PEWARNAAN TITIK r-DINAMIS PADA AMALGAMASI DAN SAKEL SERTA GENERALISASINYA DARI GRAF KHUSUS

SKRIPSI

Oleh

Irawati
NIM 121810101021

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER
2016

PEWARNAAN TITIK r-DINAMIS PADA AMALGAMASI DAN SAKEL SERTA GENERALISASINYA DARI GRAF KHUSUS

SKRIPSI

diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan Program Studi Matematika (S1) dan mencapai gelar Sarjana Sains

Oleh

Irawati
NIM 121810101021

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER
2016

PERSEMBAHAN

Puji syukur kehadirat Allah SWT atas segala limpahan rahmat serta hidayah-Nya, sehingga karya ilmiah ini dapat terselesaikan dengan baik. Shalawat dan salam selalu tercurahkan kepada junjungan kita Nabi besar Muhammad SAW yang telah membawa umatnya dari jalan yang gelap ke jalan yang terang benderang melalui ajaran agama islam. Dengan segala ketulusan hati, saya persembahkan skripsi ini kepada :

1. kedua orang tuaku dan nenek tersayang, Bapak Padi, Ibu Suwati dan nenek Warinten, yang selalu mencurahkan kasih sayang, tak henti- hentinya mendoakan menasehati dan memotivasi ananda , serta adik Feri Nur Fanani dan kakakku Leo Narto tercinta yang selalu memberikan semangat ananda;
2. guru -guru mulai dari TK, SD, SMP, SMA dan para jajaran dosen Perguruan Tinggi yang telah mengajarkan banyak ilmu yang sangat bermanfaat kepada peneliti dengan ikhlas dan penuh kesabaran;
3. almamater yang kubanggakan, Jurusan Matematika, Fakultas Matematika Dan Ilmu Pengetahuan Alam dan Universitas Jember.

MOTTO

Kegagalan hanya akan terjadi bila kita menyerah[1]
Kebanggan kita terbesar adalah bukan tidak pernah gagal, tetapi bangkit kembali setiap kali kita jatuh[2]
Tiada Kemustahilan dalam meraih kesuksesan[3]

[1] Lessing
[2] Confusius
[3] S. Hidayat El-Syahid

PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

nama : Irawati

NIM :121810101021

menyatakan dengan sesungguhnya bawha karya ilmiah yang berjudul ”Pewarnaan Titik r-Dinamis pada Amalgamasi dan Sakel serta Generalisasinya dari Graf Khusus ” adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali kutipan yang sudah saya sebutkan sumbernya, belum pernah diajukan pada institusi manapun, dan bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa ada tekanan dan paksaan dari pihak manapun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, Juni 2016

Yang menyatakan,

Irawati

NIM 121810101021

PENGESAHAN

Skripsi berjudul "Pewarnaan Titik *r*-Dinamis pada Amalgamasi dan Sakel serta Generalisasinya dari Graf Khusus " telah diuji dan disahkan pada:
hari, tanggal :
tempat : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Tim Penguji:

Ketua,	Sekretaris
Prof.Drs.Dafik,M.Sc.,Ph.D.	Drs.Rusli Hidayat M.Sc
NIP. 196808021993031004	NIP. 196610121993031001
Penguji I,	Penguji II,
Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si.	Kosala Dwidja Purnomo, S.Si., M.Si.
NIP. 198408012008012006	NIP. 196908281998021001

Mengesahkan
Dekan

Drs.Sujito, Ph.D.
NIP. 196102041987111001

RINGKASAN

Pewarnaan Titik *r*-Dinamis pada Amalgamasi dan Sakel serta Generalisasinya dari Graf Khusus ; Irawati, 121810101021; 2016: 78 halaman; Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Jember.

Teori graf merupakan cabang ilmu matematika diskrit yang penerapannya banyak ditemukan dalam kehidupan sehari-hari. Fungsi graf sangat banyak, namun pada umumnya digunakan sebagai alat bantu dalam memodelkan suatu masalah agar mudah dimengerti dan diselesaikan seperti penggambaran rangkaian listrik, senyawa kimia, penyusunan jadwal dan sebagainya. Teori graf berkembang sangat luas. Salah satu topik yang menarik untuk dikaji adalah pewarnaan. Macam-macam pewarnaan yang dapat dikaji dalam teori graf yaitu pewarnaan titik, pewarnaan sisi, dan pewarnaan total. Pewarnaaan titik adalah pewarnaan yang diberikan kepada setiap titik-titik graf. Pewarnaan sisi adalah pewarnaan yang diberikan kepada setiap sisi-sisi graf, sedangkan untuk pewarnaan total adalah pewarnaan yang diberikan pada titik dan sisi graf. Pewarnaan graf haruslah berbeda di mana tidak boleh ada warna sama yang berdekatan namun pewarnaan haruslah seminimum mungkin yang disebut bilangan kromatik biasanya dinotasikan $\chi(G)$. Bilangan-bilangan kromatik akan membentuk fungsi yang disebut fungsi pewarnaan. Topik-topik yang dapat dikaji dalam lingkup pewarnaan, salah satunya adalah topik dari perwarnaan titik yaitu pewarnaan titik r-dinamis yang dinotasikan dengan $\chi_r(G)$. Suatu graf G yang memiliki k pewarnaan memetakan himpunan titiknya ke himpunan pewarnaan dinotasikan $c : V(G) \Rightarrow (1, 2, 3, ..., k)$, jadi untuk titik-titik yang bertetangga memiliki minimal dua warna berbeda. $r - dinamis$ dengan k pewarnaan pada graf G sehingga $|c(N(v))| \geq min\{r, d(v)\}$ untuk v di $V(G)$. Bilangan kromatik r-dinamis ditulis dengan $\chi_r(G)$ untuk nilai minimum k sehingga graf G memiliki r-dinamis dengan k pewarnaan (Jahanbekam, *et al*, 2014). Pewarnaan r-dinamis merupakan pengembangan dari pewarnaan k-warna dinamis yang diperkenalkan oleh Montgomery pada tahun 2002. Pewarnaan k warna dinamis pada graf G merupakan pewarnaan titik pada graf G sebanyak k-warna sedemikian sehingga setiap titik mempunyai derajat minimum sebanyak dua dan memiliki dua warna yang berbeda dengan titik tetangganya. Pewarnaan k warna dinamis memiliki nilai k terkecil yang disebut sebagai bilangan kromatik dinamis yang disimbolkan dengan $\chi_d(G)$.

Pewarnaan titik r-dinamis dapat diterapkan pada hasil operasi graf pada beberapa graf khusus. Salah satunya adalah operasi amalgamasi dan operasi shakel

serta generalisasinya. Adapun graf-graf hasil operasi yang digunakan dalam penelitian ini yaitu: graf kipas $amal(F_n, v, m)$, *windmill* $(gshack(Wd_3^3, e, n)$, graf roda $amal(W_4, v, n)$, graf lengkap $(shack(K_4, v, n)$, graf lengkap $(gshack(K_4, e, n)$ dan lengkap $amal(K_4, v, n)$. Penelitian ini menggunakan metode deduktif aksiomatik dan pendeteksian pola. Tujuan dari penelitian ini adalah menentukan kardinalitas titik dan sisi, bilangan kromatik titik r-dinamis, dan fungsi pewarnaan titik r-dinamis. Pada penelitian ini dihasilkan 6 teorema baru antara lain:

1. **Teorema 4.1.1** Bilangan kromatik titik *r*-dinamis pada graf $amal(F_n, v, m), n \geq 2$ dapat ditulis sebagai berikut :

$$\chi_(amal(F_n, v, m)) = \chi_d(amal(F_n, v, m)) = 3$$
$$\chi_3(amal(F_n, v, m)) = 4$$
$$chi_{r\geq 4}(amal(F_n, v, m)) = r + 1$$

2. **Teorema 4.1.2** Bilangan kromatik dinamis pewarnaan titik r-dinamis pada graf *windmill* $(gshack\ (Wd_3^3, e, n), n \geq 2$ dapat ditulis sebagai berikut :

$$\chi_(gshack(Wd_3^3, e, n)) = \chi_d(G) = 3$$
$$\chi_3(gshack(Wd_3^3, e, n)) = 4$$
$$\chi_4(gshack(Wd_3^3, e, n)) = 5$$
$$\chi_5(gshack(Wd_3^3, e, n)) = 6$$
$$chi_{r\geq 6}(gshack(Wd_3^3, e, n)) = 7$$

