DIMENSI METRIK PADA BEBERAPA GRAF KHUSUS DAN OPERASINYA DENGAN *INDUCED SUBGRAPH* YANG BEBAS TITIK TERISOLASI

SKRIPSI

Oleh
Lambang Dwi Cahyo
NIM 121810101067

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER
2016

DIMENSI METRIK PADA BEBERAPA GRAF KHUSUS DAN OPERASINYA DENGAN *INDUCED SUBGRAPH* YANG BEBAS TITIK TERISOLASI

SKRIPSI

diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan Program Studi Matematika (S1) dan mencapai gelar Sarjana Sains

Oleh

Lambang Dwi Cahyo
NIM 121810101067

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER
2016

HALAMAN PERSEMBAHAN

Dengan menyebut nama Allah yang maha pengasih lagi maha penyayang, serta sholawat atas Nabi Muhammad S.A.W, kupersembahkan suatu kebahagiaan penggalan bait dalam perjalanan hidupku teriring rasa terima kasih kepada:

1. Ayahanda Mulyono, Ibunda Juwanti, Kakakku Ika Fitri Lesrati dan Aan Puji Sunaryo, serta Adikku Agung Tri Mulya yang senantiasa mengalirkan rasa cinta, kasih sayangnya dan doa yang tiada pernah putus yang selalu mengiringiku dalam meraih cita-cita;
2. Ibu Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si. dan Bapak Prof. Drs. Dafik, M.Sc, Ph.D selaku pembimbing skripsi yang dengan sabar telah memberikan ilmu dan bimbingan selama menyelesaikan skripsiku;
3. Teman - teman BATHIC'S 12 dan RSC;
4. Almamater Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

MOTTO

"Pekerjaan yang baik adalah pekerjaan yang dapat terselesaikan".

"Belajar tidak mengharuskan kita untuk bisa, karena semua yang kita pelajari hanya bersifat relatif".

"Jadilah orang yang sedikit".

"Allah meninggikan orang-orang yang beriman diantara kamu dan orang-orang yang diberi ilmu pengetahuan beberapa derajat."
(QS. Al-Mujadilah: 11) *)

"Sesuatu yang belum dikerjakan, seringkali tampak mustahil. Kita baru akan yakin kalau kita telah berhasil melakukannya dengan baik."
(Evelyn Underhill)**)

---

*) Departemen Agama Republik Indonesia. 2004. Al-*Qur'an* dan Terjemahannya.

**) https://hitamputihkita.wordpress.com/pencerahan-2/

PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Lambang Dwi Cahyo

NIM : 121810101067

menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang berjudul: ”Dimensi Metrik pada Beberapa Graf Khusus dan Operasinya dengan *Induced Subgraph* yang Bebas Titik Terisolasi” adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali jika dalam pengutipan substansi disebutkan sumbernya, dan belum diajukan pada instansi manapun, serta bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa adanya tekanan dan paksaan dari pihak manapun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, Juni 2016

Yang menyatakan,

Lambang Dwi Cahyo

NIM. 121810101067

SKRIPSI

DIMENSI METRIK PADA BEBERAPA GRAF KHUSUS DAN OPERASINYA DENGAN *INDUCED SUBGRAPH* YANG BEBAS TITIK TERISOLASI

Oleh

Lambang Dwi Cahyo
NIM 121810101067

Dosen Pembimbing 1 : Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si.
Dosen Pembimbing 2 : Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D.

PENGESAHAN

Skripsi berjudul ”Dimensi Metrik pada Beberapa Graf Khusus dan Operasinya dengan *Induced Subgraph* yang Bebas Titik Terisolasi” telah diuji dan disahkan oleh Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember pada:
hari :
tanggal :
tempat : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember

Tim Penguji :

Dosen Pembimbing Utama,	Dosen Pembimbing Anggota,
Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si. NIP. 198408012008012006	Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D. NIP. 196808021993031004
Dosen Penguji I,	Dosen Penguji II,
Kusbudiono, S.Si., M.Si. NIP.197704302005011001	Kosala Dwidja Purnomo, S.Si., M.Si. NIP. 196908281998021001

Mengesahkan,
Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Jember

Drs. Sujito, Ph.D
NIP. 196102041987111001

RINGKASAN

Dimensi Metrik pada Beberapa Graf Khusus dan Operasinya dengan *Induced Subfraph* yang Bebas Titik Terisolasi; Lambang Dwi Cahyo, 121810-101067; 2016: 109 halaman; Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Jember.

Teori graf termasuk dalam cabang ilmu matematika diskrit yang merepresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan antara objek-objek tersebut. Teori graf merupakan salah satu cabang ilmu matematika yang dapat diterapkan pada permasalahan di dunia nyata. Beberapa aplikasi dari teori graf terdapat pada bidang sains, komputasi, dan arsitektur.

Salah satu konsep ilmu dalam teori graf yang dapat menyelesaikan permasalahan adalah dimensi metrik. Pada tahun 1975, konsep dimensi metrik diperkenalkan oleh Slater (Chartrand et al). Konsep tersebut muncul dari himpunan pembeda yang dikenal dengan istilah *locating set*. Himpunan pembeda W didefinisikan sebagai himpunan dari *vertices* pada suatu graf G sedemikian sehingga untuk setiap *vertex* di G menghasilkan jarak yang berbeda terhadap setiap *vertex* di W. Dimensi metrik adalah kardinalitas terkecil dari himpunan pembeda. Himpunan *resolving* dengan kardinalitas minimum disebut himpunan *resolving* minimum, dan kardinalitas tersebut menyatakan dimensi metrik dari G serta dinotasikan dengan $dim(G)$ (Harary, 2009). Sebuah himpunan pembeda W pada graf G dikatakan himpunan pembeda tak terisolasi (*non-isolated resolving set*) jika subgraf $\langle W \rangle$ diinduksi oleh titik (simpul) tak terisolasi. Kardinalitas minimum dari himpunan pembeda tak terisolasi pada suatu graf dikatakan *non-isolated resolving number* $nr(G)$ (Chitra dan Arumugam, 2010).

Pada penelitian ini menggunakan metode penelitian eksploratif dan terapan. Penelitian eksploratif adalah jenis penelitian yang bertujuan menggali hal-hal yang ingin diketahui oleh peneliti dan hasil penelitian dapat digunakan sebagai dasar

penelitian selanjutnya. Penelitian terapan *(applied research)* merupakan penyelidikan yang hati-hati, sistematik dan terus-menerus terhadap suatu masalah dengan tujuan untuk digunakan dengan segera untuk keperluan tertentu. Penelitian ini bertujuan untuk mencari nilai dimensi metrik dan *non-isolated resolving set* pada graf khusus. Graf yang digunakan adalah graf kipas F_n, amalgamasi graf kipas $amal(F_n, v = A, m)$, joint graf lintasan dan graf lingkaran $P_n + C_m$, graf parasut PC_n, amalgamasi graf parasut $amal(PC_n, v = A, m)$, graf power ${P_n}^{C_m}$, sakel graf kipas $shack(F_n, v = 1, m)$, sakel graf parasut $shack(PC_n, v = 1, m)$, sehingga pada penelitian ini dihasilkan 8 teorema, antara lain:

1. **Teorema 4.1** Untuk $n \geq 7$, nilai dimensi metrik dan *non-isolated resolving set* graf kipas F_n adalah $dim(F_n)$ = $\lceil\frac{n-2}{2}\rceil$ dan $nr(F_n)$ = $\lceil\frac{n}{2}\rceil$;
2. **Teorema 4.2** Untuk $n \geq 5$, nilai dimensi metrik dan *non-isolated resolving set* Graf sakel parasut $shack(PC_n, v, m)$ adalah $dim(shack(PC_n, v, m))$ = $(\lfloor\frac{n}{2}\rfloor m)$ dan $nr(shack(PC_n, v, m))$ = $(\lfloor\frac{n}{2}\rfloor m) + m$;
3. **Teorema 4.3** Untuk $n \geq 6$, nilai dimensi metrik dan *non-isolated resolving set* amalgamasi graf kipas $amal(F_n, v = A, m)$ adalah:

$$nr(amal(F_n, v = A, m)) = \begin{cases} \frac{nm}{2}, \text{ untuk } n = \text{genap} \\ \frac{nm-m}{2} + 1, \text{ untuk } n = \text{ganjil;} \end{cases}$$

