



**PELABELAN SELIMUT TOTAL SUPER  
 $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -ANTIMAGIC PADA *JOINT* GRAF SERTA  
APLIKASINYA PADA *CIPHERTEXT***

**SKRIPSI**

Oleh

**Ratih Roesdiana**

**NIM 121810101004**

**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS JEMBER**

**2016**



**PELABELAN SELIMUT TOTAL SUPER  
( $a, d$ )- $\mathcal{H}$ -ANTIMAGIC PADA *JOINT* GRAF SERTA  
APLIKASINYA PADA *CIPHERTEXT***

**SKRIPSI**

diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan Program Studi Matematika (S1) dan mencapai gelar Sarjana Sains

Oleh

**Ratih Roesdiana**  
NIM 121810101004

**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS JEMBER**

**2016**

## HALAMAN PERSEMBAHAN

Dengan menyebut nama Allah yang maha pengasih lagi maha penyayang, serta sholawat atas Nabi Muhammad S.A.W, kupersembahkan sebuah kebahagiaan dalam perjalanan hidupku teriring rasa terima kasihku yang terdalam kepada:

1. Allah SWT, yang telah memberikan nikmat rezeki, ridho, serta rahmat-Nya sehingga mampu menyelesaikan skripsi dengan baik;
2. Ayahanda Moh. Hasan Roesdy dan Ibunda Chusnul Chotimah yang selalu mendoakan, memberi kasih sayang, serta pengorbanan yang telah diberikan sekaligus penyemangat dalam setiap langkah kehidupan;
3. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D. selaku Dosen Pembimbing I dan Kosala Dwi Purnomo, S.Si., M.Si, selaku Dosen Pembimbing II yang telah memberikan ilmu, bimbingan, motivasi, perhatian, bantuan dan kesabaran dalam mengerjakan skripsi ini;
4. Para guru-guruku sejak taman kanak-kanak sampai perguruan tinggi yang telah memberikan ilmu dan membimbing dengan penuh kesabaran;
5. Teman seperjuanganku (CGANT) : Zum, Riza, Yuni, Haniah, dan pecinta graf lainnya yang telah membagi ilmu dan pengalaman berharga.

## HALAMAN MOTTO

"Barangsiapa yang menginginkan kehidupan dunia, maka ia harus memiliki ilmu dan barang siapa yang menginginkan kehidupan akhirat maka itupun harus dengan ilmu, dan barang siapa yang menginginkan keduanya maka itupun harus dengan ilmu"

(HR. Thabrani)

"Sesungguhnya Allah menyukai jika salah satu dari kalian melakukan amalan (pekerjaan) yang dilakukan dengan tekun (maksimal/sebaik-baiknya)"

(HR. Baihaqi)

"Ia mendapatkan pahala (dari kebajikan) yang diusahakannya dan ia mendapat siksa (dari kejahatan) yang dikerjakannya"

(Al Baqarah;286)

**HALAMAN PERNYATAAN**

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Ratih Roesdiana

NIM : 121810101004

Menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang berjudul: *PELABELAN SELIMUT TOTAL SUPER  $(a,d)$ - $\mathcal{H}$ -ANTIMAGIC PADA JOINT GRAF SERTA APLIKASINYA PADA CIPHERTEXT* adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali jika dalam pengutipan substansi disebutkan sumbernya, dan belum diajukan pada instansi manapun, serta bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa adanya tekanan dan paksaan dari pihak manapun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, Juni 2016

Yang menyatakan,

Ratih Roesdiana

NIM. 121810101004

SKRIPSI

PELABELAN SELIMUT TOTAL SUPER  
 $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -ANTIMAGIC PADA *JOINT* GRAF SERTA  
APLIKASINYA PADA *CIPHERTEXT*

Oleh

Ratih Roesdiana  
NIM 121810101004

Dosen Pembimbing 1 : Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D.  
Dosen Pembimbing 2 : Kosala Dwidja Purnomo , S.Si., M.Si

PENGESAHAN

Skripsi berjudul "PELABELAN SELIMUT TOTAL SUPER  $(a,d)$ - $\mathcal{H}$ -ANTIMAGIC PADA JOINT GRAF SERTA APLIKASINYA PADA CIPHERTEXT" telah diuji dan disahkan oleh Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam pada:

hari : Jumat

tanggal : 24 Juni 2016

tempat : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember

Tim Penguji

Ketua,

Sekretaris,

Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D.

Kosala Dwidja Purnomo, S.Si., M.Si

NIP. 19680802 199303 1 004

NIP. 19690828 199802 1 001

Anggota I,

Anggota II,

Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si

Dr. Mohamat Fatekurohman, S.Si., M.Si

NIP. 19840801 200801 2 006

NIP. 19690606 199803 1 001

Mengesahkan

Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Universitas Jember,

Drs. Sujito, Ph.D

NIP. 19610204 198711 1 001



RINGKASAN

**PELABELAN SELIMUT TOTAL SUPER  
( $a, d$ )- $\mathcal{H}$ -ANTIMAGIC PADA JOINT GRAF SERTA  
APLIKASINYA PADA *CIPHERTEXT***; Ratih Roesdiana, 121810101004;  
2016: 54 halaman; Program Studi Pendidikan Matematika, Fakultas Matematika  
dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Jember.

Teori graf merupakan salah satu pokok bahasan dari ilmu eksakta (matematika) yang memiliki berbagai macam penerapan dalam kehidupan sehari-hari sampai saat ini. Graf itu sendiri terbentuk oleh elemen titik yang merupakan syarat perlu bagi suatu graf dan elemen yang menghubungkan titik-titik tersebut yang disebut sisi dimana setelah dihubungkan akan membentuk sebuah pola tertentu. Topik graf yang akan dikaji adalah pelabelan graf. Pelabelan graf merupakan pemetaan satu-satu (fungsi bijektif) yang memasangkan elemen-elemen graf  $(V(G), E(G))$  dengan himpunan bilangan bulat positif. Berbagai jenis tipe pelabelan graf yaitu pelabelan  $(a, d) - \mathcal{H}$  anti ajaib (*antimagic*) yang berkembang salah satunya ialah pelabelan selimut  $(a, d) - \mathcal{H}$  anti ajaib super, dimana  $a$  bobot selimut terkecil dan  $d$  nilai beda. Suatu graf dikatakan memiliki pelabelan  $(a, d) - \mathcal{H}$  anti ajaib (*antimagic*) jika terdapat pemetaan bijektif dari elemen-elemen graf  $f : V(G) \cup E(G)$  ke bilangan bulat positif  $\{1, 2, 3, \dots, |V(G)| + |E(G)|\}$ , dengan setiap subgraf  $\mathcal{H}$  dari  $G$  yang isomorfik dengan  $\mathcal{H}$  mempunyai bobot total selimut yang berbeda  $\omega(H) = \sum_{v \in V(H)} f(v) + \sum_{e \in E(H)} f(e)$  dan membentuk barisan aritmetika  $\{a, a + d, a + 2d, \dots, a(n - 1)d\}$  dengan  $a$  dan  $d$  adalah bilangan positif dan  $n$  menyatakan banyaknya semua subgraf yang isomorfik  $\mathcal{H}$ . Graf  $G$  dikatakan memiliki pelabelan super antimagic jika himpunan titik  $V(G)$  merupakan pemetaan bijektif ke himpunan  $\{1, 2, 3, \dots, |V(G)|\}$ .

Penelitian ini akan menggunakan metode deduktif aksiomatik dan metode pendektesian pola. Adapun langkah pertama menggunakan metode deduktif yaitu memilih graf, lalu mencari kardinalitas graf baik titik maupun sisi beserta batas atasnya  $d$ . Langkah selanjutnya memberi label pada titik dan sisi graf



dan kemudian menemukan pelabelan selimut total super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$  -*antimagic* pada *joint* graf dengan menerapkan teorema yang sudah ada. Selanjutnya menggunakan metode pendektesian pola yang digunakan untuk merumuskan pola dari pelabelan titik dan sisi yang sudah dilakukan sampai terbentuk pola yang apabila graf diperbanyak pola tersebut akan berlaku umum sehingga memperoleh perumusan pelabelan selimut total super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$  -*antimagic* pada *joint* graf.

Penelitian ini mempunyai tujuan awal yaitu untuk menemukan pelabelan selimut total super  $(a, d) - \mathcal{H}$  *antimagic* pada *joint* dari graf lintasan dan siklus dengan menentukan kardinalitas titik maupun sisi, menentukan batas atas  $d$  dan beberapa nilai beda  $d$  dan mengembangkan *Chiphertext* dengan menggunakan pelabelan selimut total  $(a, d) - \mathcal{H}$  *antimagic* pada *joint* dari graf lintasan dan siklus. Terdapat tahap-tahap agar tujuan tersebut tercapai, tahap pertama yang dilakukan adalah menentukan kardinalitas baik titik maupun sisi selanjutnya batas atas  $d$  dari *joint* dari graf lintasan dan graf siklus. Kemudian, mencari pengembangan partisi dan variasi nilai beda yang disajikan dalam Lemma. Membangun pelabelan yang berdasarkan kombinasi partisi yang dikembangkan dengan menemukan sebuah Teorema beserta ilustrasi graf, dan tahap terakhir membentuk *Chiphertext* menggunakan ilustrasi tersebut.

Didapatkan pemaparan dari hasil perhitungan bahwa pelabelan selimut total super  $(a, d) - \mathcal{H}$  *antimagic* pada *joint* graf lintasan dan siklus  $nP_z + C_t$  memiliki kardinalitas himpunan titik  $V_1 = \{y_{(i,k)}; 1 \leq i \leq m, 1 \leq k \leq n\}$ ,  $V_2 = \{x_l; 1 \leq l \leq t\}$ , dan himpunan sisi  $E_1 = \{s_{(r,k)}; 1 \leq r \leq c, 1 \leq k \leq n\}$ ,  $E_2 = \{x_l x_{l+1}; 1 \leq l \leq t-1\} \cup \{x_t x_1\}$ . Didapatkan  $|V_1| = nm$ ,  $|V_2| = t$ ,  $|E_1| = nc$ , dan  $|E_2| = (t-1) + 1 = t$  sedemikian hingga  $p_G = |V(G)| = |V_1| + |V_2| = nm + t$ ,  $q_G = |E(G)| = |E_1| + |E_2| = nc + t$  dan *joint* graf lintasan dan graf siklus  $(nP_z + C_t)$  memiliki batas atas  $d \leq (p_H)^2 - tp_H + (q_H)^2 - tq_H$ . Selanjutnya dilakukan pengembangan partisi dan variasi nilai beda sehingga mendapatkan 2 Lemma diantaranya  $\mathcal{P}_{m,3m^2}^n(i, k)$ ,  $\mathcal{P}_{m,-3m^2}^n(i, k)$  yang kemudian membangun pelabelan selimut total super  $(a, d) - \mathcal{H}$  *antimagic* pada *joint* graf lintasan dan siklus  $nP_z + C_t$  dari kombinasi partisi yang sudah ditemukan dan dihasilkan pada penelitian ini sehingga didapatkan Teorema baru.

Hasil penelitian ini berupa teorema baru mengenai pelabelan selimut  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$  anti ajaib super pada joint graf lintasan dan siklus  $nP_z + C_t$  dengan  $a = \{(\frac{3m_1+3m_1^2}{2} - 3m_1^2 - 2m_1) + (m_2 + 3nm_2^2) + (\frac{3m_2+3m_2^2}{2} - 3m_2 + (m_1 + 2(m_1)n)) + (\frac{n}{2}(m_3^2 - m_3) + m_3k + (m_1 + 2(m_1))n + (m_2 + 2(m_2))n) + (\frac{m_4n}{2}(m_4 + 1) + m_4 + (m_1 + 2(m_1))n + (m_2 + 2(m_2))n + nm_3)(\frac{1}{2}(m_5 - m_5^2) + (m_1 + 2(m_1))n + (m_2 + 2(m_2))n + nm_3 + nm_4) + (\frac{m_6}{2}(2m_6n + m_6 + 1) + (m_1 + 2(m_1))n + (m_2 + 2(m_2))n + nm_3 + nm_4 + nm_5) + (\frac{m_7}{4}(2m_7n - n + 1) + (m_1 + 2(m_1))n + (m_2 + 2(m_2))n + nm_3 + nm_4 + nm_5 + nm_6) + (\frac{m_8}{4}(2m_8n + n + 3) + (m_1 + 2(m_1))n + (m_2 + 2(m_2))n + nm_3 + nm_4 + nm_5 + nm_6 + nm_7) + (l_1 + \frac{3}{4}l_1^2) + (l_2 + \frac{3}{4}l_2^2 + (m_1 + 2(m_1)n))(\frac{3c_1+3c_1^2}{2} - 3c_1^2 - 2c_1 \oplus nm + t) + (c_2 + 3nc_2^2 + \frac{3c_2^2+3c_2^2}{2} - 3c_2 + nc_1 + nm + t) + (\frac{n}{2}(c_3^3 - c_3) + nc_1 + nc_2 + nm + t) + (\frac{c_4}{2}(c_4 + 1) + c_4 + nm + t + nc_1 + nc_2 + nc_3) + (\frac{1}{2}(c_5 - c_5^2) + nm + t + nc_1 + nc_2 + nc_3 + nc_4) + (\frac{c_6}{2}(2c_6n + c_6 + 1) + nm + t + nc_1 + nc_2 + nc_3 + nc_4 + nc_5) + (\frac{c_7}{4}(2c_7n - n + 1) + nm + t + nc_1 + nc_2 + nc_3 + nc_4 + nc_5 + nc_6) + (\frac{c_8}{4}(2c_8 + n + 3) + nm + t + nc_1 + nc_2 + nc_3 + nc_4 + nc_5 + nc_6 + nc_7)\}$  dan  $d = \{3m_1^2 - 3m_2^2 + m_3 - m_4 + m_5^2 - m_6^2 + \frac{m_7}{2} - \frac{m_8}{2} + 3c_1^2 - 3c_2^2 + c_3 - c_4 + c_5^2 - c_6^2 + \frac{c_7}{2} - \frac{c_8}{2}\}$

Teorema tersebut dapat dibentuk *ciphertex*. *Ciphertex* yang diaplikasikan dalam penelitian ini adalah jenis *ciphertex* alfabet yang berdasarkan aturan Julius Caesar. Dalam pembentukan *ciphertex* ini berdasarkan pelabelan yang didapatkan dari kombinasi partisi yang digunakan.

