PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN LINIER DENGAN METODE *MODIFIED RICHARDSON-UNSYMMETRIC MODIFIED SUCCESSIVE OVER RELAXATION*

SKRIPSI

Oleh
Ariny Farah Dyna
NIM 121810101028

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER
2016

PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN LINIER DENGAN METODE *MODIFIED RICHARDSON-UNSYMMETRIC MODIFIED SUCCESSIVE OVER RELAXATION*

SKRIPSI

diajukan untuk melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat
untuk menyelesaikan Program Studi Matematika (S1)
dan mencapai gelar Sarjana Sains

Oleh
Ariny Farah Dyna
NIM 121810101028

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER
2016

PERSEMBAHAN

Skripsi ini saya persembahkan untuk:

1. Ibunda Masruroh dan Ayahanda Abu Sairi tercinta yang senantiasa mengalirkan kasih sayang serta doa yang selalu mengiringi dalam setiap langkahku meraih cita-cita;
2. guru-guruku sejak taman kanak-kanak sampai dengan perguruan tinggi;
3. Almamater Fakultas MIPA Universitas Jember.

MOTO

“Allah meninggikan orang-orang yang beriman di antara kamu dan orang-orang yang diberi ilmu pengetahuan beberapa derajat”
(Qs. Al Mujadilah: 11) *)

“Sesuatu yang belum dikerjakan, sering kali tampak mustahil.
Kita baru akan yakin kalau kita telah berhasil melakukannya dengan baik”
(Evelyn Underhill) **)

*) Departemen Agama Republik Indonesia. 2004. *Al-Qur’an* dan Terjemahannya
**) https://hitamputihkita.wordpress.com/pencerahan-2/

PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

nama : Ariny Farah Dyna

NIM : 121810101028

Menyatakan dengan sesungguhnya bahwa karya ilmiah yang berjudul "Penyelesaian Sistem Persamaan Linier dengan Metode *Modified Richardson – Unsymmetric Modified Successive Over Relaxation*" adalah benar-benar hasil karya sendiri kecuali kutipan yang sudah saya sebutkan sumbernya, belum pernah diajukan pada institusi mana pun, dan bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan skripsi ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa ada tekanan dan paksaan dari pihak mana pun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, 2016

Yang menyatakan,

Ariny Farah Dyna

121810101028

SKRIPSI

PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN LINIER DENGAN METODE *MODIFIED RICHARDSON-UNSYMMETRIC MODIFIED SUCCESSIVE OVER RELAXATION*

Oleh

Ariny Farah Dyna
NIM 121810101028

Pembimbing

Dosen Pembimbing Utama	: M. Ziaul Arif, S.Si., M.Sc.
Dosen Pembimbing Anggota	: Ahmad Kamsyakawuni, S.Si., M.Kom.

PENGESAHAN

Skripsi berjudul "Penyelesaian Sistem Persamaan Linier dengan Metode *Modified Richardson – Unsymmetric Modified Successive Over Relaxation*" telah diuji dan disahkan pada:

hari, tanggal :

tempat : Fakultas MIPA Universitas Jember

Tim Penguji:

Dosen Pembimbing Utama,	Dosen Pembimbing Anggota,
M. Ziaul Arif, S.Si., M.Sc	Ahmad Kamsyakawuni,S.Si.,M.Kom
NIP. 198501112008121002	NIP. 1972 11291998021001
Dosen Penguji I,	Dosen Penguji II,
Kosala Dwija Purnomo, S.Si., M.Si	Dr.Alfian Futuhul Hadi, S.Si., M.Si
NIP. 196908281998021001	NIP. 197407192000121001

Mengesahkan

Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Universitas Jember

Drs. Sujito, Ph.D

NIP. 196102041987111001

RINGKASAN

Penyelesaian Sistem Persamaan Linier dengan Metode *Modified Richardson-Unsymmetric Modified Successive Over Relaxation*; Ariny Farah Dyna, 121810101028; 2016; 46 halaman; Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Sistem persamaan linier merupakan model umum dan persoalan matematika yang sering ditemukan dalam berbagai disiplin ilmu. Terdapat dua kelompok metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linier, yaitu metode langsung dan metode tak langsung atau metode iteratif (Sahid, 2012). Pada penelitian ini, metode yang digunakan adalah metode iteratif yaitu gabungan dari metode *Modified Richardson* dan metode *Unsymmetric Modified Successive Over Relaxation* dengan prinsip prediktor korektor yang kemudian disebut sebagai metode *Modified Richardson-Unsymmetric Modified Successive Over Relaxation*. Untuk mengetahui performa metode gabungan tersebut, hasil yang diperoleh dibandingkan dengan metode iteratif lain yaitu metode *Modified Richardson*, metode *Unsymmetric Modified Successive Over Relaxation*, dan metode *Gauss Seidel*.

Penelitian dilakukan dengan menyelesaikan 11 kasus sistem persamaan linier (SPL) berukuran 9x9, 12x12, 25x25, 40x40, 50x50, 60x60, 225x225, 282x282, 450x450 dan 729x729 dimana 4 dari 11 kasus tersebut merupakan SPL yang tidak diketahui nilai eksaknya dan diperoleh dari buku atau jurnal. Sedangkan sisanya merupakan SPL dengan matriks *A* diperoleh dari alamat web *Matrix Market*. Hasil yang diperoleh masing-masing metode kemudian dibandingkan berdasarkan nilai *rate of convergence*, jumlah iterasi yang dibutuhkan dan galat yang dihasilkan. Selain itu, penelitian juga dilakukan dengan menyelesaikan satu kasus SPL menggunakan metode *Modified Richardson-Unsymmetric* MSOR dengan nilai parameter yang berbeda-beda untuk

memperoleh nilai parameter yang dapat meminimumkan galat bagi solusi SPL tersebut.

Dari hasil perbandingan nilai *rate of convergence* matriks iterasi diperoleh bahwa untuk 7 kasus SPL yang berukuran 9x9, 12x12, 25x25, 40x40 (kasus 4), 50x50, 225x225 dan 450x450 metode *Modified Richardson-Unsymmetric* MSOR menghasilkan nilai *rate of convergence* yang lebih besar daripada metode lain. Sehingga dalam hal ini dapat dikatakan bahwa metode *Modified Richardson-Unsymmetric* MSOR lebih baik daripada metode *Gauss Seidel*, metode *Modified Richardson* dan metode *Unsymmetric* MSOR. Sedangkan untuk 4 kasus SPL lainnya dengan ukuran 40x40 (kasus 5), 60x60, 282x282 dan 729x729 dengan nilai *spectral radius* matriks *A* yang sangat besar matriks iterasi dari metode *Modified Richardson-Unsymmetric* MSOR menghasilkan nilai *rate of convergence* yang sama atau lebih besar dari metode *Unsymmetric* MSOR namun lebih kecil daripada metode *Gauss Seidel*.

Dari hasil perbandingan jumlah iterasi dan galat untuk 7 kasus SPL yang sama, metode *Modified Richardson-Unsymmetric* MSOR menghasilkan galat yang sama ataupun lebih kecil namun dengan jumlah iterasi yang lebih sedikit daripada metode lain. Sehingga dalam hal ini dapat dikatakan bahwa metode *Modified Richardson-Unsymmetric* MSOR lebih baik daripada metode *Gauss Seidel*, metode *Modified Richardson* dan metode *Unsymmetric* MSOR. Sedangkan untuk 4 kasus SPL yang telah disebutkan sebelumnya yaitu SPL dengan nilai *spectral radius* matriks *A* yang sangat besar, metode *Modified Richardson-Unsymmetric* MSOR menghasilkan galat dan iterasi yang sama dengan metode *Unsymmetric* MSOR namun lebih kecil daripada metode *Gauss Seidel*. Sehingga dapat disimpulkan bahwa metode *Modified Richardson-Unsymmetric* MSOR tidak cocok digunakan untuk SPL dengan matriks *A* yang *spectral radius*nya sangat besar.