3. **Teorema 4.1.3** Bilangan kromatik titik *r*-dinamis pada graf roda $amal(W_4, v, n)$, $n \geq 3$ dapat ditulis sebagai berikut :

$$\chi_(amal(W_4, v, n)) = \chi_d(amal(W_4, v, n)) = \chi_3(amal(W_4, v, n)) = 4$$
$$\chi_{r\geq 4}(amal(W_4, v, n)) = r + 1$$

4. **Teorema 4.1.4** Bilangan kromatik dinamis pewarnaan titik r-dinamis pada graf lengkap $(shack\ (K_4, v, n), n \geq 3$ dapat ditulis sebagai berikut:

$$\chi_(shack(K_4, v, n)) = \chi_d(shack(K_4, v, n)) = \chi_3(shack(K_4, v, n)) = 4$$
$$\chi_4(shack(K_4, v, n)) = 5$$
$$\chi_5(shack(K_4, v, n)) = 6$$
$$\chi_{r\geq 6}(shack(K_4, v, n)) = 7$$

5. **Teorema 4.1.5** Bilangan kromatik dinamis pewarnaan titik r-dinamis pada graf lengkap $(gshack\ (K_4, e, n), n \geq 3$ dapat ditulis sebagai berikut:

$$\chi_(gshack(K_4, e, n)) = \chi_d(gshack(K_4, e, n)) = \chi_3(gshack(K_4, e, n)) = 4$$
$$\chi_4(gshack(K_4, e, n)) = 5$$
$$\chi_{r\geq5}(gshack(K_4, e, n)) = 6$$

6. **Teorema 4.1.6** Bilangan kromatik titik *r*-dinamis pada graf lengkap $amal(K_4, v, n)$, $n \geq 3$ dapat ditulis sebagai berikut :

$$\chi_(amal(K_4, v, n)) = \chi_d(amal(K_4, v, n)) = \chi_3(amal(K_4, v, n)) = 4$$
$$\chi_{r\geq4}(amal(K_4, v, n)) = r + 1$$

PRAKATA

Puji syukur ke hadirat Allah Swt atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul ”Pewarnaan Titik r-Dinamis pada Amalgamasi dan Sakel serta Generalisasinya dari Graf Khusus ”. Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan pendidikan strata satu (S1) pada Jurusan Matematika Fakultas Matematika Dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih atas bantuan dan bimbingan dalam penyusunan skripsi ini, terutama kepada :

1. Direktorat Jendral Pendidikan Tinggi, yang telah membantu dukungan finansial melalui Beasiswa Bidikmisi;
2. Drs. Mohammad Hasan, M.Sc, Ph.D., selaku rektor Universitas Jember;
3. Drs.Sujito, Ph.D., selaku Dekan Fakultas Matematika Dan Ilmu Pengetahuan Alam;
4. Kusbudiono S.Si., M.Si., selaku Ketua Jurusan Matematika;
5. Prof.Drs.Dafik,M.Sc.,Ph.D., selaku pembimbing 1;
6. Drs.Rusli Hidayat M.Sc., selaku pembimbing 2;
7. Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si., selaku dosen penguji 1;
8. Kosala Dwidja Purnomo, S.Si., M.Si., selaku dosen penguji 2;
9. Dosen dan Karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika Dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
10. Kedua orang tuaku, Bapak Padi dan Ibu Suwati;
11. Adikku Feri Nur Fanani dan kakakku Leo Narto;
12. Nenekku Warinten;
13. Sahabat CT dan Bathics’12 yang selalu setia memberi dukungan;
14. Sahabat Pondok Semendawai Lina, Risa, Lala, Ambar, Fida, Tri Nur, Ismi dan Mbak Bening;
15. Semua pihak yang telah membantu terselesaikannya skripsi ini.

Semoga bantuan, bimbingan, dan dorongan beliau dicatat sebagai amal baik oleh Allah SWT dan mendapat balasan yang sesuai dari-Nya. Selain itu, penulis juga menerima segala kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan skripsi ini. Akhirnya penulis berharap, semoga skripsi ini dapat bermanfaat.

Jember, Juni 2016
Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

Halaman

DAFTAR TABEL

Halaman

BAB 1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori graf merupakan cabang ilmu matematika diskrit yang penerapannya banyak ditemukan dalam kehidupan sehari-hari. Fungsi graf sangat banyak, namun pada umumnya digunakan sebagai alat bantu dalam memodelkan suatu masalah agar mudah dimengerti dan diselesaikan seperti penggambaran rangkaian listrik, senyawa kimia, penyusunan jadwal dan sebagainya. Teori graf pertama kali dikenalkan oleh seorang matematikawan dari Swiss bernama Leonard Euler pada tahun 1936 yang berhasil memecahkan masalah cara melewati tujuh jembatan di Konigsberg yang masing-masing tepat satu kali harus dilewati. Permasalahan tersebut dipecahkan oleh Euler dengan cara menggambar graf dengan daratan sebagai titiknya dan ke tujuh jembatan yang menghubungkan daratan-daratan tersebut sebagai sisinya. Masalah ini telah dibuktikan tidak mungkin oleh Euler.

Teori graf berkembang sangat luas. Salah satu topik yang menarik untuk dikaji adalah pewarnaan. Macam-macam pewarnaan yang dapat dikaji dalam teori graf yaitu pewarnaan titik, pewarnaan sisi, dan pewarnaan total. Pewarnaaan titik adalah pewarnaan yang diberikan kepada setiap titik-titik graf. Pewarnaan sisi adalah pewarnaan yang diberikan kepada setiap sisi-sisi graf, sedangkan untuk pewarnaan total adalah pewarnaan yang diberikan pada titik dan sisi graf. Pewarnaan graf haruslah berbeda di mana tidak boleh ada warna sama yang berdekatan namun pewarnaan haruslah seminimum mungkin yang disebut bilangan kromatik biasanya dinotasikan $\chi(G)$. Bilangan-bilangan kromatik akan membentuk fungsi yang disebut fungsi pewarnaan. Topik-topik yang dapat dikaji dalam lingkup pewarnaan, salah satunya adalah topik dari perwarnaan titik yaitu pewarnaan titik r-dinamis yang dinotasikan dengan $\chi_r(G)$.

Sebelumnya sudah pernah dilakukan penelitian yang mengenai pewarnaan titik r-dinamis oleh Wulandari (2015) dalam skripsinya yang mengkaji pewarnaan titik r-dinamis beserta pewarnaan titik pada graf operasi. Graf yang dikaji adalah graf roda, graf bintang, graf lingkaran dan graf lintasan. Namun penelitian yang dilakukan belum menghasilkan bilangan kromatik sampai r. Penelitian selanjutnya dilakukan oleh Tarmidzi (2015) yang menjelaskan tentang nilai kromatik dan pewarnaan titik r-dinamis pada graf khusus dan operasi shakel. Dalam penelitiannya sudah menghasilkan bilangan kromatik sampai ke r. Graf yang digunakan graf kipas, graf triangular book, graf tangga, graf tangga tiga siklus, graf oktahedral. Selain itu penelitian tentang pewarnaan titik r-dinamis juga sudah pernah dilakukan oleh M.Alishahi (2011) meneliti tentang pewarnaan r-dinamis pada hipergraf, S.Kim dkk. (2012) meneliti tentang pewarnaan dinamis pada graf $planar$, R.Kang, dkk. (2014) meneliti tentang pewarnaan r-dinamis pada graf $grid$.

Berdasarkan uraian tersebut, maka penulis akan meneliti lebih lanjut mengenai pewarnaan titik pada operasi graf khusus beserta pewarnaan titik r-dinamis. Untuk itu diperlukan bilangan kromatik dan fungsi pewarnaan untuk menyelesaikan permasalahan ini.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang diatas dapat dirumuskan beberapa masalah sebagai berikut :

a. bagaimana kardinalitas titik dan kardinalitas sisi pada amalgamasi dan sakel graf khusus?
b. bagaimana nilai kromatik pada pewarnaan titik r-dinamis pada amalgamasi dan sakel graf khusus?

