua titik memiliki jarak tempuh yang sama), karena tempat ujian SBMPTN dilalui dengan lintasan yang terpendek. Sesuai dengan konsep *strong rainbow connection* bahwa antara dua titik harus menggunakan lintasan terpendek, sehingga pada Gambar 2.17 (a) terdapat sedikit perubahan yaitu sisi v_7v_4 berwarna 4, sehingga pada Gambar 2.17 (b) memiliki panjang lintasan sama dengan dua dari titik v_1 .

Pada Gambar 2.17 (b) dimisalkan pengirim soal berpusat di v_1 . Untuk menuju ke titik v_3 harus melewati v_2 dan diperiksa oleh tim 2 dan 1 secara berturut-turut. Untuk menuju ke titik v_4 harus melewati v_7 diperiksa oleh tim 1 dan 4 secara berturut-turut, diperlukan tambahan kendaraan menuju titik v_9 diperiksa oleh tim 2 dan juga diperlukan tambahan kendaraan menuju titik v_8 diperiksa oleh tim 3. Untuk menuju ke titik v_5 harus melewati v_6 diperiksa oleh tim 3 dan 1 secara berturut-turut. Jadi waktu yang diperlukan sedikit lebih cepat, karena semua titik memiliki lintasan sama dengan 2 dari titik pusat pengiriman soal.



Gambar 2.17 Contoh Aplikasi $src(G)$ (a) dan Contoh Aplikasi dalam *Spanning Tree* (b)

2.5 Hasil-hasil *Rainbow Connection*

Beberapa hasil penelitian terkait *rainbow connection number* dan *strong rainbow connection number* dapat dilihat dari rangkuman tabel berikut ini.

Tabel 2.1 Hasil Penelitian Terdahulu $rc(G)$ dan $src(G)$

Graf	Hasil	Keterangan
C_n (Cycle Graph); $n \geq 4$	$rc(C_n) = src(C_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$.	Chartand,dkk,2008
K_n (Compleat Graph); $n \geq 2$	$rc(K_n) = src(K_n) = 1$.	Chartand,dkk,2008
T_n (Tree); $n \geq 2$	$rc(T_n) = src(T_n) = n$.	Chartand,dkk,2008
W_n (Wheel Graph); $n \geq 3$	$rc(W_n) = 1; n = 3$. $rc(W_n) = 2; 4 \leq n \leq 6$. $rc(W_n) = 3; n \geq 7$. $src(W_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$.	Chartand,dkk,2008
$K_{s,t}$ (Complete Bipartit); $2 \leq s \leq t$	$rc(K_{s,t}) = \min\{\lceil \sqrt[2]{t} \rceil, 4\}$. $src(K_{s,t}) = \lceil \sqrt[2]{t} \rceil$.	Chartand,dkk,2008
$G = K_{n_1, n_2, \dots, n_k}$; (Complete k -partit) dengan $k \geq 3$ dan $n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_k$	$rc(G) = 1, n_k = 1$. $rc(G) = 2; n_k \geq 2, s > t$. $rc(G) = \min\{\lceil \sqrt[2]{t} \rceil, 3\}; s \leq t$. $src(G) = rc(G); n_k = 1$ dan $n_k \geq 2, s > t$. $src(G) = \lceil \sqrt[2]{t} \rceil; s \leq t$.	Chartand,dkk,2008
G_n (Gear Graph); $n \geq 4$	$rc(G_n) = 4$.	Syafrizal, 2013
B_n (Book Graph); $n \geq 3$	$rc(B_n) = 4$.	Syafrizal, 2013
F_n (Fan Graph) $n \geq 2$	$rc(F_n) = 1; n = 2$. $rc(F_n) = 2; 3 \leq n \leq 6$. $rc(F_n) = 3; n \geq 7$. $src(F_n) = rc(F_n);$ $2 \leq n \leq 6$. $src(F_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil; n \geq 7$.	Syafrizal,dkk,2013
$G \cong (C_1, C_2, \dots, C_{n_k})-$ path $n_i \geq 3$ dan $k \geq 2$	$rc(G) = \lceil \frac{n}{2} \rceil + s =$ $\sum_{i=2}^k \lceil \frac{n_i}{2} \rceil$.	Syafrizal, 2013
S_n (Sun Graph)	$rc(S_n) = src(S_n) =$ $\lceil \frac{n}{2} \rceil + n$.	Syafrizal,dkk,2013
Bt_n (Triangle Book); $n \geq 1$	$rc(Bt_n) = 2; 2 \leq n \leq 4$. $rc(Bt_n) = 3; n \geq 5$.	Alfarisi,dkk,2014
Kt_n (Handle Fun); $n \geq 2$	$rc(Kt_n) = 2; n = 2$. $rc(Kt_n) = 3; n \geq 3$.	Alfarisi,dkk,2014
Fl_n (Flower Graph); $n \geq 2$	$rc(Fl_n) = 3$.	Alfarisi,dkk,2014
Wb_n (Spider Web); $n \geq 3$	$rc(Wb_n) = 3; 3 \leq n \leq 6$. $rc(Wb_n) = 4; n = 7$. $rc(Wb_n) = 5; n \geq 8$.	Alfarisi,dkk,2014

