



**ANALISA *ANTIMAGIC* TOTAL *COVERING* SUPER
PADA EKSPONENSIAL GRAF KHUSUS DAN
APLIKASINYA DALAM MENGEMBANGKAN
*CHIPHERTEXT***

SKRIPSI

Oleh

Haniah Zakin

NIM 121810101049

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER**

2016



**ANALISA *ANTIMAGIC* TOTAL *COVERING* SUPER
PADA EKSPONENSIAL GRAF KHUSUS DAN
APLIKASINYA DALAM MENGEMBANGKAN
*CHIPHERTEXT***

SKRIPSI

diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat
untuk menyelesaikan Program Studi Matematika (S1) dan mencapai gelar
Sarjana Sains

Oleh

Haniah Zakin

NIM 121810101049

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER**

2016

PERSEMBAHAN

Dengan menyebut nama Allah S.W.T yang maha pengasih lagi maha penyayang, serta sholawat atas Nabi Muhammad S.A.W, kupersembahkan sebuah kebahagiaan penggalan bait dalam perjalanan hidupku teriring rasa terima kasihku yang terdalam kepada:

1. Ayahanda Shaleh dan Ibunda Nafilah, serta Adikkuku Mohammad Jadid juga seluruh anggota keluarga yang senantiasa memberikan kasih sayang, do'a, semangat serta dukungan yang tidak pernah putus untuk meraih cita-cita;
2. Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si selaku Dosen Pembimbing Utama dan Kusbudiono, S.Si., M.Si selaku Dosen Pembimbing Anggota yang telah meluangkan waktu, pikiran, dan perhatian dalam penulisan skripsi ini;
3. seluruh pahlawan tanpa tanda jasa bagiku dari TK Al-Irsyad Jember, SDN I Besuki, SMP Negeri I Banyuglugur, SMA Negeri 1 Besuki, serta Dosen Matematika FMIPA Universitas Jember yang selama ini telah sabar memberikan ilmunya;
4. teman-teman "Bathics" angkatan 2012 Matematika MIPA yang telah memberikan keluarga baru yang indah, unik dan tak pernah terlupakan. Terima kasih sudah menemani perjuanganku selama 4 tahun ini;
5. teman-teman pejuang graf teutama covering: (Zum, Ratih, Riza, dan Yuni) yang selalu memberikan dukungan dan semangat untuk segera menyelesaikan skripsi ini;

MOTTO

"Cukup Allah sebagai penolong kami dan Dia adalah sebaik-baik pelindung."

(Terjemahan QS. Ali Imran: 173)*)

"Yang terpenting bukan apakah kita menang atau kalah, Tuhan tidak mewajibkan manusia untuk menang sehingga kalahpun bukan dosa, yang terpenting adalah apakah seseorang Berjuang atau Tak Berjuang."

(Emha Ainun Nadjib)**)

"Tidak ada niat baik yang boleh dicapai dengan cara buruk, dan sebaliknya tidak ada niat buruk yang berubah baik meski dilakukan dengan cara baik-baik." ***)

*) Departemen Agama Republik Indonesia. 2004. *Al-Qur'an dan Terjemahannya*. Bandung. CV Penerbit J-ART.

***) <https://www.instagram.com/beraniberhijrah/>

***) Bulan Tenggelam Di Wajahmu, Tere Liye

PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Haniah Zakin

NIM : 121810101049 101810101043

Menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang berjudul: ANALISA ANTIMAGIC TOTAL COVERING SUPER PADA EKSPONENSIAL GRAF KHUSUS DAN APLIKASINYA DALAM MENGEMBANGKAN *CHIPHERTEXT* adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali jika dalam pengutipan substansi disebutkan sumbernya, dan belum diajukan pada instansi manapun, serta bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa adanya tekanan dan paksaan dari pihak manapun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, Juni 2016

Yang menyatakan,

Haniah Zakin

NIM. 121810101049

SKRIPSI

**ANALISA ANTIMAGIC TOTAL COVERING SUPER
PADA EKSPONENSIAL GRAF KHUSUS DAN
APLIKASINYA DALAM MENGEMBANGKAN
*CHIPHERTEXT***

Oleh

Haniah Zakin
NIM 121810101049

Pembimbing

Dosen Pembimbing Utama : Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si.

Dosen Pembimbing Anggota : Kusbudiono, S.Si., M.Si.

PENGESAHAN

Skripsi berjudul Analisa *Antimagical Total Covering* Super Pada Eksponensial Graf Khusus Dan Aplikasinya Dalam Mengembangkan *Chipertext* telah diuji dan disahkan oleh Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam pada:

Hari / tanggal :

Tempat : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember

Tim Penguji :

Dosen Pembimbing Utama,

Dosen Pembimbing Anggota,

Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si.

Kusbudiono, S.Si., M.Si

NIP.19840801 200801 2 006

NIP. 19770430 200501 1001

Dosen Penguji Utama,

Dosen Penguji Anggota,

Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D.

Drs. Rusli Hidayat, M. Sc.

NIP.19680802 199303 1 004

NIP.19661012 199303 1 001

Mengesahkan,

Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Universitas Jember

Drs. Sujito,, Ph.D.

NIP. 19610204 198711 1 001

RINGKASAN

ANALISA *ANTIMAGIC* TOTAL *COVERING* SUPER PADA EKSPONENSIAL GRAF KHUSUS DAN APLIKASINYA DALAM MENGENBANGKAN *CHIPHERTEXT*; Haniah Zakin, 121810101049; 2016: 68 halaman; Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Teori graf awal mula ditemukan pada abad ke-18 dan aplikasinya banyak ditemukan dalam kehidupan sehari-hari. Lahirnya teori graf pertama kali diperkenalkan oleh Leonhard Euler seorang ahli matematikawan Swiss pada tahun 1736, yang berisi tentang upaya pemecahan masalah jembatan Königsberg di Eropa. Kota Königsberg memiliki tujuh buah jembatan yang menghubungkan empat wilayah di kota tersebut. Beberapa warga Kota Königsberg mengajukan pertanyaan kepada Leonard Euler, seorang matematikawan yang berasal dari Swiss mengenai mungkin tidaknya melakukan perjalanan melewati ketujuh jembatan tetapi tidak boleh melewati jembatan yang sama lebih dari satu kali. Aplikasi yang dapat diterapkan pada pelabelan adalah mengembangkan *chipertext* atau pesan rahasia. *Ciphertext* digunakan untuk mengirim pesan rahasia agar tidak terbaca oleh orang lain kecuali pengirim dan penerima pesan yang dituju yang dapat membaca pesan tersebut. Salah satu cara yang digunakan untuk mengubah pesan menjadi *ciphertext*, yaitu dengan menerapkan sistem (mod 26) atau yang biasa disebut dengan Caesar *system*. Salah satu topik yang dibahas pada teori graf yaitu pelabelan graf. Pelabelan graf direpresentasikan oleh titik dan sisi serta himpunan bagian bilangan asli yang disebut label. Pelabelan *covering \mathcal{H} magic* pada sebuah graf $G = (V(G), E(G))$ apabila setiap garis pada $E(G)$ terdapat dalam subgraf \mathcal{H} dari G yang isomorfik dengan \mathcal{H} dan \mathcal{H} merupakan subgraf dari G . Setelah itu dikembangkan sebagai pelabelan selimut $\mathcal{H} - antimagic$ oleh Inayah (2013) yakni suatu pelabelan *covering $\mathcal{H} - antimagic$* pada graf G yang mempunyai sebuah fungsi bijektif sehingga terdapat jumlahan yang membentuk barisan aritmatika $a, a + d, a + 2d, \dots, a + (s - 1)d$.