## KATA PENGANTAR

Puji syukur ke hadirat Allah Swt atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul Pelabelan Selimut Total Super  $(a,d)$ - $\mathcal{H}$ -Antimagic Pada Joint Graf Serta Aplikasinya Pada Ciphertext. Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan pendidikan strata satu (S1) pada Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih atas bantuan dan bimbingan dalam penyusunan skripsi ini, terutama kepada yang terhormat:

1. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
2. Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
3. Ketua Program Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
4. Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D. selaku Dosen Pembimbing I dan Kosala Dwidja Purnomo, S.Si., M.Si, selaku Dosen Pembimbing II yang telah meluangkan waktu, pikiran, dan perhatian dalam penulisan skripsi ini;
5. Ika Hesti Agustin, S.Si.,M.Si selaku Dosen Penguji I dan Dr. Mohamat Fatekurohman, S.Si., M.Si selaku Dosen Penguji II;
6. Dosen dan Karyawan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
7. Semua pihak yang telah membantu dalam penyelesaian skripsi ini.

Semoga bantuan, bimbingan, dan dorongan beliau dicatat sebagai amal baik oleh Allah SWT dan mendapat balasan yang sesuai dari-Nya. Selain itu, penulis juga menerima segala kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan skripsi ini. Akhirnya penulis berharap, semoga skripsi ini dapat bermanfaat.

Jember, Juni 2016

Penulis



DAFTAR ISI

	Halaman
HALAMAN JUDUL .....	i
HALAMAN PERSEMBAHAN .....	ii
HALAMAN MOTTO .....	iii
HALAMAN PERNYATAAN .....	iv
HALAMAN PENGESAHAN .....	vi
RINGKASAN .....	vii
KATA PENGANTAR .....	x
DAFTAR ISI .....	xii
DAFTAR GAMBAR .....	xiv
DAFTAR TABEL .....	xv
<b>BAB 1 PENDAHULUAN</b> .....	<b>1</b>
1.1 Latar Belakang .....	1
1.2 Rumusan Masalah .....	3
1.3 Tujuan Penelitian .....	4
1.4 Manfaat Penelitian .....	4
<b>BAB 2 TINJAUAN PUSTAKA</b> .....	<b>5</b>
2.1 Terminologi Dasar Graf .....	5
2.2 Graf Khusus .....	8
2.3 Operasi Graf .....	9
2.4 Fungsi dan Barisan .....	10
2.4.1 Fungsi .....	10
2.4.2 Barisan .....	11
2.5 Partisi .....	12
2.6 Pelabelan Graf .....	13
2.6.1 Definisi Pelabelan Graf .....	13
2.6.2 Pelabelan Selimut Super $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic .....	14
2.6.3 Lemma Batas Atas Pelabelan Selimut Super $(a, d) - \mathcal{H} -$ <i>Antimagic</i> .....	15

2.6.4	Partisi pada Pelabelan .....	16
2.7	Aplikasi Graf.....	20
2.8	Hasil Pelabelan Selimut $(a, d) - \mathcal{H} - Antimagic$ .....	22
<b>BAB 3 METODE PENELITIAN .....</b>		<b>23</b>
3.1	Metode Penelitian .....	23
3.2	Rancangan Penelitian .....	23
3.2.1	Penotasian Titik dan Sisi .....	23
3.2.2	Indikator Pelabelan.....	25
3.3	Teknik Penelitian .....	25
3.4	Observasi Awal .....	28
<b>BAB 4 HASIL DAN PEMBAHASAN .....</b>		<b>31</b>
4.1	Kardinalitas dan Batas Atas <i>Joint</i> Graf Lintasan dan Graf Siklus $(nP_z + C_t)$ pada Graf Konektif .....	31
4.2	Pengembangan Partisi <i>Joint</i> Graf Lintasan dan Graf Siklus $(nP_z + C_t)$ .....	33
4.3	Pelabelan Selimut Total Super $(a, d) - \mathcal{H} - Antimagic$ pada <i>Joint</i> Graf Lintasan dan Graf Siklus $(nP_z + C_t)$ .....	34
4.4	Pengembangan <i>Chiphertext</i> Pelabelan Selimut Total Super $(a, d) - \mathcal{H} - Antimagic$ pada <i>Joint</i> Graf Lintasan dan Graf Siklus $(nP_z + C_t)$ .....	42
4.4.1	Pembangunan <i>Chiphertext</i> Alfabet Pada <i>Joint</i> dari Graf Lintasan dan Graf Lingkaran dengan $d = 354$ .....	43
4.5	Hasil dan Pembahasan.....	47
<b>BAB 5 KESIMPULAN DAN SARAN .....</b>		<b>51</b>
5.1	Kesimpulan.....	51
5.2	Saran .....	52
<b>DAFTAR PUSTAKA.....</b>		<b>53</b>



DAFTAR GAMBAR

	Halaman
2.1 Contoh Graf $G$ .....	6
2.2 Contoh Graf Lingkaran.....	9
2.3 Contoh Graf Lintasan .....	9
2.4 Operasi Graf .....	10
2.5 1. Fungsi Injektif, 2. Fungsi Surjektif, 3. Fungsi Bijektif.....	11
3.1 Joint Graf Lintasan dan Graf Lingkaran.....	24
3.2 Diagram Alir Penelitian.....	27
3.3 Graf Joint Graf Lintasan dan Graf Lingkaran.....	28
4.1 Graf Ilustrasi.....	42
4.2 Diagram Pohon Untuk Super $(9871, 354)\text{-}\mathcal{H}$ – <i>Antimagic</i> Total Selimut	45



DAFTAR TABEL

	Halaman
2.1 Klasifikasi partisi $d = m$ .....	19
2.2 Klasifikasi partisi $d = m^2$ .....	20
2.3 Klasifikasi partisi $d = \frac{m}{2}$ .....	20
2.4 Aturan Julius Caesar.....	21
2.5 Ringkasan Pelabelan Selimut Super $(a, d)\text{-}\mathcal{H} - \textit{Antimagic}$ .....	22
3.1 Klasifikasi Partisi $d = 3m^2$ .....	29
4.1 Klasifikasi Joint dari Graf Lintasan dan Graf Siklus.....	39
4.2 Klasifikasi Joint dari Graf Lintasan dan Graf Siklus.....	40
4.3 Klasifikasi Joint dari Graf Lintasan dan Graf Siklus.....	41
4.4 Pembentukan <i>Chiphertext</i> alfabet dari Gambar 4.1.....	46
4.5 <i>Chiphertext</i> alfabet dari Graf $nP_z + C_t$ dengan $d=354$ .....	48
5.1 <i>Chiphertext</i> alfabet dari Graf $nP_z + C_t$ dengan $d=354$ .....	52

## BAB 1. PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Teori graf merupakan salah satu pokok bahasan dari ilmu eksakta (matematika) yang memiliki berbagai macam penerapan dalam kehidupan sehari-hari sampai saat ini. Menurut catatan sejarah konsep pertama teori graf ini muncul pada saat meneliti dan memecahkan permasalahan jembatan Königsberg. Permasalahannya muncul karena adanya keinginan mengunjungi 4 bagian wilayah daratan yang dibelah oleh sungai bernama Pregel di kota Königsbern (sekarang bernama Kalilingrad, Uni Soviet) tepat satu kali dan kembali ke tempat awal berangkat dengan melewati 7 buah jembatan yang dibangun di atas sungai tersebut. Seorang matematikawan dari Swiss yang bernama Leonard Euler pada tahun 1736 mencoba menjawab permasalahan tersebut dengan memodelkan masing-masing wilayah sebagai titik dan jembatan yang menghubungkan antar lokasi sebagai sisi. Graf itu sendiri terbentuk oleh elemen titik yang merupakan syarat perlu bagi suatu graf dan elemen yang menghubungkan titik-titik tersebut yang disebut sisi dimana setelah dihubungkan akan membentuk sebuah pola tertentu. Sejak saat itu teori graf kini semakin berkembang dan sangat berperan dalam berbagai sektor terutama sektor jaringan komunikasi yang didalamnya terdapat seperti pesan rahasia. Melalui proses penyandian diharapkan suatu jaringan yang berisikan data atau pesan rahasia yang penting terjaga keamanannya dari orang-orang yang tidak berhak mendapatkan informasi penting didalamnya. Ilmu yang mendalami proses penyandian tersebut dikenal dengan istilah kriptografi. Proses kriptografi berkaitan dengan algoritma yang menggunakan kunci tertentu dan metode *enkripsi* untuk mengolah informasi awal (*plainteks*) sehingga menghasilkan informasi baru (*chipertext*). Proses pengembangan pesan rahasia disebut *cryptosystem*. Terdapat 2 macam kriptografi yaitu kriptografi klasik dan kriptografi modern. Salah satu cara untuk mengubah menjadi pesan rahasia

adalah *Caesar System* yang menerapkan sistem (mod 26). Kajian graf yang memiliki peranan dalam sistem pengkodean tersebut adalah pelabelan.

Awal diperkenalkannya pelabelan ini tepatnya pada tahun 1960-an dari sebuah hipotesis oleh Ringel dan Rosa. Pada prinsipnya pelabelan graf merupakan pemetaan satu-satu (fungsi bijektif) yang memasangkan elemen-elemen graf  $(V(G), E(G))$  dengan himpunan bilangan bulat positif yang di mulai dari 1 yang disebut label (H.Enomoto, 1998). Secara umum, objek kajian dari pelabelan berdasarkan elemen-elemen dari graf yang direpresentasikan dengan titik dan sisi. Sehingga pelabelan dibagi atas 3 jenis yaitu pelabelan titik, pelabelan sisi, dan pelabelan total (Dafik, 2009). Perkembangan pelabelan graf semakin banyak sehingga muncul beberapa pelabelan baru diantaranya yaitu pelabelan super, pelabelan ajaib (*magic*), pelabelan tak ajaib (*antimagic*). Selanjutnya, pelabelan total ajaib kemudian dikembangkan menjadi pelabelan total selimut  $\mathcal{H}$  *magic* yang pertama kali diperkenalkan oleh Gutierrez dan Llado pada tahun 2005. Pelabelan total selimut  $\mathcal{H}$  *magic* pada graf  $G$  dengan  $v$  titik dan  $e$  sisi dimana setiap sisi pada graf  $G$  termuat dalam subgraf  $\mathcal{H}'$  dari  $G$  yang isomorfik dengan  $\mathcal{H}$ .  $\mathcal{H}$  itu sendiri merupakan subgraf dari  $G$  (Gutiérrez, 2005). Pada Tahun 2009, oleh Inayah dkk mengembangkan suatu pelabelan total selimut  $\mathcal{H}$  *antimagic* yang menjelaskan bahwa suatu pelabelan total selimut  $\mathcal{H}$  *antimagic* pada graf adalah sebuah fungsi bijektif sehingga terdapat baris aritmatika  $\{a, a + d, a + 2d, \dots, a + (t - 1)d\}$ . Pelabelan total selimut  $\mathcal{H}$  *antimagic* merupakan fungsi bijektif karena label total selimut pada suatu graf selalu berbeda dan berurutan. Setiap pelabelan graf, kemungkinan memiliki nilai beda  $d$  untuk barisan aritmatika adalah  $d \leq t$ , dimana  $t$  merupakan batas atas nilai beda dalam suatu graf dan  $t \in$  bilangan bulat positif. Setiap pelabelan graf memiliki nilai batas atas  $d$  yang berbeda dan nilai  $d$  tidak tunggal (Dafik *et al.*, 2009).

Selain itu, beberapa hasil-hasil penelitian lainnya tentang pelabelan total super  $(a, d) - \mathcal{H} - antimagic$  antara lain Super  $(a, d) - \mathcal{H} - Antimagic$  Total Selimut pada Gabungan Graf *Triangular Ladder* oleh Jamil (2014) yang menemukan

*SHATC* (super  $\mathcal{H}$  antimagic total covering) untuk gabungan saling lepas graf *triangularladder*  $d = \{0, 2, 4, 6\}$  untuk  $n \geq 2$  dan  $m \geq 2$ . Agustin *et al.*, (2014) telah meneliti mengenai Keantimagikan Super Total Selimut pada Gabungan Saling Lepas Graf *Shackle Triangular Book* dan telah menemukan *SHATC* (super  $\mathcal{H}$  antimagic total covering) untuk gabungan graf *shackle triangular book*  $d \in \{15, 17, 19, 23\}$  untuk  $n \geq 2$  dan  $m \geq 2$ , Super  $(a, d) - \mathcal{H} - \text{Antimagic Total Covering}$  pada *Amalgamation* Graf  $K_4$  dan  $W_4$  oleh Anggraeni (2014) menyimpulkan dari penelitiannya bahwa graf  $K_n$  dan  $W_m$  dengan  $n \geq 4$  dan  $m \geq 4$  memiliki super  $(12n + 9i + 106, 9)$  dan  $(14n + 7i + 103, 7)$ , Super  $(a, d) - \mathcal{H} - \text{Antimagic Total Covering}$  pada *Amalgamation* Graf Kipas oleh Latifah (2016) yang telah memberikan hasil *SHATC* (super  $\mathcal{H}$  antimagic total covering) pada grafnya dengan  $d \in \{0, 1, 3\}$  untuk  $n \geq 2$  dan  $n$  genap menghasilkan pelabelan super  $(\frac{29n+32}{2}, 0)$  sedangkan  $n \geq 2$  dan  $n$  ganjil  $(\frac{29n+25}{2}, 0)$ ,  $(13n + 19, 1)$   $n \geq 2$ , dan  $(11n + 23, 3)$   $n \geq 2$ .

