BILANGAN DOMINASI JARAK DUA PADA GRAF HASIL OPERASI

TESIS

Oleh

Wicha Dwi Vikade
NIM 141820101002

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER
2016

BILANGAN DOMINASI JARAK DUA PADA GRAF HASIL OPERASI

TESIS

diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat
untuk menyelesaikan Program Studi Magister Matematika (S2)
dan mencapai gelar Magister Sains

Oleh

Wicha Dwi Vikade

NIM 141820101002

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER
2016

PERSEMBAHAN

Tesis ini saya persembahkan untuk:

1. Ibuku Supini Hariyanti dan Ayahku Suwadji Hadi Sumarto yang selalu memberi doa di setiap langkahku;
2. Kakakku Tantri Ikwin Nelda dan Adikku Diki Wisnu Pangestian yang selalu memberi dukungan moril;
3. Almamater Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Universitas Jember yang kubanggakan.

MOTTO

"Anggap saja mereka yang berbuat buruk kepada anda sebagai ampelas yang menggosok anda. Pada akhirnya anda akan bersih mengkilap dan ia akan halus tak berguna."*)

"Jadilah kuat tanpa melumpuhkan siapapun."**)

*)Dedy Corbuzier/*Mentalist*
**)Wicha Dwi Vikade/Penulis

PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

nama : Wicha Dwi Vikade

NIM : 141820101002

menyatakan dengan sesungguhnya bahwa tesis yang berjudul "Bilangan Dominasi Jarak Dua pada Graf Hasil Operasi" adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali kutipan yang sudah saya sebutkan sumbernya, belum diajukan pada instansi mana pun, dan bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa adanya tekanan dan paksaan dari pihak mana pun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, Maret 2016
Yang menyatakan,

Wicha Dwi Vikade
NIM 141820101002

TESIS

BILANGAN DOMINASI JARAK DUA PADA GRAF HASIL OPERASI

Oleh

Wicha Dwi Vikade

NIM 141820101002

Pembimbing

Dosen Pembimbing Utama : Prof. Drs. Slamin, M.Comp.Sc., Ph.D
Dosen Pembimbing Anggota : Kosala Dwidja Purnomo, S.Si., M.Si

PENGAJUAN

BILANGAN DOMINASI JARAK DUA PADA GRAF HASIL OPERASI

TESIS

Diajukan untuk dipertahankan di depan Tim Penguji sebagai salah satu persyaratan untuk menyelesaikan Program Pendidikan Magister Jurusan Matematika pada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember

Oleh
Wicha Dwi Vikade
NIM 141820101002

Disetujui oleh:

Dosen Pembimbing Utama,	Dosen Pembimbing Anggota,
Prof. Drs. Slamin M.Comp.Sc.,Ph.D	Kosala Dwidja Purnomo, S.Si., M.Si
NIP. 19670420 199201 1 001	NIP. 19690828 199802 1 001

PENGESAHAN

Tesis berjudul "Bilangan Dominasi Jarak Dua pada Graf Hasil Operasi" telah diuji dan disahkan pada:

hari, tanggal :

tempat : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember

Tim Penguji:

Ketua,	Sekretaris,
Prof. Drs. Slamin, M.Comp.Sc., Ph.D NIP. 19670420 199201 1 001	Kosala Dwidja Purnomo, S.Si., M.Si NIP. 19690828 199802 1 001
Penguji I,	Penguji II,
Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D NIP. 19680802 199303 1 004	Kusbudiono, S.Si. M.Si NIP. 19770430 200501 1 001

Mengesahkan

Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Universitas Jember,

Drs. Sujito, Ph.D.

NIP. 19610204 198711 1 001

RINGKASAN

Bilangan Dominasi Jarak Dua pada Graf Hasil Operasi; Wicha Dwi Vikade, 141820101002; 2016: 64 halaman; Jurusan Matematika; Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Bilangan dominasi telah banyak digunakan dalam kehidupan contohnya penempatan pos pantau polisi pada ruas jalan tertentu, penempatan mobil listrik pada lahan perkebunan, penempatan $CCTV$ pada sudut-sudut tertentu agar dapat menjangkau area di sekitarnya pada jarak tertentu. Dengan menerapkan himpunan dominasi, penempatan pos polisi, mobil listrik, dan $CCTV$ akan lebih efisien serta dapat meminimalisir jumlahnya.

Himpunan dominasi (*dominating set*) S pada graf G adalah subset dari $V(G)$ sedemikian setiap simpul G yang bukan elemen S terhubung dan berjarak satu terhadap S (Haynes, 1996). Kardinalitas minimum di antara himpunan dominasi pada graf G disebut bilangan dominasi (*dominating number*) dari graf G yang dinotasikan dengan $\gamma(G)$. Sedangkan himpunan dominasi jarak dua dinotasikan dengan S_2 yaitu subset dari $V(G)$ sedemikian simpul G yang bukan elemen S_2 terhubung dan memiliki jarak maksimal 2 terhadap S_2. Bilangan dominasi jarak dua dari suatu graf dinotasikan dengan $\gamma_2(G)$, yaitu kardinalitas minimum dari himpunan dominasi jarak dua. Operasi yang digunakan dalam penelitian ini adalah operasi korona dari kombinasi sebarang dua graf ($G \bigodot H$), operasi amalgamasi ($Amal(G, v, t)$), operasi *shackle* titik ($Shack(G, v, t)$) dan *shackle* sisi ($Shack(G, e, t)$), serta operasi join pada sebarang graf ($G + H$). Selain itu, akan dibahas studi kasus bilangan dominasi jarak dua pada lahan perkebunan *Agrotechnopark* Universitas Jember yang terletak di Kecamatan Jubung, Kabupaten Jember.

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah pendeteksian pola, yaitu dengan cara mencari himpunan dominasi sedemikian hingga ditemukan bilangan kardinalitas yang minimum. Selain itu metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah deduktif aksiomatik yaitu metode penelitian yang menggunakan prinsip-prinsip pembuktian deduktif yang berlaku dalam logika mate-

matika dengan menggunakan aksioma atau teorema yang telah ada untuk memecahkan masalah. Penelitian ini akan menghasilkan teorema-teorema baru yang telah dibuktikan secara deduktif sehingga kebenarannya berlaku secara umum.

Hasil dari penelitian ini adalah sebagai berikut.

a. Bilangan dominasi jarak dua pada graf hasil operasi korona adalah $\gamma_2(G \bigodot H) = \gamma(G)$

b. Bilangan dominasi jarak dua pada graf hasil operasi amalgamasi adalah

$$\gamma_2(Amal(G,v,t)) = \gamma_2(Amal(G,e,t)) = \begin{cases} 1; & diam(G) \leq 2 \\ \gamma_2(G)t - t + 1; & diam(G) \text{ yang lain} \end{cases}$$

c. Bilangan dominasi jarak dua pada graf hasil operasi *shackle* adalah

$$\gamma_2(Shack(G,v,t)) = \begin{cases} \lceil \frac{t}{4} \rceil; & diam(G) = 1 \\ \lceil \frac{t}{2} \rceil; & diam(G) = 2 \\ \gamma_2(G)t - t + 1; & diam(G) \text{ yang lain} \end{cases}$$

$$\gamma_2(Shack(G,e,t)) = \begin{cases} 1; & diam(G) = 1 \\ \lceil \frac{t}{2} \rceil; & diam(G) = 2 \\ \gamma_2(G)t - t + 1; & diam(G) \text{ yang lain} \end{cases}$$

d. Bilangan dominasi jarak dua pada graf hasil operasi join adalah $\gamma_2(G+H) = 1$.

e. *J-Graph* lahan perkebunan *Agrotechnopark* Universitas Jember memiliki bilangan dominasi jarak dua $\gamma_2(J-Graph) = 15$. Dengan demikian dibutuhkan 15 unit mobil listrik agar dapat menjangkau seluruh lahan dengan jarak maksimal dua lahan dari posisi mobil listrik.