Pada penelitian ini mengkaji mengenai pelabelan super \mathcal{H} -antimagic covering pada eksponensial dari graf lintasan dan amalgamasi graf *cycle* yang dinotasikan dengan $P_{n+1}^{Amal(C_{m+2}, e, s)}$ adalah sebuah graf yang dikembangkan dari graf lintasan yang tiap sisinya ditambah dengan amalgamasi graf *cycle* dengan penghubung sisi. Adapun eksponensial dari graf lintasan dan amalgamasi graf *cycle* konektif $P_{n+1}^{Amal(C_{m+2}, e, s)}$ didefinisikan sebagai gabungan konektif dari graf P_{n+1} dengan mengganti semua sisi dari graf P_{n+1} dengan graf $Amal(C_{m+2}, e, s)$ yang mempunyai titik $V_1 = \bigcup_{j=1}^n \{x_j, x_{j+1}\}$ dengan jumlah titik $|V_1| = n + 1$ dan $V_2 = \bigcup_{j=1}^n \bigcup_{k=1}^s \{v_{i,j,k}; 1 \leq i \leq m\}$ dengan jumlah titik $|V_2| = mns$ dan sisi $E_1 = \bigcup_{j=1}^n \{x_j x_{j+1}\}$ dengan jumlah sisi $|E_1| = n$ dan $E_2 = \bigcup_{j=1}^n \bigcup_{k=1}^s \{e_{i,l,k}; 1 \leq l \leq t\}$ dengan jumlah titik $|E_2| = tns$.

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah deduktif aksiomatik, yaitu dengan menurunkan aksioma atau teorema yang telah ada, kemudian diterapkan dalam Analisa *Antimagic Total Covering Super* pada Eksponensial dari Graf Lintasan dan Amalgamasi Graf *Cycle* yang dinotasikan dengan $P_{n+1}^{Amal(C_{m+2}, e, s)}$. Dalam penelitian ini, akan ditentukan terlebih dahulu nilai beda (d) pada eksponensial dari graf lintasan dan amalgamasi graf *cycle*, setelah itu nilai d tersebut diterapkan dalam *Antimagic Total Covering Super* pada Eksponensial dari Amalgamasi Graf *Cycle*. Jika terdapat pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} -antimagic, maka akan dirumuskan pola pelabelan dengan menggunakan metode pendeteksian pola (*pattern recognition*) untuk menentukan pola umumnya. Batas atas padaeksponensial dari graf lintasan dan amalgamasi graf *cycle* pada penelitian ini adalah $d \leq (p_H)^2 - p_H + (q_H)^2 + t + \frac{(ns-n)p_H + (ns-n)q_H}{ns-1}$.

Hasil dari penelitian ini berupa Lemma variasi nilai beda d dan sebuah teorema. Berikut adalah Lemma Partisi yang dihasilkan dimana untuk setiap Lemma berlaku $1 \leq j \leq n$ dan $1 \leq k \leq s$:

1. untuk $j \equiv 0 \pmod{2}$ dan $k \equiv 1 \pmod{2}$

$$\mathcal{P}_{m, \frac{m}{2}}^{n, s}(i, j, k) = \begin{cases} \{\frac{j}{2} + ns(i-1) + (\frac{k-1}{2})n\}; & i \equiv 1 \pmod{2} \\ \{\frac{1-ns+j}{2} + ins + (\frac{k-1}{2})n\}; & i \equiv 0 \pmod{2} \end{cases}$$

untuk $j \equiv 1 \pmod{2}$ dan $k \equiv 1 \pmod{2}$

$$\mathcal{P}_{m, \frac{m}{2}}^{n,s}(i, j, k) = \begin{cases} \left\{ \frac{j-ns}{2} + ins + \left(\frac{k-1}{2}\right)n \right\}; & i \equiv 1 \pmod{2} \\ \left\{ \frac{j+1}{2} + ins - ns + \left(\frac{k-1}{2}\right)n \right\}; & i \equiv 0 \pmod{2} \end{cases}$$

$\sum_{i=1}^m \mathcal{P}_{m, \frac{m}{2}}^{n,s}(i, j, k) = \left\{ \frac{m}{4}(2mns - ns - 2n + 1) + \frac{m}{2}(j + nk) \right\}$ yang telah dibuktikan melalui pembuktian pada **Lemma 4.2.1**

2. untuk $j \equiv 0 \pmod{2}$ dan $k \equiv 1 \pmod{2}$

$$\mathcal{P}_{m, -\frac{m}{2}}^{n,s}(i, j, k) = \begin{cases} \left\{ \frac{1-ns+n-j}{2} + ins - \frac{kn}{2} \right\}; & i \equiv 1 \pmod{2} \\ \left\{ \frac{n}{2} + 1 + ins - \frac{j}{2} - \frac{kn}{2} \right\}; & i \equiv 0 \pmod{2} \end{cases}$$

untuk $j \equiv 1 \pmod{2}$ dan $k \equiv 1 \pmod{2}$

$$\mathcal{P}_{m, -\frac{m}{2}}^{n,s}(i, j, k) = \begin{cases} \left\{ \frac{n+1-j}{2} + ins - \frac{kn}{2} \right\}; & i \equiv 1 \pmod{2} \\ \left\{ \frac{n-ns-j}{2} + 1 + ins - \frac{kn}{2} \right\}; & i \equiv 0 \pmod{2} \end{cases}$$

$\sum_{i=1}^m \mathcal{P}_{m, -\frac{m}{2}}^{n,s}(i, j, k) = \left\{ \frac{m}{4}(2mns + ns + 2n + 3) - \frac{m}{2}(j + nk) \right\}$ yang telah dibuktikan melalui pembuktian pada **Lemma 4.2.2**.

3.

$$\mathcal{P}_{2,-1}^{n,s}(i, j, k) = \begin{cases} \left\{ ns - 2j + 1 - kn + n, ns + j + kn - 2 \right\}; & 1 \leq j \leq \frac{n-1}{2} \\ \left\{ ns + 2n - 2j - kn + 1, ns - \frac{3}{2}n + \frac{1}{2} + kn + j \right\}; & \frac{n+1}{2} \leq j \leq n \end{cases}$$

$\sum_{i=1}^2 \mathcal{P}_{2,-1}^{n,s}(i, j, k) = \{2ns + n - j - 1\}$ yang telah dibuktikan melalui pembuktian pada **Lemma 4.2.3**.