BAB 3. METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Penelitian ini dikategorikan kedalam penelitian eksploratif dan penelitian terapan (*applied research*), yaitu:

- a. penelitian eksploratif adalah jenis penelitian yang bertujuan menggali hal-hal yang ingin diketahui oleh peneliti dan hasil penelitian dapat digunakan sebagai dasar penelitian selanjutnya.
- b. penelitian terapan (*applied research*) merupakan penyelidikan yang hati-hati, sistematis dan terus-menerus terhadap suatu masalah dengan tujuan untuk digunakan dengan segera untuk keperluan tertentu.

3.2 Data Penelitian

Data dalam penelitian ini adalah data sekunder yang didapat dari penelitian sebelumnya. Data yang digunakan berupa graf-graf khusus yang akan dioperasikan. Graf-graf yang digunakan adalah graf lintasan (*path graph*), graf lingkaran (*cycle graph*), graf lengkap (*complete graph*), graf roda (*wheel graph*) dan graf kipas (*fan graph*). Penelitian ini menggunakan metode deduktif aksiomatik dalam menyelesaikan permasalahan. Metode deduktif menggunakan prinsip-prinsip pembuktian deduktif yang berlaku dalam logika matematika dengan menggunakan aksioma atau teorema yang telah ada untuk memecahkan suatu masalah.