PRAKATA

Puji syukur ke hadirat Allah Swt. atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul “Penyelesaian Sistem Persamaan Linier dengan Metode *Modified Richardson-Unsymmetric* MSOR”. Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat menyelesaikan pendidikan strata satu (S1) pada Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Penyusunan skripsi ini tidak lepas dari bantuan berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan terima kasih pada :

1. Drs. Sujito, Ph.D., selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Universitas Jember;
2. Kusbudiono, S.Si., M.Si., selaku Ketua Jurusan Matematika;
3. M. Ziaul Arif, S.Si., M.Sc., selaku Dosen Pembimbing Utama, Ahmad Kamsyakawuni, S.Si., M.Kom., selaku Dosen Pembimbing Anggota, Kosala Dwija Purnomo, S.Si., M.Si., selaku dosen Penguji I, Dr.Alfian Futuhul Hadi, S.Si., M.Si., selaku dosen Penguji II, yang telah meluangkan waktu, pikiran, dan perhatian dalam penulisan skripsi ini;
4. Rusli Hidayat, S.Si, M.Sc., selaku Dosen Pembimbing Akademik yang telah membimbing selama penulis menjadi mahasiswa;
5. dosen dan karyawan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
6. Bapak Abu Sairi sekeluarga dan Ibu Masruroh sekeluarga yang telah memberikan dorongan dan doa demi terselesaikannya skripsi ini;
7. teman-teman angkatan 2012 (BATHICS 12) yang selalu memberikan motivasi dan dukungan;
8. semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu per satu.

Penulis juga menerima segala kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan skripsi ini. Akhirnya penulis berharap, semoga skripsi ini dapat bermanfaat.

Jember, Juni 2016 Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

BAB 1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Sistem persamaan linier (SPL) adalah model umum dan persoalan matematika yang sering ditemukan dalam berbagai disiplin ilmu, misalnya matematika, biologi, fisika, ilmu-ilmu sosial, dan teknik. Sistem persamaan linier dapat dinyatakan dalam bentuk perkalian matriks $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ dimana A adalah matriks berukuran $\mathrm{n} \times \mathrm{n}$ yang berisi koefisien-koefisien, $\boldsymbol{b}$ adalah vektor berukuran n yang berisi konstanta-konstanta, dan $\boldsymbol{x}$ adalah vektor berisi variabel-variabel yang akan dicari nilainya (Sahid, 2012).

Terdapat dua kelompok metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linier, yaitu metode langsung dan metode tak langsung atau metode iteratif. Metode langsung merupakan metode dengan langkah yang berhingga. Sedangkan metode iteratif merupakan metode yang dimulai dengan nilai hampiran solusi awal tertentu kemudian nilai hampiran tersebut diperbarui terus menerus untuk mendapatkan nilai hampiran terbaik. Metode iteratif sering digunakan untuk sistem persamaan linier berukuran besar terutama untuk sistem yang mengandung banyak elemen nol yang biasanya muncul dalam penyelesaian persamaan diferensial (Sahid, 2012).

Berawal dari Carl Friedrich Gauss yang menghadapi kesulitan saat menemukan sistem yang terlalu besar untuk diselesaikan menggunakan metode eliminasi gauss, saat itulah metode iterasi pertama kali digunakan. Metode yang mirip juga digunakan oleh Carl Gustav Jacobi dalam artikelnya pada tahun 1845 (Hackbusch, 1994). Pada tahun 1910, Richardson memperkenalkan suatu metode yang disebut metode *Modified Richardson* dengan nilai parameter yang berbeda pada tiap iterasi (Young, 1971). Metode ini sangat sederhana dan cocok untuk sistem berukuran besar sehingga menarik untuk dimodifikasi dan diteliti. Modifikasi yang pernah dilakukan pada metode ini misalnya modifikasi yang dilakukan oleh Fischer dan Reichel (1988) untuk permasalahan sistem persamaan linier dengan nilai eigen kompleks.

Pada tahun 1950 Young berhasil menemukan metode iterasi dengan konvergensi yang lebih cepat yaitu metode *Successive Over Relaxation* (SOR) (Hackbusch, 1994). Young juga membahas berbagai variasi metode SOR dalam bukunya, diantaranya adalah metode *Symmetric* SOR (SSOR), *Unsymmetric* SOR (USSOR), *Modified* SOR (MSOR), *Symmetric Modified* SOR (SMSOR), dan *Unsymmetric Modified* SOR (USMSOR). Metode *Unsymmetric Modified* SOR (USMSOR) terdiri dari dua tahap yaitu *forward sweep* dan *backward sweep* sehingga metode ini memiliki langkah dua kali lebih banyak daripada metode SOR. Penggunaan parameter pada metode USMSOR juga lebih banyak daripada metode SOR, namun hal ini tidak membuat konvergensi metode USMSOR lebih cepat daripada metode SOR (Young, 1971).

Berdasarkan penjelasan di atas, penulis tertarik untuk melakukan modifikasi pada metode *Unsymmetric Modified Successive Over Relaxation* (USMSOR) menggunakan prinsip prediktor korektor. Prediktor korektor merupakan prinsip yang menggunakan dua persamaan untuk mencari nilai y_{n+1}. Persamaan pertama disebut prediktor yang digunakan untuk menghitung nilai hampiran bagi y_{n+1} dan persamaan kedua disebut korektor yang digunakan untuk menghitung nilai hasil koreksi y_{n+1} (Bronson dan Costa, 2007). Dalam hal ini, penulis akan menggunakan metode *Modified Richardson* sebagai prediktor dan metode *Unsymmetric Modified Successive Over Relaxation* (USMSOR) sebagai korektor dan membahasnya dalam skripsi yang berjudul "Penyelesaian Sistem Persamaan Linier dengan Metode *Modified Richardson - Unsymmetric Modified Successive Over Relaxation*".

1.2 Rumusan Masalah

Berikut adalah permasalahan yang akan dibahas dalam skripsi ini.

a. Bagaimana langkah penyelesaian SPL menggunakan metode gabungan *Modified Richardson* dan *Unsymmetric* MSOR dengan prinsip prediktor korektor?
b. Bagaimana perbandingan metode *Modified Richardson-Unsymmetric* MSOR dengan metode *Gauss Seidel*, *Modified Richardson* dan *Unsymmetric* MSOR ditinjau dari nilai *rate of convergence*, jumlah iterasi dan nilai galat?

1.3 Batasan Masalah

Permasalahan dalam penelitian ini akan dibatasai pada sistem persamaan linier yang memiliki:

a. matriks koefisien A non-singular berukuran $n \times n$
b. matriks koefisien A berupa matriks *real*, *sparse* dan definit positif dengan bentuk sebagai berikut

$$\begin{pmatrix} D_1 & C_U \\ C_L & D_2 \end{pmatrix}$$

dimana D_1 dan D_2 adalah matriks diagonal.

1.4 Tujuan

Skripsi ini memiliki tujuan dalam penulisannya, yaitu sebagai berikut.

a. Mengetahui langkah metode *Modified Richardson-Unsymmetric* MSOR dalam menyelesaikan sistem persamaan linier
b. Mengetahui nilai *rate of convergence*, jumlah iterasi dan nilai galat yang diperoleh metode *Modified Richardson-Unsymmetric* MSOR dibandingkan dengan metode *Modified Richardson*, *Unsymmetric* MSOR dan *Gauss Seidel*.

1.5 Manfaat

Hasil penelitian dalam skripsi ini diharapkan dapat memberikan manfaat, antara lain:

a. Memberikan pengetahuan mengenai penyelesaian sistem persamaan linier yang tepat, efektif, dan efisien
b. Memahami metode *Unsymmetric* MSOR pada penyelesaian sistem persamaan linier
c. Menambah wawasan mengenai metode modifikasi baru yaitu metode *Modified Richardson-Unsymmetric* MSOR
d. Mengetahui apakah metode modifikasi baru yaitu *Modified Richardson-Unsymmetric* MSOR lebih baik dari metode iteratif lain yaitu *Modified Richardson*, *Unsymmetric* MSOR dan *Gauss Seidel*.

BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini, akan dibahas mengenai metode *Modified Richardson*, metode *Unsymmetric Modified Successive Over Relaxation* (USMSOR), dan *Modified Richardson-Unsymmetric Modified Successive Over Relaxation* serta landasan teori yang menunjang dari berbagai sumber rujukan.