Kemudian ditemukan sebuah teorema baru, yaitu Eksponensial dari Graf Lintasan

dan Amalgamasi Graf *Cycle* yang dinotasikan dengan $P_{n+1}^{Amal(C_{m+2,e,s})}$, memiliki super (a,d) - \mathcal{H} *antimagic total covering* dengan $a = 4ns + 3n + mns + \frac{n+1}{2} + m_1(n+1) + \sum_{c=2}^6 m_c(ns \sum_{a=1}^{c-1} m_a + n + 1) + 2(ns \sum_{a=1}^6 m_a + n + 1) + t_1(mns + n + 1) + \sum_{c=2}^6 m_c(ns \sum_{a=1}^{c-1} m_a + mns + 2n + 1) + \frac{n}{2}(m_1^2s - m_1s - 2m_1 + m_2^2s + m_2s + 2m_2 + t_1^2s - t_1s - 2t_1 + t_2^2s + t_2s + 2t_2) + \frac{1}{2}(m_3 - 2m_3^2n - m_3^2 + t_3 - 2r_3^2n - t_3^2 + m_4(2m_4ns + 2m_4n + m_4 + 1) + t_4(2t_4ns + 2t_4n + t_4 + 1)) + \frac{1}{4}(m_5(2m_5ns - ns - 2n + 1) + m_6(2m_6ns + ns + 2n + 3) + t_5(2t_5ns - ns - 2n + 1) + t_6(2t_6ns + ns + 2n + 3))$ dan $d = m_1 - m_2 + m_3^2 - m_4^2 + \frac{m_5}{2} - \frac{m_6}{2} + t_1 - t_2 + t_3^2 - t_4^2 + \frac{t_5}{2} - \frac{t_6}{2}$ yang telah dibuktikan melalui pembuktian pada **teorema 4.3.1**.

Setelah itu membentuk *Chiphertext* dengan langkah-langkah berikut:

1. Menentukan karakter yang akan dibuat *Chiphertext*.
2. Menentukan dan memilih graf yang memenuhi syarat $|E(G)| \geq h$.
3. Melabeli titik dan sisi sehingga membentuk super $(a, d)\mathcal{H}$ - *antimagic total covering* pada Eksponensial dari Amalgamasi Graf *Cycle* $P_{n+1}^{Amal(C_{m+2,e,s})}$.
4. Mengeliminasi sisi yang memiliki label $f_e > |V(G)| + h$.
5. Membuat diagram pohon sesuai dengan super $(a, d)\mathcal{H}$ - *antimagic total covering* pada Graf Eksponensial dari Graf Lintasan dan Amalgamasi Graf *Cycle* $P_{n+1}^{Amal(C_{m+2,e,s})}$.
6. Membentuk tabel *Chiphertext*.

Sehingga didapat macam-macam *chiphertext* bergantung pada nilai m, n, t, s yang disajikan pada contoh berikut:

Tabel 1 *Chiphertext* alfabet dari Graf $P_4^{Amal(C_9,e,3)}$ dengan $d=9$.

<i>Plaintext</i>	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
<i>Chiphertext</i>	Q	B	Y	V	R	A	X	U	C	F	I	S	Z	W
<i>Plaintext</i>	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	sp	
<i>Chiphertext</i>	T	D	G	J	L	E	H	K	N	M	P	O	@	

Tabel 2 *Chiphertext* simbol dari Graf $P_4^{Amal(C_{11,e,3})}$ dengan $d=22$.

<i>Plaintext</i>	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
<i>Chiphertext</i>	⌘	∂	ℵ	*	¥	ħ	★	Û	ι	⊥	ℒ	◇	∞	≠	□
<i>Plaintext</i>	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	0	1	2	3
<i>Chiphertext</i>	∇	‡	∇	∠	✓	§	♠	∅	◇	j	\	®	√	¶	∃
<i>Plaintext</i>	4	5	6	7	8	9	sp.	.	,	?	!	@	#	\$	&
<i>Chiphertext</i>	#	△	b	/	‡	ℜ	♥	ℓ	♣	⊥	©	¬		∅	§

Stream Cipher disebut juga dengan sandi aliran. *Stream Cipher* ini yang didasarkan pada fungsi *chaos*. Fungsi *chaos* dalam matematika merupakan suatu fungsi yang mempunyai sifat bahwa nilai fungsinya sensitif terhadap nilai awal, artinya perubahan kecil pada nilai awal akan mengakibatkan perubahan besar pada nilai fungsinya. Penerapan fungsi *chaos* dalam *stream cipher* tentu menguntungkan, karena sifat sensitif pada nilai awal tersebut, sehingga diharapkan dapat meningkatkan keamanan dari *stream cipher*. Keuntungan dari *stream cipher* adalah tidak dibatasi oleh panjang *plaintext*. Sama seperti metode eliminasi, *stream cipher* juga menggunakan aturan Julius Caesar. Sehingga *plaintext* y_1, y_2, y_3, \dots dengan $y_i \in Z_{26}$ dan kunci aliran k_1, k_2, k_3, \dots dengan $k_i \in Z_{26}$. *Chiphertext* z_1, z_2, z_3, \dots diperoleh dengan proses enkripsi sebagai berikut:

$$z_1 = y_1 + k_1, z_2 = y_2 + k_2, \dots, z_n = y_n + k_n, z_{n+1} = y_{n+1} + k_{n+1} \dots \pmod{26}.$$

Plaintext y_1, y_2, y_3, \dots diperoleh dengan proses deskripsi sebagai berikut:

$$y_1 = z_1 + k_1, y_2 = z_2 + k_2, \dots, y_n = z_n + k_n, y_{n+1} = z_{n+1} + k_{n+1} \dots \pmod{26}.$$

Dari kajian diatas ada beberapa pelabelan yang belum ditemukan oleh peneliti sehingga dalam penelitian ini diajukan open problem.

Masalah terbuka 0.0.1. Pelabelan *super* (a, d) - \mathcal{H} antimagic total covering pada eksponensial dari graf lintasan dan amalgamasi graf cycle untuk diskonektif $gP_{n+1}^{Amal(C_{m+2,e,s})}$.

KATA PENGANTAR

Puji syukur ke hadirat Allah Swt atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul *Analisa Antimagic Total Covering Super Pada Eksponensial Graf Khusus Dan Aplikasinya Dalam Mengembangkan Chipertext*. Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan pendidikan strata satu (S1) pada Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih atas bantuan dan bimbingan dalam penyusunan skripsi ini, terutama kepada yang terhormat:

1. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
2. Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
3. Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si selaku Dosen Pembimbing Utama dan Kusbudiono, S.Si., M.Si selaku Dosen Pembimbing Anggota yang telah meluangkan waktu, pikiran, dan perhatian dalam penulisan skripsi ini;
4. Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D. selaku Dosen Penguji Utama dan Drs. Rusli Hidayat, M. Sc selaku Dosen Penguji Anggota;
5. M. Ziaul Arif, S.Si., M.Sc. selaku Dosen Pembimbing Akademik;
6. dosen dan karyawan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
7. Ayahanda Shaleh dan Ibunda Nafilah, serta Adikkuku Mohammad Jadid juga seluruh anggota keluarga yang senantiasa memberikan kasih sayang, do'a, semangat serta dukungan yang tidak pernah putus untuk meraih cita-cita;
8. teman-teman pejuang graf yang selalu memberikan dukungan dan semangat untuk segera menyelesaikan skripsi ini;

9. teman-teman pejuang covering: (Zum, Ratih, Riza, dan Yuni) yang selalu memberikan dukungan dan semangat untuk segera menyelesaikan skripsi ini;
10. para sahabati Bidadari Cantik: (Ria, Zum, Rista, Fifit, Wafiya dan Zuhud) yang selalu jadi tempat curhat . Terimakasih untuk doa, dukungan dan semangat dari kalian;
11. teman-teman "Bathics" angkatan 2012 Matematika MIPA yang telah memberikan keluarga baru yang indah, unik dan tak pernah terlupakan. Terimakasih sudah menemani perjuanganku selama 4 tahun ini;
12. seluruh pahlawan tanpa tanda jasa bagiku dari TK Al-Irsyad Jember, SDN I Besuki, SMP Negeri I Banyuglugur, SMA Negeri 1 Besuki, serta Dosen Matematika FMIPA Universitas Jember yang selama ini telah sabar memberikan ilmunya;
13. semua pihak yang telah membantu terselesaikannya skripsi ini.