4. **Teorema 4.4** Untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 7$, nilai dimensi metrik dan *non-isolated resolving set* graf $joint\ P_n + C_m$ adalah $dim(P_n + C_m)$ = $\lfloor\frac{n}{2}\rfloor + \lfloor\frac{m-1}{2}\rfloor$ dan $nr(P_n + C_m)$ = $\lfloor\frac{n}{2}\rfloor + \lfloor\frac{m-1}{2}\rfloor$;
5. **Teorema 4.5** Untuk $n \geq 5$, nilai dimensi metrik dan *non-isolated resolving set* graf kipas $Shack(F_n, v, m)$ adalah:

$$nr(Shack(F_n, v, m)) = \begin{cases} \frac{nm}{2} + 1, \text{ untuk } n = \text{genap} \\ \frac{nm-3m}{2} + 1 + m, \text{ untuk } n = \text{ganjil;} \end{cases}$$

6. **Teorema 4.6** Untuk $n \geq 7$, nilai dimensi metrik dan *non-isolated resolving set* graf parasut PC_n adalah $dim(PC_n)$ = $\lceil \frac{n-2}{2} \rceil$ dan $nr(PC_n)$ = $\lceil \frac{n}{2} \rceil$;
7. **Teorema 4.7** Untuk $n \geq 7$, nilai dimensi metrik dan *non-isolated resolving set* graf amalgamasi parasut $amal(PC_n, v, n)$ adalah:

$$nr(amal(PC_n, v = A, m)) = \begin{cases} \frac{nm}{2}, \text{ untuk } n = \text{genap} \\ \frac{nm-m}{2} + 1, \text{ untuk } n = \text{ganjil;} \end{cases}$$

8. **Teorema 4.8** Untuk $n \geq 4$ dan $m \geq 6$, nilai dimensi metrik dan *non-isolated resolving set* graf power lintasan dengan lingkaran ${P_n}^{C_m}$ adalah $dim({P_n}^{C_m})$ = $2n-3$ dan $nr({P_n}^{C_m})$ = $2n - 3$.

KATA PENGANTAR

Puji syukur ke hadirat Allah SWT, atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul ”Dimensi Metrik pada Beberapa Graf Khusus dan Operasinya dengan *Induced Subgraph* yang Bebas Titik Terisolasi ”. Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat menyelesaikan pendidikan strata satu (S1) pada Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Penyusunan skripsi ini tidak lepas dari bantuan berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan terima kasih kepada :

1. Drs. Sujito, Ph.D., selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
2. Kusbudiono, S.Si., M.Si., selaku Ketua Jurusan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
3. Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si., selaku Dosen Pembimbing Utama, Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D., selaku Dosen Pembimbing Anggota, Kusbudiono, S.Si., M.Si., selaku dosen Penguji I, dan Kosala Dwidja Purnomo, S.Si., M.Si., selaku dosen penguji II, yang telah meluangkan waktu, pikiran, dan perhatian selama penulisan skripsi ini;
4. Kusbudiono, S.Si., M.Si., selaku Dosen Pembimbing Akademik yang telah membimbing penulis selama menjadi mahasiswa;
5. dosen dan karyawan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
6. keluargaku tersayang Bulek Sugiarti, Bulek Satemi, Bulek Kusmiati, Bulek sumiyati, Bulek Supiyani, Mak Jumiten, Mak Sanimah, Mak Sumarmi, Mbah Legiman, Pakdhe Riyadi, Om Jamhori (Alm), Om Suprayetno, sirda, mbak Devi, Mbak Indra, Mbak Ira, Mbak Firda, Mas Eko, Mas Yono, Mas Naim, Bagus, Ibra, Rafa, yang selalu memberikan motivasi dan dukungan;

7. sahabat terbaikku Ariny yang senantiasa membantuku dan menorehkan sebuah pengalaman indah yang tak terlupakan;
8. teman-teman pejuang graf;
9. saudara-saudaraku BATHIC'S 12 yang selalu memberikan dukungan untuk terus semangat;
10. semua pihak yang telah membantu terselesaikannya skripsi ini.

Penulis juga menerima segala kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan skripsi ini. Akhirnya penulis berharap, semoga skripsi ini dapat bermanfaat.

Jember, Juni 2016

Penulis

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR GAMBAR

Halaman

DAFTAR TABEL

Halaman

BAB 1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori graf diperkenalkan pertama kali oleh L. Euler, matematikawan Swiss pada tahun 1736 melalui penyelesaian tentang masalah jembatan Konigsberg menggunakan teori graf. Graf adalah kumpulan titik atau $node$ yang satu sama lain dihubungkan oleh sisi atau $edge$. Suatu graf $G(V(G), E(G))$ terdiri atas himpunan berhingga $V(G)$ yang anggotanya disebut titik *vertex*, dan himpunan berhingga $E(G)$ dengan anggotanya disebut sisi *edge*, dimana sisi tersebut merupakan pasangan tak-terurut dari titik-titik yang berbeda pada $V(G)$. Teori graf merupakan cabang ilmu matematika diskrit yang memiliki banyak penerapan di berbagai ilmu seperti fisika, biologi, arsitektur, transportasi, teknologi komputer, ekonomi, sosial dan bidang lainnya. Teori graf juga dapat diaplikasikan untuk menyelesaikan persoalan - persoalan, seperti *Travelling Salesperson Problem*, *Chinese Postman Problem*, *Shortest Path*, *Electrical Network Problem* dan *Graph Colorring* (Rosen, 2003). Akan tetapi, meskipun pada awalnya graf diciptakan untuk diterapkan dalam penyelesaian kasus, namun graf telah mengalami perkembangan yang sangat luas didalam teori graf itu sendiri, salah satunya tentang Dimensi Metrik (*Metric Dimension*).

Secara matematis, *Metric Dimension* dipelajari sejak tahun 1975 oleh Slater yang kemudian dikembangkan lagi pada tahun 1976 oleh Harary dan Melter. Dimensi metrik adalah kardinalitas minimum himpunan pembeda (*resolving set*) pada G. Untuk titik-titik u dan v dalam *graph* terhubung G, jarak $d(u, v)$ adalah panjang dari lintasan terpendek antara u dan v pada G. Untuk himpunan terurut $W = (W_1, W_2, ..., W_k)$ dari titik-titik dalam *graph* terhubung G dan *vertex* *r* pada G, adalah vektor-k(pasangan k-tuple). $r(v|W) = (d(v, w_1), d(v, w_2)$,..., $d(v, w_k))$

menunjukkan representasi dari v pada W. Himpunan W dinamakan himpunan pembeda (*resolving set*) G jika *vertices* G mempunyai representasi berbeda. Himpunan *resolving* dengan kardinalitas minimum disebut himpunan *resolving* minimum, dan kardinalitas tersebut menyatakan dimensi metrik dari G serta dinotasikan dengan $dim(G)$ (Harary, 2009). Sebuah himpunan pembeda W pada graf G dikatakan himpunan pembeda tak terisolasi (*non-isolated resolving set*) jika subgraf (W) diinduksi oleh titik (simpul) tak terisolasi. Kardinalitas minimum dari himpunan pembeda tak terisolasi pada suatu graf dikatakan *non-isolated resolving number* $nr(G)$ (Chitra dan Arumugam, 2010).

Saifudin (2015) melakukan penelitian tentang dimensi metrik pada Graf Tangga (L_n), Shackle Graf Tangga (SL_n), Graf Komplemen (L_n), Graf Tangga Tiga (TCL_n) dan Graf komposisi $(L_n)[L_1]$. Kemudian di tahun yang sama Fitriana (2015) juga melakukan penelitian dimensi metrik pada Graf *Cartesiant Product* $C_3\square P_n$, Graf gShack (C_5^2, P_2, n), Graf Amal (B_3, n), Graf E E_n, Graf *Cartesiant Product* $W_4\square P_n$, Graf *Cartesiant Product* $W_3^2\square P_n$, Graf *Cartesiant Product* $F_{1,3}\square P_n$, Graf $C_5\square P_n$. Setelah itu Santi (2015) melakukan penelitian dimensi metrik pada Graf Kipas F_n, Graf Kipas $F_{2,n}$, Shack(F_4, v, n), Shack(F_4, e, n), Amal(F_4, v, n), Graf Bintang S_n, Graf Roda W_n, gShack(W_6, C_1^4, n), Graf Antiprisma H_n dan Graf Prisma$(H_{5,n})$.