2.1 Matriks

Menurut Purwanto *et al.* (2005) **Matriks** merupakan jajaran elemen yang memiliki ukuran tertentu berdasarkan banyaknya baris dan kolom serta memiliki bentuk persegi panjang. Suatu matriks A yang memiliki m baris dan n kolom dikatakan sebagai matriks berukuran $m \times n$ atau matriks berordo $m\,x\,n$. Matriks yang hanya memiliki satu baris dinamakan **matriks baris**, sedangkan matriks yang hanya memiliki satu kolom dinamakan **matriks kolom** atau biasa disebut dengan **vektor**.

Misal diberikan matriks A dan B berordo $m \times n$, penjumlahan matriks A dan B dapat dilakukan dengan syarat A dan B memiliki ukuran yang sama. Penjumlahan matriks A dan B didefinisikan sebagai penjumlahan masing-masing elemen yang bersesuaian pada A dan B. Sedangkan perkalian suatu skalar k terhadap matriks A didefinisikan sebagai perkalian k terhadap semua elemen matriks A. Berikut adalah sifat-sifat penjumlahan dan perkalian skalar pada matriks:

1) $(A + B) + C = A + (B + C)$
2) $A + \mathbf{0} = A$
3) $A + (-A) = \mathbf{0}$
4) $A + B = B + A$
5) $k(A + B) = kA + kB$
6) $(k_1 + k_2)A = k_1A + k_2A$
7) $(k_1k_2)A = k_1(k_2A)$

8) $1A = A\,, 0A = \mathbf{0}$

Perkalian matriks A dan B didefinisikan sebagai hasil kali baris-baris A terhadap kolom-kolom B, dengan syarat jumlah kolom pada A harus sama dengan jumlah baris pada B. Berikut ini adalah sifat-sifat yang berlaku dalam perkalian antar matriks:

a. $(AB)C = A(BC)$
b. $A(B + C) = AB + AC$
c. $(B + C)A + BA + CA$
d. $k(AB) = (kA)B = A(kB)$, k adalah skalar
e. $\mathbf{0}A = \mathbf{0}$, $\mathbf{0}$ adalah matriks nol

Transpose dari suatu matriks adalah matriks dimana kolom-kolom pada matriks asal menjadi baris-baris pada matriks transpose, biasanya transpose dari matriks A dinotasikan sebagai A^T. Berikut adalah sifat-sifat pada transpose matriks:

1) $(A + B)^T = A^T + B^T$
2) $(A^T)^T = A$
3) $(kA)^T = kA^T$
4) $(AB)^T = B^T A^T$

(Rasyad, 2003)

Berikut ini adalah jenis-jenis matriks:

a. **Matriks diagonal** yaitu matriks bujur sangkar yang semua elemennya bernilai nol kecuali elemen diagonal, seperti berikut

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Contoh:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

b. **Matriks segitiga bawah** (*lower triangular*) adalah matriks bujur sangkar yang semua elemen di atas elemen diagonalnya adalah nol atau $a_{ij} = 0$ untuk $i < j$, seperti berikut

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Contoh:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 3 & 0 \\ 8 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

c. **Matriks segitiga atas** (*upper triangular*) adalah matriks bujur sangkar yang elemen di bawah elemen diagonalnya adalah nol, atau dapat ditulis $a_{ij} = 0$ untuk $i > j$, seperti berikut

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Contoh:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 9 & 6 \\ 0 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

(Purwanto *et al.*, 2005)

d. **Matriks identitas** yaitu matriks diagonal yang elemen diagonalnya adalah 1 atau dapa ditulis $a_{ii} = 1$, seperti berikut

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

e. **Matriks simetris** yaitu matriks yang transposenya sama dengan dirinya sendiri atau $A^T = A$. Contoh:

$$A = A^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & 7 & 2 & 6 \\ 4 & 2 & 4 & 3 \\ 5 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

f. **Matriks invers** yaitu suatu matriks B yang menyebabkan $AB = BA = I$.
Contoh:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(Kartono, 2005).

Determinan merupakan bilangan riil yang dapat dihitung dari elemen-elemen matriks A dengan rumus tertentu, biasanya dinotasikan dengan $\det(A)$ atau $|A|$. Jika nilai determinan adalah nol, A tidak mempunyai invers. Determinan matriks memiliki sifat-sifat berikut

1) $\det(A) = \det(A^t)$
2) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
3) Jika dua baris/kolom bertukar tempat, nilai determinan berubah tanda
4) Jika terdapat 2 baris atau 2 kolom yang identik, nilai determinannya adalah nol
5) Nilai determinan tidak berubah jika elemen-elemen suatu baris/kolom ditambahkan dengan kelipatan nilai real dari elemen-elemen baris/kolom lainnya.
6) Nilai determinan menjadi β kali lipat besarnya jika A dikali skalar β
7) Nilai determinan=0 jika satu baris/kolom semuanya nol
8) Determinan dari matriks segitiga atas atau segitiga bawah merupakan hasil kali semua elemen-elemen pada diagonal utamanya.

(Sutojo *et al.*, 2010).

Rank suatu matriks adalah banyaknya baris taknol dari matriks tersebut dalam bentuk eselon baris tereduksi. Rank juga merupakan banyaknya kolom-kolom pimpinan dari matriks yang berbentuk eselon baris tereduksi (Rasyad, 2003). Artinya, untuk mendapatkan rank dari suatu matriks, matriks tersebut harus direduksi menjadi bentuk eselon baris tereduksi.

Suatu matriks disebut berada dalam bentuk **eselon baris tereduksi** jika memenuhi pernyataan berikut

a. Baris yang tidak semua elemennya nol, maka elemen tak nol pertama adalah 1, disebut sebagai 1 utama
b. Baris yang semua elemennya nol diletakkan di baris paling bawah
c. Dalam sebarang dua baris yang semua elemennya tak nol, 1 utama pada baris yang lebih rendah terletak di sebelah kanan 1 utama pada baris yang lebih tinggi
d. Masing-masing kolom yang memiliki 1 utama, elemen selain 1 utama adalah nol

(Kusumawati, 2009).

2.2 Matriks Definit Positif

Suatu fungsi yang berbentuk seperti berikut

$$a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \cdots + a_nx_n^2 + (\text{semua suku yang berbentuk } a_kx_ix_j \text{ untuk } i < j)$$

disebut dengan bentuk kuadratik (*quadratic form*). Misal untuk x_1 dan x_2, bentuk kuadratiknya adalah

$$a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_1x_2 \tag{2.1}$$

dan untuk variabel x_1, x_2, x_3 bentuk kuadratiknya adalah

$$a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 + a_4x_1x_2 + a_5x_1x_3 + a_6x_2x_3 \tag{2.2}$$

Dalam sebuah bentuk kuadratik, suku-suku yang melibatkan perkalian dua variabel yang berbeda disebut dengan suku hasil kali silang (*cross-product term*). Dalam persamaan (2.1) misalnya, suku hasil kali silangnya adalah suku terakhir. Sedangkan dalam persamaan (2.2), tiga suku terakhir adalah suku hasil kali silang. Persamaan (2.1) dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_3/2 \\ a_3/2 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

dan persamaan (2.2) dapat ditulis sebagai berikut

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_4/2 & a_5/2 \\ a_4/2 & a_2 & a_6/2 \\ a_5/2 & a_6/2 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

(Anton & Rorres, 2000).

Dapat dilihat bahwa persamaan (2.3) dan (2.4) memiliki bentuk $\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}$ dimana $\boldsymbol{x}$ adalah vektor kolom yang berisi variabel-variabel, dan A adalah matriks simetris yang elemen diagonalnya adalah koefisien bagi suku-suku berbentuk kuadrat, sedangkan elemen selain elemen diagonal merupakan setengah dari koefisien pada suku hasil kali silang. Berikut adalah contoh bentuk kuadratik

$$2x^2 + 6xy - 7y^2 = (x \quad y)\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Dalam suatu bentuk kuadrat, matriks A tidak selalu matriks simetris. Pada contoh di atas misalnya, persamaan $2x^2 + 6xy - 7y^2$ juga dapat dituliskan dalam bentuk

$$2x^2 + 6xy - 7y^2 = (x \quad y)\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Bentuk kuadratik $\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}$ disebut definit positif (*positive definite*) jika $\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x} > 0$ untuk semua $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$, dan matriks A disebut matriks definit positif jika $\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}$ adalah bentuk kuadratik yang definit positif (Anton & Rorres, 2000).