Semoga bantuan, bimbingan, dan dorongan beliau dicatat sebagai amal baik oleh Allah SWT dan mendapat balasan yang sesuai dari-Nya. Selain itu, penulis juga menerima segala kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan skripsi ini. Akhirnya penulis berharap, semoga skripsi ini dapat bermanfaat.

Jember, Juni 2016

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
PERSEMBAHAN	ii
HALAMAN MOTTO	iii
HALAMAN PERNYATAAN	iv
HALAMAN PENGESAHAN	vi
RINGKASAN	vii
KATA PENGANTAR	xii
DAFTAR ISI	xiv
DAFTAR GAMBAR	xvi
DAFTAR TABEL	xvii
1 PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	3
1.3 Tujuan Penelitian	3
1.4 Manfaat Penelitian	4
2 TINJAUAN PUSTAKA	5
2.1 Konsep Dasar dan Terminologi Graf	5
2.2 Graf Khusus	7
2.3 Operasi Graf	8
2.4 Fungsi dan Barisan Aritmatika	10
2.5 Partisi	11
2.6 Pelabelan Graf	11
2.6.1 Definisi Pelabelan Graf	11
2.6.2 Pelabelan Super- \mathcal{H} Antimagic Total Covering	13
2.6.3 Lemma untuk batas atas d	13
2.6.4 Teknik Partisi pada Pelabelan Graf	14
2.7 Aplikasi Graf	18
2.8 Hasil-hasil Pelabelan Selimut Super (a, d) - \mathcal{H} -Antimagic	20
3 METODE PENELITIAN	21

3.1	Metode Penelitian	21
3.2	Rancangan Penelitian	21
3.2.1	Penotasian Titik dan Sisi	21
3.2.2	Indikator Pelabelan	22
3.3	Teknik Penelitian	23
3.4	Observasi	26
4	HASIL DAN PEMBAHASAN	31
4.1	Kardinalitas dan Batas Atas Eksponensial Dari Graf Lintasan dan dari Amalgamasi Graf <i>Cycle</i>	31
4.2	Pengembangan Partisi dan Variasi Nilai Beda d	33
4.3	Super (a, d) - $P_{n+1}^{Amal(C_{m+2}, e, s)}$ - <i>Antimagic Total Covering</i> pada Eksponensial dari Graf Lintasan dan Graf Lintasan dan Amalgamasi Graf <i>Cycle</i>	36
4.4	Pengembangan <i>Chiphertext</i> Super (a, d) - \mathcal{H} - <i>Antimagic Total Covering</i> pada Eksponensial Dari Graf Lintasan dan dari Amalgamasi Graf <i>Cycle</i> $P_{n+1}^{Amal(C_{m+2}, e, s)}$	44
4.4.1	Pembentukan <i>Chiphertext</i> Alfabet Super $(1142, 9)$ - \mathcal{H} - <i>Antimagic Total Covering</i> pada Eksponensial dari Graf Lintasan dan Graf Lintasan dan Amalgamasi Graf <i>Cycle</i> $P_4^{Amal(C_9, e, 3)}$	45
4.4.2	Pembentukan <i>Chiphertext</i> Simbol Super $(1692, 22)$ - \mathcal{H} - <i>Antimagic Total Covering</i> pada Eksponensial dari Graf Lintasan dan Graf Lintasan dan Amalgamasi Graf <i>Cycle</i> $P_4^{Amal(C_{11}, e, 3)}$	48
4.4.3	Pembentukan <i>Stream Chipher</i> Super $(11411, 15)$ - \mathcal{H} - <i>Antimagic Total Covering</i> pada Eksponensial dari Graf Lintasan dan Graf Lintasan dan Amalgamasi Graf <i>Cycle</i> $P_4^{Amal(C_{10}, e, 3)}$	51
4.5	Hasil dan Pembahasan	60
5	PENUTUP	67
5.1	Kesimpulan	67
5.2	Saran	69
	DAFTAR PUSTAKA	70
	LAMPIRAN-LAMPIRAN	73

DAFTAR GAMBAR

2.1	Graf G , Subgraf G dan <i>Spanning</i> Subgraf G	5
2.2	Contoh gabungan graf	7
2.3	Contoh Graf Khusus	8
2.4	Graf hasil operasi amalgamasi	9
2.5	Graf hasil operasi eksponensial	9
2.6	(a) fungsi injektif, (b) fungsi surjektif, dan (c) fungsi bijektif . . .	11
2.7	Pelabelan Graf	12
2.8	Alur Kerja Kriptografi	18
3.1	Graf $P_4^{Amal(C_6,e,3)}$	23
3.2	Diagram Alir Penelitian	24
3.3	Observasi Awal	26
3.4	Observasi Awal Pembentukan <i>Chipertext</i>	29
4.1	Graf $P_4^{Amal(C_{11},e,3)}$	41
4.2	Graf $P_4^{Amal(C_{10},e,3)}$	42
4.3	Graf $P_4^{Amal(C_9,e,3)}$	43
4.4	Diagram Pohon $P_4^{Amal(C_9,e,3)}$	46
4.5	Diagram Pohon $P_4^{Amal(C_{11},e,3)}$	49