Berdasarkan penelitian sebelumnya, maka peneliti akan mengembangkan teori *metric dimension* dengan *induced subgraph* yang bebas titik terisolasi atau biasa disebut dengan (*non-isolated resolving set*) pada graf khusus yaitu graf kipas F_n, amalgamasi graf kipas $amal(F_n, v = A, m)$, joint graf lintasan dan graf lingkaran $P_n + C_m$, graf parasut PC_n, amalgamasi graf parasut $amal(PC_n, v = A, m)$, graf power ${P_n}^{C_m}$, sakel graf kipas $shack(F_n, v = 1, m)$, sakel graf parasut $shack(PC_n, v = 1, m)$. Dalam penelitian ini ditentukan titik seminimal mungkin pada graf dengan ketentuan semua titik yang tidak berfungsi sebagai *non-isolated resolving set* harus memiliki jarak yang berbeda dengan semua titik *non-isolated resolving set*.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka dapat dirumuskan masalah dalam penelitian ini sebagai berikut:

a. Bagaimana menentukan kardinalitas elemen pada graf khusus dan graf hasil operasi yaitu graf kipas F_n, amalgamasi graf kipas $amal(F_n, v = A, m)$, joint graf lintasan dan graf lingkaran $P_n + C_m$, graf parasut PC_n, amalgamasi graf parasut $amal(PC_n, v = A, m)$, graf power ${P_n}^{C_m}$, sakel graf kipas $shack(F_n, v = 1, m)$, sakel graf parasut $shack(PC_n, v = 1, m)$?

b. Bagaimana menentukan nilai dimensi metrik dari graf khusus dan graf hasil operasi yaitu graf kipas F_n, amalgamasi graf kipas $amal(F_n, v = A, m)$, joint graf lintasan dan graf lingkaran $P_n + C_m$, graf parasut PC_n, amalgamasi graf parasut $amal(PC_n, v = A, m)$, graf power ${P_n}^{C_m}$, sakel graf kipas $shack(F_n, v = 1, m)$, sakel graf parasut $shack(PC_n, v = 1, m)$?

c. Bagaimana menentukan *non-isolated resolving number* dari graf khusus dan graf hasil operasi yaitu graf kipas F_n, amalgamasi graf kipas $amal(F_n, v = A, m)$, joint graf lintasan dan graf lingkaran $P_n + C_m$, graf parasut PC_n, amalgamasi graf parasut $amal(PC_n, v = A, m)$, graf power ${P_n}^{C_m}$, sakel graf kipas $shack(F_n, v = 1, m)$, sakel graf parasut $shack(PC_n, v = 1, m)$?

1.3 Tujuan Penelitian

Sesuai dengan rumusan masalah dan latar belakang masalah, maka tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

a. Bagaimana menentukan kardinalitas elemen pada graf khusus dan graf hasil operasi yaitu graf kipas F_n, amalgamasi graf kipas $amal(F_n, v = A, m)$, joint graf lintasan dan graf lingkaran $P_n + C_m$, graf parasut PC_n, amalgamasi graf parasut $amal(PC_n, v = A, m)$, graf power ${P_n}^{C_m}$, sakel graf kipas $shack(F_n, v = 1, m)$, sakel graf parasut $shack(PC_n, v = 1, m)$.

b. Bagaimana menentukan nilai dimensi metrik dari graf khusus dan graf hasil operasi yaitu graf kipas F_n, amalgamasi graf kipas $amal(F_n, v = A, m)$, joint graf lintasan dan graf lingkaran $P_n + C_m$, graf parasut PC_n, amalgamasi graf parasut $amal(PC_n, v = A, m)$, graf power ${P_n}^{C_m}$, sakel graf kipas $shack(F_n, v = 1, m)$, sakel graf parasut $shack(PC_n, v = 1, m)$.

c. Bagaimana menentukan *non-isolated resolving number* dari graf khusus dan graf hasil operasi yaitu graf kipas F_n, amalgamasi graf kipas $amal(F_n, v = A, m)$, joint graf lintasan dan graf lingkaran $P_n + C_m$, graf parasut PC_n, amalgamasi graf parasut $amal(PC_n, v = A, m)$, graf power ${P_n}^{C_m}$, sakel graf kipas $shack(F_n, v = 1, m)$, sakel graf parasut $shack(PC_n, v = 1, m)$.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari hasil penelitian ini adalah sebagai berikut:

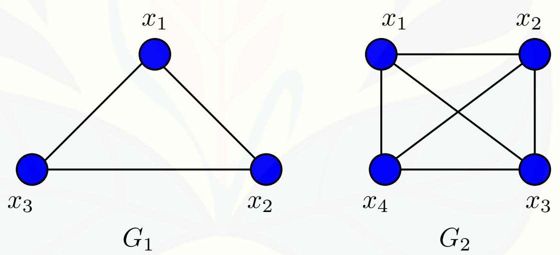
a. Menambah wawasan baru dalam bidang teori graf, khususnya mengenai teori *non-isolated resolving set*;

b. Hasil penelitian ini diharapkan dapat digunakan sebagai pengembangan ilmu dalam menentukan *non-isolated resolving number* untuk hasil operasi graf-graf yang lainnya.

BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Terminologi Dasar Graf

Graf G adalah pasangan himpunan (V, E) dimana V adalah himpunan tidak kosong dari elemen yang disebut titik (*vertex*), dan E adalah himpunan sisi (boleh kosong) dari pasangan tidak terurut dua titik (v_1, v_2) dimana $v_1, v_2 \in V$, yang disebut sisi (*edges*). V disebut himpunan titik dari G dan E disebut himpunan sisi dari G. Seringkali kita menuliskan $V(G)$ adalah himpunan titik dari graf G dan $E(G)$ adalah himpunan sisi dari graf G. Jadi sebuah graf dimungkinkan tidak mempunyai sisi satu buah pun, tetapi titiknya harus ada minimal satu. Graf yang hanya mempunyai satu buah titik tanpa sebuah sisi pun dinamakan graf trivial (Munir, 2009). Contoh graf dengan 3 titik dan 4 titik dapat dilihat pada Gambar 2.1.



Gambar 2.1 Graf G_1 dan G_2

Suatu graf dengan p buah verteks dan q buah sisi ditulis dengan $G(p, q)$. Secara umum graf dapat digambarkan dengan suatu diagram dimana verteks yang ditunjukkan sebagai titik yang dinotasikan dengan $v_i, i = 1, 2, 3...$ dan sisi yang digambarkan dengan sebuah garis lurus atau dengan garis lengkung yang menghubungkan dua *vertex* v_i, v_j dan dinotasikan $e_k, k = 1, 2, 3, ..., q$ disebut dengan simpul - simpul *vertex* dari e_k. Dengan kata lain titik pada graf dapat dinomori dengan huruf, dengan bilangan asli, atau dengan menggunakan huruf dan angka (bilangan asli). Misalkan v_i dan v_j adalah titik pada suatu graf, maka sisi yang menghubungkan titik v_i dan v_j dinyatakan dengan pasangan (v_i ,v_j)atau dengan lambang e_1, e_2, e_3, ..., e_n (Douglas, 1996). Pada gambar 2.1, G_1 adalah graf dengan $|V(G_1)| = 3$ dan $|E(G_1)| = 3$, sedangkan G_2 adalah graf dengan $|V(G_2)| = 4$ dan $|E(G_2)| = 6$. Pada G_1 adalah graf yang mempunyai himpunan titik $V(G_1) = x_1, x_2, x_3$ dan $E(G_1) = x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3$ dan G_2 adalah graf yang mempunyai himpunan titik $V(G_2) = x_1, x_2, x_3, x_4$ dan $E(G_2) = x_1x_2, x_1x_4, x_1x_3, x_2x_4, x_2x_3, x_3x_4$. Sebuah sisi dinamakan *loop* jika sisi tersebut berawal dan berakhir pada titik yang sama. Sebuah sisi dinamakan sisi ganda (*parallel*) jika dua atau lebih sisi yang mempunyai titik-titik ujung yang sama.

Sebuah titik pada suatu graf dikatakan bersisian (*incident*) dengan sebuah sisi pada graf tersebut apabila titik tersebut merupakan titik ujung dari sisi tersebut. Menurut Hartsfield dan Ringel (1990), sebuah titik v_1 dikatakan *incident* dengan sebuah sisi e_1 jika v_1 merupakan titik ujung dari e_1, demikian juga e_1 dikatakan *incident* dengan v_1 jika v_1 merupakan titik ujung dari e_1. Sebagai contoh, pada graf G_1 Gambar 2.1, x_1 *adjacent* dengan x_2, x_2 dan x_3. Pada graf G_1 Gambar 2.1, x_1 dan x_3 *incident* dengan x_1x_3.