1.3 Batasan Masalah

Operasi yang digunakan adalah amalgamasi dan sakel serta generalisasinya dengan graf khusus antara lain : graf kipas $amal(F_n, v, m)$, *windmill* $(gshack(Wd_3^3, e, n)$, graf roda $amal(W_4, v, n)$, graf lengkap $(shack(K_4, v, n)$, graf lengkap $(gshack(K_4, e, n)$ dan graf lengkap $amal(K_4, v, n)$

1.4 Tujuan Penelitian

Dari hasil rumusan masalah dan latar belakang diatas, dapat disimpulkan tujuan penelitian ini diantaranya:

a. menentukan kardinalitas titik dan kardinalitas sisi pada amalgamasi dan sakel graf khusus;
b. menentukan nilai kromatik pada pewarnaan titik r-dinamis pada amalgamasi dan sakel graf khusus;

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penulisan penelitian ini diantaranya:

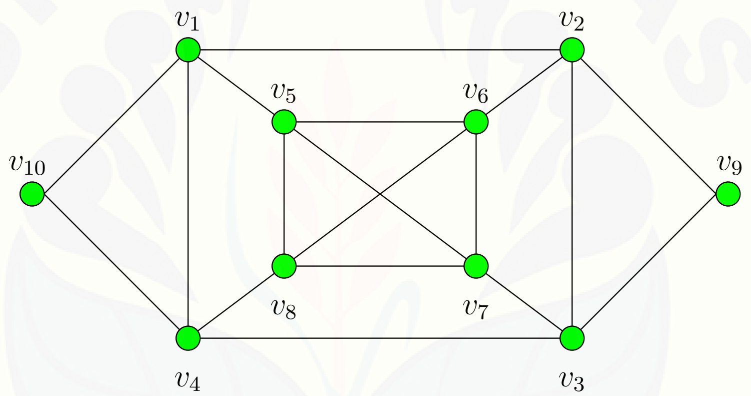
a. menambah pengetahuan baru dalam bidang graf, khususnya tentang pengembangan pewarnaan titik r-dinamis pada graf khusus;
b. meningkatkan pengetahuan tentang fungsi dari pewarnaan titik r-dinamis pada operasi graf khusus;
c. hasil penelitian ini diharapkan dapat berguna untuk menambah pengetahuan dan aplikasi dalam masalah pewarnaan graf;

BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Terminologi Graf Dasar

Secara matematis, suatu graf G dapat didefinisikan sebagai himpunan (V, E) ditulis dengan notasi $G = (V, E)$ dimana $V(G)$ adalah himpuanan tak kosong yang digambarkan dengan titik. Sedangkan $E(G)$ adalah himpunan sisi yang digambarkan garis yang menghubungkan sepasang titik. Berbeda dengan V yang tidak boleh kosong, untuk E boleh kosong. Jadi sebuah graf dimungkinkan tidak mempunyai sisi , tetapi harus memiliki titik(Slamin,2009).

Misalkan graf G mempunyai titik u dan v. Jarak dari titik a dan b dinotasikan dengan dist(u, v) yang merupakan panjang lintasan terpendek dari titik u ke titik v. Titik a pada graf G dikatakan bertetangga *(adjacent)* pada b, jika terdapat sisi e di



Gambar 2.1 Contoh Graf G

antara a dan b ditulis $e = uv$. Dengan kata lain u dan v bersisihan dengan sisi e (Hartsfield dan ringel, 1994). Gambar 2.1 menunjukkan bahwa titik v_1 bertetangga dengan v_2, v_4, v_5 dan v_{10} tetapi tidak bertetangga dengan v_3. Titik v_7 bertetangga dengan v_3, v_6, dan v_8 tetapi tidak bertetangga dengan v_9.

Graf memiliki banyak jenis, dalam tulisan ini akan dibahas beberapa jenis graf yang sering digunakan. Berdasarkan ada tidaknya gelang ataupun sisi ganda pada suatu graf dan berdasarkan sisi pada graf yang mempunyai orientasi arah.

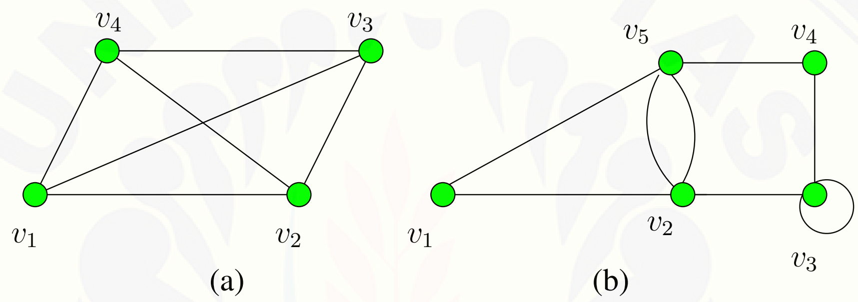
1. Berdasarkan ada tidaknya gelang pada suatu graf digolongkan menjadi dua jenis, yaitu :
   a. Graf sederhana

   Graf sederhana (*simple graph*) adalah suatu graf yang tidak mengandung gelang maupun sisi ganda. Pada graf sederhana sisi merupakan pasangan

tak terurut. Jadi sisi (u, v) sama saja dengan (v, u). Contohnya dapat dilihat pada Gambar 2.2 (a) yaitu semua titik tidak ada yang mengandung sisi ganda maupun gelang.

b. Graf tak-sederhana

Graf tak-sederhana (*unsimple graph*) adalah graf yang mengandung sisi ganda atau gelang. Graf tak sederhana dibagi menjadi dua macam, yaitu graf ganda *(multigraph)* dan graf semu *(pseudograph)*. Graf ganda adalah graf yang mengandung sisi ganda. Sedangkan graf semu adalah graf yang mengandung gelang. Sisi pada graf semu dapat terhubung ke dirinya sendiri. Contohnya dapat dilihat pada Gambar 2.2 (b) yaitu pada titik v_2 dan v_5 terdapat sisi ganda sedangkan pada titik v_3 terdapat gelang.



Gambar 2.2 (a) Graf Sederhana, (b) Graf Tak-sederhana

2. Berdasarkan orientasi arah pada sisi graf dibedakan menjadi dua jenis yaitu :

a. Graf tak-berarah

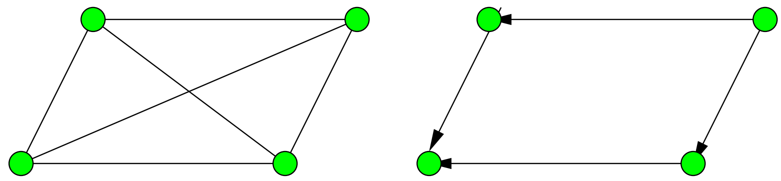
Graf tak-berarah *(undirected graph)* adalah graf yang sisinya tidak mempunyai orientasi arah. Pada graf tak-berarah, urutan pasangan simpul yang dihubungkan oleh sisi tidak diperhatikan. Jadi $(u, v) = (v, u)$ adalah sisi yang sama.Contohnya yaitu dapat dilihat pada Gambar 2.3 (a)

b. Graf berarah

Graf berarah *(directed graph atau digraph)* adalah graf yang setiap sisinya diberikan orientasi arah. Pada graf berarah, (u, v) dan (v, u) menyatakan dua buah busur yang berbeda, dengan kata lain $(u, v) \neq (v, u)$. Untuk busur (u, v) simpul u dinamakan simpul asal *(initial vertex)* dan simpul v dinamakan simpul terminal *(terminal vertex)*. Contohnya yaitu dapat dilihat pada Gambar 2.3 (b)

2.2 Pewarnaan Graf

Pewarnaan graf adalah suatu bentuk pelabelan graf dengan memberikan warna pada elemen graf. Terdapat tiga macam pewarnaan graf, meliputi pewarnaan titik,



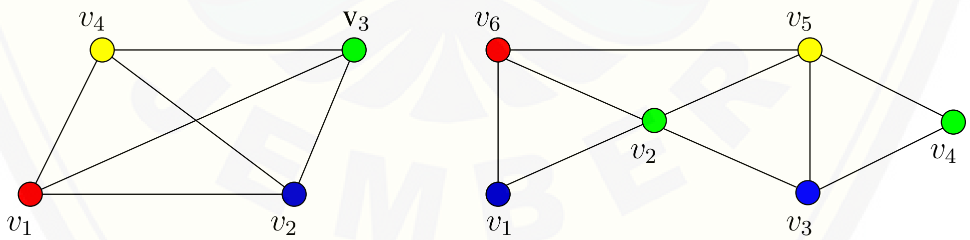
(a) (b)

Gambar 2.3 (a) Graf Tak-berarah, (b) Graf Berarah

pewarnaan sisi, dan pewarnaan wilayah.