2.3 Sistem Persamaan Linier

Secara umum, persaman linier dengan n variabel dapat ditulis sebagai berikut

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_n\, x_n = b$$

dimana $x_1 , x_2 , \ldots , x_n$ adalah variabel atau peubah (Anton, 1997). Sistem persamaan linier terdiri dari m buah persamaan dan n buah peubah, serta dapat dituliskan sebagai berikut

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}\, x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad & \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_n \end{aligned} \tag{2.5}$$

dimana $x_1, x_2, \ldots , x_n$ adalah peubah-peubah dan $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i = 1,2, \ldots , m,\ j = 1,2, \ldots , n$ merupakan koefisien-koefisien (Mursita, 2010). Sistem persamaan linier pada (2.5) memiliki solusi $(s_1 , s_2 , \ldots , s_n) \in \mathbb{R}^n$ jika $s_1 , s_2 , \ldots , s_n$ memenuhi semua persamaan linier yang ada dalam sistem (Hefferon, 2014).

Persamaan (2.5) dapat dinyatakan sebagai perkalian matriks berikut

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_1n \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_2n \\ \ldots & \ldots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

atau

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}.$$

Matriks A dinamakan **matriks koefisien**, $\boldsymbol{b}$ disebut **matriks konstan**, dan penggabungan keduanya menghasilkan matriks yang disebut **matriks diperbesar** (*Augmented Matrix*), seperti berikut

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_1n & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_2n & b_2 \\ \dots & \dots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_n \end{pmatrix}.$$

(Mursita, 2010).

Sistem persamaan linier yang memiliki paling sedikit satu penyelesaian disebut **konsisten**, dan disebut **tak konsisten** jika sistem persamaan linier tersebut tidak memiliki penyelesaian. Jika diberikan SPL $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ dengan $\boldsymbol{b}$ adalah vektor yang semua elemennya nol, SPL tersebut akan menghasilkan SPL Homogen yaitu $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ dengan $\boldsymbol{0}$ adalah vektor nol. Sistem persamaan linier homogen selalu konsisten dengan $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ sebagai solusinya. Jika $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ adalah satu-satunya solusi yang ada, dinamakan **solusi tak sejati** (*trivial solution*), jika ada $\boldsymbol{x}$ lain yang merupakan solusi, disebut **solusi sejati** (*non-trivial solution*) yang juga merupakan solusi tak hingga (Mursita, 2010).

Sistem persamaan linier $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ konsisten jika rank dari A sama dengan rank dari matriks A yang diperbesar atau dapat ditulis

$$rank(A) = rank(A|\boldsymbol{b})$$

(Anton, 1997). Misal A berukuran $n \times n$ dan $rank(A) = rank(A|\boldsymbol{b}) = n$, maka sistem persamaan linier tersebut memiliki tepat satu solusi. Jika $rank(A) = rank(A|\boldsymbol{b}) < n$, sistem persamaan linier tersebut memiliki banyak penyelesaian (Pirnadi, 2010).

2.4 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Misal A adalah matriks berukuran $n \times n$ dan $\boldsymbol{x}$ adalah suatu vektor tak nol berukuran $n \times 1$, nilai eigen atau akar karakteristik dari matriks A adalah suatu bilangan λ sedemikian hingga

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} \tag{2.6}$$

Vektor $\boldsymbol{x}$ yang memenuhi persamaan di atas disebut vektor eigen yang bersesuaian dengan λ. Persamaan (2.6) dapat dituliskan dalam bentuk

$$A\boldsymbol{x} - \lambda\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

$$(A - \lambda I)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

yang merupakan sistem persamaan linier homogen. Jika $\det(A - \lambda I) \neq 0$ persamaan di atas memiliki tepat satu solusi yaitu $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. Untuk mendapat solusi lain selain $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ dan memperoleh nilai λ, determinan dari $A - \lambda I$ haruslah nol. Sehingga nilai eigen dapat ditemukan dengan menyelesaikan persamaan berikut

$$|A - \lambda I| = 0$$

(Myers & Milton, 1991).

2.5 Metode Numerik dan Galat

Penyelesaian suatu masalah matematika menggunakan metode numerik tidak dapat menghasilkan solusi eksak (yang sebenarnya) tapi hanya dapat memberikan solusi perkiraan (hampiran). Maka dalam penyelesaian tersebut tentu ada galat terhadap nilai eksak. Ada tiga jenis galat yaitu:

a. Galat bawaan, yaitu galat yang biasanya terjadi karena kesalahan manusia (*human error*) misalnya salah dalam menyalin data, salah membaca skala, dan lain-lain
b. Galat pembulatan (*round off error*) yaitu galat yang terjadi karena beberapa angka terahir suatu bilangan tidak diperhitungkan
c. Galat pemotongan (*truncation error*) yaitu galat yang terjadi karena perhitungan yang dilakukan tidak sesuai dengan prosedur matematik yang benar

(Nugroho, 2009).

Hubungan antara solusi eksak dengan hampirannya dapat dirumuskan sebagai berikut

$$E_s = \text{galat} = \text{nilai eksak} - \text{hampiran}$$

huruf s menunjukkan bahwa galat tersebut merupakan galat sejati. Namun, definisi di atas memiliki kelemahan yaitu tidak memperhatikan tingkat besaran dari nilai yang diukur. Oleh karena itu, rumus di atas dapat dinormalkan sehingga menjadi

$$\text{galat relatif} = \frac{\text{nilai eksak} - \text{hampiran}}{\text{nilai eksak}}$$

atau dapat dituliskan dalam bentuk persen seperti berikut

$$\epsilon_s = \text{persen galat relatif} = \frac{\text{nilai eksak} - \text{hampiran}}{\text{nilai eksak}} \times 100\%$$

Rumus di atas hanya dapat digunakan jika solusi eksak diketahui, jika tidak alternatifnya adalah dengan menormalkan galat menggunakan nilai hampiran terbaik yang tersedia yaitu terhadap hampiran itu sendiri, seperti berikut

$$\epsilon_h = \frac{\text{galat hampiran}}{\text{hampiran}} \times 100\%$$

$$= \frac{\text{hampiran sekarang} - \text{hampiran sebelumnya}}{\text{hampiran sekarang}} \times 100\%$$

huruf h menyatakan bahwa galat dinormalkan terhadap nilai hampiran (Nugroho, 2009).

2.6 Metode Iterasi

Metode iterasi diawali dengan menentukan vektor hampiran solusi awal $\boldsymbol{x}^0$ dan kemudian memperbaikinya terus menerus sesuai dengan langkah-langkah tertentu, langkah ini disebut dengan skema iterasi. Misal diberikan sistem persamaan linier berikut

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{2.7}$$

Ide dasar dari metode iterasi adalah memisah matriks A menjadi dua matriks, misal $A = N - M$. Dengan asumsi bahwa matriks N nonsingular maka persamaan (2.7) dapat ditulis kembali seperti berikut

$$N\boldsymbol{x} = M\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{x} = N^{-1}M\boldsymbol{x} + N^{-1}\boldsymbol{b}$$

Misal $G = N^{-1}M$ dan $\boldsymbol{c} = N^{-1}\boldsymbol{b}$ maka

$$\boldsymbol{x} = G\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c} \tag{2.8}$$

Skema iterasi sesuai persamaan (2.8) dapat dituliskan dalam bentuk umum sebagai berikut

$$\boldsymbol{x}^{k+1} = G\boldsymbol{x}^{k} + \boldsymbol{c} \tag{2.9}$$

(Niyogi, 2003).

Metode iterasi yang memiliki bentuk umum seperti persamaan (2.9) disebut dengan metode iterasi tetap (*stationary iterative method*) karena peralihan dari $\boldsymbol{x}^k$ ke $\boldsymbol{x}^{k+1}$ tidak bergantung pada iterasi-iterasi sebelumnya (Kelley, 1995). Yang membedakan berbagai jenis metode iterasi tetap adalah pemilihan matriks M dan N sedemikian hingga persamaan (2.9) dapat konvergen ke vektor solusi $\boldsymbol{x}$ dan menghasilkan solusi dengan iterasi seminimal mungkin.