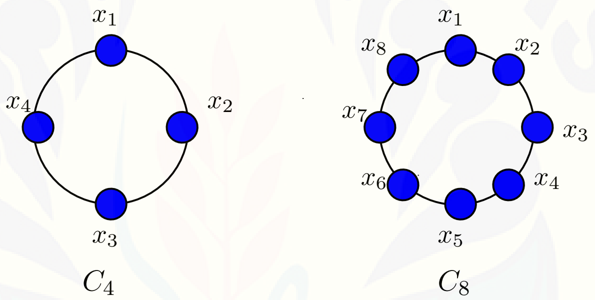
Derajat (*degree*) adalah banyaknya sisi yang *incident* pada suatu titik. Derajat dinotasikan dengan d_i (*index* i menunjukkan titik ke-i pada graf). Sebuah titik yang mempunyai derajat 0 (nol) disebut titik terisolasi (*isolated vertex*), artinya titik tersebut tidak bertetangga dengan titik lain. Jika ada suatu graf yang setiap titiknya memiliki derajat yang sama, maka graf tersebut dinamakan graf regular. Derajat terkecil dari suatu graf G adalah banyaknya minimal sisi yang *incident* pada suatu titik v_i di graf G diantara titik-titik lainnya di graf G yang dinotasikan dengan $\delta\ (G)$. Derajat terbesar dari suatu graf G adalah banyaknya maksimal sisi yang *incident* pada suatu titik v_i di graf G diantara titik-titik lainnya di graf G yang dinotasikan dengan $\Delta\ (G)$. Sebagai contoh, graf G_2 pada Gambar 2.1 memiliki $\Delta\ (G) = 3$.

2.2 Graf Khusus dan Operasi Graf

Graf khusus adalah graf yang mempunyai keunikan dan karakteristik bentuk khusus. Keunikannya adalah graf khusus tidak isomorfis dengan graf lainnya. Karekteristik bentuknya dapat diperluas sampai order n tetapi simetris. Berikut ini adalah beberapa contoh graf khusus.

a. Graf lingkaran (*Cycle Graph*)

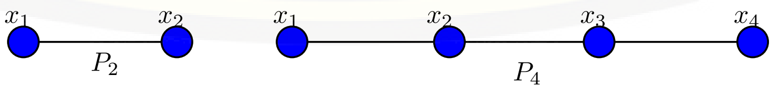
Graf lingkaran adalah graf sederhana yang setiap titiknya berderajat dua. Graf lingkaran dengan n titik dilambangkan dengan C_n dimana $n \geq 3$. Kardinalitas titik dan sisinya adalah $|V(C_n)| = n$ dan $|E(C_n)| = n$. Contoh dari graf lingkaran bisa dilihat pada gambar 2.2.



Gambar 2.2 Graf Lingkaran C_4 dan C_8

b. Graf Lintasan

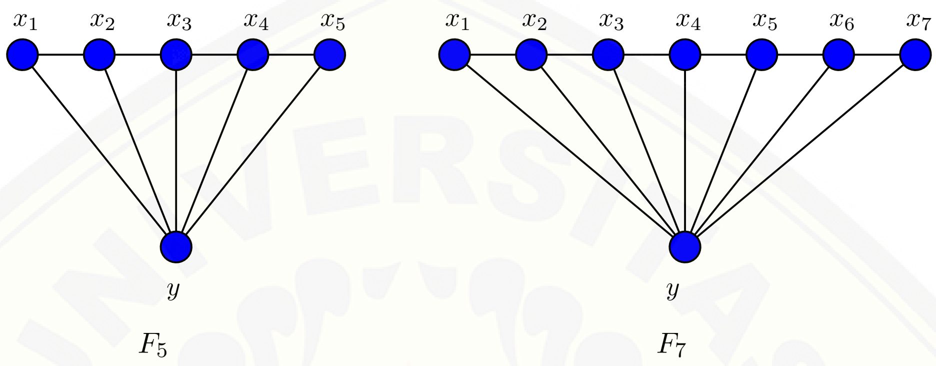
Graf lintasan adalah graf yang terdiri dari satu lintasan. Graf lintasan dengan n buah titik dilambangkan dengan P_n dimana $n \geq 2$. Kardinalitas titik dan sisinya adalah $|V(P_n)| = n$ dan $|E(P_n)| = n - 1$. Contoh graf lintasan dapat dilihat pada Gambar 2.11.



Gambar 2.3 Graf Lintasan P_2 dan P_4

c. Graf Kipas (*Fan Graph*)

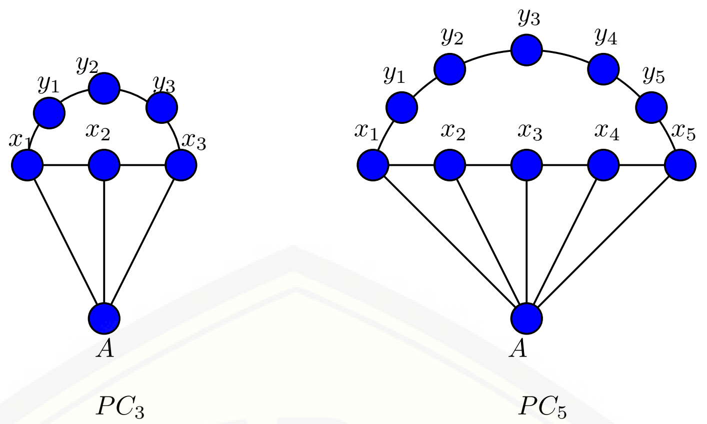
Graf kipas dinotasikan dengan F_n dimana $n \geq 3$, yaitu graf yang didapat dengan menghubungkan semua titik dari graf lintasan P_n pada suatu titik yang disebut titik pusat. Kardinalitas titik dan sisinya adalah $|V(F_n)| = n + 1$ dan $|E(F_n)| = 2n - 1$. Contoh graf kipas dapat dilihat pada Gambar 2.4.



Gambar 2.4 Graf Kipas F_5 dan F_7

d. Graf Parasut

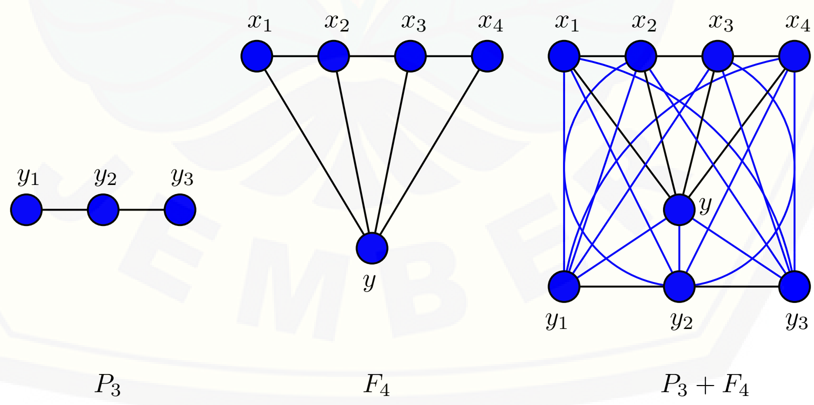
Graf Parasut adalah graf dari family graf kipas yang diperoleh dari hasil pengembangan graf dengan menarik dan menyerupai parasut. Graf Parasut dinotasikan dengan PC_n dimana $V(PC_n) = A, x_i, y_i; 1 \leq i \leq n$ dan $E(PC_n) = y_n x_1, y_1, x_n, Ax_i; 1 \leq i \leq n \bigcup x_i x_{i+1}, y_i y_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1$, Kardinalitas titik dan sisinya adalah $|V(PC_n)| = 2n + 1$ dan $|E(PC_n)| = 3n$ (agustin, 2014). Contoh graf parasut dapat dilihat pada Gambar 2.5