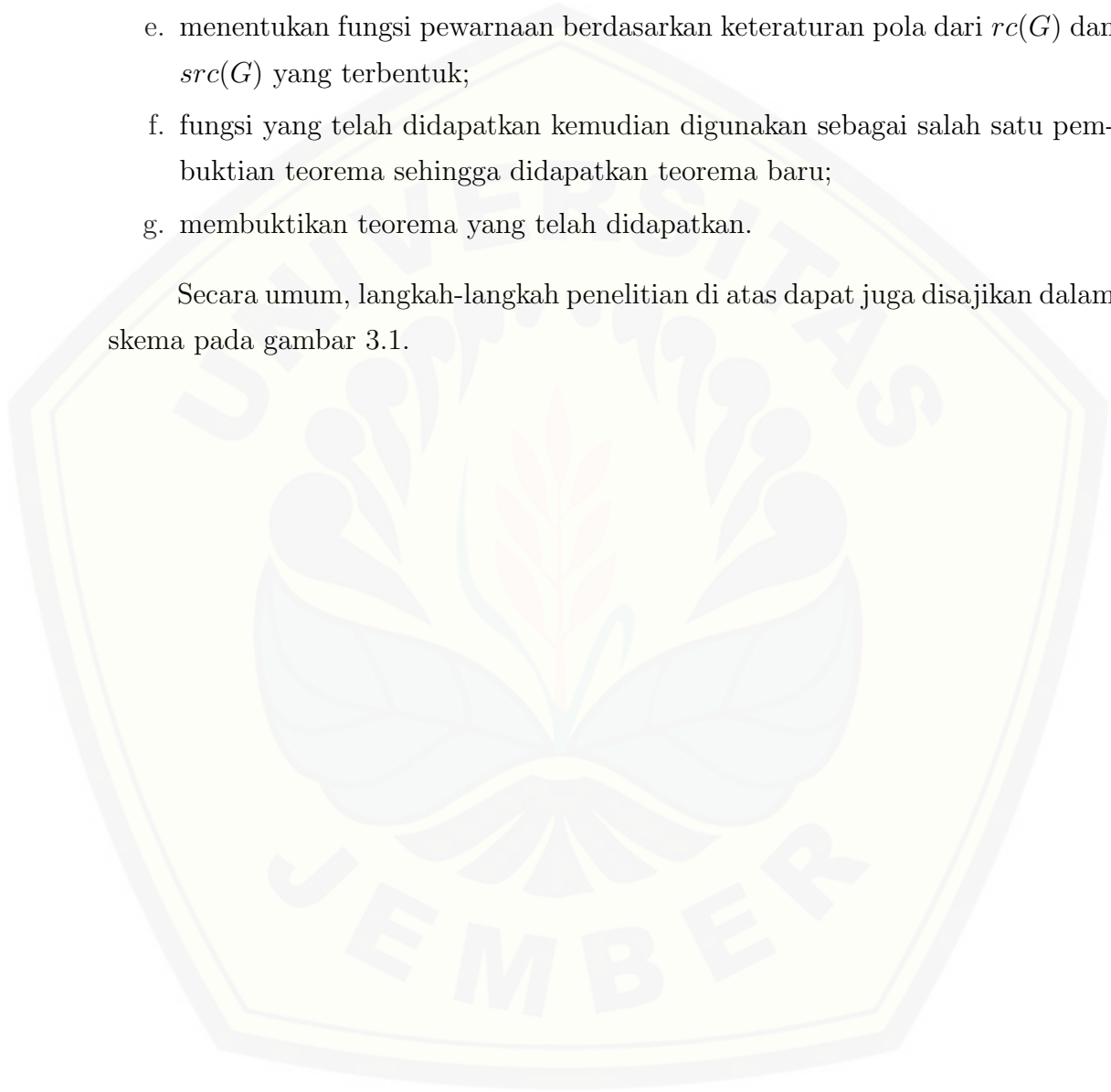
3.3 Rancangan Penelitian

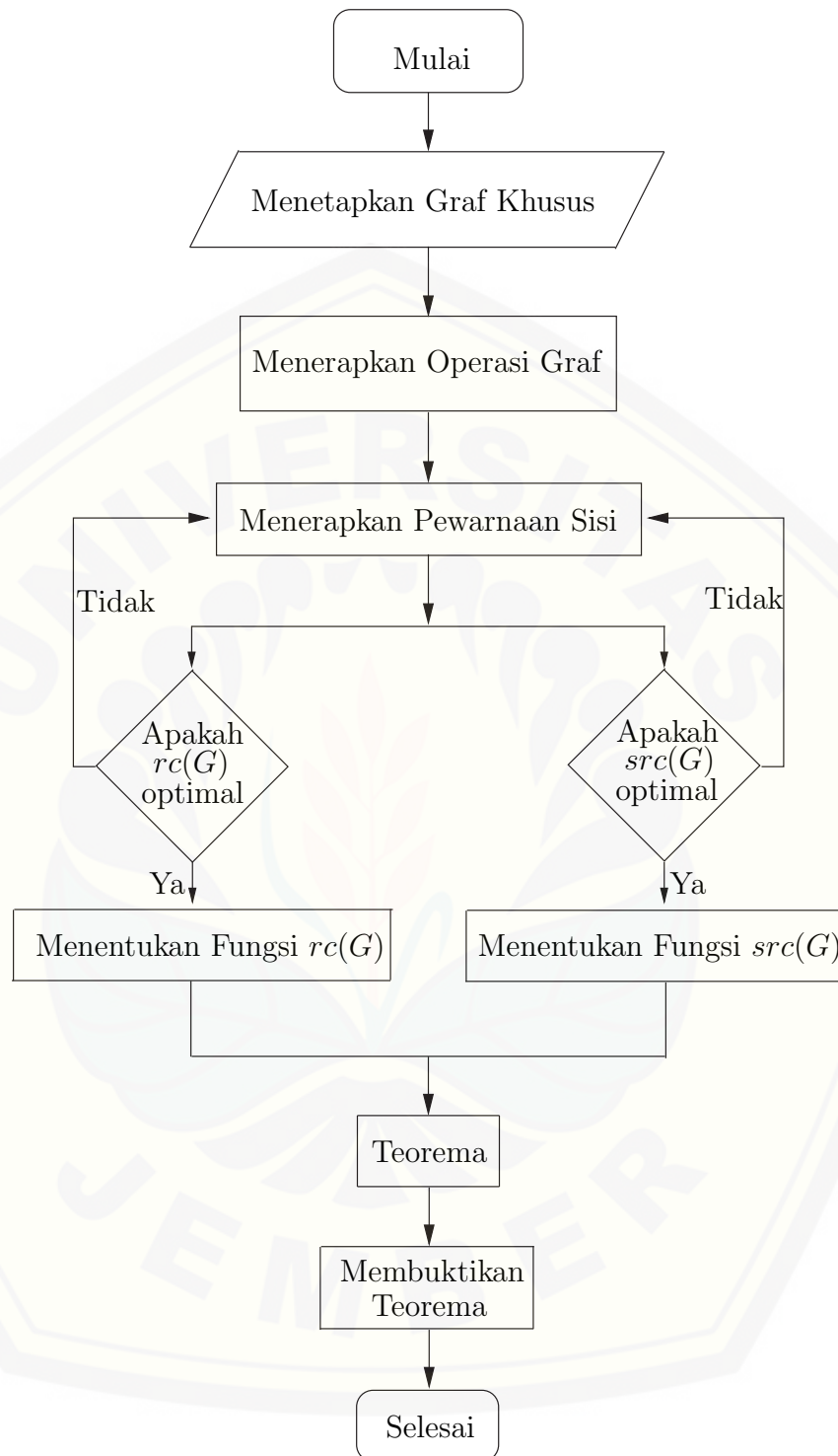
Penelitian ini dilakukan pada pengoperasian graf, yaitu pada graf lintasan (*path graph*), graf lingkaran (*cycle graph*), graf lengkap (*complete graph*), graf roda (*wheel graph*) dan graf kipas (*fan graph*). Adapun teknik penelitian adalah sebagai berikut:

- a. menentukan graf-graf khusus sebagai objek penelitian;
- b. menerapkan operasi graf pada graf-graf khusus yang telah ditentukan;

- c. menerapkan pewarnaan sisi pada graf-graf khusus yang telah dioperasikan menggunakan teknik *rainbow connection* dan *strong rainbow connection*;
- d. memeriksa keoptimalan $rc(G)$ dan $src(G)$, apabila sudah optimal dilanjutkan dengan menentukan fungsi, apabila belum optimal akan kembali ke tahap sebelumnya yaitu menerapkan pewarnaan sisi pada graf;
- e. menentukan fungsi pewarnaan berdasarkan keteraturan pola dari $rc(G)$ dan $src(G)$ yang terbentuk;
- f. fungsi yang telah didapatkan kemudian digunakan sebagai salah satu pembuktian teorema sehingga didapatkan teorema baru;
- g. membuktikan teorema yang telah didapatkan.

Secara umum, langkah-langkah penelitian di atas dapat juga disajikan dalam skema pada gambar 3.1.





Gambar 3.1 Skema Penelitian

BAB 5. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dari pembahasan pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa *rainbow connection number* dan *strong rainbow connection number* pada graf hasil operasi didapatkan 3 akibat yaitu:

1. $rc(F_{2,6} \square P_m) = m + 1$;
2. $rc(\text{Amal}(F_{1,3}, v = 1, 2) \square P_m) = m + 1$;
3. $rc(\text{Amal}(W_4, v = 1, 2) \square P_m) = m + 1$;

dan 12 teorema baru, diantaranya sebagai berikut:

1. $src(F_{2,6} \square P_m) = m + 1$;
2. $src(\text{Amal}(F_{1,3}, v = 1, 2) \square P_m) = m + 1$;
3. $src(\text{Amal}(W_4, v = 1, 2) \square P_m) = m + 1$;
4. $rc(P_2[F_{2,n}]) = src(P_2[F_{2,n}]) = 2$;
5. $rc(P_2[\text{Amal}(F_{1,n}, v = 1, 2)]) = src(P_2[\text{Amal}(F_{1,n}, v = 1, 2)]) = 2$;
6. $rc(P_2[\text{Amal}(W_n, v = 1, 2)]) = src(P_2[\text{Amal}(W_n, v = 1, 2)]) = 2$;
7. $rc(\text{Amal}(F_{1,n}, v = 1, 2) + \text{Amal}(W_n, v = 1, 2)) = src(\text{Amal}(F_{1,n}, v = 1, 2) + \text{Amal}(W_n, v = 1, 2)) = 2$;
8. $rc(gshack(K_n, P_2, r)) = src(gshack(K_n, P_2, r)) = r$;
9. $rc(gshack(K_n, C_3, r)) = src(gshack(K_n, C_3, r)) = r$;
10. $rc(gshack(\text{Amal}((K_1 + K_n), v = 1, 2), K_n, r)) = src(gshack(\text{Amal}((K_1 + K_n), v = 1, 2), K_n, r)) = 2r$;

11. $rc(gshack(W_6, C_3, r)) = src(gshack(W_6, C_3, r)) = 2r$;
12. $rc(gshack(W_6, C_4^1, r)) = src(gshack(W_6, C_4^1, r)) = r + 1$, dengan r ganjil.

5.2 Saran

Berdasarkan hasil penelitian mengenai analisa *rainbow connection* dan *strong rainbow connection* pada graf hasil operasi, dimana graf khusus yang digunakan adalah graf lintasan, graf lingkaran, graf roda, graf lengkap dan graf kipas, maka peneliti memberikan saran kepada pembaca agar melakukan penelitian di bidang ini, yaitu diantaranya bagaimanakah karakteristik suatu graf yang memiliki $rc(G) = src(G)$. Kemudian tentang *rainbow connection* dan *strong rainbow connection* pada graf hasil operasi $gshack(K_n, P_2, r)$, $gshack(K_n, C_3, r)$, $gshack(W_6, C_3, r)$ dengan subgraf penghubung yang lain dan pada graf hasil operasi $gshack(W_6, C_4^1, r)$ dengan r genap.

DAFTAR PUSTAKA

- Alfarisi, R. dan Dafik. 2014. The Rainbow Connection Number of Special graphs. *Prosiding Seminar Matematika dan Pendidikan Matematika FMIPA UNEJ*,1 No.1:457-461.
- Ardiyansah, R. dan Darmaji. 2013. Bilangan Kromatik Graf Hasil Amalgamasi Dua Buah Graf. *Jurnal Sains dan Seni Pomits*, 2 (1).
- Chartrand, G., Kalamazoo, G., Jhons, S., Valley, K. A., dan McKeon. 2008. *Rainbow Connection in Graphs*. *Jurnal:Math. Bohem.*, 133, No. 2, 85-98.
- Dafik, S. Setiawani, dan K.M.F. Azizah. 2015. *Generalized Shackle of Fans is a Super (a, d)-edge Anti magic Total Graph*. *Applied Mathematical Sciences*. Submitted.
- Darmawan, R. N. 2015. *Analisis Rainbow Connection Number pada Graf Khusus dan Hasil Operasinya*. Tidak dipublikasikan (Tesis). Jember: Universitas Jember.
- Fajariyanto, A. 2015. *Penerapan Rainbow Connection pada Graf-Graf Hasil Operasi*. Tidak dipublikasikan (Skripsi). Jember: Universitas Jember.
- Harary, F. 2007. *Graph Theory*. New London: Wesley.
- Harsya, A. Y., Agustin, I. H., dan Dafik. 2014. Pewarnaan Titik Pada Operasi Graf Lintasan, Graf Sikel, dan Graf Bintang. *Prosiding Seminar Matematika dan Pendidikan Matematika Universitas Jember*, 1 (1).
- Hartsfield, N. dan Ringel, G. 1990. *Pearls in Graph Theory*. Boston San Diego New York London: Academic Press.
- Histamedika, G. 2012. Rainbow Connection pada Beberapa Graf. *Matematika UNAND*, 2:17-25.
- Li, X. dan Sun, Y. 2011. *Rainbow Connection of Graphs- A survey*. ArXiv: 1101.5747v2[math.CO].