2.2.1 Pewarnaan Titik

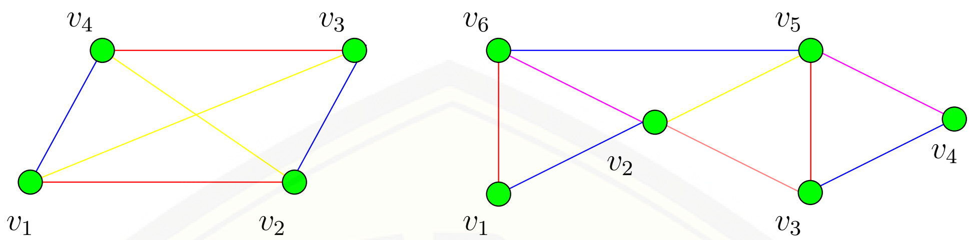
Pewarnaan Titik pada graf G adalah pemberian warna pada titik-titik graf G, satu warna untuk setiap titik, sehingga titik-titik yang bertetangga diwarnai dengan warna yang berbeda (Chartrand dan Zhang, 2009). Dalam pewarnaan titik terdapat istilah bilangan kromatik yaitu menentukan banyaknya warna minimum yang diperlukan untuk memberi warna pada titik-titik pada graf sehingga dua titik yang bertetangga mempunyai warna yang berbeda. Bilangan kromatik pada graf G disimbolkan $\chi(G)$ yaitu suatu bilangan k yang terkecil sedemikian hingga graf G dapat diwarnai dengan k warna. Dengan demikian, pewarnaan titik dapat dianggap sebagai fungsi $c : V(G) \to N$, dimana N bilangan bulat positif (1,2,3.....k), sedemikian hingga $c(u) \neq c(v)$ jika u dan v merupakan dua titik yang bertetangga. Contohnya dapat dilihat pada Gambar 2.4.



Gambar 2.4 Pewarnaan Titik

2.2.2 Pewarnaan Sisi

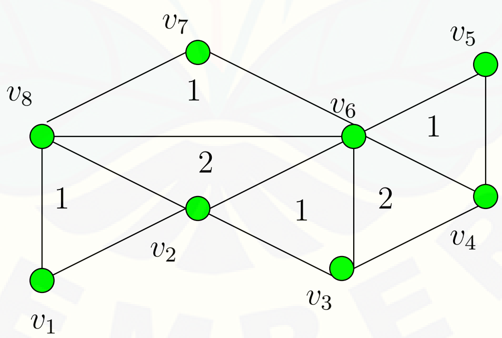
Pewarnaan sisi pada graf G adalah pewarnaan semua sisi G sedemikian hingga setiap dua sisi yang terkait pada titik yang sama mendapatkan warna yang berbeda (Budayasa, 2007). Jika G mempunyai pewarnaan sisi - k, maka dikatakan sisi-sisi di G diwarnai dengan k warna. Dengan demikian, pewarnaan sisi dapat dianggap sebagai fungsi $c : E(G) \to N$, dimana N bilangan bulat positif (1,2,3.....k), sedemikian hingga $c(e) \neq c(f)$ untuk setiap dua sisi e dan f yang bertetangga pada graf G (Chartrand dan Zhang, 2009). Contohnya dapat dilihat pada Gambar 2.5.



Gambar 2.5 Pewarnaan Sisi

2.2.3 Pewarnaan Wilayah

Pewarnaan wilayah pada graf G adalah memberikan warna pada setiap wilayah pada graf sehingga wilayah yang bertetangga tidak memiliki warna yang sama. Dengan demikian, pewarnaan wilayah dapat dianggap sebagai fungsi $c : R(G) \rightarrow N$, dimana N bilangan bulat positif (1,2,3.....k), sedemikian hingga $c(p) \neq c(q)$ untuk setiap dua wilayah p dan q yang bertetangga pada graf G (Chartrand dan Zhang, 2009). Contohnya dapat dilihat pada Gambar 2.6.



Gambar 2.6 Pewarnaan Wilayah

2.3 Pewarnaan Titik r-Dinamis

Pewarnaan titik adalah pemberian warna pada setiap titik sedemikian hingga tidak ada warna yang sama antar dua titik yang bertetangga. Suatu graf G, dimana *k-colorable* jika dibutuhkan k warna untuk memberikan pewarnaan pada graf G, dimana k merupakan bilangan bulat positif. Pewarnaan pada graf G membutuhkan nilai minimum untuk yang disebut bilangan kromatik pada graf G yang disimbolkan dengan $\chi(G)$.

Observasi 2.3.1. *Misalkan G adalah graf terhubung dengan $\chi(G)$ adalah bilangan kromatik dinamis berlaku $\chi(G) \leq \chi_d(G) \leq \chi_3(G) \leq \cdots \leq \chi_r(G) \leq \chi_{r+1}(G)$ (Kang et al., 2015).*

Suatu graf G yang memiliki k pewarnaan memetakan himpunan titiknya ke himpunan pewarnaan dinotasikan $c : V(G) \Rightarrow (1, 2, 3, ..., k)$, jadi untuk titik-titik yang bertetangga memiliki minimal dua warna berbeda. $r - dinamis$ dengan k pewarnaan pada graf G sehingga $|c(N(v))| \geq min\{r, d(v)\}$ untuk v di $V(G)$. Bilangan kromatik r-dinamis ditulis dengan $\chi_r(G)$ untuk nilai minimum k sehingga graf G memiliki r-dinamis dengan k pewarnaan (Jahanbekam, *et al*, 2014).

Pewarnaan r-dinamis merupakan pengembangan dari pewarnaan k-warna dinamis yang diperkenalkan oleh Montgomery pada tahun 2002. Pewarnaan k warna dinamis pada graf G merupakan pewarnaan titik pada graf G sebanyak k-warna sedemikina sehingga setiap titik mempunyai derajat minimum sebanyak dua dan memiliki dua warna yang berbeda dengan titik tetangganya. Pewarnaan k warna dinamis memiliki nilai k terkecil yang disebut sebagai bilangan kromatik dinamis yang disimbolkan dengan $\chi_d(G)$.

Definisi 2.3.1. *Pewarnaan titik r-dinamis pada suatu graf G didefinisikan sebagai pemetaan c dari $V(G)$ ke himpunan warna sedemikian hingga memenuhi kondisi berikut :*

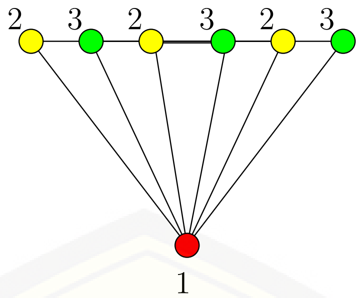
1. *jika $uv \in E(G)$ maka $c(u) \neq c(v)$ dan*
2. *$\forall v \in V(G)$, $|c(N(v))| \geq min[r, d(v)], r \in N$*

(Lai dan Montgomery, 2002: 12)

Nilai k yang minimum sehingga graf G memenuhi pewarnaan k warna r-dinamis disebut bilangan kromatik r-dinamis, yang dinotasikan $\chi_r(G)$. Bilangan kromatik pada pewarnaan satu dinamis merupakan bilangan kromatik pada $\chi(G)$, sedangkan bilangan kromatik 2-dinamis disebut bilangan kromatik dinamis $\chi_d(G)$. Berdasarkan pada Definisi r-dinamis diatas kondisi tersebut memperlihatkan bahwa $\chi_r(G) \geq min\{r, \triangle(G)\} + 1$.

Teorema 2.3.1. $\chi(G) \geq min\{\triangle(G), r\} + 1$ *(Jahanbekam, S., dkk: 2014).*

Contoh pewarnaan titik pada graf kipas F_6 dapat dilihat pada Gambar 2.7 yaitu pewarnaan titik satu dinamis dan dua dinamis pada graf kipas F_6 serta perhitungan *r*-dinamisnya dapat dilihat pada Tabel 2.6 dan 2.7. Pewarnaan tiga dinamis dapat dilihat pada Gambar 2.8 serta perhitungan *r*-dinamisnya dapat dilihat pada Tabel 2.3. Pewarnaan 4-dinamis dapat dilihat pada Gambar 2.8 serta perhitungan *r*-dinamisnya dapat dilihat pada Tabel 2.4.