Gambar 2.5 Graf Parasut PC_3 dan PC_5

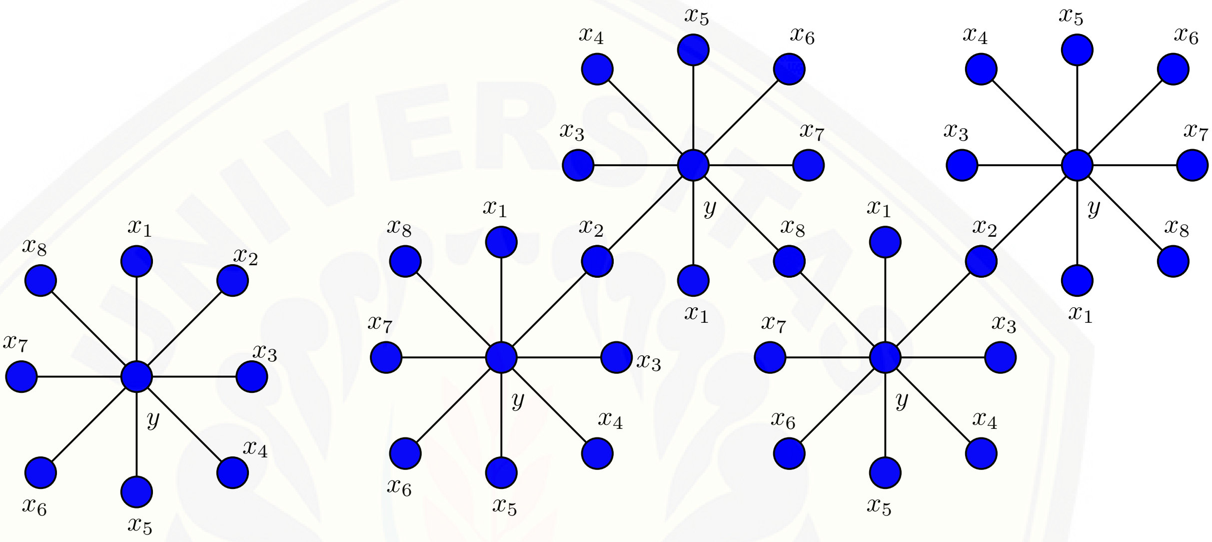
Operasi graf merupakan operasi terhadap dua buah graf atau lebih sehingga menghasilkan graf baru. Berikut ini beberapa macam operasi graf beserta contohnya.

Definisi 2.1. *Joint dari graf* $G_1(V_1, E_1)$ *dan* $G_2(V_2, E_2)$ *dinotasikan dengan* $G_1 + G_2$*, yaitu graf dengan* $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ *dan* $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{uv \mid u \in V(G_1), v \in V(G_2)\}$ *(Harsya et al., 2014).* Contoh operasi *joint* dapat dilihat pada Gambar 2.6.



Gambar 2.6 Graf Hasil Operasi *Joint* dari P_3 dan F_4

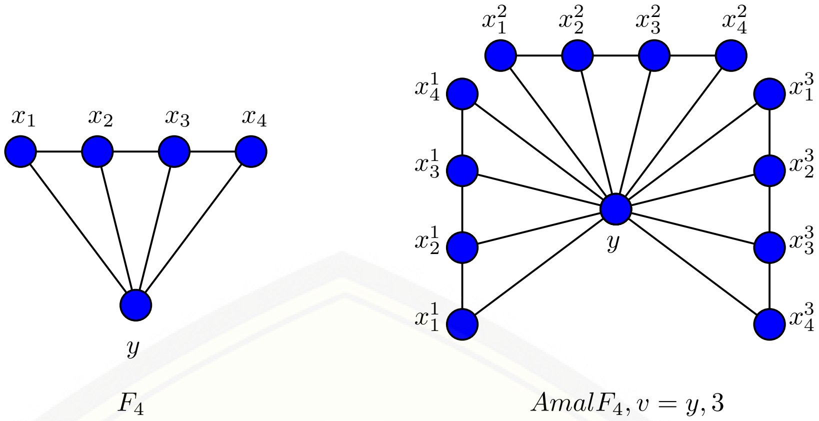
Definisi 2.2. *Shackle dari suatu graf* G *dinotasikan dengan* $Shack(G, r)$ *dimana* G *adalah graf terhubung non trivial,* r *menyatakan banyaknya graf* G *yang akan di-shackle dan untuk setiap* G_i *dan* G_{i+1}*, dimana* $1 \leq i \leq r$ *terdapat tepat satu titik yang sama yang disebut vertex linkage, dimana* $r - 1$ *vertex linkage semua berbeda (Harsya et al., 2014).* Contoh operasi *shackle* dapat dilihat pada Gambar 2.7.



S_8 $Shack(S_8, 4)$

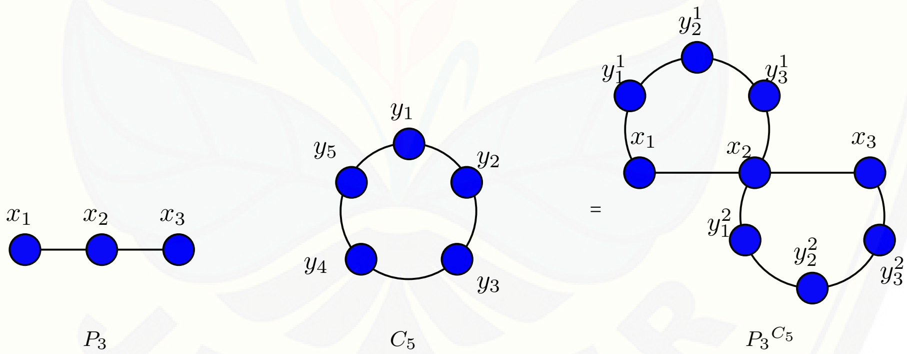
Gambar 2.7 Graf Hasil Operasi *Shackle* dari S_8

Definisi 2.3. $Amalgamation$ *dinotasikan dengan* $Amal(H_i, v_{0i})$*. Misalkan* H_i *adalah suatu keluarga graf berhingga dan setiap* H_1 *mempunyai suatu titik* v_{0i} *yang disebut titik terminal (Ardiyansyah, 2013).* Contoh operasi *amalgamation* dapat dilihat pada Gambar 2.8.



Gambar 2.8 Graf Hasil Operasi *Amalgamation* dari F_4

Definisi 2.4. *Graf Eksponensial* (Power graph) *yang dinotasikan dengan* G^H *adalah sebuah graf yang dibangun dari graf* G *dan* H*, dimana setiap sisi pada graf* G *diganti oleh graf* H*. Apabila* $|V(G)| = p_1$ *dan* $|E(G)| = q_1$*, sedangkan* $|V(H)| = p_2$ *dan* $|E(H)| = q_2$ *maka* $|V(G_H)| = q_1(p_2 - 2) + p_1$ *dan* $|E(G^H)| = q_1 q_2$ *(Dafik, 2016).* Contoh operasi eksponensial dapat dilihat pada Gambar 2.9.



Gambar 2.9 Graf Hasil Operasi Eksponensial dari P_3 dan C_5

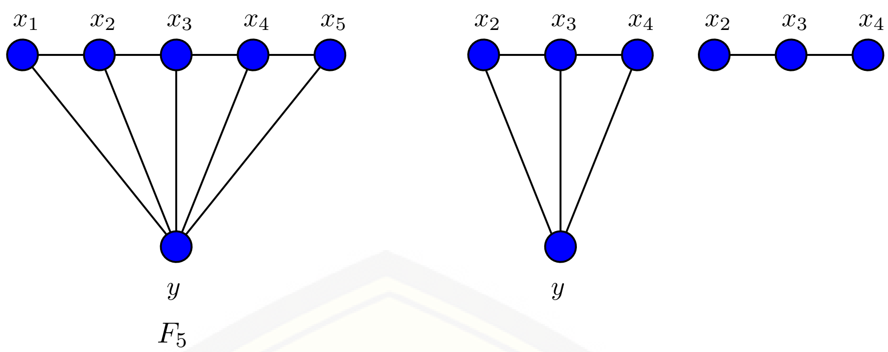
2.3 Dimensi Metrik

Dimensi metrik adalah kardinalitas minimum himpunan pembeda (*resolving set*) pada G. Untuk *vertices* u dan v dalam *graph* terhubung G, jarak $d(u,v)$ adalah panjang dari lintasan terpendek antara u dan v pada G. Untuk himpunan terurut $W = (W_1, W_2, ..., W_k)$ dari *vertex-vertex* dalam *graph* terhubung G dan *vertex r* pada G, adalah vektor-k(pasangan k-tuple). $r(v|W) = (d(v,w_1), d(v,w_2)$,..., $d(v,w_k))$ menunjukkan representasi dari v pada W. Himpunan W dinamakan himpunan pembeda (*resolving set*) G jika *vertex-vertex* G mempunyai representasi berbeda. Himpunan *resolving* dengan kardinalitas minimum disebut himpunan *resolving* minimum dan kardinalitas tersebut menyatakan dimensi metrik dari G, dan dinotasikan dengan $dim(G)$ (Harary, 2009). Sebuah himpunan pembeda W pada graf G dikatakan himpunan pembeda tak terisolasi (*non-isolated resolving set*) jika subgraf $\langle W \rangle$ diinduksi oleh titik (simpul) tak terisolasi. Kardinalitas minimum dari himpunan pembeda tak terisolasi pada suatu graf dikatakan *non-isolated resolving number* $nr(G)$ (Chitra dan Arumugam, 2010). Subgraf terinduksi (*induced subgraph*) dari graf $G[S]$ adalah subgraf dari G dengan himpunan titik S. Karena itu dua titik bertetangga pada $G[S]$ jika hanya jika kedua titik tersebut bertetangga di G.