Hasil penelitian ini diharapkan dapat memberi pengetahuan baru khususnya dalam bidang teori graf. Dari kajian yang belum ditemukan dalam penelitian ini, peneliti memberikan masalah terbuka kepada pembaca yang berminat meneliti pada bidang teori graf, yaitu menentukan bilangan dominasi jarak dua pada graf hasil operasi *shackle* dengan sub graf sebagai penghubung dan graf hasil operasi amalgamasi dengan sub graf sebagai terminal.

PRAKATA

Puji syukur ke hadirat Allah Swt. atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tesis yang berjudul "Bilangan Dominasi Jarak Dua pada Graf Hasil Operasi". Penyusunan tesis ini tidak lepas dari bantuan berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan terima kasih kepada:

1. Prof. Drs. Slamin M.Comp.Sc., Ph.D selaku Dosen Pembimbing Utama dan Bapak Kosala Dwidja Purnomo, S.Si., M.Si selaku Dosen Pembimbing Anggota yang telah meluangkan waktu dan pikiran serta perhatiannya guna memberikan bimbingan dan pengarahan demi terselesaikannya penulisan tesis ini;
2. Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D selaku Dosen Penguji Utama dan Bapak Kusbudiono, S.Si., M.Si selaku Dosen Penguji Anggota yang telah memberikan kritik dan saran demi kebaikan tesis ini;
3. Dosen Program Studi Matematika yang telah memberikan ilmu dan membimbing dengan penuh kesabaran;
4. teman-teman magister matematika angkatan 2014 yang selalu memberi dukungan satu sama lain;
5. semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu per satu.

Penulis juga menerima segala kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan tesis ini. Penulis berharap, semoga tesis ini dapat bermanfaat.

Jember, Maret 2016
Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

DAFTAR LAMBANG

G	=	Sebarang graf G
H	=	Sebarang graf H
$V(G)$	=	Himpunan titik pada graf G
$E(G)$	=	Himpunan sisi pada graf G
$\|V\|$	=	Banyak simpul pada graf dan disebut *order*
$\|E\|$	=	Banyak sisi pada graf dan disebut *size*
$e(v_iv_j)$	=	Sisi yang menghubungkan simpul v_i dan v_j
$diam(G)$	=	Diameter graf G
$G \bigodot H$	=	Graf hasil operasi korona dari kombinasi sebarang graf G dan sebarang graf H
$Amal(G, v, t)$	=	Graf hasil operasi amalgamasi sebarang graf G sebanyak t salinan dengan v adalah simpul terminal
$Amal(G, e, t)$	=	Graf hasil operasi amalgamasi sebarang graf G sebanyak t salinan dengan e adalah sisi terminal
$Shack(G, v, t)$	=	Graf hasil operasi *shackle* sebarang graf G sebanyak t salinan dengan v adalah *lingkage vertex*
$Shack(G, e, t)$	=	Graf hasil operasi *shackle* sebarang graf G sebanyak t salinan dengan e adalah *lingkage edge*
$G + H$	=	Graf hasil operasi join dari kombinasi sebarang graf G dan sebarang graf H
S	=	Himpunan dominasi jarak satu dari suatu graf
S_2	=	Himpunan dominasi jarak dua dari suatu graf
γ	=	Bilangan kardinalitas jarak satu dari suatu graf
γ_2	=	Bilangan kardinalitas jarak dua dari suatu graf
$N_1[v]$	=	Jumlah tetangga berjarak satu dari sebuah simpul v sebagai simpul pendominasi
$N_2[v]$	=	Jumlah tetangga berjarak dua dari sebuah simpul v sebagai simpul pendominasi

BAB 1. PENDAHULUAN

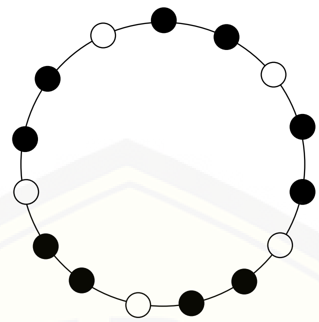
1.1 Latar Belakang Masalah

Matematika merupakan salah satu ilmu pengetahuan yang banyak diaplikasikan pada berbagai bidang, salah satu cabang ilmu matematika adalah teori graf. Secara umum graf dapat diartikan sebagai himpunan tidak kosong yang disebut simpul dan himpunan boleh kosong yang disebut dengan sisi.

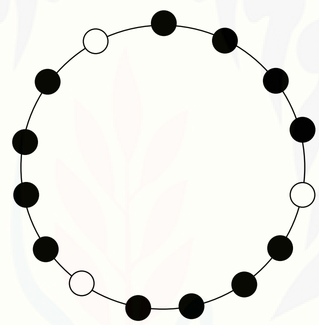
Teori graf dapat diaplikasikan dalam berbagai bidang, seperti bidang pertanian, perhutanan, keamanan dan lain-lain. Salah satu topik yang menarik pada teori graf yang juga akan menjadi topik penelitian ini adalah bilangan dominasi. Bilangan dominasi sudah ada sejak tahun 1850, bilangan dominasi ini muncul pada kalangan penggemar catur di Eropa, masalah yang mereka hadapi adalah menentukan berapa banyaknya ratu (*queen*) yang harus ditempatkan pada papan catur 8×8 sehingga semua petak pada papan catur dapat dikuasai oleh ratu. Dalam kasus ini jumlah ratu yang diletakkan pada papan catur harus minimal.

Dalam teori graf, bilangan dominasi dapat dikatakan sebagai banyaknya simpul pendominasi dalam suatu graf yang dapat mendominasi simpul-simpul terhubung disekitarnya, dengan simpul pendominasi berjumlah minimal. Bilangan dominasi dinotasikan dengan $\gamma(G)$.