Misal didefinisikan vektor galat sebagai berikut

$$\boldsymbol{e}^{k+1} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^{k+1}$$

Dengan melakukan eliminasi pada persamaan (2.8) dan (2.9) diperoleh

$$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^{k+1} = G(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^{k})$$

$$\boldsymbol{e}^{k+1} = G\boldsymbol{e}^{k} \tag{2.10}$$

Jika k diganti dengan $k-1$ persamaan (2.10) menjadi

$$\boldsymbol{e}^{k} = G\boldsymbol{e}^{k-1} \tag{2.11}$$

Subtitusi (2.10) ke (2.11) diperoleh

$$\boldsymbol{e}^{k+1} = G(G\boldsymbol{e}^{k-1}) = G^2\boldsymbol{e}^{k-1}$$

Jika proses tersebut dilakukan berulang kali akan didapat

$$\boldsymbol{e}^{k+1} = G^{k+1}\boldsymbol{e}^{0}$$

Vektor $\boldsymbol{e}^{k+1}$ akan mendekati nol untuk sembarang vektor galat awal $\boldsymbol{e}^0$ jika

$$\lim_{k+1\to\infty} G^{k+1} = 0$$

Dengan kata lain semua elemen matriks G mendekati nol. Matriks yang demikian disebut dengan matriks konvergen (Niyogi, 2003).

Menurut Niyogi (2003) kekonvergenan suatu matriks G dapat ditentukan dari nilai eigen matriks tersebut. Misal $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ menotasikan nilai eigen dari matriks G dan $\hat{\lambda}$ didefinisikan sebagai

$$\hat{\lambda} = \max|\lambda_i|, \quad i = 1, \dots, n$$

yang dikenal dengan *spectral radius* dari suatu matriks G, biasanya dinotasikan dengan $\rho(G)$. Dalam bukunya, Niyogi (2003) membuktikan bahwa matriks G akan konvergen jika $\rho(G) < 1$. Syarat tersebut harus dipenuhi agar semua metode yang memiliki bentuk skema iterasi seperti pada persamaan (2.9) konvergen ke $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$ untuk sembarang vektor hampiran solusi awal $\boldsymbol{x}^0$ (Golub & Loan, 1996). Demmel (1997) dalam bukunya medefinisikan bahwa *rate of convergence* dengan rumus

$$r(G) = -\log_{10}\rho(G)$$

merupakan peningkatan jumlah tempat desimal yang benar pada solusi setiap iterasi. Semakin kecil nilai $\rho(G)$ maka nilai $r(G)$ semakin besar artinya semakin banyak pula tempat desimal yang benar yang dihitung tiap iterasi.

2.7 Metode *Modified Richardson*

Metode *Modified Richardson* memiliki skema iterasi sebagai berikut

$$\boldsymbol{x}^{k+1} = (I - \alpha A)\boldsymbol{x}^k + \alpha\boldsymbol{b} \tag{2.12}$$

Dapat dilihat bahwa dalam hal ini matriks A dipisah menjadi $A = K - R$, dengan $K = \left(\frac{1}{\alpha}\right) I$ dan $R = \left(\frac{1}{\alpha}\right) I - A$. Persamaan (2.12) dapat dituliskan menjadi

$$\boldsymbol{x}^{k+1} = \mathcal{R}_\alpha \boldsymbol{x}^k + \alpha\boldsymbol{b}$$

dengan

$$\mathcal{R}_\alpha = I - \alpha A$$

(Saad *et al*, 2000). Metode *Modified Richardson* sepenuhnya konsisten jika $\alpha \neq 0$ dan A nonsingular (Young, 1971). Untuk matriks simetris positif definit metode ini akan konvergen jika nilai parameter α berada dalam interval $0 < \alpha < 2/\lambda_{max}$ dengan λ_{max} merupakan nilai eigen terbesar dari matriks A (Saad *et al*, 2000). *Spectral radius* dari matriks iterasi metode *Modified Richardson* akan mencapai nilai minimum jika $\alpha = 2/(\lambda_{min} + \lambda_{max})$ dengan λ_{min} merupakan nilai eigen terkecil dari matriks A (Saad *et al*, 2000).

2.8 Metode *Unsymmetric Modified Successive Over Relaxation* (USMSOR)

Metode *Unsymmetric Modified Successive Over Relaxation* (USMSOR) merupakan metode yang dikembangkan dari metode *Successive Over Relaxation* (SOR). Metode SOR adalah metode yang diperoleh berdasarkan metode *Gauss-Seidel*. Oleh karena itu, akan dibahas terlebih dahulu mengenai metode *Gauss-*

Seidel. Metode *Gauss-Seidel* merupakan *basic iterative method* yang sangat umum dan banyak digunakan dalam menyelesaikan sistem persamaan linier.

Dalam metode *Gauss-Seidel* matriks A dipecah menjadi $A = (D + L) + U$ dengan D adalah matriks diagonal yang berisi semua elemen diagonal pada matriks A, L adalah matriks segitiga bawah dengan semua diagonalnya nol atau disebut *strictly lower triangular*, dan U adalah matriks segitiga atas dengan semua elemen diagonalnya nol atau disebut *strictly upper triangular*. Jika elemen diagonal pada A dalam persamaan (2.7) tidak nol maka masing-masing x_i dapat dicari dengan skema iterasi berikut

$$x_1^{k+1} = \frac{b_1 - a_{12}x_2^k - a_{13}x_3^k - \cdots - a_{1n}x_n^k}{a_{11}}$$
$$x_2^{k+1} = \frac{b_2 - a_{21}x_1^{k+1} - a_{23}x_3^k - \cdots - a_{2n}x_n^k}{a_{22}} \tag{2.13}$$
$$\vdots$$
$$x_n^{k+1} = \frac{b_n - a_{n1}x_1^{k+1} - a_{n2}x_2^{k+1} - \cdots - a_{n(n-1)}x_{n-1}^{k+1}}{a_{nn}}$$

atau secara ekivalen

$$\boldsymbol{x}^{k+1} = L\boldsymbol{x}^{k+1} + U\boldsymbol{x}^k + \boldsymbol{c} \tag{2.14}$$

dimana

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ d_{21} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ d_{n1} & d_{n2} & \dots & 0 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 0 & d_{12} & \dots & d_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & d_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$d_{ij} = \begin{cases} -\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}} & \text{untuk } i \neq j \\ 0 & \text{untuk } i = j \end{cases}$$

$$c_i = \frac{b_i}{a_{ii}} \qquad i = 1 \dots n$$

Karena L adalah matriks *strictly lower triangular* maka $\det(I - L) = 1$ sehingga $I - L$ nonsingular. Dengan permisalan di atas, sistem persamaan (2.7) yang ekivalen dengan persamaan (2.14) dapat ditulis dalam bentuk

$$\boldsymbol{x}^{k+1} = \mathcal{L}\boldsymbol{x}^k + \boldsymbol{f} \tag{2.15}$$

dimana

$$\mathcal{L} = (I - L)^{-1}U \quad \text{dan} \quad \boldsymbol{f} = (I - L)^{-1}\boldsymbol{c}$$

Dalam hal ini B adalah matriks iterasi dari metode *Gauss-Seidel* (Young, 1971).