Berdasarkan latar belakang dan pemaparan hasil-hasil penelitian tersebut maka peneliti ingin lebih mengembangkan lagi sehingga penelitian yang akan dibahas mengenai pelabelan selimut total super  $(a, d) - \mathcal{H} - \text{antimagic}$  dengan operasi yang diterapkan dalam suatu graf yaitu *joint*, dimana graf yang akan digunakan adalah graf lintasan dan siklus sehingga disimbolkan  $nP_z + C_t$ . Selain itu, penelitian juga akan diterapkan dalam aplikasi *stream chiphertext*. Hal ini yang melatarbelakangi pemilihan judul "Pelabelan Selimut Total Super  $(a, d) - \mathcal{H} - \text{Antimagic}$  pada *Joint* serta Aplikasinya pada *Ciphertext*". Adapun langkah dalam melakukan penelitian ini dengan menentukan batas atas  $d$  serta beberapa nilai-nilai  $d$  dalam sebuah pelabelan.

## 1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang diperoleh perumusan masalah sebagai berikut:

- bagaimana menentukan kardinalitas titik dan sisi pada *joint* dari graf lintasan dan siklus  $nP_z + C_t$ ?
- bagaimana menentukan batas atas  $d$  pada pelabelan selimut total super  $(a, d) - \mathcal{H} - \text{antimagic joint}$  dari graf lintasan dan siklus  $nP_z + C_t$ ?

- c. bagaimana menentukan nilai-nilai  $d$  yang dimiliki pada pelabelan selimut total super  $(a, d) - \mathcal{H} - antimagic$  pada *joint* dari graf lintasan dan siklus  $nP_z + C_t$ ?
- d. bagaimana mengembangkan aplikasi *ciphertext* yang berdasarkan pelabelan selimut total super  $(a, d) - \mathcal{H} - antimagic$  pada *joint* dari graf lintasan dan siklus  $nP_z + C_t$ ?

### 1.3 Tujuan Penelitian

Sesuai dengan rumusan masalah dan latar belakang, maka tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

- a. menentukan kardinalitas titik dan sisi pada *joint* dari graf lintasan dan graf siklus  $nP_z + C_t$ ;
- b. menentukan batas atas  $d$  pelabelan selimut total super  $(a, d) - \mathcal{H} - antimagic$  pada *joint* dari graf lintasan and graf siklus  $nP_z + C_t$ ;
- c. menentukan nilai-nilai  $d$  pada *joint* dari graf lintasan dan graf siklus  $nP_z + C_t$ ;
- d. mengembangkan aplikasi pelabelan selimut total super  $(a, d) - \mathcal{H} - antimagic$  pada *joint* dari graf lintasan and graf siklus  $nP_z + C_t$  dengan menggunakan *ciphertext*.

### 1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat yang didapatkan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

- a. menambah wawasan pengetahuan baru dalam bidang teori graf mengenai pelabelan selimut total super *antimagic* pada *joint* graf;
- b. memeberi motivasi peneliti graf yang lain untuk dapat meneliti mengenai pelabelan selimut total super *antimagic* pada graf jenis lainnya;
- c. mengembangkan pengetahuan baru dalam bidang teori graf, dengan menerapkan pelabelan graf pada aplikasi pengkodean (kriptografi);
- d. hasil penelitian ini diharapkan dapat digunakan sebagai perluasan ataupun pengembangan ilmu dalam masalah pelabelan selimut total super *antimagic*.

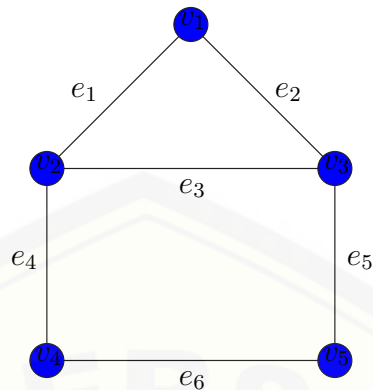


## BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

### 2.1 Terminologi Dasar Graf

Slamin pada tahun 2009 menyatakan bahwa sebuah graf  $G$  adalah pasangan himpunan  $(V(G), E(G))$  dimana  $V(G)$  adalah himpunan tidak kosong yang anggotanya disebut titik (*vertex*) dan  $E(G)$  adalah himpunan yang boleh kosong yang disebut dengan sisi (*edge*).  $V(G)$  disebut himpunan titik dari  $G$  sedangkan  $E(G)$  disebut himpunan sisi  $G$ . Jadi sebuah graf dimungkinkan tidak mempunyai sisi sama sekali, tetapi titiknya harus ada minimal satu buah. Graf yang hanya mempunyai satu buah titik tanpa sebuah sisi pun dinamakan *null graph*. Gambaran umum mengenai graf berdasarkan definisi diatas diartikan sebagai graf yang memiliki sejumlah titik dan sisi  $G = (V, E)$  dimana  $V = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$  dinyatakan sebagai himpunan titik sedangkan  $E = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_n\}$  adalah himpunan sisi. Setiap sisi menghubungkan satu titik ke titik yang lain, dan setiap titik dapat memiliki banyak sisi yang menghubungkannya ke titik lain. Dalam graf banyaknya titik diistilahkan dengan *order* dari graf  $G$ , dinyatakan dengan  $|V(G)|$  sedangkan untuk banyaknya sisi pada graf  $G$  disebut *size* dari graf  $G$ , dinyatakan dengan  $|E(G)|$ . Pada gambar 2.1, terdapat contoh graf  $G$  dengan himpunan titik  $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$  dan himpunan sisinya  $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ . Sehingga, *order* dan *size* dari graf  $G$  yaitu  $|V(G)| = 5$  dan  $|E(G)| = 6$ .

Dua buah titik dikatakan bertetangga (*adjacent*) jika kedua titik tersebut dihubungkan oleh suatu sisi. Dengan kata lain, jika terdapat titik  $u$  dan  $v$  pada graf  $G$  dan bertetangga maka terdapat sisi  $(uv)$  pada graf  $G$  yang menghubungkan kedua titik tersebut (Purwanto *et al.*, 2006). Selanjutnya suatu sisi  $(uv)$  dikatakan bersisihan (*incident*) dengan titik  $u$  dan  $v$  jika sisi tersebut menghubungkan kedua titik tersebut. Hal ini sesuai dengan pernyataan menurut Hartsfield dan Ringel (1994), sebuah titik  $v$  bersisihan (*incident*) dengan sebuah sisi  $e$  jika  $v$  merupakan titik ujung dari  $e$ , demikian juga  $e$  bersisihan (*incident*) dengan  $v$



Gambar 2.1 Contoh Graf G

ketika  $v$  merupakan titik ujung dari  $e$ . Apabila terdapat sebuah titik tidak mempunyai sisi yang bersisian dengannya, itu berarti berderajat 0 maka titik tersebut dikatakan titik terpencil (*isolated vertex*). Dapat dilihat pada gambar 2.1, graf G  $v_1$  bertetangga dengan  $v_2$  dan  $v_3$ . Selain itu,  $e_1$  bersisian dengan  $v_1$  dan  $v_2$  demikian juga  $v_1$  bersisian dengan  $e_1$  dan  $e_2$ .

Pada suatu graf  $G$ , jalan (*walk*) didefinisikan sebagai suatu barisan antara titik dan sisi yang saling bergantian yang mana diawali dan diakhiri berupa titik dinotasikan dengan  $A_0, e_1, A_1, e_2, \dots, A_{n-1}, e_n, A_n$ . Jalan (*walk*) adalah barisan titik dan sisi terhingga dan selang-seling bergantian dari titik-titik dan sisi-sisi dalam suatu graf dengan ketentuan setiap sisi  $e_i$  menempel pada  $A_i$  dan  $A_j$  dan  $A_i \neq A_j$  jika  $e_i$  bukan merupakan *loop* (Hartsfield dan Ringel, 1994). Jika pada jalan berlaku  $A_1 = A_n$ , maka membentuk jalan tertutup disebut sikel. Lintasan (*path*) adalah jalan (*walk*) yang semua titik dan sisinya yang dilewati semuanya berbeda. Jejak (*trail*) adalah jalan dengan semua sisi yang dilewati berbeda. Jejak (*trail*) tertutup memiliki titik-titik ujung sama disebut sirkuit (*cycle*) (Hartsfield dan Ringel, 1994). Panjang sebuah jalan (*walk*) dihitung berdasarkan banyaknya sisi yang dilintasi oleh jalan tersebut. Jika dilihat pada gambar 2.1 panjang sebuah jalan (*walk*) dari graf tersebut yaitu  $v_1, v_3, v_2, v_4, v_5, v_3, v_2, v_1$  sehingga mempunyai panjang 8, lintasan (*path*) ditunjukkan oleh  $v_2, v_4, v_5, v_3$  dengan panjang 4, *cycle*  $v_1, v_2, v_3$ .

Derajat (*degree*) dari titik  $v$  adalah jumlah sisi yang berada di titik  $v$



tersebut dinotasikan dengan  $d(v)$ . Derajat terbagi atas 2 yaitu derajat minimum dan derajat maksimum dari suatu graf  $G$ . Masing-masing dinotasikan dengan  $\delta(G)$  dan  $\Delta(G)$ . Jarak atau *distance* didefinisikan sebagai panjang lintasan terpendek dari titik  $u$  ke titik  $v$  dinyatakan dengan notasi  $\delta(u, v)$ . Diameter sebuah graf ditentukan oleh jarak yang paling panjang dari sebarang dua titik di graf  $G$  dinotasikan dengan  $diamG = \max\{e(v) : v \in V\}$ . Jarak antara verteks  $u$  dan  $v$  dalam  $G$  yang ditulis  $d(u, v)$  adalah panjang dari jarak tersingkat antara  $u$  dan  $v$ . Diameter dari  $G$  yang dituliskan  $diam(G)$  adalah jarak maksimum antara sembarang dua titik dalam  $G$  (Lipchutz dan Lipson, 2002). *Girth* sebuah graf diartikan sebagai panjang dari siklus terpendek dari graf  $G$ . Sebagai contoh pada gambar 2.1 mempunyai diameter 5 dari titik  $v_1$  ke  $v_3$  yaitu  $v_1, v_2, v_4, v_5, v_3$  dan *girth* sebanyak 3 yaitu  $v_1, v_2, v_3$ . Adapun derajat minimum dan derajat maksimumnya yaitu  $\delta(G) = 2$  dan  $\Delta(G) = 3$ .

Sebuah sisi yang menghubungkan pasangan titik yang sama atau sebuah sisi yang berawal dan berakhir pada titik yang sama disebut dengan *loop*. Apabila terdapat dua atau lebih sisi yang mempunyai titik-titik ujung yang sama disebut dengan sisi rangkap. Berdasarkan ada tidaknya *loop*, graf dibedakan menjadi dua yaitu graf sederhana (*simple graph*) dan graf tak sederhana (*multigraph*). Graf sederhana (*simple graph*) adalah sebuah graf yang di dalamnya tidak terdapat *loop* dan sisi rangkap sedangkan graf tak sederhana (*multigraph*) jika graf tersebut mempunyai sisi rangkap tetapi tidak *loop*. Berdasarkan jumlah titik pada suatu graf, maka secara umum graf dapat digolongkan menjadi dua jenis yaitu graf berhingga dan graf tidak berhingga. Graf berhingga (*limited graph*) adalah graf yang jumlah titiknya berhingga. Graf tak berhingga (*unlimited graph*) adalah graf yang jumlah titiknya tidak berhingga. Berdasarkan arah pada sisi, maka secara umum graf dibedakan atas dua jenis yaitu graf tak-berarah *undirected graph* adalah graf yang sisinya tidak mempunyai orientasi arah dan graf berarah *directed graph* adalah graf yang setiap sisinya diberikan orientasi arah. Graf berarah *directed graph/digraph* merupakan pasangan himpunan  $(V(G), E(G))$  dimana  $V(G)$  adalah himpunan berhingga tak kosong dari elemen berbeda yang disebut titik, dan  $E(G)$  adalah himpunan pasangan terurut  $(u, v)$  dari titik yang

berbeda  $u, v \in V(G)$  yang disebut sisi berarah (Slamin, 2009). Suatu graf dikatakan terhubung (*connected*), jika ada lintasan dari  $u$  ke  $v$  dan jika tidak ada lintasan dari  $u$  ke  $v$  disebut graf tak terhubung (*disconnected*).