Bilangan dominasi telah banyak digunakan dalam kehidupan contohnya penempatan pos pantau polisi pada ruas jalan tertentu, penempatan mobil listrik pada lahan perkebunan, penempatan $CCTV$ pada sudut-sudut tertentu agar dapat menjangkau area di sekitarnya pada jarak tertentu. Dengan menerapkan himpunan dominasi maka penempatan pos polisi, mobil listrik, dan $CCTV$ akan lebih efisien serta dapat meminimalisir jumlahnya. Bilangan dominasi jarak satu akan berbeda dengan bilangan dominasi jarak dua, seperti Gambar 1.1 dan Gambar 1.2. Pada Gambar 1.1 merupakan graf sikel C_{15} dengan bilangan dominasi jarak satu membutuhkan simpul pendominasi lebih banyak. Sedangkan pada Gambar 1.2 adalah graf sikel C_{15} dengan bilangan dominasi jarak dua membutuhkan simpul pendominasi lebih sedikit. Hal ini sangat bermanfaat bagi kasus-kasus penempatan pos polisi, $CCTV$, mobil listrik dan lainnya. Jumlah fasilitas yang terbatas dapat diselesaikan dengan menggunakan bilangan dominasi jarak dua.



Gambar 1.1 Bilangan Dominasi Jarak Satu pada Graf Sikel C_{15} dengan Simpul Putih adalah Simpul Pendominasi



Gambar 1.2 Bilangan Dominasi Jarak Dua pada Graf Sikel C_{15} dengan Simpul Putih adalah Simpul Pendominasi

Dalam penelitian ini penulis meneliti bilangan dominasi jarak dua pada graf hasil operasi yaitu operasi korona dari kombinasi sebarang dua graf, operasi amalgamasi, operasi *shackle*, serta operasi join pada sebarang graf. Graf-graf hasil operasi tersebut belum pernah diteliti sebelumnya dan akan dicari bilangan dominasi yang berjarak dua, oleh karena itu penulis memilih judul "Bilangan Dominasi Jarak Dua pada Graf Hasil Operasi".

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka dapat dirumuskan masalah dalam penelitian ini yaitu:

a. bagaimana bilangan dominasi jarak dua pada graf hasil operasi korona dari kombinasi sebarang dua graf G dan H?

b. bagaimana bilangan dominasi jarak dua pada graf hasil operasi amalgamasi sebarang graf G?

c. bagaimana bilangan dominasi jarak dua pada graf hasil operasi *shackle* sebarang graf G?

d. bagaimana bilangan dominasi jarak dua pada graf hasil operasi join pada sebarang graf?

e. bagaimana aplikasi bilangan dominasi jarak dua untuk penempatan mobil listrik di lahan perkebunan?

1.3 Batasan Masalah

Untuk menghindari meluasnya permasalahan yang akan dipecahkan, masalah dalam penelitian ini dibatasi pada:

a. graf terhubung sederhana serta tidak berarah;

b. lahan perkebunan yang digunakan adalah *Agrotechnopark* Universitas Jember yang terletak di Kecamatan Jubung Kabupaten Jember dengan mengabaikan beban waktu dan luas lahan karena luas lahan dan jarak antar lahan relatif sama.

1.4 Tujuan Penelitian

Sesuai dengan rumusan masalah dan latar belakang di atas, maka tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

a. untuk mengetahui bilangan dominasi jarak dua pada graf hasil operasi korona dari kombinasi sebarang dua graf G dan H;

b. untuk mengetahui bilangan dominasi jarak dua pada graf hasil operasi amalgamasi pada sebarang graf G;

c. untuk mengetahui bilangan dominasi jarak dua pada graf hasil operasi *shackle* pada sebarang graf G;

d. untuk mengetahui bilangan dominasi jarak dua pada graf hasil operasi join sebarang graf G dan H;

e. untuk mengetahui aplikasi bilangan dominasi jarak dua untuk penempatan mobil listrik di lahan perkebunan.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari hasil penelitian ini adalah:

a. menambah pengetahuan baru dalam bidang teori graf, khususnya bilangan dominasi jarak dua pada graf hasil operasi;

b. memberikan kontribusi terhadap berkembangnya ilmu pengetahuan teori graf khususnya bilangan dominasi jarak dua;

c. hasil penelitian ini diharapkan dapat digunakan sebagai pengembangan atau perluasan ilmu dan aplikasi dalam masalah bilangan dominasi jarak dua.

BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

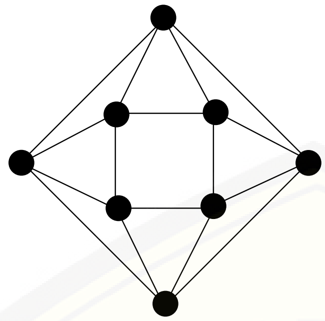
2.1 Terminologi Dasar Graf

Sebuah graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E) dengan V adalah himpunan tidak kosong yang disebut dengan simpul (*vertex*) dengan $V = \{v_1, v_2, v_3, \cdots, v_n\}$ dan E adalah himpunan boleh kosong yang menghubungkan sepasang simpul dan disebut dengan sisi (*edge*) dengan $E = \{e_1, e_2, e_3, \cdots, e_n\}$ atau $E = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4), \cdots, (v_{n-1}, v_n)\}$ (Haynes *et al*, 1996). Dimana $e = (v_i v_j)$ yang artinya sisi yang menghubungkan simpul v_i dan v_j. Banyak simpul pada graf G disebut sebagai *order* atau dapat ditulis sebagai $|V|$, sedangkan banyak sisi pada graf G disebut sebagai *size* atau dapat ditulis dengan $|E|$. Graf yang ordernya berhingga disebut graf berhingga.

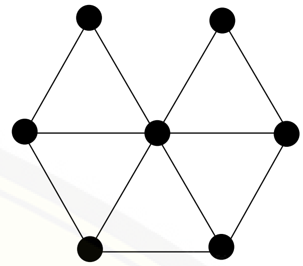
Simpul u dikatakan bertetangga (*adjacent*) dengan simpul v jika terdapat sebuah e yang menghubungkan u dan v atau $e = uv$, yang dapat dinyatakan bahwa sisi e menempel (*incident*) dengan kedua simpul u dan v.

Derajat sebuat graf dapat diartikan sebagai banyaknya sisi yang menempel pada sebuah simpul. Jika setiap simpul pada sebuah graf memiliki derajat yang sama maka disebut dengan graf reguler, jika tidak maka disebut dengan graf non reguler seperti pada Gambar 2.1 merupakan graf antiprisma yang setiap simpulnya memiliki 4 sisi, sedangkan graf kipas adalah graf non reguler karena setiap simpul memiliki jumlah sisi yang berbeda.

Suatu graf dikatakan terhubung apabila terdapat sisi yang menghubungkan setiap dua buah simpul pada graf tersebut. Graf disebut graf sederhana apabila tidak memiliki *loop* atau sisi rangkap (*multiple edge*), *loop* adalah sisi yang menghubungkan suatu simpul dengan dirinya sendiri dan *multiple edge* adalah sisi berbeda yang menghubungkan pasangan simpul yang sama. Graf yang simpulnya memiliki derajat satu disebut *pendant*. *Loop*, *multiple edge*, dan *pendant* dapat dilihat pada Gambar 2.2. Sedangkan jarak $d(u, v)$ dari simpul u ke simpul v adalah panjang lintasan terpendek dari simpul u ke simpul v.