Metode SOR diperoleh dengan memilih suatu bilangan riil sebagai parameter misal dinotasikan dengan ω sehingga persamaan (2.13) dapat diganti menjadi

$$\begin{aligned} x_1^{k+1} &= \omega\left(\frac{b_1 - a_{12}x_2^k - a_{13}x_3^k - \cdots - a_{1n}x_n^k}{a_{11}}\right) + (1-\omega)x_1^k \\ x_2^{k+1} &= \omega\left(\frac{b_2 - a_{21}x_1^{k+1} - a_{23}x_3^k - \cdots - a_{2n}x_n^k}{a_{22}}\right) + (1-\omega)x_2^k \\ &\vdots \\ x_n^{k+1} &= \omega\left(\frac{b_n - a_{n1}x_1^{k+1} - a_{n2}x_2^{k+1} - \cdots - a_{n(n-1)}x_{n-1}^{k+1}}{a_{nn}}\right) + (1-\omega)x_n^k \end{aligned} \tag{2.16}$$

atau secara ekivalen

$$\boldsymbol{x}^{k+1} = \omega(L\boldsymbol{x}^{k+1} + U\boldsymbol{x}^k + \boldsymbol{c}) + (1-\omega)\boldsymbol{x}^k$$

Karena $\det(I - \omega L) = 1$, $I - \omega L$ nonsingular sehingga persamaan di atas dapat dituliskan dalam bentuk

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}^{k+1} &= (I - \omega L)^{-1}(\omega U + (1-\omega)I)\boldsymbol{x}^k + (I - \omega L)^{-1}\omega\boldsymbol{c} \\ &= \mathcal{L}_\omega\boldsymbol{x}^k + (I - \omega L)^{-1}\omega\boldsymbol{c} \end{aligned}$$

dengan

$$\mathcal{L}_\omega = (I - \omega L)^{-1}(\omega U + (1-\omega)I) \tag{2.17}$$

Jika $\omega = 1$, metode SOR sama dengan metode *Gauss-Seidel*. Untuk $\omega > 1$, metode ini disebut dengan "*overcorrecting*", untuk $\omega < 1$ disebut dengan "*undercorrecting*". Persamaan (2.12) disebut metode *forward* SOR karena nilai x yang dicari pertama adalah x_1 kemudian x_2 dan seterusnya hingga x_n. Sedangkan metode *backward* SOR adalah kebalikan dari metode *forward* SOR. Metode *backward* SOR dapat diperoleh dengan mentranspose metode *forward* SOR sehingga diperoleh persamaan berikut

$$\boldsymbol{x}^{k+1} = \omega(L\boldsymbol{x}^k + U\boldsymbol{x}^{k+1} + \boldsymbol{c}) + (1-\omega)\boldsymbol{x}^k$$

Karena $\det(I - \omega L) = 1$, $I - \omega L$ nonsingular sehingga persamaan di atas dapat dituliskan dalam bentuk

$$\boldsymbol{x}^{k+1} = (I - \omega U)^{-1}(\omega L + (1-\omega)I)\boldsymbol{x}^k + (I - U)^{-1}\omega\boldsymbol{c}$$

$$= \mathcal{U}_{\omega}\boldsymbol{x}^{k} + (I - U)^{-1}\omega\boldsymbol{c}$$

dengan

$$\mathcal{U}_{\omega} = (I - \omega U)^{-1}(\omega L + (1 - \omega)I) \tag{2.18}$$

Metode SOR dijamin kovergensinya jika A adalah matriks definit positif (*positive definite*) dengan nilai $0 < \omega < 2$ (Young, 1971).

Dalam menerapkan metode SOR untuk menyelesaikan sistem persamaan linier berikut

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

$$\begin{pmatrix} D_1 & H \\ K & D_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{b}_2 \end{pmatrix} \tag{2.19}$$

dengan D_1 dan D_2 adalah matriks diagonal non-singular, dapat digunakan nilai ω yang berbeda. Misal A dipartisi menjadi dua bagian, persamaan yang berhubungan dengan D_1 dinamakan *red equation* sedangkan persamaan yang berhubungan dengan D_2 dinamakan *black equation*. Untuk *red equation* digunakan parameter ω sedangkan untuk *black equation* digunakan parameter ω'. Metode seperti ini disebut dengan metode *Modified* SOR (MSOR) (Young, 1971). Persamaan yang digunakan untuk menyelesaiakan SPL dalam metode ini sama dengan metode SOR, perbedaannya terletak pada parameter yang digunakan. Metode SOR hanya menggunakan satu parameter yaitu ω sedangkan metode MSOR menggunakan dua parameter yaitu ω untuk *red equation* dan ω' untuk *black equation*.

Penyelesaian yang digunakan dalam metode MSOR dapat dituliskan dalam bentuk umum metode iterasi sebagai berikut

$$\boldsymbol{x}^{k+1} = \mathcal{L}_{\omega_1,\omega_2}\boldsymbol{x}^{k} + \mathcal{k}_{\omega_1,\omega_2} \tag{2.20}$$

dengan

$$\mathcal{L}_{\omega_1,\omega_2} = \begin{pmatrix} (1-\omega_1)I_1 & \omega_1 F \\ \omega_2(1-\omega_1)G & \omega_1\omega_2 GF + (1-\omega_2)I_2 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{k}_{\omega_1,\omega_2} = \begin{pmatrix} \omega_1\boldsymbol{c}_1 \\ \omega_1\omega_2 G\boldsymbol{c}_2 + \omega_2 c_2 \end{pmatrix}$$

$$F = -D_1^{-1}H, \quad G = -D_2^{-1}K, \quad \boldsymbol{c}_1 = -D_1^{-1}\boldsymbol{b}_1, \quad \boldsymbol{c}_2 = -D_2\boldsymbol{b}_2$$

Sama halnya dengan metode SOR yang dapat dilakukan dengan *forward* dan *backward*, metode MSOR juga dapat dilakukan dengan *forward* maupun *backward.* Bentuk umum metode iterasi untuk metode *backward* MSOR adalah sebagai berikut

$$\boldsymbol{x}^{k+1} = \mathcal{U}_{\omega_1,\omega_2}\boldsymbol{x}^k + \mathcal{k}_{\omega_1,\omega_2} \qquad (2.21)$$

dengan

$$\mathcal{U}_{\omega_1,\omega_2} = \begin{pmatrix} (1-\omega_1)I_1 + \omega_1\omega_2 FG & \omega_1(1-\omega_2)F \\ \omega_2 G & (1-\omega_2)I_2 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{k}_{\omega_1,\omega_2} = \begin{pmatrix} \omega_1\omega_2 F\boldsymbol{c}_2 + \omega'\boldsymbol{c}_2 \\ \omega_1\boldsymbol{c}_1 \end{pmatrix}$$

(Young, 1971).

Metode USMSOR merupakan metode yang langkahnya dibagi menjadi dua tahap. Tahap pertama adalah untuk mencari nilai $\boldsymbol{x}^{k+1/2}$, kemudian tahap kedua adalah mencari nilai $\boldsymbol{x}^{k+1}$ dengan menggunakan nilai $\boldsymbol{x}^{k+1/2}$. Nilai $\boldsymbol{x}^{k+1/2}$ diperoleh dengan melakukan perhitungan metode *forward* MSOR menggunakan parameter ω untuk *red equation* dan parameter ω' untuk *black equation* seperti berikut

$$\boldsymbol{x}^{k+1/2} = \mathcal{L}_{\omega_1,\omega_2}\boldsymbol{x}^k + \mathcal{k}_{\omega_1,\omega_2}$$

Sedangkan tahap kedua dilakukan dengan perhitungan metode *backward* MSOR menggunakan parameter $\tilde{\omega}$ untuk *red equation* dan parameter $\tilde{\omega}'$ untuk *black equation* seperti berikut

$$\boldsymbol{x}^{k+1} = \mathcal{U}_{\omega_3,\omega_4}\boldsymbol{x}^{k+1/2} + \mathcal{k}_{\omega_3,\omega_4}$$

Dalam bentuk umum metode USMSOR dapat dituliskan sebagai berikut

$$\boldsymbol{x}^{k+1} = \mathcal{U}_{\omega_3,\omega_4}\mathcal{L}_{\omega_1,\omega_2}\boldsymbol{x}^k + \mathcal{p}_{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4} \qquad (2.22)$$

(Young, 1971).