Graf  $H$  dikatakan subgraf dari graf  $G$  jika elemen titik dan sisi graf  $H$  merupakan subset dari elemen titik dan sisi dari graf  $G$ . Jika suatu graf  $H$  elemen titiknya sama dengan elemen titik pada graf  $G$  namun elemen sisinya merupakan subset graf  $G$  maka subgrafnya disebut *spanning subgraph*. Dafik (2007) mengungkapkan bahwa subgraph  $H$  adalah sebuah *spanning subgraph* dari  $G$  jika  $H$  mengandung semua titik dari graf  $G$ , atau  $(V(H) \subseteq V(G))$ . Dua graf misal dikatakan graf yang isomorfis jika antara kedua graf tersebut titik-titik dan sisi-sisinya berkorespondensi satu-satu. Misal terdapat graf  $G_1$  dan  $G_2$  dimana sisi  $e$  bersisian dengan titik  $u$  dan  $v$  di  $G_1$ , maka  $e'$  yang berkorespondensi di  $G_2$  yang dimana  $e'$  juga bersisian dengan  $u'$  dan  $v'$  di  $G_2$ . Dengan kata lain yang lebih sederhana, dua buah graf isomorfik adalah dua buah graf yang sama ketetanggaannya namun jika di presentasikan secara geometris antara kedua graf  $G_1$  dan  $G_2$  berbeda.

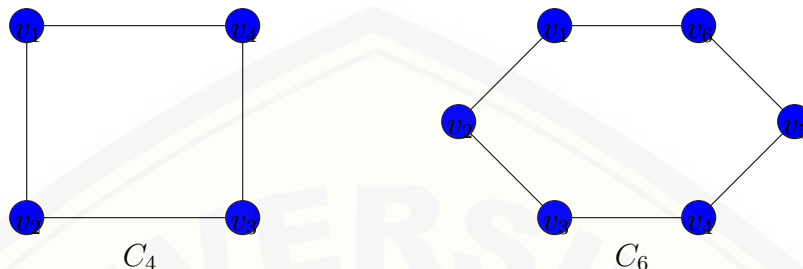
## 2.2 Graf Khusus

Graf khusus adalah graf yang memiliki keunikan dan karakteristik bentuk yang tidak umum. Keunikan dari graf khusus karena tidak isomorfis dengan graf lainnya. Karakteristik graf khusus dilihat dari bentuk graf yang awalnya hanya berorder satu, dapat diperluas sampai order ke  $n$  tetapi simetris. Graf khusus yang sudah terkenal dapat disebut juga dengan *well-known special graph*. Sebaliknya graf khusus yang belum terkenal namun memiliki karakteristik graf khusus dinamakan *well-defined special graph*. Adapun beberapa contoh dari graf khusus.

### 1. Graf Lingkaran (*Cycle graph*)

Graf siklus atau lingkaran adalah graf sederhana yang setiap simpulnya berderajat dua. Dengan kata lain yang lebih sederhana, pada graf siklus setiap titiknya mempunyai derajat dua, sehingga dalam graf siklus jumlah titik dan jumlahnya sisinya sama. Graf lingkaran dengan  $n$  simpul

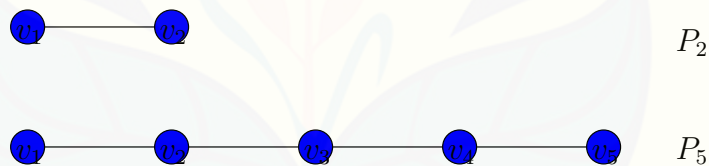
$v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$  dan sisi  $v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_nv_1$  dilambangkan dengan  $C_n$  (Hartsfield dan Ringel, 1994). Contoh gambar graf lingkaran dapat dilihat pada Gambar 2.3



Gambar 2.2 Contoh Graf Lingkaran

2. Graf Lintasan (*Path graph*)

Graf lintasan adalah graf yang terdiri dari satu lintasan. Graf lintasan dengan  $n$  buah titik dilambangkan dengan  $P_n$  dimana  $n \geq 2$ . Jumlah sisi pada graf lintasan yang terdiri dari  $n$  buah titik adalah  $n - 1$  sisi. Contoh graf lintasan  $P_2$  dan  $P_5$  dapat dilihat pada Gambar 2.4



Gambar 2.3 Contoh Graf Lintasan

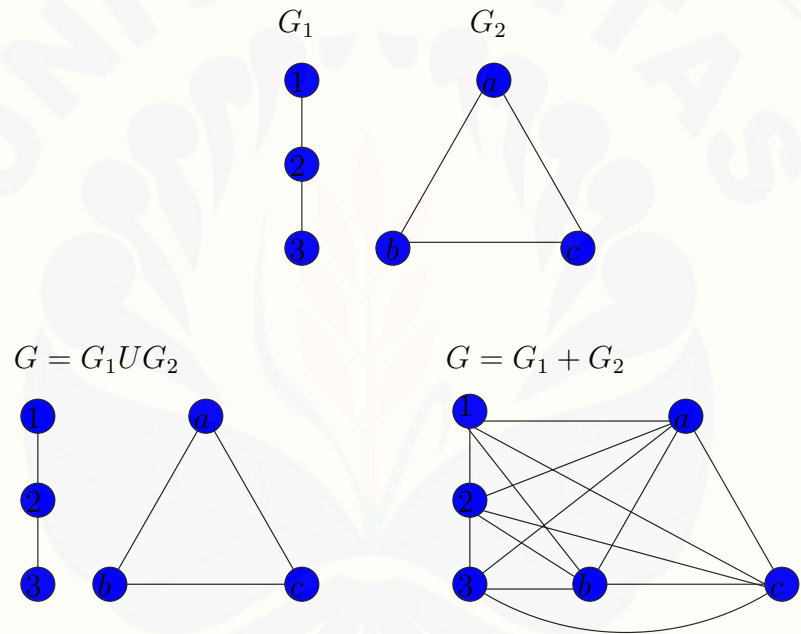
2.3 Operasi Graf

Di dalam graf terdapat berbagai operasi graf. Operasi graf bertujuan untuk mendapatkan graf baru dengan cara menerapkan beberapa ketentuan antara dua graf atau lebih. Terdapat operasi graf yang digunakan dalam penelitian ini yaitu *joint*.

*Joint Graph* adalah jumlah dari graf  $G_1$  dan  $G_2$ , dinotasikan dengan  $G = G_1 + G_2$  yang himpunan titik  $V(G_1 + G_2) = V(G_1) \cup V(G_2)$  dan himpunan sisi  $E(G_1 + G_2) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{uv | u \in V(G_1), v \in V(G_2)\}$ . Jika sebuah titik

$v$  dihubungkan ke setiap titik sebuah graf maka menghasilkan graf baru yang dinamakan *joint* dari  $v$  ke  $G$  dinotasikan  $G + v$  (Harary,2007).

Gabungan graf saling lepas adalah dua atau lebih graf yang tidak memiliki lintasan yang menghubungkan masing-masing anggota graf  $G$  maka gabungan graf saling lepas  $kG = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_k$  dimana  $k$  adalah banyaknya copy graf  $G$  (Adawiyah, 2014). *Joint* dari 2 graf ( $G$  dan  $H$ ) yang saling *disjoint* dinotasikan  $G+H$  adalah bentuk yang diperoleh dengan menambahkan sisi pada  $G \cup H$  dengan cara memasang titik pada  $G$  ke setiap titik di graf  $H$ . Jika terdapat  $m$  dan  $n$  titik maka harus menambahkan  $mn$  sisi  $G \cup H$  (Fred, 2003).



Gambar 2.4 Operasi Graf

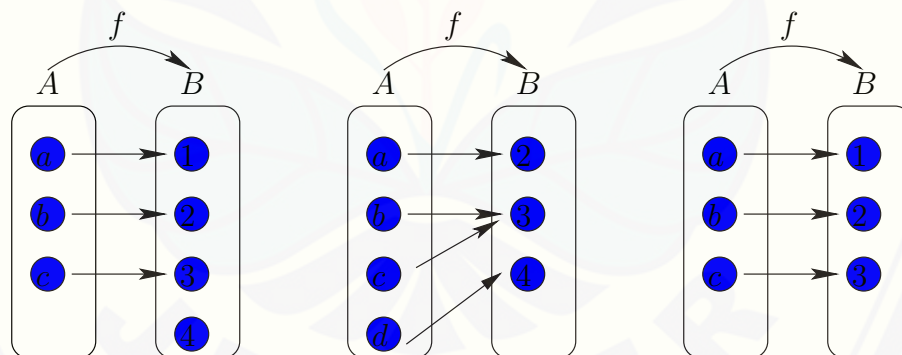
## 2.4 Fungsi dan Barisan

### 2.4.1 Fungsi

Fungsi dinotasikan dengan  $f : A \rightarrow B$ , dibaca "f merupakan fungsi dari A ke B" dimana A dan B adalah himpunan-himpunan yang memiliki anggota elemen. Himpunan A disebut daerah asal fungsi (domain) dinotasikan dengan  $D_f$  sedangkan himpunan B disebut daerah kawan fungsi (kodomain). Selain itu

himpunan B juga memuat hasil pemetaan yang disebut *range* dinotasikan dengan  $R_f$ . Fungsi  $f$  tersebut merupakan suatu aturan pemetaan dari setiap anggota yang ada di himpunan A dengan tepat satu anggota pada himpunan B. Adapun secara umum, fungsi dibagi atas 3 jenis, yaitu fungsi injektif, fungsi surjektif, dan fungsi bijektif.

1. Fungsi dikatakan fungsi injektif jika dan hanya jika untuk sebarang  $a, b$  elemen anggota himpunan A, dimana  $a \neq b$  maka hasil pemetaan berlaku  $f(a) \neq f(b)$ .
2. Fungsi dikatakan fungsi surjektif jika dan hanya jika hasil pemetaan *range* ( $R_f$ ) sama dengan himpunan B *kodomain*. Dengan kata lain semua elemen di daerah domain mempunyai pasangan di daerah kodomain.
3. Fungsi dikatakan fungsi bijektif jika fungsi tersebut merupakan injektif sekaligus fungsi surjektif. Lebih jelasnya dapat dilihat pada Gambar di bawah ini



Gambar 2.5 1. Fungsi Injektif, 2. Fungsi Surjektif, 3. Fungsi Bijektif

#### 2.4.2 Barisan

Barisan aritmatika adalah suatu barisan yang teratur, dengan  $a$  adalah suku pertama dan  $b$  merupakan selisih antara 2 suku yang berurutan atau biasa disebut *beda* ( $b = U_n - U_{n-1}$ ) yang selalu bernilai tetap untuk membentuk sebuah



barisan  $U_1, U_2, U_3, \dots, U_{n-1}, U_n$  dimana  $U_1 - U_2 = U_3 - U_2 = \dots = U_n - U_{n-1} =$  konstanta. Perhatikan contoh barisan bilangan berikut:

$$(a) 3, 5, 7, 9, \dots \quad (b) 10, 8, 6, 4, \dots$$

Barisan bilangan antara contoh barisan (a) dan barisan (b) mempunyai beda yang sama yaitu  $b = 2$ . Namun terdapat perbedaan antara kedua contoh barisan tersebut. Pada barisan (a) disebut barisan aritmatika naik karena nilai-nilai suku-sukunya makin naik. Sedangkan barisan (b) disebut barisan aritmatika turun karena nilai-nilainya semakin turun

Misalkan suatu barisan aritmatika  $U_1, U_2, U_3, \dots, U_{n-1}, U_n$ , maka untuk menentukan nilai suku ke-n, perhatikan kembali contoh (a) yang telah diberikan di atas, jika suku pertama  $U_1 = a$ , maka didapatkan:

$$U_1 = 3 \Rightarrow 3 + 2(0)$$

$$U_2 = 5 \Rightarrow 3 + 2 \Rightarrow 3 + 2(1)$$

$$U_3 = 7 \Rightarrow 3 + 2 + 2 \Rightarrow 3 + 2(2)$$

$$\vdots$$

$$U_n \Rightarrow 3 + 2(n - 1)$$

Sehingga secara umum, rumus suku ke-n dari suatu Barisan aritmatika adalah  $a + b(n - 1)$  dimana  $a$  adalah suku pertama ( $U_1$ ) dan  $b$  adalah beda suku yang tetap.

## 2.5 Partisi

Dalam aljabar, suatu partisi pada himpunan tak kosong  $A$  adalah suatu dekomposisi  $A$  ke dalam subset-subset yang saling asing sedemikian hingga setiap elemen dari  $A$  berada pada tepat satu subset. Subset yang demikian ini yang dinamakan *cell* (Fraleigh, 2000). Lebih jelasnya partisi dari suatu himpunan  $A$  adalah sebuah pengelompokan dari himpunan bagian tak kosong  $A$  dimana antar kelompok saling asing dan jika kelompok tersebut digabung akan kembali membentuk himpunan  $A$  kembali contohnya himpunan  $A$  adalah himpunan bilangan asli 1 sampai 10, dimana himpunan  $A$  tersebut dapat dibagi

lagi atas kelompok-kelompok yang menyatakan bilangan ganjil dan genap dari 1 sampai 10.

## 2.6 Pelabelan Graf

### 2.6.1 Definisi Pelabelan Graf

Pelabelan Graf adalah fungsi atau aturan pemetaan antara elemen-elemen pada graf yang berupa himpunan titik, himpunan sisi yang dipasangkan dengan bilangan bulat positif yang berbeda. Fungsi yang memetakan himpunan elemen-elemen graf ke himpunan bilangan positif adalah fungsi bijektif. Adapun pelabelan dibagi menjadi beberapa macam yaitu pelabelan titik (*vertex labeling*), pelabelan sisi (*edge labeling*), dan pelabelan total (*total labeling*). Pelabelan titik (*vertex labeling*) merupakan pelabelan dengan domain titik. Sebaliknya jika domainnya adalah sisi maka disebut pelabelan sisi (*edge labeling*), dan jika pelabelan graf perpaduan antara domain titik dan sisi, maka pelabelan disebut pelabelan total (*total labeling*) (Wallis, 2001).