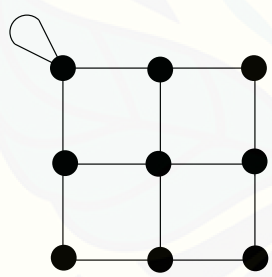


(a)

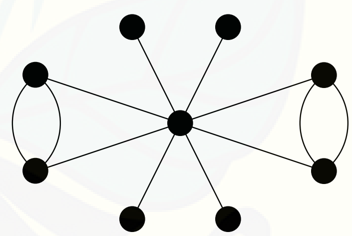


(b)

Gambar 2.1 (a) Graf Reguler Derajat 4, (b) Graf Non Reguler



(a)



(b)

Gambar 2.2 (a) Graf dengan *Loop*, (b) Graf dengan 4 *Pendant* dan 2 Sisi Ganda

2.2 Graf Khusus

Graf khusus adalah graf yang mempunyai keunikan dan karakteristik bentuk khusus. Keunikannya adalah graf khusus tidak isomorfis dengan graf lainnya. Karakteristik bentuknya dapat diperluas sampai order n tetapi simetris. Contoh graf khusus antara lain adalah graf Prisma $D_{m,n}$, graf Antiprisma A_n, graf Kipas (*Fan*) F_n, graf Bintang (*Star*) S_n, graf Roda (*Wheel*) W_n, graf Lengkap (*Complete*) K_n dan sebagainya.

2.3 Operasi Graf

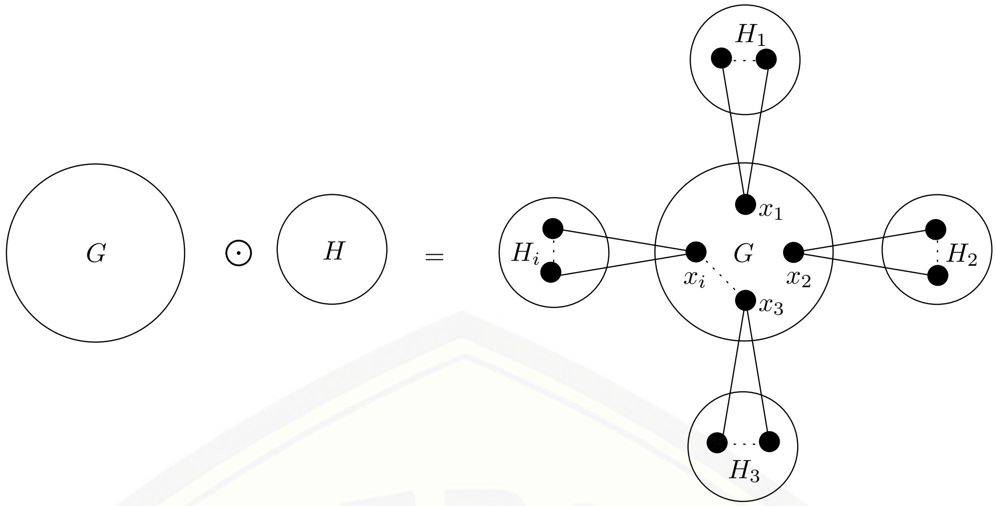
Operasi graf dapat digunakan untuk membentuk suatu graf baru. Dalam penelitian ini beberapa operasi yang digunakan antara lain adalah korona, amalgamasi, *shackle* titik, *shackle* sisi dan join pada sebarang graf. Berikut ini definisi masing-masing operasi graf tersebut.

2.3.1 Operasi Korona

Operasi korona dari kombinasi dua buah graf G dan graf H didefinisikan sebagai graf yang diperoleh dengan mengambil sebuah duplikat dari graf G dan $|G|$ duplikat dari graf H yaitu H_i dengan $i = 1, 2, 3, \cdots, |G|$ kemudian menghubungkan setiap simpul ke-i di G ke setiap simpul di H_i (Harary dan Frucht, 1970). Operasi korona dari kombinasi dua buah graf dinotasikan dengan $G \bigodot H$, seperti pada Gambar 2.3.

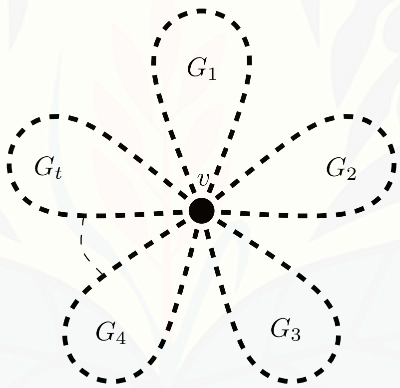
2.3.2 Operasi Amalgamasi

Misal $\{G_i\}$ adalah graf berhingga dan masing-masing G_i memiliki simpul tetap yaitu v_{oi} yang disebut sebagai terminal, amalgamasi $Amal\{G_i, v_{oi}\}$ terbentuk dengan menyatukan semua G_i pada simpul terminal (Carlson, 2006). Operasi amalgamasi dalam tulisan ini terdiri dari amalgamasi titik dan amalgamasi sisi. Graf hasil operasi amalgamasi titik dinotasikan dengan $Amal(G, v, t)$ artinya amalgamasi dikonstruksi dari sebarang graf G sebanyak t salinan dan menyatukan semua graf G pada simpul terminal v. Graf hasil operasi amalgamasi titik dapat dilihat pada Gambar 2.4. Sedangkan graf hasil operasi amalgamasi sisi dinotasikan dengan $Amal(G, e, t)$ artinya amalgamasi dikonstruksi dari sebarang graf



Gambar 2.3 Graf Hasil Operasi Korona $G \odot H$

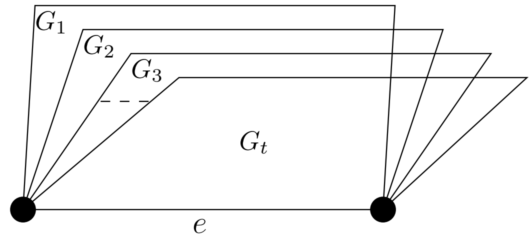
G sebanyak t salinan dan menyatukan semua graf G pada sisi terminal e. Graf hasil operasi amalgamasi sisi dapat dilihat pada Gambar 2.5



Gambar 2.4 Graf Hasil Operasi Amalgamasi Titik $Amal(G, v, t)$

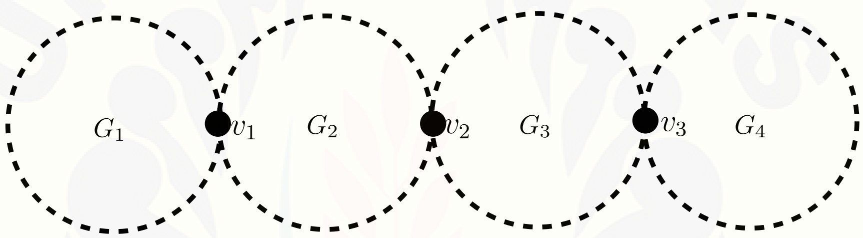
2.3.3 Operasi *Shackle*

Graf *shackle* dinotasikan dengan $Shack(G_1, G_2, \cdots, G_k)$, suatu graf *shackle* yang dibentuk dari k salinan graf G dinotasikan dengan $Shack(G, k)$ dengan $k \geq 2$ dan k adalah bilangan bulat (Maryati *et al*, 2010). Operasi *shackle* pada penelitian ini terdiri dari *shackle* titik dan *shackle* sisi. Operasi *shackle* titik

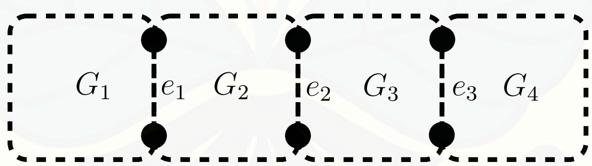


Gambar 2.5 Graf Hasil Operasi Amalgamasi Sisi $Amal(G, e, t)$

dinotasikan dengan $Shack(G, v, t)$ artinya graf dikonstruksi dari sebarang graf G sebanyak t salinan dan v sebagai *lingkage vertex*, graf hasil operasi *shackle* titik dapat dilihat pada Gambar 2.6. Sedangkan operasi *shackle* sisi dinotasikan dengan $Shack(G, e, t)$ artinya graf dikonstruksi dari sebarang graf G sebanyak t salinan dan e sebagai *lingkage edge*, graf hasil operasi *shackle* sisi dapat dilihat pada Gambar 2.7.