DAFTAR TABEL

1	<i>Chiphertext</i> alfabet dari Graf $P_4^{Amal(C_9,e,3)}$ dengan $d=9$	x
2	<i>Chiphertext</i> simbol dari Graf $P_4^{Amal(C_{11},e,3)}$ dengan $d=22$	xi
2.1	Klasifikasi partisi $d = c$	15
2.2	Klasifikasi partisi $d = c^2$	16
2.3	Aturan Julius Caesar.	19
2.4	Ringkasan pelabelan selimut super (a, d) - \mathcal{H} - <i>antimagic</i> pada graf konektif.	20
3.1	Klasifikasi partisi yang digunakan.	27
3.2	Klasifikasi eksponensial dari graf lintasan dan amalgamasi graf <i>cycle</i>	27
3.3	Pembentukan <i>chiphertext</i> dari Gambar 3.4.	30
4.1	Pembentukan <i>Chiphertext</i> alfabet dari Gambar 4.3.	47
4.2	Aturan pengkodean untuk bilangan mod 45.	48
4.3	Pembentukan <i>Chiphertext</i> alfabet dari Gambar 4.1.	50
4.4	Proses enkripsi <i>stream chipher</i> dari <i>plaintext</i> menjadi <i>chiphertext</i>	52
4.5	Proses enkripsi <i>stream chipher</i> dari <i>plaintext</i> menjadi <i>chiphertext</i>	55
4.6	<i>Chiphertext</i> alfabet dari Graf $P_4^{Amal(C_9,e,3)}$ dengan $d=9$	63
4.7	<i>Chiphertext</i> simbol dari Graf $P_4^{Amal(C_{11},e,3)}$ dengan $d=22$	63
5.1	<i>Chiphertext</i> alfabet dari Graf $P_4^{Amal(C_9,e,3)}$ dengan $d=9$	68
5.2	<i>Chiphertext</i> simbol dari Graf $P_4^{Amal(C_{11},e,3)}$ dengan $d=22$	68
5.3	Contoh klasifikasi partisi $d = m$	73
5.4	Contoh klasifikasi partisi $d = -m$	73
5.5	Contoh klasifikasi partisi $d = m^2$	73
5.6	Contoh klasifikasi partisi $d = -m^2$	74
5.7	Contoh klasifikasi partisi $d = \frac{m}{2}$	74
5.8	Contoh klasifikasi partisi $d = -\frac{m}{2}$	74

BAB 1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori graf awal mula ditemukan pada abad ke-18 dan aplikasinya banyak ditemukan dalam kehidupan sehari-hari. Lahirnya teori graf pertama kali diperkenalkan oleh Leonhard Euler seorang ahli matematikawan Swiss pada tahun 1736, yang berisi tentang upaya pemecahan masalah jembatan Königsberg di Eropa. Kota Königsberg memiliki tujuh buah jembatan yang menghubungkan empat wilayah di kota tersebut. Beberapa warga Kota Königsberg mengajukan pertanyaan kepada Leonard Euler, seorang matematikawan yang berasal dari Swiss mengenai mungkin tidaknya melakukan perjalanan melewati ketujuh jembatan tetapi tidak boleh melewati jembatan yang sama lebih dari satu kali. Leonard Euler mempresentasikan empat wilayah darat di Kota Königsberg sebagai titik, dan tujuh jembatan sebagai sisi. Euler memberikan jawaban bahwa perjalanan melewati ketujuh jembatan tetapi tidak boleh melewati jembatan yang sama lebih dari satu kali tidak mungkin dilakukan. Masalah ini menjadi sejarah lahirnya teori graf. Teori graf juga terdapat aplikasi yang bisa diterapkan. Salah satunya aplikasi yang diterapkan pada pelabelan. Aplikasi yang dapat diterapkan pada pelabelan adalah mengembangkan *chiphertext* atau pesan rahasia. *Ciphertext* digunakan untuk mengirim pesan rahasia agar tidak terbaca oleh orang lain kecuali pengirim dan penerima pesan yang dituju yang dapat membaca pesan tersebut. Salah satu cara yang digunakan untuk mengubah pesan menjadi *ciphertext*, yaitu dengan menerapkan sistem (mod 26) atau yang biasa disebut dengan Caesar *system*.

Salah satu topik yang dibahas pada teori graf yaitu pelabelan graf. Pelabelan graf pertama kali diperkenalkan oleh Sedlacek (1963), Stewart (1967), Kotzig dan Rosa (1970). Pelabelan graf direpresentasikan oleh titik dan sisi serta himpunan bagian bilangan asli yang disebut label. Suatu pelabelan adalah fungsi into yang memetakan himpunan dari berbagai elemen graf pada bilangan bulat non-negatif yang disebut label. Salah satu pelabelan yang banyak diteliti adalah pelabelan

magic dan pelabelan *antimagic*. Pelabelan *covering* \mathcal{H} *magic* pada sebuah graf $G = (V(G), E(G))$ apabila setiap garis pada $E(G)$ terdapat dalam subgraf \mathcal{H} dari G yang isomorfik dengan \mathcal{H} dan \mathcal{H} merupakan subgraf dari G . Setelah itu dikembangkan sebagai pelabelan selimut \mathcal{H} – *antimagic* oleh Inayah (2013) yakni suatu pelabelan *covering* \mathcal{H} – *antimagic* pada graf G yang mempunyai sebuah fungsi bijektif sehingga terdapat jumlahan yang membentuk barisan aritmatika $a, a + d, a + 2d, \dots, a + (s - 1)d$. Fungsi bijektif pada suatu graf tersebut berbeda dan berurutan. Setiap pelabelan graf mempunyai nilai batas atas d yang tidak sama dan nilai d tidak tunggal (Dafik et al., 2009). Nilai $d \leq s$ dengan d adalah bilangan bulat positif dan s adalah nilai terbesar d dalam suatu graf. Nilai batas atas digunakan untuk mengetahui nilai beda maksimum dalam mencari pelabelan super (a, d) – \mathcal{H} – *antimagic* total *covering*.

Beberapa penelitian sejenis yang telah dikembangkan antara lain, Pelabelan Selimut (a, d) - \mathcal{H} Anti Ajaib Super pada Graf Fan, Sun, dan Generalized Petersen oleh Karyanti pada tahun 2012. Inayah (2013) meneliti tentang Suatu Pelabelan (a, d) - \mathcal{H} -*Antimagic Covering* Pada Graf Kipas F_n dan Graf Roda W_n . Pudyaningrum et al. (2014) meneliti Pengembangan Total Selimut Super Pada Graf Shackle Triangular Book. Jamil et al. (2014) meneliti super (a, d) - \mathcal{H} -*Antimagic Total Covering* Pada Gabungan Saling Lepas Graf Triangular Ladder. Kean-timagikan Super Total Selimut Pada Gabungan Saling Lepas Graf Shackle Triangular Book oleh Agustin et al. (2014). Muhni (2014) meneliti Pelabelan Total Super (a, d) - \mathcal{H} -*Antimagic* Pada Graf Daun. Pelabelan Super (a, d) - \mathcal{H} -*Antimagic Total Covering* Pada Amalgamasi Graf Kipas oleh Latifah (2015). Super (a, d) - A_p^Q Anti Ajaib Total Dekomposisi Graf Shackle Antiprisma Untuk Pengembangan *Chiphertext* Dan Keterampilan Berpikir Tingkat Tinggi oleh Yuli (2016).