Pada pelabelan titik, terdapat dua label titik yang menempel pada suatu sisi dan dijumlahkan 2 label titik tersebut maka menghasilkan suatu hasil yang disebut bobot sisi dinotasikan  $w$ . Jika semua bobot sisi sama disebut pelabelan titik sisi ajaib. Namun, jika semua bobot sisi berbeda dan membentuk deret aritmatika dengan  $a$  suku pertama dan  $d$  beda maka pelabelan tersebut disebut pelabelan titik sisi anti ajaib. Pada pelabelan total, bobot sisi dinotasikan  $W$  yang didapat dari jumlah antara label sisi dan label titik yang menempel dari pada sisi. Apabila semua bobot sisi total sama maka pelabelan tersebut disebut pelabelan total sisi ajaib (*magic*). Jika terdapat bobot sisi total yang tidak sama dan membentuk deret aritmatika dengan suku  $a$  dan  $d$  beda maka pelabelan tersebut dikatakan sebagai pelabelan total sisi anti ajaib (*pelabelan total sisi antimagic*) (Dafik et al., 2009).

Pada pelabelan titik, jumlah label titik dari dua titik atau lebih yang saling menempel disebut bobot selimut. Jika semua selimut mempunyai bobot selimut yang sama disebut dengan pelabelan titik selimut *magic*. Tetapi jika bobot selimutnya berbeda dan himpunan bobot selimut tersebut membentuk barisan aritmatika dengan suku pertama  $a$  dan beda  $d$  maka disebut pelabelan titik



selimut *antimagic* (Simanjuntak dan Salman, 2010).

### 2.6.2 Pelabelan Selimut Super $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic

Suatu selimut dari graf  $G$  adalah  $\mathcal{H} = \{H_1, H_2, H_3, \dots, H_k\}$  keluarga subgraf dari  $G$  dengan sifat setiap sisi di  $G$  termuat pada sekurang-kurangnya satu graf  $H_i$  untuk  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ . Jika untuk setiap  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ ,  $H_i$  isomorfik dengan suatu subgraf  $H$ , maka  $H$  dikatakan suatu selimut- $H$  dari  $G$ . Selanjutnya dikatakan bahwa  $G$  memuat selimut- $H$ . Misalkan  $H$  adalah selimut- $\mathcal{H}$  yang memuat semua subgraf dari  $G$  yang isomorfik dengan  $H$ .

Gutiérrez dan Lladó (2005) menyatakan bahwa pelabelan selimut super- $\mathcal{H}$  anti ajaib (*antimagic*) pada graf  $G$  dengan  $v$  titik dan  $e$  sisi didefinisikan sebagai fungsi bijektif dari titik-titik dan sisi-sisi pada himpunan bilangan bulat dari 1 sampai sejumlah titik dan sisi, secara matematis ditulis dalam bentuk  $f : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, |V(G)| + |E(G)|\}$  dengan sifat bahwa setiap subgraf dari  $G$  yang isomorfik dengan  $H$  dimana  $H$  juga subgraf dari  $G$  mempunyai total label  $\omega(H)$  yang berbeda,  $\omega(H) = \sum_{v \in V(H)} f(v) + \sum_{e \in E(H)} f(e)$ . Graf  $G$  dikatakan memiliki pelabelan  $\mathcal{H}$  anti ajaib super jika himpunan titik  $V(G)$  merupakan pemetaan bijektif  $f$  ke himpunan  $\{1, 2, 3, \dots, |V(G)|\}$ .

Pelabelan selimut  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$  *antimagic* merupakan sebuah kombinasi dari pelabelan total  $(a, d)$ -sisi *antimagic* dan selimut  $\mathcal{H}$ . Menurut Dafik (2014) pelabelan selimut  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$  *antimagic* graf  $G$  adalah pelabelan total  $\lambda$  dari  $V(G) \cup E(G)$  pada bilangan bulat  $\{1, 2, 3, \dots, |V(G) \cup E(G)|\}$ , untuk setiap subgraf  $H$  dari  $G$  yang isomorfik dengan  $\mathcal{H}$  dimana  $\sum H = \sum_{v \in V(H)} \lambda(v) + \sum_{e \in E(H)} \lambda(e)$  merupakan barisan aritmatika. Graf  $G$  dikatakan memiliki pelabelan  $\mathcal{H}$  *antimagic* super jika  $\{\lambda(v)\}_{v \in V} = \{1, \dots, |V|\}$ .

Dapat diartikan bahwa, pelabelan selimut super  $(a, d)$ -antimagic total pada sebuah graf  $G = (p_G, q_G)$  mempunyai pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic total selimut dengan fungsi total  $f(V \cup E) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots, p_G + q_G\}$  maka himpunan bobot selimut sebuah graf adalah  $\{a, a + d, a + 2d, \dots, a(n - 1)d\}$  dimana  $a$  merupakan bobot selimut terkecil dan  $d$  batas atas nilai beda. Jika  $G$  memuat suatu selimut- $\mathcal{H}$ , maka pelabelan total  $(a, d) - \mathcal{H}$ -antimagic super dikatakan *pelabelan selimut  $(a, d) - \mathcal{H} - antimagic$  super* (Inayah, 2013).

2.6.3 Lemma Batas Atas Pelabelan Selimut Super  $(a, d) - \mathcal{H} - Antimagic$ 

**Lemma 2.6.1.** *Jika sebuah graf  $G(V, E)$  adalah pelabelan super  $(a, d) - \mathcal{H} - antimagic$  total covering maka*

$$d \leq \frac{(p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H}{n - 1}$$

untuk  $n = |H_i|$ ,  $p_G = |V|$ ,  $q_G = |E|$ ,  $p_H = |V'|$ ,  $q_H = |E'|$

**Bukti.**  $f(V) = 1, 2, 3, \dots, p_G$  dan  $f(E) = p_G + 1, p_G + 2, p_G + 2, \dots, p_G + q_G$ . Misal-kan graf  $(p_G, q_G)$  mempunyai pelabelan super  $(a, d) - \mathcal{H}$  antimagic total covering dengan fungsi total  $f(\text{total}) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots, p_G + q_G\}$  maka himpunan bobot covering sebuah graf adalah  $\{a, a + d, a + 2d, \dots, a(n - 1)d\}$  dimana  $a$  merupakan bobot covering terkecil maka berlaku:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + p_H + (p_G + 1) + (p_G + 2) + \dots + (p_G + q_H) &\leq a \\ \frac{p_H}{2}(1 + p_H) + q_H p_G + \frac{q_H}{2}(1 + q_H) &\leq a \\ \frac{p_H}{2} + \frac{p_H^2}{2} + q_H p_G + \frac{q_H}{2} + \frac{q_H^2}{2} &\leq a \end{aligned}$$

Sedangkan untuk nilai terbesar berlaku:

$$\begin{aligned} a + (n - 1)d &\leq p_G + p_G - 1 + p_G - 2 + \dots + (p_G - (p_H - 1)) + (p_G + q_G) \\ &\quad + (p_G + q_G - 1) + (p_G + q_G - 2) + \dots + (p_G + q_G - (q_H - 1)) \\ &= p_H p_G - \frac{p_H - 1}{2}(1 + (p_H - 1)) + q_H p_G + q_H p_G \\ &\quad - \frac{q_H - 1}{2}(1 + (q_H - 1)) \\ &= p_H p_G - \frac{p_H - 1}{2}(p_H) + q_H p_G + q_H p_G - \frac{q_H - 1}{2}(q_H) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (n-1)d &\leq p_H p_G - \frac{p_H - 1}{2}(p_H) + q_H p_G + q_H p_G - \frac{q_H - 1}{2}(q_H) - a \\
 &\leq p_H p_G - \frac{p_H - 1}{2}(p_H) + q_H p_G + q_H p_G - \frac{q_H - 1}{2}(q_H) - \\
 &\quad \left(\frac{p_H}{2} + \frac{p_H^2}{2} + q_H p_G + \frac{q_H}{2} + \frac{q_H^2}{2}\right) \\
 &= p_H p_G - \frac{p_H^2}{2} + \frac{p_H}{2} + q_H p_G - \frac{q_H^2}{2} + \frac{q_H}{2} - \left(\frac{p_H}{2} + \frac{p_H^2}{2} + \frac{q_H}{2} + \frac{q_H^2}{2}\right) \\
 &= p_H p_G + q_H q_G - p_H^2 - q_H^2 \\
 &= p_H p_G - p_H^2 + q_H q_G - q_H^2 \\
 &= (p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H \\
 d &\leq \frac{(p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H}{(n-1)}
 \end{aligned}$$

Persamaan diatas membuktikan bahwa batas atas  $d \leq \frac{(p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H}{n-1}$  jika graf  $G$  memiliki pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic total covering dari berbagai famili graf (Dafik, 2007).  $\square$

#### 2.6.4 Partisi pada Pelabelan

Untuk mengkonstruksi pelabelan  $(a, d) - \mathcal{H} - antimagic$  super pada sebuah graf dapat diterapkan teknik partisi dari himpunan bilangan bulat dengan menetapkan  $d$ . Misalkan  $n, m, d, i$  dan  $k$  merupakan bilangan bulat positif. Partisi  $\mathcal{P}_{m,d}^n(i, k)$  dari himpunan  $\{1, 2, 3, \dots, mn\}$  adalah partisi pelabelan  $(a, d) - \mathcal{H} - antimagic$  bila sebanyak  $n$  kolom dan  $m$  baris dengan  $n \geq 2$  jumlah bilangan-bilangan sebanyak  $m$  baris untuk masing-masing kolom berbentuk barisan aritmatik dengan beda  $d$  dan  $k = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ . Jika partisi bilangan bulat dinotasikan  $\mathcal{P}_{m,d}^n(i, k)$  maka  $\sum_{i=1}^m \mathcal{P}_{m,d}^n(i, k)$  adalah jumlah bilangan pada  $\mathcal{P}_{m,d}^n(i, k)$ ,  $\mathcal{P}_{m,d}^n(i, k) \oplus b$ , dengan  $b$  sembarang konstanta adalah hasil penjumlahan  $b$  dengan masing-masing elemen pada  $\mathcal{P}_{m,d}^n(i, k)$ . Jika terdapat partisi dengan beda  $d$  maka pasti ada partisi dengan beda  $-d$  (Baca dkk, 2013).

Terdapat beberapa partisi yang sudah ditemukan oleh Azizah (2016) diantaranya menghasilkan  $\mathcal{P}_{m,d}^n(i, k)$  dengan  $d = m$ ,  $d = m^2$ ,  $d = \frac{m}{2}$  dan Agustin

(2016)  $d = -m$ ,  $d = -m^2$ ,  $d = \frac{-m}{2}$  untuk yang disajikan dalam Lemma. Adapun Lemma tersebut adalah sebagai berikut:

**Lemma 2.6.2.** *Diberikan  $n$  and  $m$  adalah bilangan bulat positif dengan variasi nilai beda. Untuk  $k = \{1, 2, \dots, n\}$  jumlah dari  $\mathcal{P}_{m,d_1}^n(i, k) = \{(i-1)n + k, 1 \leq i \leq m\}$  membentuk barisan aritmatika dengan beda  $d_1 = m$*

**Bukti.** Dengan perhitungan sederhana, untuk  $k = \{1, 2, \dots, n\}$  maka  $\sum_{i=1}^m \mathcal{P}_{m,d_1}^n(i, k) = \mathcal{P}_{m,d_1}^n(k) \longleftrightarrow \mathcal{P}_{m,d_1}^n(k) = \{\frac{m^2n-nm}{2} + mk\} \longleftrightarrow \mathcal{P}_{m,d_1}^n(k) = \{\frac{m^2n-nm}{2} + m, \frac{m^2n-nm}{2} + 2m, \dots, \frac{m^2n-nm}{2} + (n-1)m, \frac{m^2n-nm}{2} + nm\}$ . Terbukti bahwa himpunan tersebut membentuk deret aritmatika dengan  $d_1 = m$ .  $\square$

**Lemma 2.6.3.** *Diberikan  $n$  and  $m$  adalah bilangan bulat positif dengan variasi nilai beda. Untuk  $k = \{1, 2, \dots, n\}$  jumlah dari  $\mathcal{P}_{m,d_2}^n(i, k) = \{(k-1)m + i; 1 \leq i \leq m\}$  membentuk barisan aritmatika dengan beda  $d_2 = m^2$ .*

**Bukti.** Dengan perhitungan sederhana, untuk  $k = \{1, 2, \dots, n\}$  maka  $\sum_{i=1}^m \mathcal{P}_{m,d_2}^n(i, k) = \mathcal{P}_{m,d_2}^n(k) \longleftrightarrow \mathcal{P}_{m,d_2}^n(k) = \{\frac{(m-m^2)}{2} + m^2k\} \longleftrightarrow \mathcal{P}_{m,d_2}^n(k) = \{\frac{(m-m^2)}{2} + m^2, \frac{(m-m^2)}{2} + 2m^2, \dots, \frac{(m-m^2)}{2} + (n-1)m^2, \frac{(m-m^2)}{2} + nm^2\}$ . Terbukti bahwa himpunan tersebut membentuk deret aritmatika dengan  $d_2 = m^2$ .  $\square$