2.9 Metode *Modified Richardson-Unsymmetric Modified Successive Over Relaxation*

Prinsip prediktor korektor dilakukan dengan menggabungkan dua metode dimana satu metode berfungsi sebagai prediktor dan metode lainnya berfungsi sebagai korektor. Dalam skripsi ini, metode *Modified Richardson* akan digunakan sebagai prediktor dan metode *Unsymmetric* MSOR digunakan sebagai korektor. Misal parameter yang digunakan adalah α untuk *Modified Richardson* dan

$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ untuk *Unsymmetric* MSOR. Langkah pertama adalah mencari nilai $\boldsymbol{x}$ dengan memasukkan vektor hampiran awal $\boldsymbol{x}^0$ ke dalam metode *Modified Richardson* dengan rumus

$$\boldsymbol{x}^{k+1/2} = (I - \alpha A)\boldsymbol{x}^k + \alpha \boldsymbol{b}$$

Selanjutnya nilai $\boldsymbol{x}$ yang diperoleh dari langkah pertama akan menjadi $\boldsymbol{x}^0$ pada langkah kedua. Pada langkah kedua ini, nilai $\boldsymbol{x}$ dihitung dengan menggunakan metode *Unsymmetric Modified Successive Over Relaxation* berikut

$$\boldsymbol{x}^{k+1} = \mathcal{U}_{\omega_3,\omega_4}\mathcal{L}_{\omega_1,\omega_2}\boldsymbol{x}^{k+1/2} + \mathcal{p}_{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4}$$

Sehingga metode *Modified Richardson-Unsymmetric Modified Successive Over Relaxation* memiliki bentuk umum seperti berikut

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}^{k+1} &= \mathcal{U}_{\omega_3,\omega_4}\mathcal{L}_{\omega_1,\omega_2}\boldsymbol{x}^{k+1/2} + \mathcal{p}_{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4} \\ &= \mathcal{U}_{\omega_3,\omega_4}\mathcal{L}_{\omega_1,\omega_2}\mathcal{R}_{\alpha}\boldsymbol{x}^k + \mathcal{U}_{\tilde{\omega},\tilde{\omega}'}\mathcal{L}_{\omega_1,\omega_2}\alpha\boldsymbol{b} + \mathcal{p}_{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4} \\ &= \mathcal{WR}_{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\alpha}\boldsymbol{x}^k + \mathcal{q}_{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\alpha} \end{aligned} \qquad (2.23)$$

2.10 Pemrograman MATLAB

MATLAB atau *Matrix Laboratory* merupakan bahasa pemrograman matematika yang terbentuk dari dasar pemikiran sifat dan bentuk matriks, program ini digunakan untuk analisis dan komputasi numerik. Berawal dari koleksi rutin numerik proyek LINPACK dan EISPACK, program ini kemudian dikembangkan dan telah menjadi produk komersial milik perusahaan Mathworks,Inc. Selanjutnya program ini akan dikembangkan lagi menggunakan bahasa C++ dan assembler.

MATLAB berisi fungsi-fungsi *built-in* yang dapat digunakan dalam pengolahan sinyal, aljabar linier dan perhitungan matematis lainnya. Pengguna juga dapat menambahkan fungsi yang dibuat sendiri ke dalam *library* jika fungsi *built-in* yang ada tidak dapat melakukan tugas tertentu. MATLAB yang merupakan bahasa pemrograman tingkat tinggi berbasis matriks sering digunakan dalam:

- Menyelesaikan masalah operasi matematika elemen, optimasi, hampiran
- Matematika dan komputasi

- Pengembangan dan algoritma
- Pemrograman modeling, simulasi, dan pembuatan prototype
- Analisis data, eksplorasi, dan visualisasi
- Analisis numerik dan statistik

Berikut ini adalah bagian-bagian pada program MATLAB yang tersedia untuk melakukan perhitungan matematis tertentu:

a. MATLAB *command window* / editor

MATLAB *command window* yaitu jendela yang muncul saat program MATLAB baru dijalankan. Pada window ini, pengguna dapat mengetikkan command atau perintah yang tersedia dalam MATLAB. Dalam window ini, perintah yang diketikkan akan dijalankan ketika menekan tombol "Enter", dan perintah yang telah dijalankan tidak dapat diedit.

b. MATLAB editor (Editor M-File)

MATLAB editor adalah window yang dapat digunakan untuk mengetikkan serangkaian perintah atau biasa disebut script dan juga dapat mengedit script yang telah diketikkan. Pada window ini, terdapat peringatan jika ada kesalahan ataupun kekurangan dalam penulisan script yang ditulis.

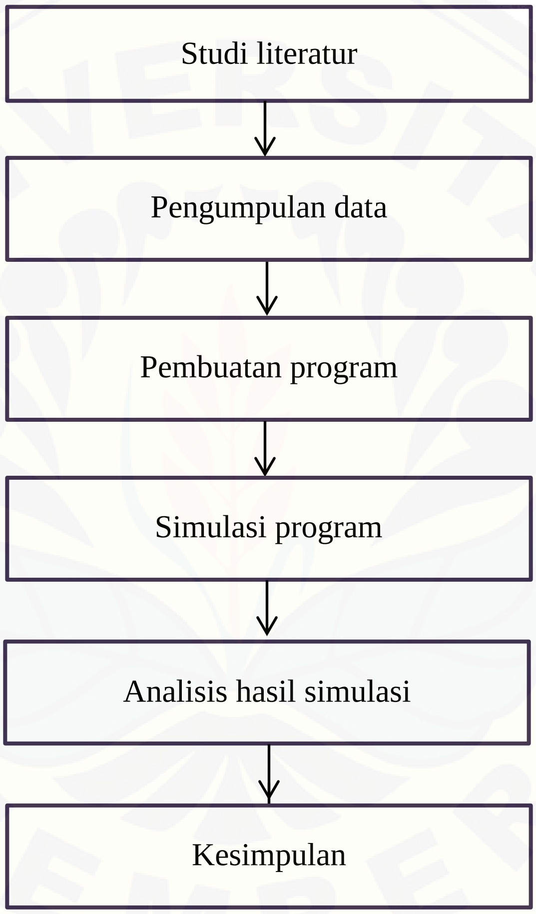
c. Figure Windows

Window ini digunakan untuk memvisualisasikan script MATLAB, misal untuk menggambar fungsi, grafik, dan lain-lain.

(Arhami, 2005).

BAB 3. METODE PENELITIAN

Langkah-langkah yang akan dilakukan untuk menyelesaikan skripsi ini digambarkan dalam skema berikut



Gambar 3.1 Skema langkah-langkah penelitian

Penjelasan dari skema langkah penelitian di atas adalah sebagai berikut

a. Studi literatur

Langkah pertama dalam melakukan penelitian ini adalah studi literatur yaitu dengan mencari, mengumpulkan, dan memahami berbagai informasi baik dari buku, skripsi, artikel, maupun jurnal yang berkaitan dengan matriks, sistem persamaan linier serta metode-metode peyelesaian sistem persamaan linier khususnya metode *Modified Richardson* dan metode *Unsymmetric Modified Successive Over Relaxation*.

b. Pengumpulan data

Data yang akan digunakan dalam skripsi ini berupa matriks A yang definit positif dan memiliki bentuk seperti pada persamaan (2.19). Pengambilan data dilakukan dengan mengunduh matriks yang dibutuhkan di alamat web *Matrix Market* yaitu http://math.nist.gov/MatrixMarket/. Metode *Modified Richardson-Unsymmetric* MSOR akan diuji dengan menyelesaikan dua permasalahan sistem persamaan linier (SPL). Pertama, diuji dengan menyelesaikan SPL yang tidak diketahui nilai eksaknya kemudian diuji dengan menyelesaikan SPL dengan vektor $\boldsymbol{b}$ yang telah diatur supaya solusinya adalah $\boldsymbol{x} = (1,1,1, \dots, 1)$. Selain itu, metode tersebut juga diuji untuk menyelesaikan satu kasus SPL untuk mengetahui hasilnya jika nilai parameter metode tersebut diubah.

c. Pembuatan program

Program yang akan digunakan adalah *software* MATLAB 2009a. Langkah-langkah yang diperlukan adalah sebagai berikut

1) Input

Untuk metode *Gauss Seidel*, input yang dibutuhkan adalah matriks koefisien A, vektor konstanta $\boldsymbol{b}$, vektor hampiran solusi awal $\boldsymbol{x}^0$, toleransi ε.

Untuk metode *Modified Richardson*, input yang dibutuhkan adalah matriks koefisien A, vektor konstanta $\boldsymbol{b}$, vektor hampiran solusi awal $\boldsymbol{x}^0$, toleransi ε dan parameter α.

Untuk metode *Unsymmetric* MSOR, input yang dibutuhkan adalah matriks koefisien A, vektor konstanta $\boldsymbol{b}$, vektor hampiran solusi awal $\boldsymbol{x}^0$, toleransi ε dan parameter $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$.

Untuk metode *Modified Richardson-Unsymmetric* MSOR, input yang diperlukan adalah matriks koefisien A, vektor konstanta $\boldsymbol{b}$, vektor hampiran solusi awal $\boldsymbol{x}^0$, toleransi ε dan parameter $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ dan α.