Berdasarkan pada latar belakang dan hasil-hasil penelitian terdahulu yang telah dipaparkan diatas maka dilakukan penelitian dengan judul ” ***Analisa Antimagic Total Covering Super pada Eksponensial Graf Khusus dan Aplikasinya dalam Mengembangkan Chiphertext***”. Graf yang dipilih adalah Eksponensial dari Graf Lintasan dan Amalgamasi Graf *Cycle* untuk diteliti. Peneliti memilih Eksponensial dari Graf Lintasan dan Amalgamasi Graf *Cycle* karena graf

tersebut belum ada yang yang meneliti dan masih baru di dalam bidang teori graf. Langkah awal yang dilakukan adalah menentukan kardinalitas titik dan sisi dan menentukan batas atas beserta beberapa nilai beda d . Ekspansional graf khusus yang digunakan adalah Ekspansional dari Graf Lintasan dan Amalgamasi Graf *Cycle* yang dinotasikan dengan $P_{n+1}^{Amal(C_{m+2},e,s)}$.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan pemaparan dari latar belakang di atas, maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah:

- a. bagaimana menentukan kardinalitas titik dan sisi pada Ekspansional dari Graf Lintasan dan Amalgamasi Graf *Cycle*?
- b. bagaimana menentukan batas atas *antimagic total covering* super pada Ekspansional dari Graf Lintasan dan Amalgamasi Graf *Cycle*?
- c. bagaimana menentukan beberapa nilai beda d *antimagic total covering* super pada Ekspansional dari Graf Lintasan dan Amalgamasi Graf *Cycle*?
- d. bagaimana mengembangkan *ciphertext* dengan menggunakan analisa *antimagic total covering* super pada Ekspansional dari Graf Lintasan dan Amalgamasi Graf *Cycle*?

1.3 Tujuan Penelitian

Sesuai dengan rumusan masalah dan pemaparan latar belakang diatas, adapun tujuan dari penelitian ini adalah:

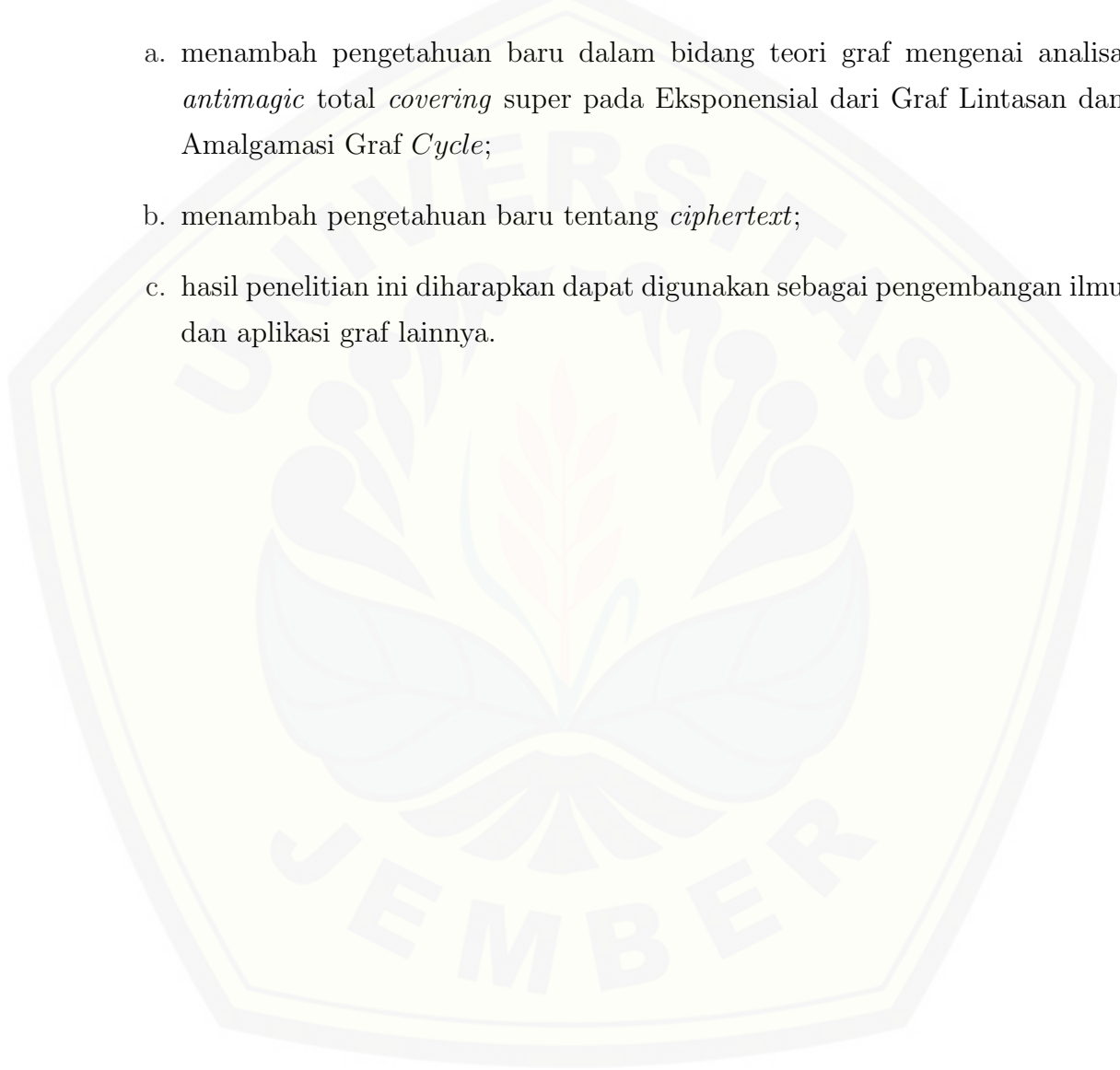
- a. menentukan kardinalitas titik dan sisi pada Ekspansional dari Graf Lintasan dan Amalgamasi Graf *Cycle*;
- b. menentukan batas atas *antimagic total covering* super pada Ekspansional dari Graf Lintasan dan Amalgamasi Graf *Cycle*;
- c. menentukan beberapa nilai beda d *antimagic total covering* super pada Ekspansional dari Graf Lintasan dan Amalgamasi Graf *Cycle*;

- d. mengembangkan *ciphertext* dengan menggunakan analisa *antimagic* total *covering* super pada Eksponensial dari Graf Lintasan dan Amalgamasi Graf *Cycle*.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari hasil penelitian ini adalah:

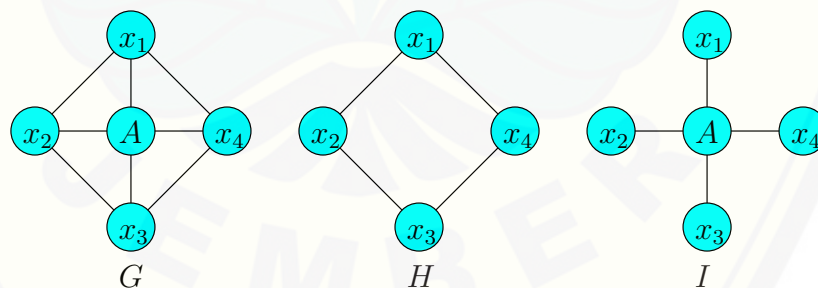
- a. menambah pengetahuan baru dalam bidang teori graf mengenai analisa *antimagic* total *covering* super pada Eksponensial dari Graf Lintasan dan Amalgamasi Graf *Cycle*;
- b. menambah pengetahuan baru tentang *ciphertext*;
- c. hasil penelitian ini diharapkan dapat digunakan sebagai pengembangan ilmu dan aplikasi graf lainnya.



BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Konsep Dasar dan Terminologi Graf

Sebuah graf G dideskripsikan sebagai pasangan himpunan tak kosong V yang elemen-elemennya disebut titik (*vertex*) dan himpunan yang boleh kosong E yang elemen-elemennya disebut sisi (*edge*). *Vertex* digambarkan sebagai titik atau node. Sisi digambarkan sebagai garis yang menghubungkan dua buah *vertex*. Secara matematis, sisi merupakan pasangan tak terurut (u, v) dari dua titik u dan v di V . Himpunan titik di graf G dinyatakan dengan $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ dan himpunan sisi di graf G dinyatakan dengan $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. Dengan demikian dari definisi di atas menyatakan bahwa sebuah graf harus memiliki titik dan diperbolehkan tidak memiliki sisi. Sehingga, sebuah graf dimungkinkan tidak mempunyai sisi satu buah pun, tetapi titiknya harus ada minimal satu. Graf yang tidak memiliki sisi dinamakan graf kosong. Graf kosong yang hanya mempunyai satu titik dinamakan graf trivial (Munir, 2001). Banyaknya titik di G dinotasikan dengan $|V(G)|$ sedangkan banyaknya sisi pada graf G disebut size dari G , dinotasikan dengan $|E(G)|$. Berikut Gambar 2.1 adalah graf yang dinamakan dengan graf G .



Gambar 2.1 Graf G , Subgraf G dan *Spanning* Subgraf G

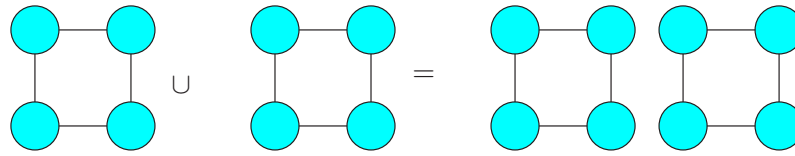
Dua buah titik pada graf G dikatakan bertetangga (*adjacent*) apabila kedua titik tersebut langsung berhubungan dengan sebuah sisi. Dengan kata lain, u bertetangga dengan v jika (u, v) adalah sebuah sisi pada graf G (Purwanto et al.,

2006). Pada graf G , x_1 bertetangga dengan x_2 , x_4 , dan A . Sedangkan jika ada sebuah sisi yang menghubungkan dua titik, maka dapat dikatakan titik tersebut bersisian (*incident*) dengan sisi tersebut. Pada graf G , x_3 bersisian dengan (x_2, x_3) , (x_4, x_3) .

Derajat (*degree*) dari titik v dinotasikan dengan $d(v)$ adalah jumlah sisi yang berada di titik v tersebut. Derajat total graf adalah jumlah derajat semua titik graf. Jalan (*walk*) pada sebuah graf yaitu barisan titik dan sisi dimana awal dan akhirnya berupa sebuah titik. Sehingga $W = (e_1; v_1, e_2; v_2, e_3; v_3, \dots, e_n; v_n)$. Banyaknya sisi dalam W merupakan panjang jalan W . Jalan (*walk*) yang titik awal dan titik akhirnya sama atau *identik* ($v_0 = v_k$) dikatakan tertutup. Lintasan adalah suatu jalan yang keseluruhan titiknya berbeda (Hartseld dan Ringel, 1994). Disebut lintasan (*path*) jika titik jalan yang berbeda, sedangkan disebut jejak (*trail*) jika semua sisinya yang berbeda. Dengan kata lain, *path* adalah *trail* yang tidak memiliki titik yang berulang. Sikel (*cycle*) adalah jalan tertutup dengan lintasan (*path*) yang berawal dan berakhir pada titik yang sama, yaitu $A_1 = A_n$ yang membentuk barisan titik yang berbeda (lintasan yang tertutup). Jarak atau *distance* dari suatu graf adalah panjang lintasan (*path*) terpendek dari dua buah titik sembarang pada graf yang dinotasikan dengan $\delta(u, v)$. Jarak terpanjang antara dua buah titik sembarang pada graf disebut diameter yang dinotasikan sebagai $diamG = \max\{e(v) : v \in V\}$.

Graf H adalah subgraf dari graf G jika setiap titik dan sisi dari graf G adalah titik dan sisi dari graf H . Graf G adalah subgraf dari graf H dapat dinotasikan dengan $V(H) \subseteq V(G)$ dan $E(H) \subseteq E(G)$. *Spanning* subgraf dari graf G adalah subgraf yang dihasilkan dari graf G dengan menghapus sisi. Contoh Gambar 2.1 adalah graf G , graf H subgraf dari graf G dan graf I *spanning* subgraf dari graf G .

Graf G merupakan graf terhubung (*connected*) jika terdapat lintasan (*path*) yang menghubungkan titik-titik pada graf G . Jika tidak terdapat lintasan, maka disebut graf tak terhubung (*disconnected*). Sedangkan gabungan dua graf atau lebih dinotasikan dengan mG merupakan gabungan saling lepas (*Disjoint*) salinan graf G sebanyak m komponen. Berikut adalah contoh graf gabungan :



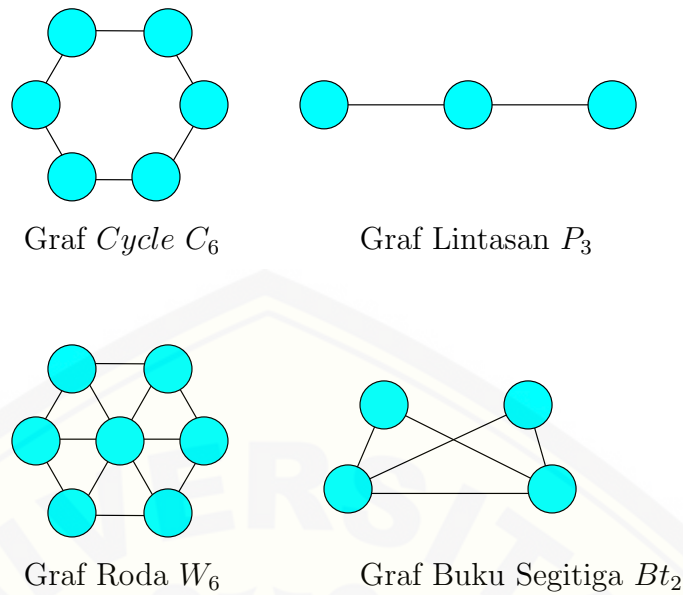
Gambar 2.2 Contoh gabungan graf

2.2 Graf Khusus

Sebuah graf disebut graf khusus karena graf tersebut memiliki karakteristik dan ciri-ciri tertentu. Karakteristik graf khusus dapat dilihat bahwa graf tetap simetris meskipun diperluas sampai n . Ciri-cirinya dapat dilihat bahwa graf khusus tidak isomorfis dengan graf lain. Berikut adalah contoh-contoh graf khusus:

Graf lingkaran atau (*cycle*) yaitu graf yang setiap titiknya berderajat dua, sehingga dalam graf *cycle* jumlah titik dan sisinya sama. Graf lingkaran dengan n titik dinotasikan dengan C_n dengan $n \geq 3$ (Munir, 2001). Menurut Dafik *et al.* (2013), graf buku segitiga (*Triangular Book*) yang dilambangkan dengan Bt_n ialah graf yang setiap segitiga memiliki 2 titik yang sama atau dengan kata lain terdiri dari sejumlah n ($n \geq 2$) dengan setiap segitiga mempunyai satu sisi yang digunakan bersama.