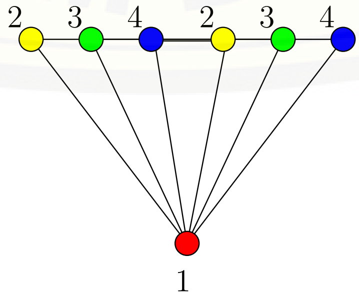
Gambar 2.7 pewarnaan titik 1-dinamis dan 2-dinamis pada graf kipas F_6

Tabel 2.1 Pewarnaan titik 1-dinamis pada F_6

i	$c(v_i)$	$\lvert c(N(v_i))\rvert$	r	$d(v_i)$	$\min\{r, d(v_i)\}$	$\lvert c(N(v_i))\rvert \geq \min\{r, d(v_i)\}$
1	1	2	1	6	1	YA
2	2	2	1	2	1	YA
3	3	2	1	3	1	YA
4	2	2	1	3	1	YA
5	3	2	1	3	1	YA
6	2	2	1	3	1	YA
7	3	2	1	2	1	YA

Tabel 2.2 Pewarnaan titik 2-dinamis pada F_6

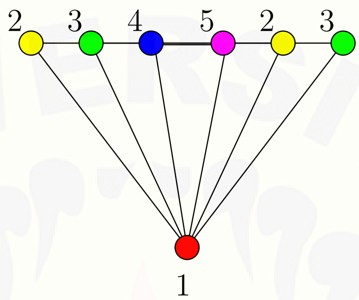
i	$c(v_i)$	$\lvert c(N(v_i))\rvert$	r	$d(v_i)$	$\min\{r, d(v_i)\}$	$\lvert c(N(v_i))\rvert \geq \min\{r, d(v_i)\}$
1	1	2	2	6	2	YA
2	2	2	2	2	2	YA
3	3	2	2	3	2	YA
4	2	2	2	3	2	YA
5	3	2	2	3	2	YA
6	2	2	2	3	2	YA
7	3	2	2	2	2	YA



Gambar 2.8 pewarnaan titik 3-dinamis pada graf kipas F_6

Tabel 2.3 Pewarnaan titik 3-dinamis pada F_6

i	$c(v_i)$	$\lvert c(N(v_i))\rvert$	r	$d(v_i)$	$\min\{r, d(v_i)\}$	$\lvert c(N(v_i))\rvert \geq \min\{r, d(v_i)\}$
1	1	3	3	6	3	YA
2	2	2	3	2	2	YA
3	3	3	3	3	3	YA
4	4	3	3	3	3	YA
5	2	3	3	3	3	YA
6	3	3	3	3	3	YA
7	4	2	3	2	2	YA



Gambar 2.9 pewarnaan titik 4-dinamis pada graf kipas F_6

Tabel 2.4 Pewarnaan titik 4-dinamis pada F_6

i	$c(v_i)$	$\lvert c(N(v_i))\rvert$	r	$d(v_i)$	$\min\{r, d(v_i)\}$	$\lvert c(N(v_i))\rvert \geq \min\{r, d(v_i)\}$
1	1	4	4	6	4	YA
2	2	2	4	2	2	YA
3	3	3	4	3	3	YA
4	4	3	4	3	3	YA
5	5	3	4	3	3	YA
6	2	3	4	3	3	YA
7	3	2	4	2	2	YA

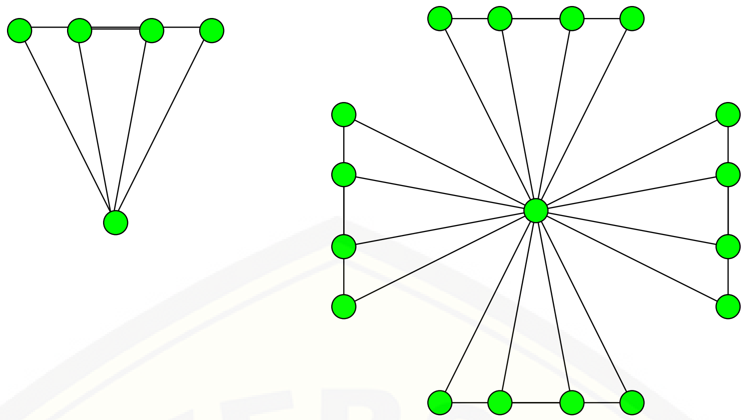
2.4 Graf Khusus dan Operasi Graf

Graf khusus adalah graf yang memiliki karakteristik dan keunikan. Graf khusus mempunyai karakteristik yaitu dapat diperluas sampai *order* n. Graf lintasan P_n adalah graf sederhana yang terdiri dari satu lintasan. Graf lintasan dengan n titik yang dinotasikan dengan P_n, dimana $n \geq 2$ yang terdiri dari n titik dan $n - 1$ sisi (Damayanti,2011). Graf lingkaran adalah graf sederhana yang terdiri dari n titik yang setiap titiknya berderajat 2. Graf lingkaran dinotasikan dengan C_n (Harary,2007). Graf lengkap yaitu graf sederhana yang setiap titiknya terhubung ke titik lainnya oleh satu sisi. Dengan kata lain, setiap titiknya bertetangga sehingga masing-masing memiliki derajat n-1. Graf lengkap dengan n buah titik dilambangkan dengan K_n dengan jumlah sisi yang terdiri dari n buah titik yaitu $n(n-1)/2$ sisi (Wibisono,2008:128). Graf roda dinotasikan W_n dengan $n \geq 3$ adalah graf yang dibentuk dari graf sikel C_n dan satu titik yang bertetangga dengan semua titik di sikel C_n (Harary *et al*,2007). Graf kipas dinotasikan dengan F_n dengan $n \geq 2$ adalah jumlah graf lengkap K_1 dan graf lintasan P_n , yaitu $F_n = K_1 + P_n$, diperoleh dengan menghubungkan semua titik titik dari P_n ke titik K_1 , masing - masing dihubungkan oleh sebuah sisi. Dengan demikian graf kipas mempunyai $n+1$ titik dan $2n-1$ sisi. Graf kincir adalah graf kincir dengan satu titik pusat yang dipakai bersama yang dinotasikan dengan $(W_n)^m$ dengan $n \geq 3$ dan $m \geq 2$. Graf Triangular ladder TLn adalah graf yang diperoleh dari graf ladder $L_n = P_n \times P_2 (n \geq 2)$ dengan penambahan sisi $\{u_i u_{i+1}\}$ untuk $1 \leq i \leq n-1$ dimana titik - titik kedua P_n adalah $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ dan $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ dengan sisi $\{u_i v_i\}$ (Jeyanthi dan Maheswari,2015). Graf Windmill adalah graf kincir dengan satu titik pusat yang dipakai bersama, yang dinotasikan dengan $Wd_{n,m}$ dengan $n \geq 3$ dan $m \geq 2$. Graf windmill mempunyai $(n-1)m+1$ titik dan $mn(n-1)/2$ sisi

Operasi graf adalah banyaknya cara untuk mendapatkan graf baru dengan melakukan suatu operasi terhadap dua graf. Operasi yang digunakan adalah operasi amalgamasi dan shakel serta generalisasinya.

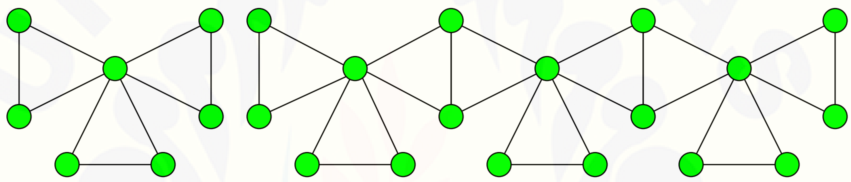
Definisi 2.4.1. *Operasi amalgamasi dinotasikan dengan $Amal(H_i, v_{0i})$. Misalkan H_i suatu keluarga graf berhingga dan setiap H_i mempunyai suatu titik $v_0 i$ yang merupakan titik terminal, dan r menyatakan banyaknya graf H_i yang akan diamalgamasikan, sehingga semua H_i dengan seluruh terminalnya direkatkan menjadi satu titik* (Ardiyansah, 2013). Gambar 2.10 merupakan contoh dari operasi amalgamasi.