- Munir, R. 2009. *Matematika Diskrit Edisi 3*. Bandung: Informatika Bandung.
- Purwanto, H., Indriani, G., dan Dayanti, E. 2006. *Matematika Diskrit*. Jakarta: PT. Ercontara Rajawali.
- Slamin. 2009. *Desain Jaringan: Pendekatan Teori Graf*. Jember: Universitas Jember.
- Syafrizal, Sy., dan Estetikasari, Dewi. 2013. *On Rainbow Connection for Some Corona Graphs*. *Jurnal: Applied Mathematical Sciences.*, Vol. 7, No. 100, 4975-4979.
- Syafrizal, Sy., Medika, GH., Yulianti, Lyra. 2013. *The Rainbow Connection of Fan and Sun*. *Jurnal: Applied Mathematical Sciences.*, Vol. 7, No. 64, 3155-3159.
- Yulianti, A. dan Dafik. 2014. Rainbow Connection Number pada Operasi Graf. *Prosiding Seminar Matematika dan Pendidikan Matematika FMIPA UNEJ*,1 No.1:521-525..

LAMPIRAN

Lanjutan Hasil Penelitian Terdahulu $rc(G)$ dan $src(G)$

Graf	Hasil	Keterangan
Dl_n (Diamond Ladder); $n \geq 2$	$rc(Dl_n) = n + 1.$	Alfarisi, dkk, 2014
PC_n (Parachute Graph); $n \geq 2$	$rc(PC_n) = n + 1.$	Alfarisi, dkk, 2014
W_4^n (Windmill Graph); $n \geq 2$	$rc(W_4^n) = 3.$	Alfarisi, dkk, 2014
$H_{n,m}$ (Helmet Graph); $n \geq 3$; $m \geq 1$	$rc(H_{n,m}) = nm + 3.$	Alfarisi, dkk, 2014
Graph $P_n + C_n$; $n \geq 3$	$rc(P_n + C_n) = 2.$	Fajariyanto, 2014
Graph $C_n + S_n$; $n \geq 3$	$rc(C_n + S_n) = 2.$	Fajariyanto, 2014
Graph $P_n + W_n$; $n \geq 3$	$rc(P_n + W_n) = 2.$	Fajariyanto, 2014
Graph $C_n + W_n$; $n \geq 3$	$rc(C_n + W_n) = 2.$	Fajariyanto, 2014
Graph $S_n + W_n$; $n \geq 3$	$rc(S_n + W_n) = 2.$	Fajariyanto, 2014
Graph $P_n \square C_n$; $n \geq 2; m \geq 3$	$rc(P_n \square C_n) = n; m = 6.$ $rc(P_n \square C_n) = n + 1;$ $4 \leq m \leq 6.$ $rc(P_n \square C_n) = n + 2;$ $m \geq 6.$	Fajariyanto, 2014
Graph Amal($W_n, v = 1, r$) $\square P_2$; $n \geq 3; r \geq 3$	$rc(\text{Amal}(W_n, v = 1, r) \square P_2) = 4.$	Fajariyanto, 2014
Graph $P_n \otimes C_m$; $n \geq 3$	$rc(P_n \otimes C_m) = n.$	Fajariyanto, 2014
Graph $P_n[C_n]$; $n \geq 2; m \geq 3$	$rc(P_n[C_n]) = n - 1;$ $n - 1 \geq \frac{m}{2}.$ $rc(P_n[C_n]) = 1; m = 3;$ $n - 1 < \frac{m}{2}.$ $rc(P_n[C_n]) = \frac{m}{2};$ $n - 1 < \frac{m}{2};$ $m \text{ genap.}$ $rc(P_n[C_n]) = \frac{m-1}{2} + 1;$ $n - 1 < \frac{m}{2};$ $m \text{ ganjil} > 3.$	Fajariyanto, 2014