Gambar 2.6 Graf Hasil Operasi *Shackle* Titik $Shack(G, v, 4)$

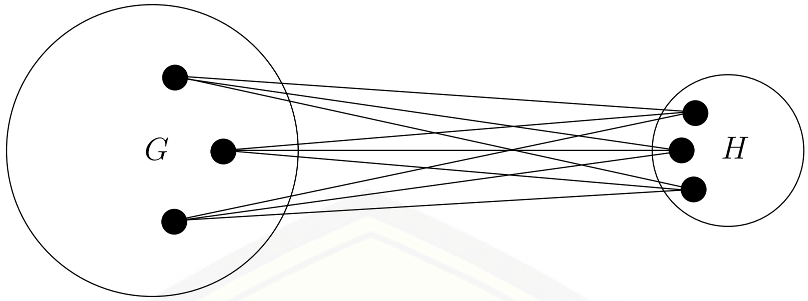


Gambar 2.7 Graf Hasil Operasi *Shackle* Sisi $Shack(G, e, 4)$

2.3.4 Operasi Join

Join dari graf G_1 dan G_2 dinotasikan dengan $G = G_1 + G_2$, merupakan graf yang terdiri dari gabungan $G_1 \cup G_2$ dan semua sisi yang menghubungkan antara

V_1 dan V_2 (Harary dan Frucht, 1969: 21). Operasi Join pada sebarang graf dapat dilihat pada Gambar 2.8.



Gambar 2.8 Graf Hasil Operasi Join $G + H$

2.4 Himpunan Dominasi dan Bilangan Dominasi

2.4.1 Definisi Himpunan Dominasi dan Bilangan Dominasi

Himpunan dominasi (*dominating set*) S pada graf G adalah subset dari $V(G)$ sedemikian setiap simpul G yang bukan elemen S terhubung dan berjarak satu terhadap S (Haynes *et al*, 1996). Kardinalitas minimum di antara himpunan dominasi pada graf G disebut bilangan dominasi (*dominating number*) dari graf G yang dinotasikan dengan $\gamma(G)$. Teori bilangan dominasi berjarak satu diantaranya dapat dilihat pada Teorema 2.1.

◊ **Teorema 2.1.** *Untuk sebarang graf G*

$$\lceil \tfrac{p}{1+\Delta(G)} \rceil \leq \gamma(G) \leq p - \Delta(G)$$

(Haynes et al, 1996)

Bukti. Misalkan S adalah sebuah γ-set dari G, pertama kita andaikan batas bawah. Setiap simpul dapat menjadi anggota *dominating set* berakibat $\gamma(G) \geq \lceil \tfrac{p}{1+\Delta(G)} \rceil$ dengan p adalah jumlah simpul suatu graf G. Untuk batas atasnya, misalkan v adalah titik dengan *degree* maksimum $\Delta(G)$. Maka v sebagai *dominating set* $N[v]$ dan titik $V - N[v]$ merupakan *dominating set* mereka sendiri. Berakibat, $V - N[v]$ merupakan *dominating set* dengan kardinalitas $p - \Delta(G)$, sehingga $\gamma(G) \leq p - \Delta(G)$. □

Himpunan dominasi jarak dua dinotasikan dengan S_2 yaitu subset dari $V(G)$ sedemikian simpul G yang bukan elemen S_2 terhubung dan memiliki jarak maksimal 2 terhadap S_2. Bilangan dominasi jarak dua dari suatu graf G dinotasikan dengan $\gamma_2(G)$, yaitu kardinalitas minimum dari himpunan dominasi jarak dua. Pada himpunan dominasi jarak dua akan ditentukan batas bawah yang selanjutnya akan dibahas pada bab hasil dan pembahasan. Dalam menentukan simpul dominasi pada sebarang graf dapat menggunakan sebuah algoritma yang dinamakan algoritma *greedy* yang akan dibahas pada subbab berikutnya.

2.4.2 Algoritma *Greedy*

Greedy Algorithm atau algoritma *greedy* adalah metode yang digunakan untuk memecahkan persoalan optimasi melalui penyelesaian *step by step* dengan menerapkan prinsip sebagai berikut:

a. *take what you can get now* artinya pilihan yang diambil adalah pilihan yang terbaik saat itu tanpa memperhatikan konsekuensinya ke depan nanti;

b. *global optimum* artinya pilihan yang terbaik saat itu *local optimum* dapat mencapai solusi terbaik dari permasalahan yang dihadapi.

(Munir, 2004).

2.4.3 Aplikasi Bilangan Dominasi Jarak Dua

Bilangan dominasi jarak dua pada graf dapat diaplikasikan pada berbagai berbagai kasus, seperti penempatan *CCTV*, pos pemadam kebakaran, pos polisi, maupun penempatan mobil listrik pada lahan perkebunan. Dengan menggunakan *dominating set* maka penempatan pos polisi, pemadam kebakaran, mobil listrik, dan *CCTV* akan lebih efisien dan lebih meminimalisir jumlahnya.

Aplikasi khusus bilangan dominasi jarak dua dalam penelitian ini adalah dalam kasus penempatan mobil listrik di lahan perkebunan *Agrotechnopark* Universitas Jember yang terletak di Kecamatan Jubung Kabupaten Jember. Lahan perkebunan akan direpresentasikan sebagai graf dengan area perkebunan sebagai simpul, serta antara dua area perkebunan akan direpresentasikan sebagai sisi.

Aplikasi bilangan dominasi jarak dua pada lahan perkebunan ini adalah penentuan suatu simpul sebagai posisi mobil listrik yang dapat mendominasi simpul disekitarnya dengan jarak maksimal dua dan jumlah mobil listrik yang digunakan seminimal mungkin.

2.4.4 Hasil-hasil Penelitian Bilangan Dominasi Jarak Dua

Beberapa hasil penelitian mengenai bilangan dominasi jarak dua pada graf khusus yakni pada graf jahangir dan graf prisma untuk $n = 2$, sedangkan graf hasil operasi yaitu operasi korona yang pada penelitian sebelumnya dilakukan terhadap graf sikel dan graf lintasan yang dikombinasikan terhadap sebarang graf, dapat dilihat pada Tabel 2.2 dan Tabel 2.3.