Observasi 2.1. *Misal $dim(G)$ dan $nr(G)$ adalah nilai dimensi metrik dan non-isolated resolving set pada graf terhubung G, maka nilai $nr(G) \geq dim(G)$.*

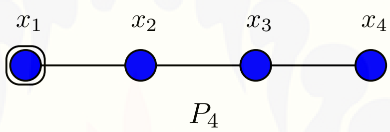
Bukti. Nilai $dim(G)$ merupakan kardinalitas minimum dari himpunan pembeda (W) pada graf G. Sedangkan $nr(G)$ adalah kardinalitas minimum dari himpunan pembeda $dim(G)$ dengan syarat setiap himpunan pembeda pembedanya saling terhubung. Sehingga syarat dari $nr(G)$ lebih kompleks daripada $dim(G)$, dengan demikian dapat disimpulkan $nr(G) \geq dim(G)$.

Berikut adalah contoh *induced subgraph* pada graf F_5 .



Gambar 2.10 *Induced subgraph* pada Graf kipas F_5

Berikut adalah contoh dimensi metrik pada graf lintasan. Titik yang diberi kotak merupakan *resolving set* dari graf lintasan.

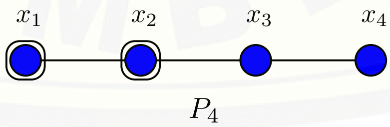


Gambar 2.11 *Resolving Set* pada Graf Lintasan P_4

Sehingga akan diperoleh :

$$r(x_1|W) = (0)$$
$$r(x_2|W) = (1)$$
$$r(x_3|W) = (2)$$
$$r(x_4|W) = (3)$$

Karena x_1 belum memenuhi *induced subgraph* maka kita tambahkan 1 titik *resolving Set* yaitu pada x_2. Sehingga dapat digambarkan sebagai berikut : Sehingga



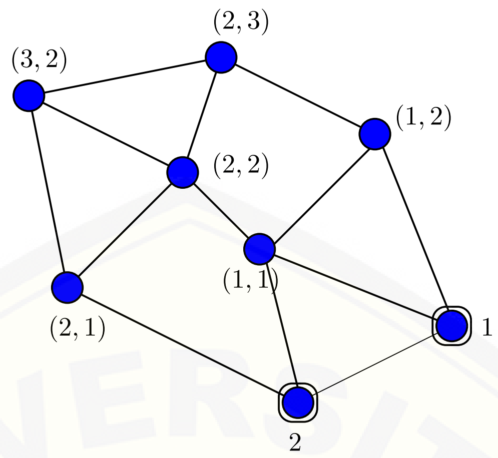
Gambar 2.12 *Non-isolated resolving Set* pada Graf Lintasan P_4

akan diperoleh :

$$r(x_1|W) = (0,1)$$
$$r(x_2|W) = (1,0)$$
$$r(x_3|W) = (2,1)$$
$$r(x_4|W) = (3,2)$$

2.4 Aplikasi Graf

Teori graf merupakan cabang ilmu matematika diskrit yang memiliki banyak aplikasi di berbagai ilmu seperti fisika, biologi, arsitektur, transportasi, teknologi komputer, ekonomi, sosial dan bidang lainnya. Salah satu aplikasi teori graf khususnya di bidang dimensi metrik adalah tentang Call Center Indovision, dimana pada call center Indovision berlangganan terdapat suatu jaringan yang menghubungkan jaringan perusahaan menuju pelanggan Indovision yang dapat dilihat dari titik lokasi menggunakan pengertian jarak. Dalam suatu perusahaan Indovision, dipastikan terdapat call center untuk melayani semua pelanggan-pelanggannya. Dalam hal ini, call center adalah suatu alat yang berfungsi untuk menerima kritik dan saran dari pelanggannya. Untuk saat ini pelanggan Indovision sudah mencapai ribuan. Permasalahannya yaitu untuk melayani semua pelanggan Indovision dengan kondusif, dibutuhkan sebuah komputer dengan aplikasi yang membantu para pekerja call center untuk melayani pelanggannya. Dimana setiap rumah atau pengguna Indovision diperlukan kode yang unik dan berbeda agar pada saat menghubungi call center Indovision tidak perlu menunggu giliran untuk mendapatkan layanan dari perusahaan Indovision. Jika setiap rumah pada suatu wilayah dianggap sebagai suatu titik sedangkan lintasan jaringan dari call center terhadap rumah lainya dianggap sebagai sisi, maka gambar peta pada suatu wilayah tersebut dapat direpresentasikan sebagai suatu pola pada graf. Agar komputer dapat lebih efisien dalam menerjemahkan kode setiap rumah (pelanggan Indovision) dari call center, maka diperlukan komponen seminimal mungkin. Gambar dibawah menunjukkan contoh peta suatu wilayah yang menggunakan Indovision dan terhubung dengan call center yang dilengkapi dengan graf repesentasinya dengan kode nama rumah pelanggan yang berbeda-beda.



Gambar 2.13 Graf Representasi Jaringan Call Center Indovision

Dari gambar 2.13 diambil dua pusat call center Indovision yang juga merupakan himpunan pembeda minimal yang nantinya direpresentasikan terhadap titik pada tiap rumah pelanggan Indovision.

2.5 Hasil-hasil Dimensi Metrik

Tabel 2.1 Tabel 2.1 Hasil Dimensi Metrik dari Penelitian Terdahulu

Graf	**Hasil**	**Keterangan**
Graf Tangga (L_n)	$dim(L_n) = 2$; untuk $n \geq 2$	Saifudin, I. 2015
Shackle Graf Tangga (SL_n)	dim$(SL_n) = n$; untuk $n \geq 2$	Saifudin, I.2015
Graf Komplemen (L_n)	dim$(L_n) = 2$; untuk $n \geq 2$	Saifudin, I. 2015
Graf Tangga Tiga- (TCL_n)	dim$(TCL_n) = n$; untuk $n \geq 2$	Saifudin, I. 2015
Graf Komposisi $L_n[L_1]$	dim$(L_n[L_1]) = n$; untuk $n \geq 3$	Saifudin, I. 2015
Graf *Cartesiant Product* $C_3 \square P_n$	dim($C_3 \square P_n$) = 2; untuk $n \geq 2$	Fitriana, R. A. 2015
Graf gShack(C_5^2, P_2, n)	dim(gShack(C_5^2, P_2, n)) = 2; untuk $n \geq 1$	Fitriana, R. A. 2015
Graf Amal(B_3, n)	dim(Amal(B_3, n)) = 4; untuk $n \geq 2$	Fitriana, R. A. 2015
Graf $E(E_n)$	dim(E_n) = 2; untuk $n \geq 3$	Fitriana, R. A. 2015
Graf *Cartesiant Product*($W_4 \square P_n$)	dim($W_4 \square P_n$) = 3; untuk $n \geq 2$	Fitriana, R. A. 2015
Graf *Cartesiant Product*($W_3^2 \square P_n$)	dim($W_3^2 \square P_n$) = 2; untuk $n \geq 2$	Fitriana, R. A. 2015
Graf *Cartesiant Product*($F_{1,3} \square P_n$)	dim($F_{1,3} \square P_n$) = 3; untuk $n \geq 2$	Fitriana, R. A. 2015
Graf *Cartesiant Product*($F_{1,3} \square P_n$)	dim($F_{1,3} \square P_n$) = 3; untuk $n \geq 2$	Fitriana, R. A. 2015