**Lemma 2.6.4.** *Diberikan  $n$  and  $m$  adalah bilangan bulat positif dengan variasi nilai beda. Untuk  $k = \{1, 2, \dots, n\}$  jumlah dari*

$$\mathcal{P}_{m,d_3}^n(k) = \begin{cases} \{(i-1)n + \frac{k+1}{2}; 1 \leq i \leq m, i \equiv 1 \pmod{2}\} \cup \\ \{\frac{k-n}{2} + in; 1 \leq i \leq m, i \equiv 0 \pmod{2}\}, k \equiv 1 \pmod{2} \\ \{\frac{k+1-n}{2} + in; 1 \leq i \leq m, i \equiv 1 \pmod{2}\} \cup \\ \{(i-1)n + \frac{k}{2}; 1 \leq i \leq m, i \equiv 0 \pmod{2}\}, k \equiv 0 \pmod{2} \end{cases}$$

*membentuk barisan aritmatika dengan beda  $d_3 = \frac{m}{2}$ .*

**Bukti.** Dengan perhitungan sederhana, untuk  $k = \{1, 2, \dots, n\}$  maka  $\sum_{i=1}^m \mathcal{P}_{m,d_3}^n(i, k) = \mathcal{P}_{m,d_3}^n(k) \longleftrightarrow \mathcal{P}_{m,d_3}^n(k) = \{\frac{m}{4} + (2mn - n + 1) + \frac{m}{2}k\} \longleftrightarrow \mathcal{P}_{m,d_3}^n(k) = \{\frac{m}{4} + (2mn - n + 1) + \frac{m}{2}, \frac{m}{4} + (2mn - n + 1) + m, \dots, \frac{m}{4} + (2mn -$

$n + 1) + \frac{m(n-1)}{2}, \frac{m}{4} + (2mn - n + 1) + \frac{mn}{2}$ . Terbukti bahwa himpunan tersebut membentuk deret aritmatika dengan  $d_3 = \frac{m}{2}$ .  $\square$

**Lemma 2.6.5.** Misal  $n$  dan  $m$  bilangan bulat positif dengan variasi nilai beda  $d$ . Untuk  $k = \{1, 2, \dots, n\}$  jumlah dari  $\mathcal{P}_{m,d_4}^n(i, k) = \{1 + ni - k; 1 \leq i \leq m\}$  membentuk baris aritmatika dengan beda  $d_4 = -m$ .

**Bukti.** Melalui proses perhitungan sederhana, untuk  $k = \{1, 2, \dots, n\}$  didapat

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \mathcal{P}_{m,d_4}^n(i, k) &= \mathcal{P}_{m,d_4}^n(k) \\ &= \left\{ \frac{n}{2}(m^2 + m) + m - mk \right\} \\ &= \left\{ \frac{n}{2}(m^2 + m), \frac{n}{2}(m^2 + m) - m, \frac{n}{2}(m^2 + m) - 2m, \dots, \frac{n}{2}(m^2 + m)m - m(n-1), \frac{n}{2}(m^2 + m)m - mn \right\} \end{aligned}$$

Terbukti bahwa himpunan tersebut membentuk deret aritmatika dengan  $d_4 = -m$ .  $\square$

**Lemma 2.6.6.** Misal  $n$  dan  $m$  bilangan bulat positif dengan variasi nilai beda  $d$ . Untuk  $\{k = 1, 2, \dots, n\}$  jumlah dari  $\mathcal{P}_{m,d_5}^n(i, k) = \{mn + i - mk; 1 \leq i \leq m\}$  membentuk baris aritmatika dengan beda  $d_5 = -m^2$ .

**Bukti.** Melalui proses perhitungan sederhana, untuk  $k = \{1, 2, \dots, n\}$  didapat

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \mathcal{P}_{m,d_5}^n(i, k) &= \mathcal{P}_{m,d_5}^n(k) \\ &= \left\{ \frac{m}{2}(2mn + m + 1) - m^2k \right\} \\ &= \left\{ \frac{m}{2}(2mn + m + 1) - m^2, \frac{m}{2}(2mn + m + 1) - 2m^2, \dots, \frac{m}{2}(2mn + m + 1) - m^2(n-1), \frac{m}{2}(2mn + m + 1) - m^2n \right\} \end{aligned}$$

Terbukti bahwa himpunan tersebut membentuk deret aritmatika dengan  $d_5 = -m^2$ .  $\square$



**Lemma 2.6.7.** Misal  $n$  dan  $m$  bilangan bulat positif dengan variasi nilai beda  $d$ . Untuk  $k = \{1, 2, \dots, n\}$ . jumlah dari

$$\mathcal{P}_{m,d_6}^n(i, k) = \begin{cases} \{ni - \frac{n}{2} - \frac{k}{2} + 1; 1 \leq i \leq m; 1 \leq k \leq n; i \text{ ganjil}; k \text{ ganjil}\} \\ \{ni - \frac{k}{2} + \frac{1}{2}; 1 \leq i \leq m; 1 \leq k \leq n; i \text{ genap}; k \text{ ganjil}\} \\ \{ni + \frac{k}{2} + 1; 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n; i \text{ ganjil}; k \text{ genap}\} \\ \{ni - \frac{k}{2} - \frac{n}{2} + \frac{1}{2}; 1 \leq i \leq m; 1 \leq k \leq n; i \text{ genap}; k \text{ genap}\} \end{cases}$$

membentuk baris aritmatika dengan beda  $d_6 = \frac{-m}{2}$ .

**Bukti.** Melalui proses perhitungan sederhana, untuk  $k = \{1, 2, \dots, n\}$  didapat

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \mathcal{P}_{m,d_6}^n(i, k) &= \mathcal{P}_{m,d_6}^n(k) \\ &= \left\{ \frac{m}{4}(2mn - n + 3) - \frac{m}{2}k \right\} \\ &= \left\{ \frac{m}{4}(2mn - n + 3) - \frac{m}{2}, \frac{m}{4}(2mn - n + 3) - m, \dots, \frac{m}{4}(2mn - n + 3) - \frac{m}{2}(n - 1), \frac{m}{4}(2mn - n + 3) - \frac{m}{2}n \right\} \end{aligned}$$

Terbukti bahwa himpunan tersebut membentuk deret arimatika dengan  $d_6 = \frac{-m}{2}$ .

□

Tabel 2.1 Klasifikasi partisi  $d = m$ .

$i \setminus k$	1	2	...	$n$	
1	1	2	...	$n$	
2	$n + 1$	$n + 2$	...	$n + n$	
3	$2n + 1$	$2n + 2$	...	$2n + n$	
...	...	...	...	...	
$m$	$(m - 1)n + 1$	$(m - 1)n + 2$	...	$(m - 1)n + n$	+
	$a$	$a + m$	...	$a + (n - 1)m$	$d = m$



Tabel 2.2 Klasifikasi partisi  $d = m^2$ .

$i \setminus k$	1	2	3	4	...	$n$	
1	1	$m + 1$	$2m + 1$	$3m + 1$	...	$(n - 1)m + 1$	
2	2	$m + 2$	$2m + 2$	$3m + 2$	...	$(n - 1)m + 1$	
3	3	$m + 3$	$2m + 3$	$3m + 3$	...	$(n - 1)m + 1$	
...	...	...	...	...	.....		
$m$	$m$	$m + m$	$2m + m$	$3m + m$	...	$(n - 1)m + 1$	+
	$a$	$a + m^2$	$a + 2m^2$	$a + m^3$	...	$a + (n - 1)m^2$	$d = m^2$

Tabel 2.3 Klasifikasi partisi  $d = \frac{m}{2}$ .

$i \setminus k$	1	2	3	4	5	
1	1	4	2	5	3	
2	8	6	9	7	10	
3	11	14	12	15	13	
4	18	16	19	17	20	+
	38	40	42	44	46	$d = \frac{m}{2}$

Suatu partisi yang didefinisikan dengan  $\mathcal{P}_{m,d}^n(k)$  dapat dibentuk dengan mengkombinasikan partisi lain sehingga diperoleh beda  $d$  yang bervariasi. Konstruksi partisi tersebut mengikuti fakta di bawah ini:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{m,d}^n(k) &= \mathcal{P}_{m_1,d_1}^n(i, k) \cup (\mathcal{P}_{m_2,d_2}^n(i, k) \oplus (nm_1)); \text{ untuk } 1 \leq k \leq n \\ \sum \mathcal{P}_{m,m}^n(k) &= \sum \mathcal{P}_{m_1,d_1}^n(k) + \sum (\mathcal{P}_{m_2,d_2}^n(k) \oplus nm_1), \text{ untuk } 1 \leq k \leq n \\ &= \sum \mathcal{P}_{m_1,d_1}^n(k) + \sum (\mathcal{P}_{m_2,d_2}^n(k) \oplus nm_1m_2), 1 \leq i \leq m \} \end{aligned}$$

dimana  $m = m_1 + m_2$  dan  $d = d_1 + d_2$  (Baca dkk, 2013).

### 2.7 Aplikasi Graf

Berbagai macam aplikasi pada graf yang dapat ditemukan dalam kehidupan diantaranya pengaturan jadwal, optimasi perjalanan terpendek, dan yang sering diketahui adalah pembuatan sandi *chipertext*. Proses dalam pengkodean tersebut dengan cara membangun kalimat sandi dari sebuah pesan yang dikeluarkan oleh suatu badan yang memiliki informasi penting sehingga dalam

memberikan info penting dan rahasia akan tetap terjaga kerahasiannya. Proses dalam kriptografi ini membentuk satu kesatuan sistem yang disebut Kriptosistem. Kriptosistem adalah algoritma kriptografi, yang terdiri dari beberapa komponen yaitu:

1. Enkripsi merupakan cara pengamanan data yang dikirimkan sehingga terjaga kerahasiannya
2. Deskripsi merupakan kebalikan dari enkripsi. Pesan yang telah dienkripsi dikembalikan ke bentuk asalnya
3. Kunci adalah kunci yang dipakai untuk melakukan enkripsi dan deskripsi
4. *Ciphertext* merupakan suatu pesan yang telah melalui proses enkripsi
5. *Plaintext* merupakan mengkonversi text asli menjadi *chiphertext* (Ariyus, 2008).

Berdasarkan perkembangannya kriptosistem dibagi menjadi 2 yaitu kriptosistem klasik dan kriptosistem modern. Kriptosistem klasik yang mendasari adanya kriptosistem modern saat ini. Kriptosistem klasik merupakan kriptografi yang berbasis karakter (enkripsi dan deskripsi dilakukan pada satu karakter) dan kriptografi modern adalah kriptografi yang beroperasi dalam mode bit (dinyatakan dalam 0 dan 1) (Juliadi,dkk. 2012). Terdapat banyak cara untuk mengamankan pesan rahasia salah satunya ialah menggunakan metode *Caesarsystem* yang menerapkan sistem  $mod(26)$ .

Tabel 2.4 Aturan Julius Caesar.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

### 2.8 Hasil Pelabelan Selimut $(a, d) - \mathcal{H} - Antimagic$

Pada bagian ini disajikan beberapa rangkuman hasil pelabelan selimut  $(a, d) - \mathcal{H}$  anti ajaib super yang dapat digunakan sebagai rujukan penelitian ini.

Tabel 2.5: Ringkasan Pelabelan Selimut Super  $(a, d) - \mathcal{H} - Antimagic$ .

Graf	$a$	$d$	Hasil
Graf Kipas ( $F_n$ )	$12 + 4n + \lfloor n/2 \rfloor$	4	$(a, d) - C_3$
	$8 + 6n + \lfloor n/2 \rfloor$	2	
(Karyanti, 2012)			
Graf Roda ( $W_n$ )	$3hn + 5$	3	$(a, d) - C_3$
	$3hn + 3h + n$	1	
(Inayah, 2013)			
Triangular Ladder ( $L_n$ )	$16n - 3$	0	$H = C_3$
	$15n - 1$	1	
(Jamil, 2014)			

## BAB 3. METODE PENELITIAN

### 3.1 Metode Penelitian

Penelitian ini akan menggunakan metode deduktif aksiomatik dan metode pendektasian pola. Metode deduktif aksiomatik adalah metode penelitian yang menggunakan prinsip-prinsip aksioma atau teorema yang sudah ada dan selanjutnya menurunkan untuk menyelesaikan masalah, terutama dalam penelitian ini bertujuan untuk menyelesaikan masalah pelabelan selimut total super  $(a,d)$ - $\mathcal{H}$ -*antimagic* pada *joint* graf. Adapun langkah pertama menggunakan metode deduktif yaitu memilih graf, lalu mencari kardinalitas graf baik titik maupun sisi beserta batas atasnya  $d$ . Langkah selanjutnya memberi label pada titik dan sisi graf dan kemudian menemukan pelabelan selimut total super  $(a,d)$ - $\mathcal{H}$ -*antimagic* pada *joint* graf dengan menerapkan teorema yang sudah ada. Selanjutnya menggunakan metode pendektasian pola yang digunakan untuk merumuskan pola dari pelabelan titik dan sisi yang sudah dilakukan sampai terbentuk pola yang apabila graf diperbanyak pola tersebut akan berlaku umum sehingga memperoleh perumusan pelabelan selimut total super  $(a,d)$ - $\mathcal{H}$ -*antimagic* pada *joint* graf.