Graf	**Bilangan Dominasi**	**Keterangan**
Graf Jahangir ($J_{m+1,n}$)	$\gamma_2 = 1$, jika $1 \leq n \leq 2$ $\gamma_2 = \frac{3m}{4}$, jika $n = 3$ $\gamma_2 = \frac{m(n+1)}{5}$, jika $n \geq 4$	Darmaji dan Umilasari. 2014.
Graf Prisma ($D_m, 2$)	$\gamma_2 = \frac{m}{4}$, untuk m kelipatan 4 $\gamma_2 = \lceil \frac{m}{4} \rceil + 1$, untuk m yang lain	Darmaji dan Umilasari. 2014.

Tabel 2.1 Hasil Penelitian Bilangan Dominasi Jarak Dua pada Graf Khusus

Graf	**Bilangan Dominasi**	**Keterangan**
$C_n \odot G$	$\gamma_2 = \lceil \frac{n}{3} \rceil$	Umilasari. 2015.
$P_m \odot H$	$\gamma_2 = \lceil \frac{m}{3} \rceil$	Umilasari. 2015.

Tabel 2.2 Hasil Penelitian Bilangan Dominasi Jarak Dua pada Graf Hasil Operasi

Simbol $\lceil a \rceil$ dibaca *ceil* yaitu bilangan bulat terkecil yang lebih besar atau sama dengan dari a, untuk a bilangan real yaitu apabila $a = k + r$ dengan $k \in \mathrm{Z}$ dan $0 < r \leq 1$ maka $\lceil a \rceil = k + 1$. Sehingga pada penjelasan berikutnya akan ditunjukkan analisis nilai bilangan dominasi serta sifat pembagian pada bilangan bulat dan bilangan modulo.

2.5 Sifat Pembagian Bilangan Bulat dan Bilangan Modulo

Misalkan a dan b adalah dua bilangan bulat dengan syarat $a \neq 0$, a habis membagi b (*a divides b*) atau ditulis $a|b$ jika terdapat bilangan bulat c sedemikian hingga $b = ac$.

◊ **Teorema 2.2.** ***Algoritma Pembagian***. *Misalkan m dan n adalah dua buah bilangan bulat dengan syarat $n \geq 0$. Jika m dibagi dengan n maka terdapat dua buah bilangan bulat unik q (quotient) dan r (remainder), sedemikian sehingga $m = nq + r$ dengan $0 \leq r < n$. Untuk selanjutnya secara berturut-turut q dan r disebut sebagai hasil dan sisa pembagian (Subiono, 2015).*

Selanjutnya didefinisikan kongruen modulo suatu bilangan. Secara sederhana dikatakan $a \equiv b(mod\ n)$ jika dan hanya jika a dan b memiliki sisa pembagian yang sama apabila dibagi dengan n sesuai dengan definisi, misalkan $n > 0$ adalah sebarang bilangan bulat a dan b adalah **kongruen mod** n ditulis $a \equiv b(mod\ n)$ jika $n|(a-b)$ (Subiono, 2015).

Berikut ini akan ditunjukkan analisis mengenai *ceil* suatu bilangan yang ada kaitannya dengan modulo. Misal $m, n \in Z^+$ dan $s \in \{0, 1, 2, \cdots, m\}$, didapatkan hasil berikut ini.

a. $n \equiv 0$ (mod m)

   $n \equiv 0$ (mod m) artinya $m|n$, sehingga terdapat $k \in Z^+$ sedemikian hingga $n = m \cdot k$ atau $k = \frac{n}{m}$. Dengan demikian didapatkan

$$\begin{aligned} \lceil \tfrac{n-s}{m} \rceil &= \lceil \tfrac{m \cdot k - s}{m} \rceil \\ &= \lceil \tfrac{m(k-1)+m-s}{m} \rceil \\ &= \lceil \tfrac{m(k-1)}{m} + \tfrac{m-s}{m} \rceil \\ &= \lceil k - 1 + \tfrac{m-s}{m} \rceil \end{aligned}$$

   Karena $s \in \{0, 1, 2, \cdots, m\}$ maka $\frac{m-s}{m} = 0$ untuk $s = m$ dan $0 < \frac{m-s}{m} \leq 1$ untuk $0 \leq s \leq m-1$ sehingga didapatkan

$$\lceil \frac{n-s}{m} \rceil = \begin{cases} k; & \text{jika } 0 \leq s \leq m-1 \\ k-1; & \text{jika } s = m \end{cases}$$

b. $n \equiv p \pmod{m}$

$n \equiv p \pmod{m}$ artinya $m|(n-p)$, sehingga terdapat k tak negatif sedemikian $n - p = m \cdot k$ yang mengakibatkan $n = m \cdot k + p$ dan $k = \frac{n-p}{m}$. Dengan demikian didapatkan

$$\lceil \frac{n-s}{m} \rceil = \lceil \frac{m \cdot k + p - s}{m} \rceil = \lceil \frac{mk}{m} + \frac{p-s}{m} \rceil = \begin{cases} k+1; & \text{jika } 1 \leq p - s \leq m \\ k; & \text{jika } -m < p - s \leq 0 \end{cases}$$

atau

$$\lceil \frac{n-s}{m} \rceil = \begin{cases} k+1; & \text{jika } s + 1 \leq p \leq s + m \\ k; & \text{jika } s - m < p \leq s \end{cases}$$

$$= \begin{cases} k+1; & \text{jika } p - m \leq s \leq p - 1 \\ k; & \text{jika } p \leq s < m + p \end{cases}$$

Karena $1 \leq p < m$ dan $s \in \{0, 1, \cdots, m\}$ maka

$$\lceil \frac{n-s}{m} \rceil = \begin{cases} k+1; & \text{jika } s + 1 \leq p \leq m - 1 \\ k; & \text{jika } 1 < p \leq s \end{cases}$$

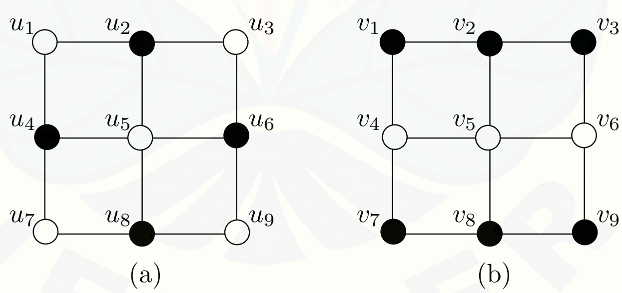
$$= \begin{cases} k+1; & \text{jika } 0 \leq s \leq p - 1 \\ k; & \text{jika } p \leq s < m + 1 \end{cases}$$

BAB 3. METODE PENELITIAN

3.1 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah pendeteksian pola, yaitu dengan cara mencari himpunan dominasi sedemikian hingga ditemukan bilangan kardinalitas yang minimum. Selain itu metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah deduktif aksiomatik yaitu metode penelitian yang menggunakan prinsip-prinsip pembuktian deduktif yang berlaku dalam logika matematika dengan menggunakan aksioma atau teorema yang telah ada untuk memecahkan masalah. Penelitian ini akan menghasilkan teorema-teorema baru yang telah dibuktikan secara deduktif sehingga kebenarannya berlaku secara umum.