Graf	**Hasil**	**Keterangan**
Graf $(C_5 \square P_n)$	dim$(C_5 \square P_n)$ = 2; untuk $n \geq 2$	Fitriana, R. A. 2015
Graf Kipas (F_n)	dim$(F_n) = \begin{cases} 2 & \text{, untuk } 2 \leq n \leq 5 \\ \frac{n}{2} & \text{, untuk } n \geq 6,\ n \text{ genap} \\ \frac{n-1}{2} & \text{, untuk } n \geq 7,\ n \text{ ganjil} \end{cases}$ untuk $n \geq 2$	Santi, R. N. 2015
Graf Kipas $(F_{2,n})$	dim$(F_{2,n}) = \begin{cases} \frac{n+2}{2} & \text{, untuk } n \geq 2,\ n \text{ genap} \\ \frac{n+1}{2} & \text{, untuk } n \geq 3,\ n \text{ ganjil} \end{cases}$ untuk $n \geq 2$	Santi, R. N. 2015
$(ShackF_4, v, n)$	dim$(Shack(F_4, v, n))$= 2; untuk $n \geq 2$	Santi, R. N. 2015
$(ShackF_4, e, n)$	dim$(Shack(F_e, v, n))$= 2; untuk $n \geq 2$	Santi, R. N. 2015
$(AmalF_4, v, n)$	dim$(Amal(F_4, v, n))$= n; untuk $n \geq 2$	Santi, R. N. 2015
Graf Bintang (S_n)	dim$(S_n) = n - 1$; untuk $n \geq 2$	Santi, R. N. 2015
Graf Roda (W_n)	dim$(W_n) = \begin{cases} 2 & \text{, untuk } 4 \leq n \leq 5 \\ 3 & \text{, untuk } 6 \leq n \leq 8 \\ \frac{n-1}{2} & \text{, untuk } n \geq 9,\ n \text{ ganjil} \\ \frac{n-2}{2} & \text{, untuk } n \geq 10,\ n \text{ genap} \end{cases}$ untuk $n \geq 3$	Santi, R. N. 2015
$gshack(W_6, C_1^4, n)$	dim$(gshack(W_n, C_1^4, n)) = 2$; untuk $n \geq 2$	Santi, R. N. 2015
Graf Antiprisma (H_n)	dim$(H_n) = 3$; untuk $n \geq 3$	Santi, R. N. 2015
Graf Prisma $(H_{5,n})$	dim$(H_{5,n}) = 2$; untuk $n \geq 2$	Santi, R. N. 2015

Graf	Hasil	Keterangan
Graf Lintasan	nr$(P_n) = 2$; untuk $n \geq 2$	Chitra, P.J.B. 2010
Graf Lengkap	nr$(K_n) = 2$; untuk $n \geq 3$	Chitra, P.J.B. 2010
Graf Complete Bipartite	nr$(K_{m,n}) = m + n - 2$; untuk $m, n \geq 2$	Chitra, P.J.B. 2010
Graf $(P_n \square P_n)$	nr$(P_n \square P_n) = 4$; untuk $n \geq 2$	Chitra, P.J.B. 2010
Graf $(C_n \square K_2)$	nr$(C_n \square K_2) = 3$; untuk $n \geq 3$	Chitra, P.J.B. 2010

BAB 3. METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Penelitian ini dikategorikan ke dalam penelitian eksploratif dan penelitian terapan (*applied research*).

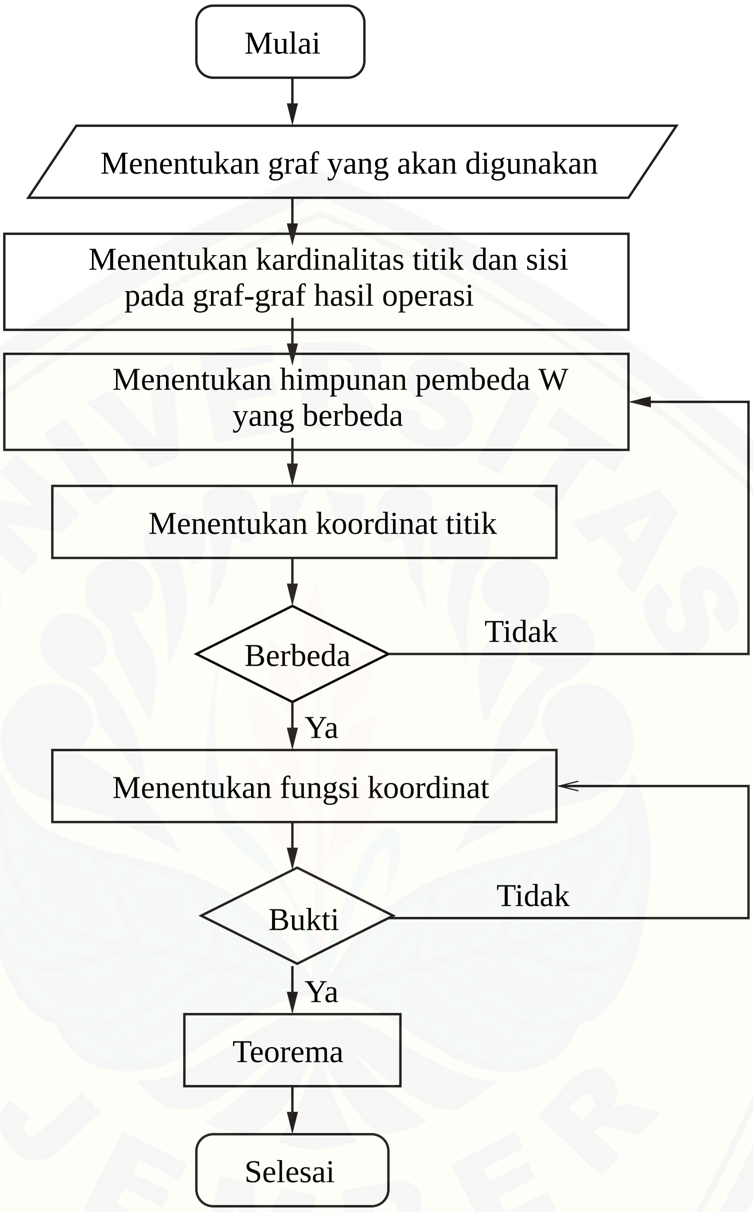
1. Penelitian eksploratif adalah jenis penelitian yang bertujuan menggali hal-hal yang ingin diketahui oleh peneliti dan hasilnya dapat digunakan sebagai dasar penelitian selanjutnya.
2. Penelitian terapan (*applied research*) merupakan penyelidikan yang hati-hati, sistematik, dan terus-menerus terhadap suatu masalah dengan tujuan untuk digunakan dengan segera untuk keperluan tertentu.

Data dalam penelitian ini adalah data sekunder yang digunakan berupa graf-graf khusus yang akan dioperasikan. Graf-graf khusus yang digunakan adalah lintasan, lingkaran, kipas dan parasut.

3.2 Rancangan Penelitian

Rancangan penelitian ini menggunakan dua metode yaitu, metode pendeteksian pola (*pattern recognition*) yang diartikan dengan metode pencarian pola untuk dilakukan konstruksi titik koordinat dimensi metrik (*dim*) sedemikian hingga nilai koordinat minimum dan juga berbeda, selain itu juga menggunakan metode Deduktif Aksiomatik yaitu metode penelitian yang menggunakan prinsip-prinsip pembuktian deduktif yang berlaku dalam logika matematika dengan menggunakan aksioma atau teorema yang telah ada untuk memecahkan suatu masalah. Kedua metode tersebut diterapkan dalam dimensi metrik pada graf operasi dan juga aplikasinya. Rancangan penelitian untuk dimensi metrik pada graf operasi digambarkan dalam bagan yang diilustrasikan dengan Gambar 3.1 Uraian dari rancangan penelitian ini dapat dijelaskan sebagai berikut:

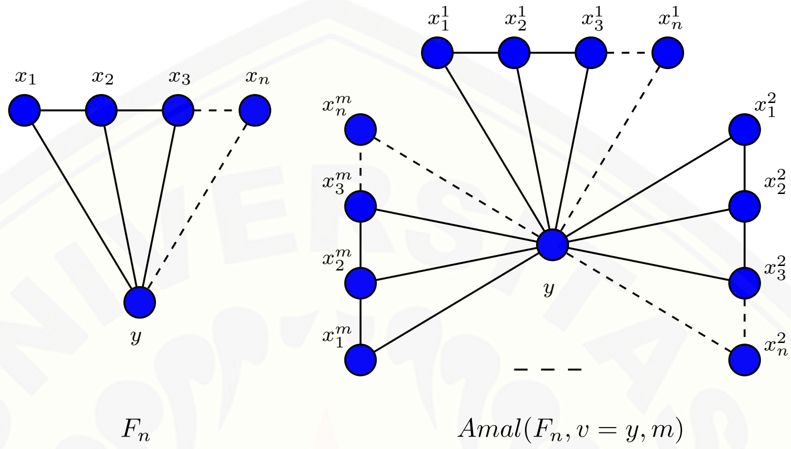
a. Menetapkan graf yang akan digunakan untuk dianalisa dimensi metriknya;
b. Menentukan kardinalitas elemen-elemen graf yang digunakan;
c. Menentukan dimensi metrik pada graf yang diteliti;
d. Melakukan kontruksi terhadap titik koordinat dari dimensi metrik;
e. Menentukan fungsi koordinat pada graf yang diteliti;
f. Menentukan teorema hasil penelitian dari analisis dimensi metrik pada graf operasi.