2) Proses

Membuat program untuk metode *Gauss Seidel*, *Modified Richardson*, *Unsymmetric* MSOR, dan metode *Modified Richardson-Unsymmetric* MSOR.

3) Output

Hasil output dari program yang akan dibuat adalah vektor penyelesaian $\boldsymbol{x}$ tiap iterasi beserta galatnya dan juga *running time* program.

d. Simulasi program

Pada tahap ini, penulis akan mensimulasikan program dengan menggunakan input yang diperlukan masing-masing metode dan mencatat hasil yang diperoleh. Simulasi ini bertujuan untuk mengetahui performa metode *Modified Richardson-Unsymmetric* MSOR dengan membandingkannya dengan metode *Gauss Seidel*, *Modified Richardson*, dan metode *Unsymmetric* MSOR dilihat dari nilai *rate of convergence* masing-masing metode, jumlah iterasi serta galat yang dihasilkan. Selain itu, simulasi juga dilakukan dengan menyelesaikan satu kasus SPL menggunakan metode *Modified Richardson-Unsymmetric* MSOR dengan nilai parameter yang berbeda-beda untuk mengetahui nilai parameter optimum bagi SPL tersebut.

e. Analisis hasil simulasi

Analisis hasil simulasi diperoleh dari pengamatan hasil simulasi program yang ditinjau berdasarkan nilai *rate of convergence*, jumlah iterasi dan nilai galat yang dihasilkan.

f. Kesimpulan

Kesimpulan dibuat berdasarkan hasil analisis hasil simulasi yang telah dilakukan.

BAB 5. PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan yang telah dikemukakan pada bab 4, dapat disimpulkan beberapa hal berikut:

a. Langkah-langkah dalam menyelesaikan sistem persamaan linier menggunakan metode *Modified Richardson-Unsymmetric* MSOR adalah input dan inisialisasi parameter, menghitung nilai $\boldsymbol{x}$ baru dengan memasukkan $\boldsymbol{x}$ awal ke dalam rumus metode *Modified Richardson*, memperbarui nilai $\boldsymbol{x}$ awal, memasukkan kembali nilai $\boldsymbol{x}$ awal untuk mendapatkan $\boldsymbol{x}$ baru menggunakan rumus *Unsymmetric* MSOR tahap maju, memperbarui nilai $\boldsymbol{x}$ awal, memasukkan kembali nilai $\boldsymbol{x}$ awal untuk mendapatkan $\boldsymbol{x}$ baru menggunakan rumus *Unsymmetric* MSOR tahap mundur, dan menghitung nilai galat. Langkah tersebut diulang terus menerus hingga nilai galat mencapai nilai toleransi yang diinginkan.

b. Ditinjau dari nilai *rate of convergence* metode *Gauss Seidel, Modified Richardson, Unsymetric* MSOR, dan metode *Modified Richardson-Unsymmetric* MSOR diperoleh bahwa nilai *rate of convergence* matriks iterasi metode *Modified Richardson-Unsymmetric* MSOR lebih besar dari metode lain untuk tujuh kasus SPL dengan ukuran 9x9, 12x12, 25x25, 40x40 (Kasus 1), 50x50, 225x225 dan 450x450. Sedangkan untuk dua kasus SPL dengan nilai *spectral radius* matriks A atau $S(A)$ sangat besar, metode *Modified Richardson-Unsymmetric* MSOR menghasilkan nilai *rate of convergence* yang sama dengan metode *Unsymmetric* MSOR. Untuk dua kasus lainnya metode *Modified Richardson-Unsymmetric* MSOR menghasilkan nilai *rate of convergence* yang lebih besar dari metode *Unsymmetric* MSOR namun lebih kecil daripada metode *Gauss Seidel.*

c. Dilihat dari jumlah iterasi dan nilai galat yang diperoleh, metode *Modified Richardson-Unsymmetric* MSOR menghasilkan galat yang sama atau lebih kecil namun dengan jumlah iterasi yang lebih sedikit daripada metode lain untuk tujuh kasus SPL dengan ukuran 9x9, 12x12, 25x25, 40x40 (Kasus 1), 50x50, 225x225 dan 450x450. Sedangkan untuk empat kasus SPL dengan nilai $S(A)$ yang sangat besar, metode *Modified Richardson-Unsymmetric* MSOR membutuhkan jumlah iterasi yang sama dan menghasilkan galat yang besarnya hampir sama dengan metode *Unsymmetric* MSOR.

5.2 Saran

Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan, disarankan untuk peneliti selanjutnya agar menemukan rentang nilai parameter $\alpha, \omega_1, \omega_2, \omega_3$, dan ω_4 yang dapat mengoptimumkan *rate of convergence* matriks iterasi metode *Modified Richardson-Unsymmetric* MSOR serta menemukan kriteria masing-masing parameter yang dapat meminimumkan galat dan jumlah iterasi metode *Modified Richardson-Unsymmetric* MSOR.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, H. *Aljabar Linear Elementer Edisi Kelima*. Alih bahasa oleh Pantur Silaban dan I Nyoman Susila. 1997. Jakarta: Erlangga.

Anton, H., & Rorres, C. 2000. *Aljabar Linier Elementer Versi Aplikasi Edisi Kedelapan/Jilid 2*. Alih bahasa oleh Irzam Harmein dan Julian Gressando. 2005. Jakarta: Erlangga.

Arhami, M., & Desiani, A. 2005. *Pemrograman MATLAB.* Yogyakarta: ANDI.

Bronson, R., & Costa, G.B. 2006. *Teori dan Soal-soal Persamaan Diferensial*. Alih bahasa oleh Thombi Layukallo. 2007. Jakarta: Erlangga.

Demmel, J.W. 1997. *Applied Numerical Linear Algebra*. California: University of California.

Fischer, B., & Reichel, 1988. L. A Stable Richardson Iteration Method for Complex Linear Systems. *J.Numer.Math*, 225-242.

Golub, G.H., & Loan, C.F.V. 1996. *Matrix Computation Third Edition*. London: The Johns Hopkins University Press.

Hackbusch, W. 1994. *Iterative Solution of Large Sparse System of Equations*. New York: Springer-Verlag New York, Inc.

Hefferon, J. 2014. *Linear Algebra*. Colchester: Saint Michael’s College.

Kartono. 2005. *Aljabar Linier, Vektor dan Eksplorasinya dengan Maple Edisi 2*. Yogyakarta: Graha Ilmu.

Kelley, C.T. 1995. *Iterative Methods for Linear and Nonlinear Equations.* Philadelphia: North Carolina State University.

Kusumawati, R. 2009. *Aljabar Linier & Matriks.* Malang: UIN-Malang Press.

Mursita, D. 2010. *Aljabar Linier*. Bandung: Rekayasa Sains.

Myers, R.H., & Milton, J.S. 1991. *A first Course in Theory of Linear Statistical Models.* Boston: PWS-KENT Publishing Company.

Niyogi, P. 2003. *Numerical Analysis and Algorithm*. New Delhi: Tata McGraw-Hill Publishing Company.

Nugroho, D.B. 2009. *Diktat Kuliah Metode Numerik*. Salatiga: Universitas Kristen Satya Wacana.

Pirnadi. 2010. *Modul Ajar ke-08 Matematika Teknik*. Jakarta: Pusat Pengembangan Bahan Ajar Universitas Mercu Buana.

Purwanto, H., Indriani, G., & Dayanti, E. 2005. *Aljabar Linier*. Jakarta: Ercontara Rajawali.

Rasyad, R. 2003. *Aljabar Linear Untuk Umum.* Jakarta: PT Gramedia Widiasarana Indonesia.

Saad, Y., & Vorst, H.A.V.D. 2000. Iterative Solution of Linear System in the 20th Century. *J.Comput.Appl.Math*, 1-33.

Sahid. 2004. *Pengantar Komputasi Numerik dengan MATLAB*. Yogyakarta: Penerbit ANDI.

Sulpiani, R., & Widowati. 2013. Solusi Numerik Persamaan Difusi dengan Menggunakan Metode Beda Hingga. 21 (3) : 68-74.

Sutojo, Bowo, Rahayu, Mulyanto. 2010. *Teori dan Aplikasi Aljabar Linier dan Matriks.* Yogyakarta: Penerbit ANDI.

Young, D.M. 1971. *Iterative Solution of Large Linear System*. London: Academic Press, Inc.