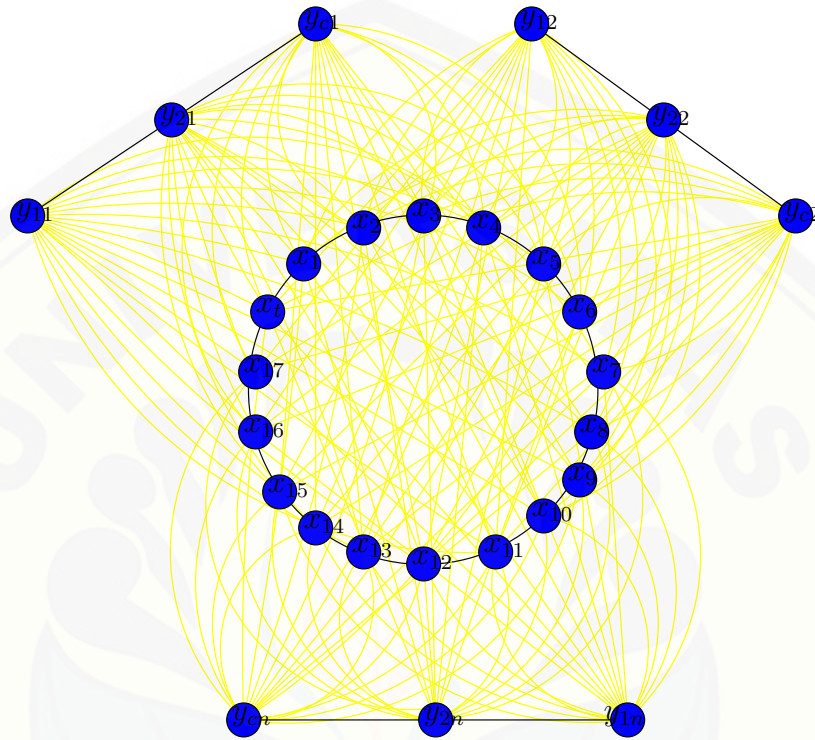
### 3.2 Rancangan Penelitian

Rancangan penelitian dimaksudkan untuk memberikan pandangan mengenai penelitian ini. Adapun rancangan penelitian yang dilakukan pada penelitian ini adalah sebagai berikut:

#### 3.2.1 Penotasian Titik dan Sisi

*Joint* graf lintasan dan graf siklus dinotasikan dengan  $(nP_z + C_t)$ . Graf tersebut merupakan sebuah graf yang diperoleh dari salinan dari sebuah graf lintasan yang nantinya di *joint* dengan graf siklus. Graf ini memiliki himpunan titik  $V(nP_m + C_t) = \bigcup_{k=1}^n \{y_{i,k}; 1 \leq i \leq m\} \cup \{x_l; 1 \leq l \leq t\}$  dan himpunan sisi

$E(nP_z + C_t) = \bigcup_{k=1}^n \{S_{(r,k)}; 1 \leq r \leq c\} \cup \{x_l x_{l+1}; 1 \leq l \leq t-1\}$   
 $\cup \{x_t x_1\}$  sehingga  $|V(nP_z + C_t)| = nm + t = nm + 2nm$  dan  $|E(nP_z + C_t)| =$   
 $nq + t = nq + 2nm$ .



Gambar 3.1 Joint Graf Lintasan dan Graf Lingkaran



### 3.2.2 Indikator Pelabelan

Indikator pelabelan selimut total super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$  -*antimagic* pada *joint* dari graf lintasan dan graf siklus dalam penelitian ini adalah:

1. Semua label titik berbeda

Label titik pada pelabelan selimut total super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$  -*antimagic* pada *joint* dari graf lintasan dan graf siklus merupakan fungsi bijektif dari himpunan titik pada graf *joint* dari graf lintasan dan graf siklus ke bilangan bulat positif dari 1 sampai  $|V(G)|$ .

2. Semua label sisi berbeda

Label sisi pada pelabelan selimut total super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$  -*antimagic* pada *joint* dari graf lintasan dan siklus melanjutkan pelabelan titik sehingga merupakan fungsi bijektif dari himpunan sisi pada graf ke bilangan bulat dari  $|V(G)|$  ditambah 1 sampai  $|V(G)|$  ditambah  $|E(G)|$ .

3. Bobot titik selimut

Bobot titik selimut adalah jumlah label titik untuk setiap selimut pada *joint* dari graf lintasan dan siklus dan harus membentuk barisan aritmatik nantinya.

4. Bobot total selimut

Sama halnya dengan bobot titik selimut yang berbeda ialah jika pada bobot total selimut yang dijumlah ialah bobot total titik dan sisi untuk setiap selimut pada *joint* dari graf lintasan dan siklus dan juga harus membentuk barisan aritmatika.

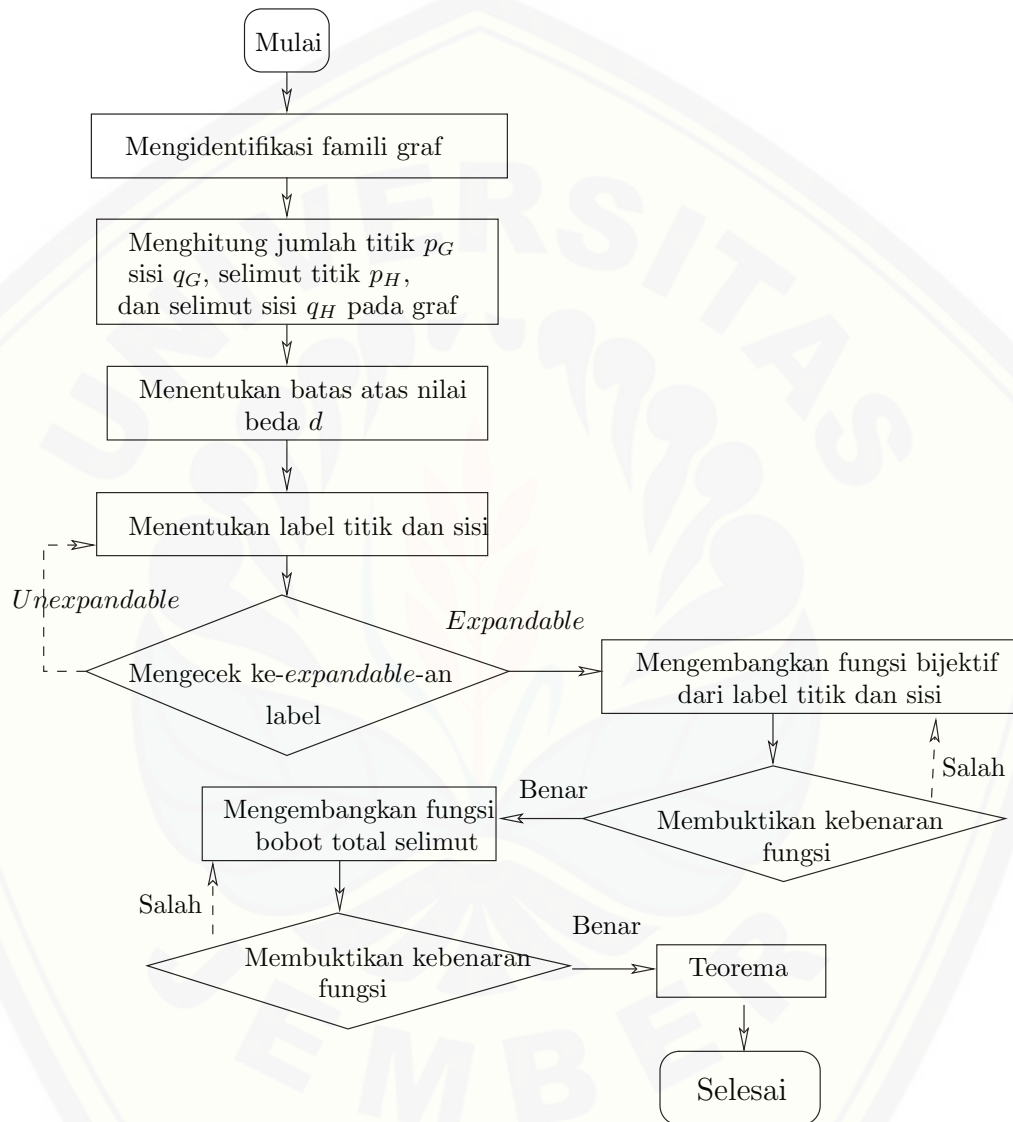
### 3.3 Teknik Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada graf *joint* dari graf lintasan dan siklus. Dengan teknik penelitian sebagai berikut:

1. menghitung jumlah dari titik  $p_G$ , sisi  $q_G$ , selimut titik  $p_H$ , selimut sisi  $q_H$ , dan selimut pada *joint* dari graf lintasan dan siklus  $(nP_z + C_t)$ ;
2. menentukan batas atas nilai beda  $d$  pada *joint* dari graf lintasan dan siklus  $(nP_z + C_t)$ ;

3. menentukan label titik dan label sisi pada *joint* dari graf lintasan dan siklus  $(nP_z + C_t)$  dengan menggunakan metode partisi;
4. apabila label titik dan label sisi berlaku untuk beberapa graf maka dikatakan pelabelan itu *expandable*;
5. menentukan fungsi bijektif label titik dan label sisi pada *joint* dari graf lintasan dan siklus  $(nP_z + C_t)$ ;
6. mengembangkan fungsi bobot selimut pada *joint* dari graf lintasan dan siklus  $(nP_z + C_t)$ ;
7. membuktikan kebenaran fungsi pada *joint* dari graf lintasan dan siklus  $(nP_z + C_t)$ ;
8. menemukan teorema;
9. menciptakan kriptosistem klasik dengan cara mengaplikasikan pola pelabelan selimut total super  $(a,d)$ - $\mathcal{H}$  -*antimagic* pada *joint* dari graf lintasan dan siklus  $(nP_z + C_t)$ .

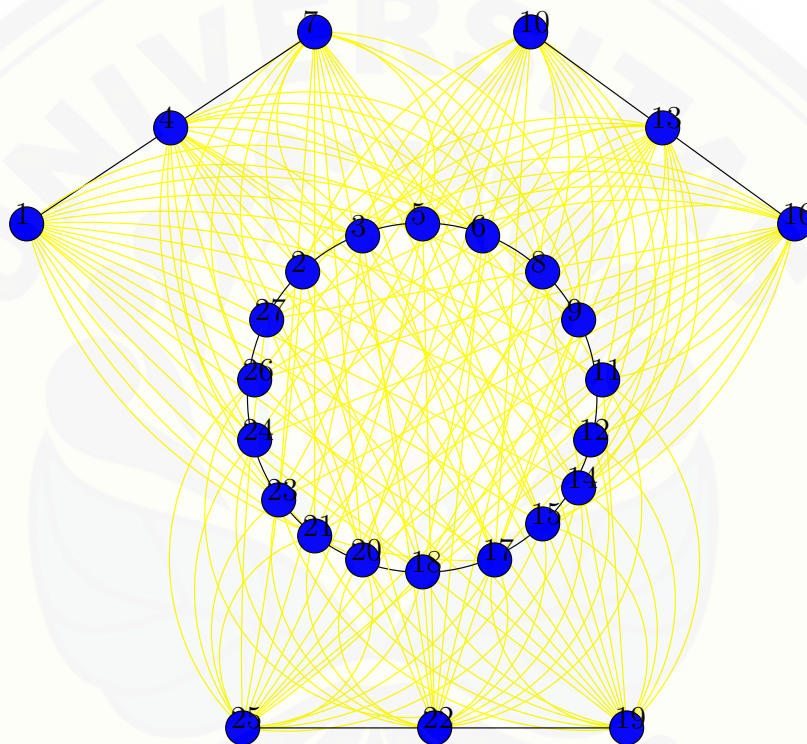
Penelitian ini akan menemukan nilai beda  $d$  lebih dari satu yang telah ditentukan. Langkah-langkah penelitian di atas juga dapat disajikan dalam bentuk diagram alir pada gambar berikut ini



Gambar 3.2 Diagram Alir Penelitian

### 3.4 Observasi Awal

Penelitian kali ini membahas pada *joint* dari graf lintasan dan siklus  $(nP_z + C_t)$  yang telah dilakukan observasi awal. Observasi awal ini merupakan pedoman yang bertujuan untuk menentukan pelabelan selimut total super  $(a,d)\mathcal{H}$ -*antimagic joint*, kemudian mencari pola pelabelannya. Observasi awal dilakukan pada *joint* dari graf lintasan dan siklus  $nP_z + C_t$  untuk  $m = 3, n = 3,$  dan  $t = 2nm$  sebagai berikut:



Gambar 3.3 Graf Joint Graf Lintasan dan Graf Lingkaran

Sebelum dikembangkan, beberapa tahapan berikut adalah sebagai berikut:

1. Himpunan dari elemen graf

$$V_1 = \bigcup_{k=1}^n y_{i,k}, 1 \leq i \leq m$$

$$V_2 = x_l, 1 \leq l \leq t \text{ dengan } t = 2nm$$

$$E_1 = \bigcup_{k=1}^n s_{r,k}, 1 \leq r \leq c$$

$$E_2 = \{x_l + x_{l+1}, 1 \leq l \leq t - 1\} \cup \{x_t x_1 \text{ dengan } t = 2nm\}$$

2. Partisi yang ditemukan untuk *joint* dari graf lintasan dan graf siklus  $(nP_z + C_t)$  untuk  $n = 3$ ,  $m = 3$ , dan  $t = 2nm$  adalah sebagai berikut:

Tabel 3.1 Klasifikasi Partisi  $d = 3m^2$ .