Gambar 3.1 Skema Langkah Kerja Penelitian

3.3 Observasi Awal

Dalam penelitian ini digunakan data sekunder berupa graf-graf khusus yang dioperasikan, yaitu amalgamasi dari graf kipas. Penelitian awal mendapatkan hasil sebagai berikut, dapat dilihat pada Gambar di bawah.



Gambar 3.2 Observasi awal *non-isolated resolving number*

$$nr(AmalF_n, v, m) = m \cdot \frac{nm}{2} \text{ ; n = genap}$$
$$nr(AmalF_n, v, m) = m \cdot \frac{nm-m}{2} + 1 \text{ ; n = ganjil}$$

titik yang berwarna hitam adalah titik-titik *resolving set* pada graf tersebut.

BAB 5. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dari pembahasan pada bab sebelumnya dapat disimpulkan bahwa didapatkan 8 teorema dimensi metrik dan *non-isolated resolving set* pada graf khusus yaitu pada graf kipas F_n, amalgamasi graf kipas $amal(F_n, v = A, m)$, joint graf lintasan dan graf lingkaran $P_n + C_m$, graf parasut PC_n, amalgamasi graf parasut $amal(PC_n, v = A, m)$, graf power ${P_n}^{C_m}$, sakel graf kipas $shack(F_n, v = 1, m)$, sakel graf parasut $shack(PC_n, v = 1, m)$, diantaranya adalah:

a. Nilai dimensi metrik pada graf khusus dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1). $dim(F_n) = \lceil \frac{n-2}{2} \rceil$ untuk $n \geq 7$;

2). $dim(shack(PC_n, v, m)) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor m$ untuk $n \geq 5$;

3).
$$dim(Shack(F_n, v, m)) = \begin{cases} \frac{nm}{2} - 1 \text{ , untuk } n \geq 6 \, n = \text{genap} \\ \frac{nm-m}{2} \text{ , untuk } n \geq 6 \, n = \text{ganjil;} \end{cases}$$

4). $dim(P_n + C_m) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor$ untuk $n \geq 2$, $m \geq 7$;

5).
$$dim(Shack(F_n, v, m)) = \begin{cases} \frac{nm-4m}{2} + 2 \text{ , untuk } n \geq 5 \, n = \text{genap} \\ \frac{nm-3m}{2} + 1 \text{ , untuk } n \geq 5 \, n = \text{ganjil;} \end{cases}$$

6). $dim(PC_n) = \lceil \frac{n-2}{2} \rceil$ untuk $n \geq 7$;

7).
$$dim(amal(PC_n, v = A, m)) = \begin{cases} \frac{nm}{2} - 1\text{, untuk } n \geq 7 \, n = \text{genap} \\ \frac{nm-m}{2}\text{, untuk } n \geq 7 \, n = \text{ganjil;} \end{cases}$$

8). $dim({P_n}^{C_m}) = 2n - 3$ untuk $n \geq 4$, $m \geq 6$.

b. Nilai *non-isolated resolving set* pada graf khusus dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1). $nr(F_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ untuk $n \geq 7$;

2). $nr(shack(PC_n, v, m)) = (\lfloor \frac{n}{2} \rfloor m) + m$ untuk $n \geq 5$;

3).

$$nr(Shack(F_n, v, m)) = \begin{cases} \frac{nm}{2} \text{ , untuk } n \geq 6\, n = \text{genap} \\ \frac{nm-m}{2} + 1 \text{ , untuk } n \geq 6\, n = \text{ganjil;} \end{cases}$$

4). $nr(P_n + C_m) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor$ untuk $n \geq 2$, $m \geq 7$;

5).

$$nr(Shack(F_n, v, m)) = \begin{cases} \frac{nm}{2} + 1 \text{ , untuk } n \geq 5\, n = \text{genap} \\ \frac{nm-3m}{2} + 1 + m \text{ , untuk } n \geq 5\, n = \text{ganjil} \end{cases}$$

6). $nr(PC_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ untuk $n \geq 7$;

7).

$$nr(amal(PC_n, v = A, m)) = \begin{cases} \frac{nm}{2}\text{, untuk } n \geq 7\, n = \text{genap} \\ \frac{nm-m}{2} + 1\text{, untuk } n \geq 7\, n = \text{ganjil;} \end{cases}$$

8). $nr({P_n}^{C_m}) = 2n - 3$ untuk $n \geq 4$, $m \geq 6$.

5.2 Saran

Berdasarkan hasil penelitian mengenai dimensi metrik dan *non-isolated resolving set* pada graf khusus yaitu pada graf kipas F_n, amalgamasi graf kipas $amal(F_n, v = A, m)$, joint graf lintasan dan graf lingkaran $P_n + C_m$, graf parasut PC_n, amalgamasi graf parasut $amal(PC_n, v = A, m)$, graf power ${P_n}^{C_m}$, sakel graf kipas $shack(F_n, v = 1, m)$, sakel graf parasut $shack(PC_n, v = 1, m)$, maka peneliti memberikan saran kepada pembaca agar dapat mengembangkan analisa dimensi metrik dan *non-isolated resolving set* pada graf khusus dan hasil operasi graf khusus lainnya serta aplikasinya terhadap permasalahan di lingkungan sekitar.

DAFTAR PUSTAKA

Agustin, I. H. 2014 *Penerapan Teori Dominating Set dalam Instalasi Client Hub untuk jaringan Intranet di Universitas Jember*. Jurusan Matematika FMIPA Universitas Jember.

Ardiyansyah, R dan Darmaji. 2013 *Bilangan Kromatik Graf Hasil Amalgasi Dua Buah Graf*. Jurnal Sains dan Seni Pomits,2(1).

Chitra, P. J. B dan Arumugam, S. 2010 *Resolving Sets Without Isolated Vertices*. Kalasalingan University: India.

Dafik, Slamin, Tanna, D. 2016.*Constructions of H-antimagic graphs using smaller edge-antimagic graphs*. (ars Combinatoria).

Fitriana, R. A. 2015.*Pengembangan Dimensi Metrik Pada Graf Khusus dan Operasinya*. Jurusan Matematika FMIPA Universitas Jember.

Harary,F. 2007 *Graph Theory*. New London: Wesley.

Harary dan Melter. 1976. *On The Metric Dimension of Graph Combinatoria*. Volume 2 pages 1991-1995. Wesley Publishing, Tne.

Harsya. A. Y., Agustin, I. H., dan Dafik. 2014. Pewarnaan Titik Pada Operasi Graf Lintasan, Graf Sikel, dan Graf Bintang. *Prosiding Seminar Matematika dan Pendidikan Matematika Universitas Jember*, 1 (1).

Hartsfield, N. dan Ringel, G. 1990.*Pearls in Graph Theory*. Boston - San Diego - New York - London: Academic Press.

Hernando, Carmen, dkk.*On The Metric Dimension of Same Families of Graphs*. preprint.

Munir, R. 2009.*Matematika Diskrit Edisi 3*. Bandung: Informatika Bandung.

Purwono, J. A. 2009. *Dimensi Metrik Pada Pengembangan Graph Kincir dengan Pola* $K_1 + mK_n$. Tugas Akhir. Jurusan Matematika ITS : Surabaya.

Saifudin, I. 2015. *Dimensi Partisi Dari Graf Khusus Dan Operasinya*. Jurusan Matematika FMIPA Universitas Jember.

Santi, R. N. 2015. *Analisa Dimensi Metrik Pada Beberapa Graf Khusus*. Jurusan Matematika FMIPA Universitas Jember.

Septiana, E dan Budi, R. 2012 *Dimensi Metrik Pada Graf Lintasan, Graf Komplit, Graf Sikel, Graf Bintang dan Graf Bipartit Komplit*. Jurnal: Universitas Negeri Surabaya. No. 1, Vol: 1.

Trisnaningtyas, E. 2012. *Dimensi Metrik Pada Graf* $K_1 + mC_n$ *dan Graf* $K_1 + mP_n$. Jurusan Matematika FMIPA Universitas Jember.