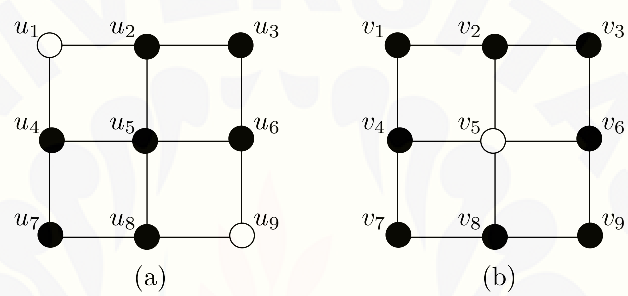
Sebelum penulis melakukan penelitian, penulis menunjukkan terlebih dahulu mengenai bilangan dominasi jarak dua. Observasi dilakukan pada graf seperti Gambar 3.1 dengan simpul berwarna putih adalah simpul pendominasi. Pada Gambar (a) $S = \{u_1, u_3, u_5, u_7, u_9\}$ dan pada Gambar (b) $S = \{v_4, v_5, v_6\}$ adalah himpunan dominasi jarak satu, akan tetapi pada Gambar (b) merupakan himpunan dominasi jarak satu dengan kardinalitas minimum, sehingga bilangan dominasi jarak satu $\gamma(G) = 3$.



Gambar 3.1 (a) Himpunan Dominasi Jarak Satu, (b) Himpunan Dominasi Jarak Satu Minimum

Himpunan dominasi jarak dua dinotasikan dengan S_2 yaitu subset dari $V(G)$

sedemikian simpul G yang bukan elemen S_2 terhubung dan memiliki jarak maksimal 2 terhadap S_2. Bilangan dominasi jarak dua dari suatu graf dinotasikan dengan $\gamma_2(G)$, yaitu kardinalitas minimum dari himpunan dominasi jarak dua. Pada Gambar 3.2 (a) dengan $S_2 = \{u_1, u_9\}$ dan pada Gambar (b) $S_2 = \{v_5\}$ adalah himpunan pendominasi jarak dua, tetapi Gambar (b) merupakan himpunan dominasi jarak dua dengan kardinalitas minimum, sehingga bilangan dominasi jarak dua pada graf tersebut ditulis dengan $\gamma_2(G) = 1$. Berdasarkan ilustrasi tersebut dapat diketahui bahwa bilangan dominasi jarak dua pada suatu graf G lebih kecil atau sama dengan bilangan dominasi jarak satu maka $\gamma_2(G) \leq \gamma(G)$. Hal tersebut dikarenakan *dominating set* jarak dua dapat menjangkau hingga dua simpul yang terhubung dengan simpul pendominasi.



Gambar 3.2 (a) Himpunan Dominasi Jarak Dua, (b) Himpunan Dominasi Jarak Dua Minimum

3.2 Definisi Operasional

Definisi operasional variabel digunakan untuk memberikan gambaran secara sistematis dalam penelitian dan untuk menghindari terjadinya perbedaan pengertian makna. Dalam penelitian ini terdapat beberapa definisi operasional sebagai berikut.

a. $G \bigodot H$ adalah graf hasil operasi korona dari kombinasi sebarang graf G_m dan sebarang graf H_n, dengan m dan n adalah jumlah simpul masing-masing graf G dan H. Sehingga $|V(G_m \bigodot H_n)| = m + mn$.

b. $Amal(G, v, t)$ adalah graf hasil operasi amalgamasi pada sebarang graf G_n

sebanyak t salinan dan v adalah simpul terminal. Jika $|V(G)| = n$, maka $|V(Amal(G, v, t))| = nt - t + 1$.

c. $Amal(G, e, t)$ adalah graf hasil operasi amalgamasi pada sebarang graf G_n sebanyak t salinan dan e adalah sisi terminal. Jika $|V(G)| = n$, maka $|V(Amal(G, e, t))| = nt - 2t + 2$.

d. $Shack(G, v, t)$ adalah graf hasil operasi *shackle* pada sebarang graf G_n sebanyak k salinan dan v adalah simpul ke-i di antara G_i dan G_{i+1} yang berhimpit. Jika $|V(G)| = n$, maka $|V(Shack(G, v, t))| = nt - t + 1$.

e. $Shack(G, e, t)$ adalah graf hasil operasi *shackle* pada sebarang graf G_n sebanyak t salinan dan e adalah sisi ke-i di antara G_i dan G_{i+1} yang berhimpit. Jika $|V(G)| = n$, maka $|V(Shack(G, e, t))| = nt - 2t + 2$.

f. $G + H$ adalah graf hasil operasi join dari kombinasi sebarang graf G_m dan sebarang graf H_n, dengan m dan n adalah jumlah simpul masing-masing graf G dan H. Sehingga $|V(G_m + H_n)| = m + n$.

3.3 Rancangan Penelitian

Sebelum melakukan penelitian penulis merancang penelitian sebagai berikut.

a. Memilih beberapa graf hasil operasi;

b. Menentukan *dominating set* pada graf hasil operasi dengan menggunakan algoritma *greedy* dan menganalisisnya;

c. Memilih simpul berderajat maksimal sebagai simpul pendominasi jarak dua;