$i \setminus k$	1	2	3	
1	1	10	19	
2	4	13	22	
3	7	16	25	+
	12	39	66	$d = 27$

$$\mathcal{P}_{m,3m^2}^n(i, k) = 3i + 3mk - 3m - 2; 1 \leq i \leq m, 1 \leq k \leq n$$

3. Fungsi dari elemen graf

$$f(V_1) = \mathcal{P}_{m,3m^2}^n(i, k)$$

$$f(V_2) = \bigcup_{k=1}^n \begin{cases} \{\frac{3i+3}{2} - 1, i \text{ ganjil}\} \\ \{\frac{3i}{2}, i \text{ genap}\} \end{cases}$$

$$f(E_1) = \mathcal{P}_{c,c}^n(r, k) \oplus (|V_1| + |V_2|); 1 \leq r \leq c, 1 \leq k \leq n$$

$$f(E_2) = \bigcup_{k=1}^n \{|V_1| + |V_2| + |E_1| + 1 + (l-1)1 = nm + 2nm + nq + l; 1 \leq l \leq t-1\}$$



Langkah untuk membuat *chipertext* dengan menggunakan pola pelabelan dalam graf *joint* pada graf lintasan dan graf siklus adalah sebagai berikut:

1. menentukan graf, pilihlah graf yang memiliki sisi lebih dari banyaknya karakter *plaintext*, misalkan 26.
2. melabeli titik dan sisi menggunakan pelabelan selimut total super  $(a,d)\mathcal{H}$ -*antimagic joint* dari graf lintasan dan siklus.
3. mengeliminasi sisi yang memiliki label  $f_{uv} > |V| + 26$ .
4. membuat graf pohon yang titiknya merupakan label titik, sedangkan akar-akar dari graf pohon tersebut mengikuti pola graf. Sisi yang telah tereleminasi tidak digunakan.
5. mencantumkan label sisi pada graf pohon sesuai pelabelan pada graf yang digunakan. Mengubah bilangan tersebut menjadi bilangan mod 26.
6. memasang setiap karakter *plaintext* dengan sisi pada graf pohon. Pemasangan diurutkan dari kiri mulai dari layer paling atas.
7. membuat aturan untuk mentransformasi bilangan mod 26 ke karakter yang digunakan adalah aturan Julius Caesar.
8. membuat tabel yang terdiri dari *plaintext*, label sisi yang bersesuaian dengan *plaintext*,  $(\text{mod } 26)$  dari label sisi, dan *chipertext* yang bersesuaian dengan  $(\text{mod } 26)$ .

## BAB 5. KESIMPULAN DAN SARAN

### 5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dari pembahasan pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa:

1. Kardinalitas dari *joint* graf lintasan dan graf siklus  $(nP_z + C_t)$  memiliki himpunan titik  $V_1 = \{y_{(i,k)}; 1 \leq i \leq m, 1 \leq k \leq n\}$ ,  $V_2 = \{x_l; 1 \leq l \leq t\}$ , dan himpunan sisi  $E_1 = \{s_{(r,k)}; 1 \leq r \leq c, 1 \leq k \leq n\}$ ,  $E_2 = \{x_l x_{l+1}; 1 \leq l \leq t-1\} \cup \{x_t x_1\}$ . Didapatkan  $|V_1| = nm$ ,  $|V_2| = t$ ,  $|E_1| = nc$ , dan  $|E_2| = (t-1) + 1 = t$  sedemikian hingga  $p_G = |V(G)| = |V_1| + |V_2| = nm + t$ ,  $q_G = |E(G)| = |E_1| + |E_2| = nc + t$ , sedangkan  $p_H$  dan  $q_H$  diperoleh ketika selimut  $n = 1$  maka  $p_H = t + m$  dan  $q_H = c + t$  dengan  $n$  merupakan banyaknya selimut.
2. Batas atas pelabelan selimut total super  $(a, d) - \mathcal{H}$ -*antimagic* pada *joint* graf lintasan dan graf siklus  $(nP_z + C_t)$  memiliki batas atas  $d \leq (p_H)^2 - tp_H + (q_H)^2 - tq_H$ .
3. *Joint* graf lintasan dan graf siklus  $(nP_z + C_t)$  memiliki  $(a, d) - \mathcal{H}$ -*antimagic* total *covering* dengan  $a = \{(\frac{3m_1+3m_1^2}{2} - 3m_1^2 - 2m_1) + (3nm_2^2 + \frac{3m_2+3m_2^2}{2} - 2m_2 + (m_1 + 2(m_1))n) + (\frac{n}{2}(m_3^2 - m_3) + (m_1 + 2(m_1))n + (m_2 + 2(m_2))n) + (\frac{m_4n}{2}(m_4 + 1) + m_4 + (m_1 + 2(m_1))n + (m_2 + 2(m_2))n + nm_3) + (\frac{1}{2}(m_5 - m_5^2) + (m_1 + 2(m_1))n + (m_2 + 2(m_2))n + nm_3 + nm_4) + (\frac{m_6}{2}(2m_6n + m_6 + 1) + (m_1 + 2(m_1))n + (m_2 + 2(m_2))n + nm_3 + nm_4 + nm_5) + (\frac{m_7}{4}(2m_7n - n + 1) + (m_1 + 2(m_1))n + (m_2 + 2(m_2))n + nm_3 + nm_4 + nm_5 + nm_6) + (\frac{m_8}{4}(2m_8n + n + 3) + (m_1 + 2(m_1))n + (m_2 + 2(m_2))n + nm_3 + nm_4 + nm_5 + nm_6 + nm_7) + (l_1 + \frac{3}{4}l_1^2) + (l_2 + \frac{3}{4}l_2^2 + (m_1 + 2(m_1))n) + (\frac{3c_1+3c_1^2}{2} - 3c_1^2 - 2c_1 \oplus nm + t) + (c_2 + 3nc_2^2 + \frac{3c_2^2+3c_2^2}{2} - 3c_2 + nc_1 + nm + t) + (\frac{n}{2}(c_3^2 - c_3) + nc_1 + nc_2 + nm + t) + (\frac{cn}{2}(c_4 + 1) + c_4 + nm + t + nc_1 + nc_2 + nc_3) + (\frac{1}{2}(c_5 - c_5^2) + nm + t + nc_1 + nc_2 + nc_3 + nc_4) + (\frac{c_6}{2}(2c_6n + c_6 + 1) + nm + t + nc_1 + nc_2 + nc_3 + nc_4 + nc_5) + (\frac{c_7}{4}(2c_7n - n + 1) + nm + t + nc_1 + nc_2 + nc_3 + nc_4 + nc_5 +$

$$nc_6) + (\frac{cs}{4}(2c_8 + n + 3) + nm + t + nc_1 + nc_2 + nc_3 + nc_4 + nc_5 + nc_6 + nc_7)\} \text{ dan}$$

$$d = 3m_1^2 - 3m_2^2 + m_3 - m_4 + m_5^2 - m_6^2 + \frac{m_7}{2} - \frac{m_8}{2} + 3c_1^2 - 3c_2^2 + c_3 - c_4 + c_5^2 - c_6^2 + \frac{c_7}{2} - \frac{c_8}{2}$$

4. Pelabelan selimut total super  $(a, d) - \mathcal{H}$ -anti ajaib pada *joint* graf lintasan dan graf siklus  $(nP_m + C_t)$  dapat dibentuk aplikasi *ciphertext* alfabet dengan aturan pengkodean sebagai berikut.

Tabel 5.1 *Chiphertext* alfabet dari Graf  $nP_z + C_t$  dengan  $d=354$ .

<i>Plaintext</i>	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
<i>Chiphertext</i>	K	N	C	Q	T	W	Z	J	I	M	L	D	P	O
<i>Plaintext</i>	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	sp	
<i>Chiphertext</i>	S	R	V	U	Y	X	E	B	G	A	F	H	@	

## 5.2 Saran

Berdasarkan hasil penelitian mengenai pelabelan selimut total super  $(a, d) - \mathcal{H}$  *antimagic* pada *joint* graf lintasan dan graf siklus  $(nP_z + C_t)$  serta mengacu pada *open problem* dari hasil penelitian yang telah ditemukan, maka peneliti memberikan saran kepada pembaca agar dapat melakukan penelitian pada pelabelan selimut total super  $(a, d) - \mathcal{H}$  *antimagic* pada *joint* graf lintasan dan graf siklus  $(nP_z + C_t)$  diskonektif.

## DAFTAR PUSTAKA

- Adawiyah, R. 2014. *Pelabelan Total Super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -Antimagic pada Graf Lampion*. e-UNEJ Repository.
- Agustin, I. H., Rizky, P., dan Dafik. 2014. *Complete-Antimagicness of Amalgamation Total of Complete Graph*. Working Paper. Jember:CGANT UNEJ
- Agustin, I. H., Dafik., dan Milasari, M.D. 2016. *Keantimagikan Super Total Selimut Pada Gabungan Saling lepas Graf Shackle Triangular Book*. Prosiding Seminar Nasional, 1: 1308-1318.
- Anggraeni, N., dan Dafik. 2014. *Super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -Antimagic Total Covering of Amalgamation Graph  $K_4$  and  $W_4$* . Prosiding Seminar Nasional, 1: 708-804.
- Ariyus, Dony. 2008. *Pengantar Ilmu Kriptografi*. Yogyakarta. Andi Yogyakarta.
- Azizah, Y.N. 2016. "Super  $(a, d)$ - $A_p^2$ -Anti Ajaib Total Dekomposisi Graf Shackle Antiprisma Untuk Pengembangan Ciphertext dan Ketrampilan Berfikir Tingkat Tinggi". Tidak dipublikasikan. Skripsi. Jember: FKIP Universitas Jember.
- Bača, Bronkovic, L., Lascanova, M., Phanalasy, and Fenovcikova, A.S. 2013. *On  $d$ -antimagic labelings of plane graphs* *Electronica Journal of Graph Theory and Application*. 1:28-39.
- Bača dkk. 2007. *Edge-Antimagic Graphs*. *Discrete Mathematics*, 307: 1232-1244.
- Dafik. 2007. "Structural Properties and Labeling of Graphs". Tidak dipublikasikan. Tesis. Australia: School of Information Technology and Mathematical Sciences University of Ballarat.
- Dafik, Mirka, M., Ryan, J., and Bača, M. 2009. *On Super  $(a, d)$ -Edge-Antimagic Total Labeling of Disconnected Graphs*. *Discrete Mathematics*, 309(15): 4909 - 4915.
- Dafik. 2014. *Batas Atas  $d$  dari Sebuah Graf yang Memiliki Super  $(a,d)$ - $\mathcal{H}$ -Antimagic Covering*. Working Paper, FKIP UNEJ.

- Fraleigh, John B. 2000. A first Course in Abstract Algebra, Sixth Edition, Addison Wesley Publishing Company, Inc., USA.*
- Fred, John B. 2013. Introduction Graph Theory with Applications, Waveland Press*
- G.Ringel and A.S Llado, Another tree conjecture, Bull. Inst. Combin. Appl. 18 (1996),83-85.*
- Guettierrez and Llado. 2005. Magic Coverings. Of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing, 55: 451 - 461.*
- H.Enomoto, A.S Llado, T.Nakamamigawa and G.ringel, Super edge-magic graphs, SUT J. MATH. 34(1998),105-109.*
- Hasmawati, 2015. Teori Graf. Jurusan Matematika FMIPA Universitas Jember.*
- Harary, F. 2007. Graph Theory. New London: Wesley.*
- Hartsfield, N. and Ringel, G. 1994. Pearls in Graph Theory, A. London : Accademic Press Limited.*
- Inayah, N., Simanjuntak, R., Salman, A. 2009. Super (a,d)-H-Antimagic Total Labelings For Shackles of A Connected Graph H. Australasian Journal of Combinatorics, 57: 127 - 138.*
- Inayah, N. 2013. Pelabelan (a, d)- $\mathcal{H}$ -Anti Ajaib pada Beberapa Kelas Graf. Tidak Dipublikasikan. Disertasi. Bandung: Institut Teknologi Bandung.*
- Jamil, N.A., Hesti, I.A., dan Dafik. 2014. Super(a,d)-H-Antimagic Total Covering pada Gabungan Graf Triangular Ladder. Prosiding Seminar Nasional, 1:110-118.*
- Juliadi, dkk. 2012. Kriptografi Klasik dengan Metode Modifikasi Affine Chipper yang di perkuat dengan Vigenere Chipper, 2(2)*
- Karyanti, N. 2012. Pelabelan Selimut (a,d)-H-Anti Ajaib Super pada Graf Fan, Sun, Generalized Petersen. Tidak Dipublikasikan. Skripsi. Surakarta: Universitas Sebelas Maret.*



*Kotzig, A. and Rosa, A. 1970. Magic Valuations of Finite Graphs. Canad. Math. Bull., Vol. 13 : 451 - 461.*

*Latifah, S., Agustin I.H., dan Dafik. 2015. Super Super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -Antimagic Total Covering of Connected Amalgamation of Fan Graph. Prosiding Seminar Nasional, 1:2370-2379.*

*Lipschutz, S. dan Lipson, M.L. 2002. Matematika Diskrit . Jakarta: Erlangga.*

*Munir, R. 2010. Matematika Diskrit. Bandung: Penerbit Informatika.*

*Purwanto, H., Indriani, G., and Dayanti, E. 2006 . Matematika Diskrit. Jakarta: PT. ERCONTARA RAJAWALI.*

*Slamin. 2009. Desain Jaringan Pendekatan Teori Graf. Jember : Universitas Jember.*

*Wallis, W. D. 2001. Magic Graphs. Boston: Birkhäuser.*