Definisi 2.4.2. *Graf shakel dari graf H dinotasikan dengan $G = Shack(H, v, n)$ adalah merupakan graf yang dibangun dari graf non trivial $H_1, H_2, \ldots, H_n$ sedemik ian hingga untuk setiap $1 \leq s, t \leq n$, H_s dan H_t tidak memiliki titik penghubung dimana $|s-t| \geq 2$ dan untuk setiap $1 \leq i \leq n-1, H_i$ dan H_{i+1} memiliki tepat satu titik yang sama v yang disebut titik penghubung dan $k-1$ titik penghubung tersebut adalah berbeda. Jika $G = Shack(H, v, n)$ titik penghubung digantikan dengan subgraf $K \subset H$ disebut dengan generalisasi shakel, dinotasikan dengan $G = gshack(H, K \subset H, n)$*(Dafik et al.,2010).



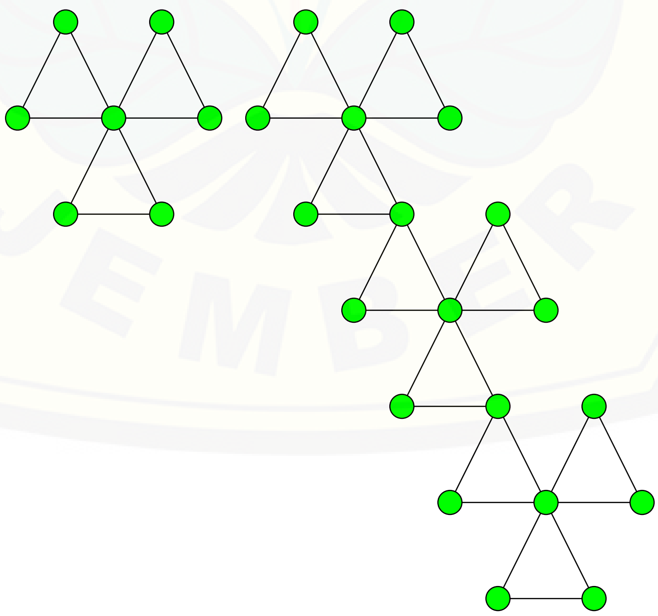
F_4 $\quad$ $Amal(F4, v = 1, 4)$

Gambar 2.10 Contoh Operasi Amalgamasi



$Wd_{3,3}$ $\quad$ $gshack(Wd_{3,3}, K \subseteq H, 3)$

Gambar 2.11 Contoh Operasi Generalisasi Shakel



$Wd_{3,3}$ $\quad$ $Shack(Wd_{3,3}, v, 3)$

Gambar 2.12 Contoh Operasi Shakel

2.5 Aplikasi Graf

Teori graf dapat digunakan dalam menyelesaiakan permasalahan yang ada di kehidupan sehari-hari, misalnya dalam bidang ilmu kimia yaitu masalah pencegahan adanya kecelakaan yang ada di labolatorium. Laboratorium kimia merupakan suatu tempat yang berbahaya, terutama bila kita ceroboh dan kurang pengetahuan. Tempat lain yang digunakan untuk menyimpan bahan-bahan kimia adalah gudang yang khusus digunakan untuk menyimpan bahan kimia. Apabila bahan kimia nya terdiri dari berbagai jenis yang berbeda , perlu adanya pemodelan dalam penyimpanan agar tidak terjadi reaksi apabila ditempatkan pada tempat yang sama. Ada berbagai sifat bahan kimia yang dapat menyebabkan kecelakaan di dalam labolatorium. Misalnya bahan mudah meledak, mudah terbakar, bahan oksidator, bahan beracun, dan masih banyak yang lainnya. Dari berbagai bahan kimia diatas tidak bisa disimpan pada tempat yang sama sehingga perlu adanya pemodelan matematika untuk menghindari adanya kecelakaan pada gudang tersebut.

Contoh kecil permasalahan dalam gudang penyimpanan bahan kimia adalah sebagai berikut : misalnya ada tujuh zat kimia yang perlu disimpan di dalam gudang. Beberapa pasang zat itu tidak dapat disimpan di dalam ruangan yang sama, karena campuran gasnya bersifat korosif atau mudah meledak. Berikut ini adalah hubungan dari zat kimia tersebut :

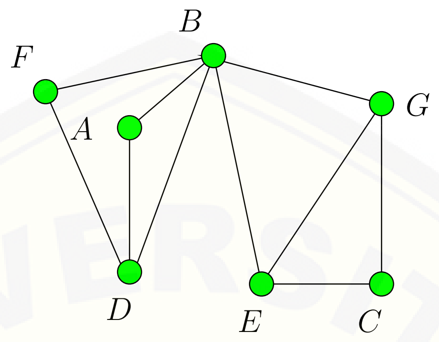
Tabel 2.5 Tabel Hubungan Zat Kimia

Zat Kimia	Tidak dapat disimpan bersama zat kimia
A	B, D
B	A, D, F, G
C	E, G
D	A, F, B
E	B, C, G
F	B, D
G	$C.E.B$

Untuk zat semacam itu perlu dibangun ruang-ruang terpisah yang dilengk- api ventilasi dan penyedot udara keluar yang berlainan. Jika lebih banyak ruang yang dibutuhkan, berarti lebih banyak ongkos yang harus dikeluarkan.

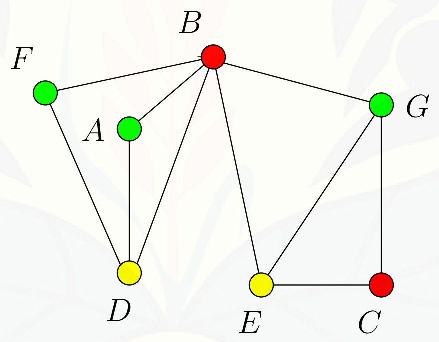
Dalam permasalahan ini, titik-titik melambangkan zat kimia. Sedangkan sisi menyatakan bahwa dua zat kimiayang dihubungkannya tidak boleh disimpan bersama-sama. Adapun langkah-langkah aplikasi pewarnaan titik pada penyimpanan zat kimia :

1. Menggambarkan titik-titik graf. Pada persoalan ini terdapat tujuh macam senyawa kimia, yaitu : A,B,C,D,E,F. Ketujuh macam senyawa kimia diperlakukan sebagai tujuh titik.
2. Menggambar sisi-sisi pada graf.



Gambar 2.13 Representasi Graf

3. Memprediksi bilangan kromatik graf dan mewarnai graf.



Gambar 2.14 Pewarnaan Titik

Diliat dari pewarnaan diatas hanya terdapat tiga warna yaitu merah, hijau dan biru. Jadi hanya dibutuhkan tiga ruang untuk menyimpan ketujuh senyawa kimia tersebut. Ruang satu berisi zat B dan C, ruang dua berisi zat F, A, dan G, sedangkan ruang C berisi zat D dan F. Sehingga χ_r dari pewarnaan titik r-dinamis pada r = 2.

Tabel 2.6 Pewarnaan titik 1-dinamis

i	$c(v_i)$	$\|c(N(v_i))\|$	r	$d(v_i)$	$\min\{r, d(v_i)\}$	$\|c(N(v_i))\| \geq \min\{r, d(v_i)\}$
A	3	2	1	2	1	YA
B	1	2	1	5	1	YA
C	1	2	1	2	1	YA
D	2	2	1	3	1	YA
E	2	2	1	3	1	YA
F	3	2	1	2	1	YA
G	3	2	1	3	1	YA

Tabel 2.7 Pewarnaan titik r-dinamis

i	$c(v_i)$	$\|c(N(v_i))\|$	r	$d(v_i)$	$\min\{r, d(v_i)\}$	$\|c(N(v_i))\| \geq \min\{r, d(v_i)\}$
A	3	2	2	2	2	YA
B	1	2	2	5	2	YA
C	1	2	2	2	2	YA
D	2	2	2	3	2	YA
E	2	2	2	3	2	YA
F	3	2	2	2	2	YA
G	3	2	2	3	2	YA

2.6 Hasil-hasil Pewarnaan Titik

Pada penelitian sebelumnya didapatkan beberapa hasil pewarnaan titik r-dinamis yang dapat digunakan sebagai rujukan penelitian ini. Adapun beberapa hasil penelitian terdahulu bisa dilihat pada Tabel 4.1.