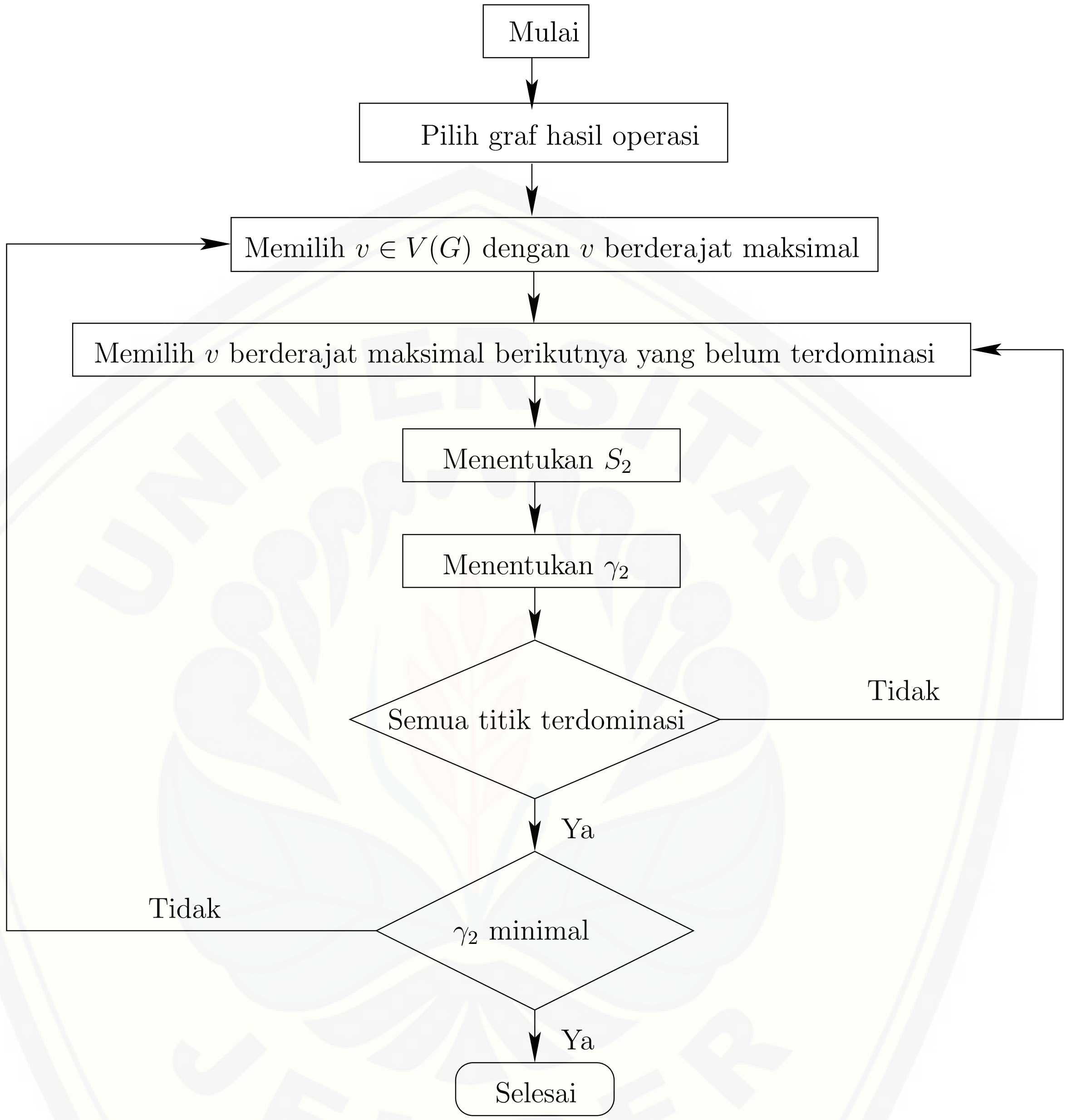
d. Memilih simpul berderajat maksimal berikutnya yang belum terdominasi;

e. Menentukan himpunan dominasi jarak dua;

f. Menentukan bilangan kardinalitas jarak dua;

g. Membuat kesimpulan.

Adapun alur penelitian ini dilihat pada Gambar 3.3



Gambar 3.3 Alur Penelitian

BAB 5. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Kesimpulan yang diperoleh berdasarkan analisis dan pembahasan adalah sebagai berikut.

a. Bilangan dominasi jarak dua pada graf hasil operasi korona adalah $\gamma_2(G \bigodot H) = \gamma(G)$.

b. Bilangan dominasi jarak dua pada graf hasil operasi amalgamasi adalah

$$\gamma_2(Amal(G,v,t)) = \gamma_2(Amal(G,e,t)) = \begin{cases} 1; & diam(G) \leq 2 \\ \gamma_2(G)t - t + 1; & diam(G) \text{ yang lain} \end{cases}$$

c. Bilangan dominasi jarak dua pada graf hasil operasi *shackle* adalah

$$\gamma_2(Shack(G,v,t)) = \begin{cases} \lceil \frac{t}{4} \rceil; & diam(G) = 1 \\ \lceil \frac{t}{2} \rceil; & diam(G) = 2 \\ \gamma_2(G)t - t + 1; & diam(G) \text{ yang lain} \end{cases}$$

$$\gamma_2(Shack(G,e,t)) = \begin{cases} 1; & diam(G) = 1 \\ \lceil \frac{t}{2} \rceil; & diam(G) = 2 \\ \gamma_2(G)t - t + 1; & diam(G) \text{ yang lain} \end{cases}$$

d. Bilangan dominasi jarak dua pada graf hasil operasi join adalah $\gamma_2(G+H) = 1$.

e. *J-Graph* dari lahan perkebunan *Agrotechnopark* Universitas Jember memiliki bilangan dominasi jarak dua $\gamma_2(J - Graph) = 15$. Dengan demikian dibutuhkan 15 unit mobil listrik agar dapat menjangkau seluruh lahan dengan jarak maksimal dua lahan dari posisi mobil listrik.

5.2 Saran

Dari kajian yang belum ditemukan dalam penelitian ini, peneliti memberikan masalah terbuka kepada pembaca yang berminat meneliti pada bidang teori graf, yaitu menentukan bilangan dominasi jarak dua pada graf hasil operasi *shackle* dengan sub graf sebagai penghubung dan graf hasil operasi amalgamasi dengan sub graf sebagai terminal.

DAFTAR PUSTAKA

Alanko, Crevals, Isopoussu, Ostergard, dan Pettersson. 2011. Computing the Dominating Number of Grid Graph. *The Electronic Journal.* USA: New York University of Combinatorics.

Carlson, K. 2006. *Generalized Books and C_m-Snakes are Prime Graphs.* Ars Combinatoria.

Carmelito, E. G. 2011. Dominations In the Corona and Join of Graphs. *International Mathematical Forum.* Vol. 6 (16): 763-771.

Darmaji dan Umilasari, R. 2014. "Dominating Set Berjarak Dua pada Graf Jahangir dan Prisma". Tidak Diterbitkan. Paper. Surabaya: ITS.

Harary, F. dan Frucht, R. 1969. *Graph Theory.* Philippines: Addison-Wesley Publishing Company, Inc.

Harary, F. dan Frucht, R. 1970. *On the Corona of Two Graphs.* Aequationes Mathematicae.

Haynes, T. W., Hedetniemi, S. T., dan Slater, P. J. 1996. *Fundamental of Dominations in Graphs.* New York: Marcel Dekker, Inc.

Hedetniemi, S. T., Laskar, R., dan Pfaff, J. 1986. A Linear Algorithm for Finding a Minimum Dominating Set in Cactus. *Discrete Applied Mathematics in North Holland.* Vol. 13: 287-292.

Iswadi, Baskoro, Salman, dan Simanjuntak. 2015. The Resolving Graph of Amalgamation of Cycles. *Utilitas Mathematica.* Vol. 83: 121-132.

Jumani, A. D. dan Chand, L. 2012. Dominating Number of Prism Over Cycle C_n. *Sindh University Research Journal (Science Series)*. Vol. 44 (2): 237-238.

Liedoloff. 2009. *Dominating Set on Bipartite Graphs*. Universite Paul VerlaineMetz.

Maryati, Salman, Baskoro, Ryan, dan Miller. 2010. On H-supermagic Labelings for Certain Shackles and Amalgamations of a Connected Graph. *Utilitas Mathematica*. Vol. 83: 333-342.

Munir, R. 2004. *Algoritma Greedy*. Departemen Teknik Informatika Institut Teknologi Bandung.

Subiono. 2015. *Aljabar Sebagai Suatu Fondasi Matematika Versi 1.0.0*. Modul Mata Kuliah Aljabar.

Umilasari, R. 2015. "Bilangan Dominasi Jarak Dua pada Graf-graf Hasil Operasi Korona dan Comb". Tidak Diterbitkan. Tesis. Surabaya: ITS.