Graf	Hasil	Keterangan
<i>Graph</i> $P_n[W_m]$; $n \geq 3; m \geq 3$	$rc(P_n[W_m]) = 3; n = 3.$ $rc(P_n[W_m]) = n - 1;$ $n \geq 4.$	Fajariyanto,2014
<i>Graph</i> $P_n[S_m]$; $n \geq 3; m \geq 3$	$rc(P_n[S_m]) = 3; n = 3.$ $rc(P_n[S_m]) = n - 1;$ $n \geq 4.$	Fajariyanto,2014
<i>Graph Amal</i> ($C_n, v = 1, r$) $\square P_2; n \geq 3; r \geq 3$	$rc(Amal(C_n, v = 1, r)$ $\square P_2) = n + 1.$	Fajariyanto,2014
<i>Graph Amal</i> ($P_n, v = 1, r$) $\square P_2; n \geq 3; r \geq 3$	$rc(Amal(P_n, v = 1, r)$ $\square P_2) = 2n.$	Fajariyanto,2014
<i>Graph</i> $mP_n + K_1; m \geq 2;$ $n \geq 2$	$rc(mP_n + K_1) = 3.$	Darmawan,2015
<i>Graph</i> $mP_n + K_1; m \geq 2;$ $n \geq 2$	$src(mP_n + K_1) =$ $(\lceil \frac{n}{3} \rceil) m.$	Darmawan,2015
<i>Graph</i> $S_n \square P_m; n \geq 3;$ $m \geq 2$	$rc(S_n \square P_m) =$ $src(S_n \square P_m) =$ $n + m - 1.$	Darmawan,2015
<i>Graph</i> $W_n \square P_m; n \geq 3;$ $m \geq 2$	$rc(W_n \square P_m) = m; n = 3.$ $rc(W_n \square P_m) = m + 1;$ $4 \leq n \leq 6.$ $rc(W_n \square P_m) = m + 2;$ $n \geq 7.$	Darmawan,2015
<i>Graph</i> $W_n \square P_m; n \geq 3;$ $m \geq 2$	$src(W_n \square P_m) =$ $rc(W_n \square P_m); n = 3.$ $src(W_n \square P_m) =$ $rc(W_n \square P_m);$ $4 \leq n \leq 6.$ $src(W_n \square P_m) =$ $\lceil \frac{n}{3} \rceil + m - 1; n \geq 7.$	Darmawan,2015
<i>Graph</i> $P_n \odot C_m; n \geq 2;$ $m \geq 3$	$rc(P_n \odot C_m) = 2n - 1;$ $m = 3.$ $rc(P_n \odot C_m) = 3n - 1;$ $m \geq 4.$	Darmawan,2015

Graf	Hasil	Keterangan
$Graph P_n \odot C_m; n \geq 2; m \geq 3$	$src(P_n \odot C_m) =$ $rc(P_n \odot C_m); m = 3.$ $src(P_n \odot C_m) =$ $rc(P_n \odot C_m);$ $4 \leq m \leq 6.$ $src(P_n \odot C_m) =$ $n \left(\lceil \frac{m}{3} \rceil\right) + (n - 1); m \geq 7.$	Darmawan,2015
$Graph shack[(P_2 \otimes W_3), n]; n \geq 2$	$rc(shack[(P_2 \otimes W_3), n]) =$ $src(shack[(P_2 \otimes W_3), n]) = 3n.$	Darmawan,2015
$Graph shack[(P_3 \otimes C_3), n]; n \geq 2$	$rc(shack[(P_3 \otimes C_3), n]) =$ $src(shack[(P_3 \otimes C_3), n]) = 4n.$	Darmawan,2015
$Graph Amal[(S_4 + K_1), v = 1, n]; n \geq 2$	$rc(Amal[(S_4 + K_1), v = 1, n]) = 3.$	Darmawan,2015
$Graph Amal[(S_4 + K_1), v = 1, n]; n \geq 2$	$src(Amal[(S_4 + K_1), v = 1, n]) = 2n.$	Darmawan,2015
$Graph Amal[(S_4 \square P_2), v = 1, n]; n \geq 2$	$rc(Amal[(S_4 \square P_2), v = 1, n]) =$ $src(Amal[(S_4 \square P_2), v = 1, n]) = 5n.$	Darmawan,2015
$Graph Pr_{(n,m)}; n \geq 3; m \geq 1$	$rc(Pr_{(n,m)}) = src(Pr_{(n,m)}) = m; n = 3.$ $rc(Pr_{(n,m)}) = src(Pr_{(n,m)}) = \lceil \frac{n}{2} \rceil + (m - 1); n \geq 4.$	Darmawan,2015
$Graph AP_n; n \geq 3; m \geq 1$	$rc(AP_n) = src(AP_n) = 2; n = 3.$ $rc(AP_n) = src(AP_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil; n \geq 4.$	Darmawan,2015