Tabel 2.8: Hasil Pewarnaan Titik r-dinamis Penelitian Terdahulu

Graf	Bilangan kromatik r-dinamis	Keterangan
$P_2 \otimes C_n$, n ganjil	$\chi(G) = 6$	Harsya, dkk 2014
$P_2 \otimes C_n$, n genap	$\chi(G) = 4$	Harsya dkk 2014
$P_3 \odot C_n$, n ganjil	$\chi(G) = 6$	Harsya dkk 2014
$Graf\ Cycle(C_6)$	$\chi(G) = 2$	Sesa, J. 2014
$Graf\ Kipas(F_n), n \geq 4$	$\chi(G) = 3$	Irwanto, dkk 2014
$Graf\ Roda(W_n), n \geq 5$	$\chi(G) = 4$	Irwanto dkk 2014
$Graf\ Helm(H_n), n \geq 4$	$\chi(G) = 3$	Irwanto dkk 2014
$Graf\ Anti\ Prisma(H_m), n \geq 4$	$\chi(G) = 4$	Irwanto dkk 2014
$Graf\ Prisma(H_m), n \geq 5$	$\chi(G) = 4$	Irwanto dkk 2014
$C_n \odot C_m$	$\chi(G) = 4$	Puspasari dkk 2014
$C_n \otimes C_m$	$\chi(G) = 3$	Puspasari dkk 2014

Graf	Bilangan kromatik r-dinamis	Keterangan
$S_n \otimes C_m$	$\chi(G) = 3$	Dewi, N.L dkk 2014
graf Particular	$\chi(G) = 2$	Lai, dkk 2002
$W_n + P_m$=$W_n + P_m$,n genap	$\chi(G) = \chi_d(G) = \chi_3(G)$ $= \chi_4(G) = 5$	Wulandari dkk 2015
$W_n + P_m$=$W_n + P_m$, n ganjil	$\chi(G) = \chi_d(G) = \chi_3(G)$ $= \chi_4(G) = 6$	Wulandari dkk 2015
$W_n \odot P_m$	$\chi(G) = \chi_d(G) = 4$	Wulandari dkk 2015
$P_m \odot W_n$, n genap	$\chi(G) = \chi_d(G)$ $= \chi_3(G) = 5$	Wulandari dkk 2015
$P_m \odot W_n$, n ganjil	$\chi(G) = \chi_d(G)$ $= \chi_3(G) = 5$	Wulandari dkk 2015
F_n	$\chi(G) = \chi_d(G) = 3$ $\chi_r(G) = r + 1$ $3 \leq r < n$	Tarmidzi dkk 2015
BT_n	$\chi(G) = \chi_d(G) = 3$ $\chi_r(G) = r + 1$ $3 \leq r < n$	Tarmidzi dkk 2015
TCL_n	$\chi(G) = \chi_d(G) = 3$ $\chi_3(G) = 4$ $\chi_4(G) = 5$ $\chi_r(G) = 6$ $r \geq 6$	Tarmidzi dkk 2015
L_n	$\chi(G) = 2$ $\chi_r(G) = 4$ $3 \leq r \geq 2$	Tarmidzi dkk 2015

BAB 3. METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Penelitian ini dikategorikan dalam penelitian eksploratif dan penelitian terapan *(applied research)*, yaitu :

1. Penelitian eksploratif adalah jenis penelitian yang bertujuan menggali hal-hal yang ingin diketahui oleh peneliti dan hasil penelitian dapat digunakan sebagai dasar penelitian selanjutnya.
2. Penelitian terapan *(applied research)* merupakan penyelidikan yang hati-hati, sistematik dan terus - menerus terhadap suatu masalah dengan tujuan untuk digunakan dengan segera untuk keperluan tertentu

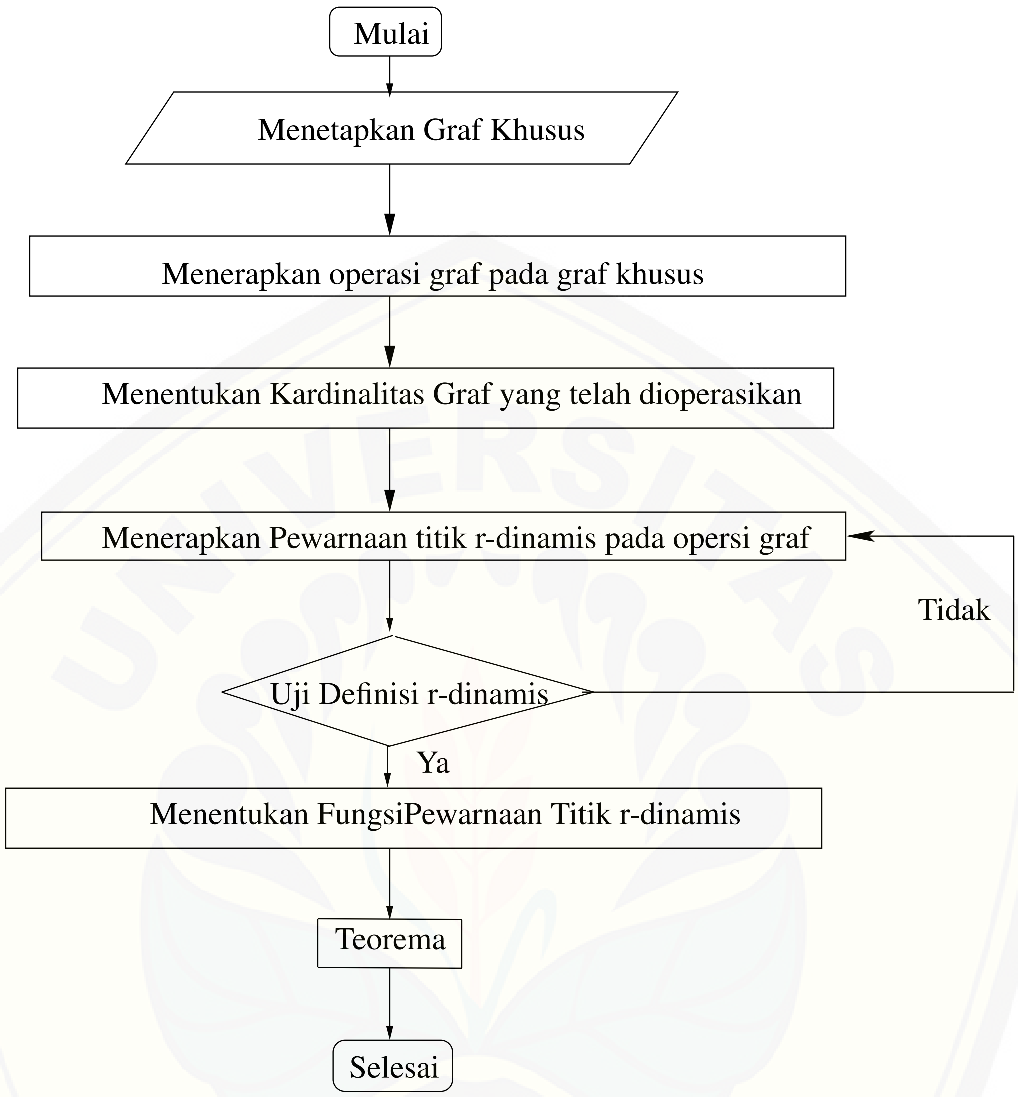
3.2 Graf Kajian Pewarnaan Titik

Data yang digunakan berupa pengoprasian pada graf-graf khusus. Graf khusus yang digunakan adalah graf kipas $amal(F_n, v, m)$, *windmill* $(gshack(Wd_3^3, e, n)$, graf roda $amal(W_4, v, n)$, graf lengkap $(shack(K_4, v, n)$, graf lengkap $(gshack(K_4, e, n)$ dan graf lengkap $amal(K_4, v, n)$. Penelitian ini menggunakan metode deduktif, metode yang menggunakan prinsip-prinsip pembuktian deduktif yang berlaku dalam logika matematika dengan menggunakan aksioma dan teorema yang telah ada untuk memecahkan masalah.

3.3 Rancangan Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada graf khusus. Adapun tehnik penelitian adalah sebagai berikut :

a. menentukan graf khusus sebagai objek penelitian;
b. menerapkan operasi graf pada graf-graf khusus yang telah ditentukan;
c. menentukan kardinalitas titik dan kardinalitas sisi pada graf-graf khusus yang telah ditentukan;
d. menentukan pewarnaan titik r-dinamis pada graf-graf khusus yang telah dioperasikan;
e. menentukan fungsi pewarnaan titik r-dinamis pada graf-graf khusus yang telah dioperasikan;
f. pewarnaan titik yang sudah didapatkan merupakan teorema yang harus dibuktikan;



Gambar 3.1 Skema rancangan penelitian

BAB 5. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dari pembahasan pada bab sebelumnya dapat disimpulkan bahwa kardinalitas titik dan sisi pada graf khusus dengan operasi amalgamasi dan shakel serta generalisasinya yaitu :

1. $|V(amal(F_n, v, m))| = nm + 1$ dan $E(amal(F_n, v, m)) = 2nm - m$;
2. $|V(gshack(Wd_3^3, e, n))| = 5n + 2$ dan $|E(gshack\ (Wd_3^3, e, n))| = 8n + 1$;
3. $|V(amal(W_4, v, n))| = 3n + 1$ dan $|E(amal(W_4, v, n))| = 4n$;
4. $|V(shack(K_4, v, n)| = 3n + 1$ dan $|E(shack(K_4, v, n)| = 6n$;
5. $|V(gshack(K_4, e, n)| = 2n + 1$ dan $|E(gshack(K_4, e, n)| = 5n + 2$;
6. $|V(amal(k_4, v, n))| = 3n + 1$ dan $|E(amal(k_4, v, n))| = 6n$;

dan diperoleh 6 teorema baru tentang bilangan kromatik pewarnaan titik r-dinamis yaitu sebagai berikut:

1. Bilangan kromatik titik *r*-dinamis pada graf $amal(F_n, v, m)$, $n \geq 2$ dapat ditulis sebagai berikut :
$$\chi_(amal(F_n, v, m)) = \chi_d(amal(F_n, v, m)) = 3$$
$$\chi_3(amal(F_n, v, m)) = 4$$
$$chi_{r\geq4}(amal(F_n, v, m)) = r + 1$$
2. Bilangan kromatik dinamis pewarnaan titik r-dinamis pada graf *windmill* $(gshack$ (Wd_3^3, e, n), $n \geq 2$ dapat ditulis sebagai berikut :
$$\chi_(gshack(Wd_3^3, e, n)) = \chi_d(gshack(Wd_3^3, e, n)) = 3$$
$$\chi_3(gshack(Wd_3^3, e, n)) = 4$$
$$\chi_4(gshack(Wd_3^3, e, n)) = 5$$
$$\chi_5(gshack(Wd_3^3, e, n)) = 6$$
$$chi_{r\geq6}(gshack(Wd_3^3, e, n)) = 7$$
3. Bilangan kromatik titik *r*-dinamis pada graf roda $amal(W_4, v, n)$, $n \geq 3$ dapat ditulis sebagai berikut :
$$\chi_(amal(W_4, v, n)) = \chi_d(amal(W_4, v, n)) = \chi_3(amal(W_4, v, n)) = 4$$
$$\chi_{r\geq4}(amal(W_4, v, n)) = r + 1$$

4. Bilangan kromatik dinamis pewarnaan titik r-dinamis pada graf lengkap $(shack$ (K_4, v, n), $n \geq 3$ dapat ditulis sebagai berikut:

$$\chi_(shack(K_4, v, n)) = \chi_d(shack(K_4, v, n)) = \chi_3(shack(K_4, v, n)) = 4$$
$$\chi_4(shack(K_4, v, n)) = 5$$
$$\chi_5(shack(K_4, v, n)) = 6$$
$$\chi_{r \geq 6}(shack(K_4, v, n)) = 7$$

5. Bilangan kromatik dinamis pewarnaan titik r-dinamis pada graf lengkap $(gshack$ (K_4, e, n), $n \geq 3$ dapat ditulis sebagai berikut:

$$\chi_(gshack(K_4, e, n)) = \chi_d(gshack(K_4, e, n)) = \chi_3(gshack(K_4, e, n)) = 4$$
$$\chi_4(gshack(K_4, e, n)) = 5$$
$$\chi_{r \geq 5}(gshack(K_4, e, n)) = 6$$

6. Bilangan kromatik titik *r*-dinamis pada graf lengkap $amal(K_4, v, n)$, $n \geq 3$ dapat ditulis sebagai berikut :

$$\chi_(amal(K_4, v, n)) = \chi_d(amal(K_4, v, n)) = \chi_3(amal(K_4, v, n)) = 4$$
$$\chi_{r \geq 4}(amal(K_4, v, n)) = r + 1$$

5.2 Saran

Berdasarkan hasil penelitian mengenai pewarnaan titik pada graf khusus dengan operasi amalgamasi dan shakel serta generalisasinya yaitu pada graf kipas $amal(F_n, v, m)$, *windmill* $(gshack(Wd_3^3, e, n)$, graf roda $amal(W_4, v, n)$, graf leng kap $(shack(K_4, v, n)$, graf lengkap $(gshack(K_4, e, n)$ dan lengkap $amal(K_4, v, n)$ maka peneliti memberikan saran kepada pembaca agar dapat mengembangkan pewarnaan titik r-dinamis pada graf khusus dengan operasi graf khusus lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

Alishasi, M. 2011. *Dynamic chromatic number of regular graphs, Discret Applied Math*. Jurnal.

Ardiansyah, R. 2013. *Bilangan Kromatik Graff Hasil Amalgamasi Dua Buah Graf*. Jurnal: ITS.**2**(1)

Budayasa, K. 2007. *Teori Graf dan Aplikasinya*. Surabaya: Universitas Negeri Surabaya.

Chartand, Gray dan Zhang, Ping . 2009. *Chromatic Graph Teory*. USA: CRC Press.

Dafik, Hasan, Azizah dan Agustin, Ping . 2010. *A Generalized Shackle of Any Graph H Admits a Super H-Antimagic Total Labeling*. Jember: Universitas Jember.

Damayanti,R.T, . 2011. *Automorfisme graf bintang dan graf lintasan*. Malang: Universitas Brawijaya.

Harrary, F. 2007. *Graph Theory*. Addison: Wesley.

Irwanto, J. dan Dafik. 2014. *Pewarnaan Titik Pada Graf Spesial dan Operasinya*. Jurnal: UNEJ.

Jahanbekam, S.,dkk . 2012. *On r- Dynamic Coloring of Graphs*. Artikel (Tidak Dipublikasikan).

Jeyanti.P, Maheswari A. 2015. *One modulo Three Mean Labeling Of Cycle Related Graph*. International Jurnal of Pure And Aplied Mathematic

Lai, Hong-Jian dan Montgomery, Bruce. 2002. *Dynamic Coloring of Graphs*. Artikel (Tidak Dipublikasikan). Morgantown: West Virginia University.

Maryati, T.K., dkk. 2010. *On h super-magic labelings for certain shackles and amalgamations of a connected graph antimagic total labelings for shackles of a connected graph. Utilitas Math.*

Munir, R. 2009. *Matematika Diskrit Edisi 3*. Bandung: Informatika Bandung.

Purwanto, H., dkk. 2005. *Kalkulus 1*. Jakarta: PT. Ercontara Rajawali.

Ringel, G. 1994. *Pearls in Graph Theory: A Comprehensive Introduction*. USA: Academic Press, Inc.

Slamin. 2009. *Desain Jaringan: Pendekatan Teori Graf*. Jember: Jember University Press.

Suryadi, D. & Priatna, N. 2013. *Pengetahuan Dasar Teori Graf*. Palembang: Universitas Bina Darma.

Tarmidzi, M.D. 2015. *Nilai Kromatik dan Pewarnaan Titik r- Dinamis pada Graf Khusus dan Operasi Shakel*. Jurnal: UNEJ.

Wibisono,Samuel. 2008. *Matematika Diskrit Edisi 2*. Yogyakarta: Graha Ilmu

Wulandari, N. I. 2015. *Anilisis r-Dynamic Vertec Coloring pada Hasil Operasi Graf Khusus*. Jurnal : UNEJ. **1**(1).

Yulianti, K. 2008. *Hand Out Mata Kuliah Teori Graf Jilid 1*. Bandung: Universitas Pendidikan Indonesia.