Graf lintasan atau *path graph* adalah graf yang terdiri dari satu lintasan. Graf lintasan dengan n titik dinotasikan P_n dengan $n \geq 2$. Graf roda yang dinotasikan W_n dengan $n \geq 3$ merupakan graf yang dibentuk dari graf sikel C_n dan satu titik yang disebut titik tengah (pusat) yang *adjacent* dengan semua titik di sikel C_n (Gallian, 2009).



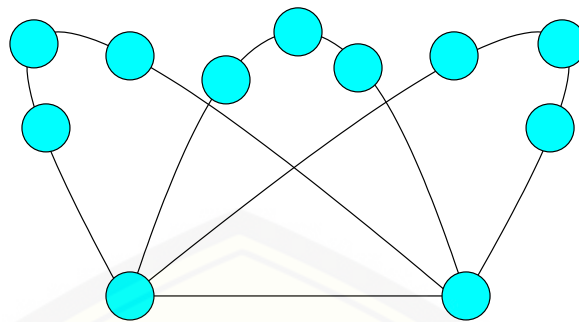
Gambar 2.3 Contoh Graf Khusus

2.3 Operasi Graf

Operasi graf adalah salah satu teknik untuk menghasilkan graf baru dengan cara melakukan operasi pada dua buah graf atau lebih. Dalam penelitian ini, operasi graf yang digunakan yaitu amalgamasi dan eksponensial.

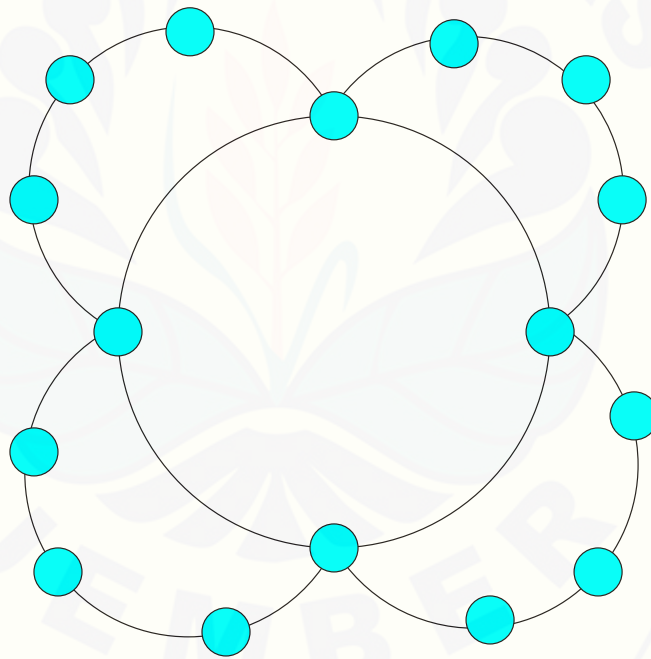
Amalgamasi dinotasikan dengan $Amal(G, v, n)$ dimana setiap G mempunyai suatu titik v yang disebut titik terminal, dan n menyatakan banyaknya graf G yang akan diamalgamasi. Jika terminalnya adalah suatu sisi, maka amalgamasi tersebut dinamakan amalgamasi sisi yang dinotasikan dengan $Amal(G, e, n)$ (Ardiyansah dan Darmaji, 2013).

Misal diberikan graf G_1 dan graf G_2 maka Graf Eksponensial adalah sebuah graf yang dibentuk dari graf G_1 dengan mengganti semua sisi dari graf G_1 dengan graf G_2 , dinotasikan dengan $G_1^{G_2}$. Misal graf G_1 dengan titik $|V(G_1)| = p_1$ dan sisi $|E(G_1)| = q_1$, serta graf G_2 dengan titik $|V(G_2)| = p_2$ dan sisi $|E(G_2)| = q_2$. Maka Graf Eksponensial $G_1^{G_2}$ mempunyai titik $p = |V(G)| = p_2q_1 + p_1$ dan sisi $p = |E(G)| = q_1(q_2 + 1)$ (Solehah, 2016). Berikut adalah contoh graf eksponensial $C_4^{C_5}$.



$Amal(C_5, e, 3)$

Gambar 2.4 Graf hasil operasi amalgamasi



$C_4^{C_5}$

Gambar 2.5 Graf hasil operasi eksponensial

2.4 Fungsi dan Barisan Aritmatika

Fungsi dari sebuah himpunan A ke himpunan B dideskripsikan sebagai suatu relasi yang memetakan setiap anggota himpunan A dengan tepat satu anggota himpunan B . Himpunan A diartikan sebagai daerah asal fungsi atau *domain* dan himpunan B diartikan sebagai daerah kawan fungsi atau *kodomain*. Fungsi juga dikenal dengan istilah "pemetaan", "peta" atau "transformasi", sedangkan daerah hasil pemetaan diartikan sebagai *range*. Untuk mendeskripsikan suatu pemetaan, dapat digunakan notasi sebagai berikut:

$$f : A \rightarrow B$$

Maksud notasi di atas adalah fungsi f memetakan setiap anggota A dengan tepat satu pasangan anggota himpunan B .

Ada beberapa jenis fungsi diantaranya adalah fungsi injektif, fungsi surjektif, dan fungsi bijektif.

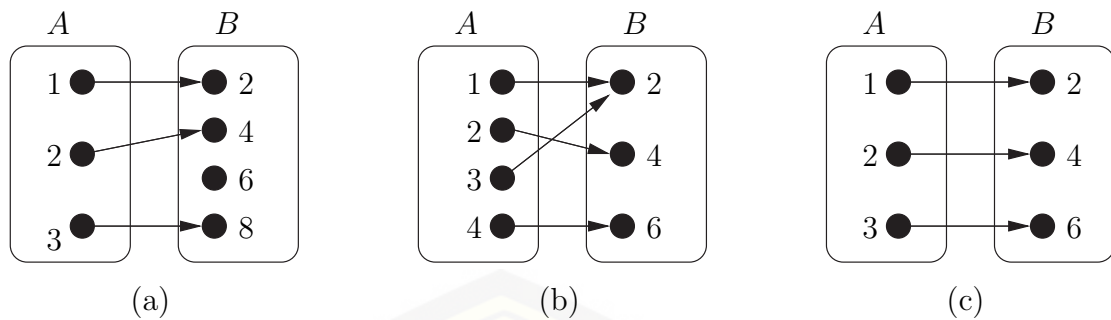
- Fungsi $f: A \rightarrow B$ dikatakan fungsi injektif yang dikenal juga dengan nama fungsi into atau fungsi satu-satu jika dan hanya jika untuk sebarang a_1 dan a_2 anggota himpunan A , dimana $a_1 \neq a_2$ maka berlaku $f(a_1) \neq f(a_2)$.
- Fungsi $f: A \rightarrow B$ dikatakan fungsi surjektif yang dikenal juga dengan nama fungsi pada atau fungsi onto jika dan hanya jika range $f(R_f)$ sama dengan B atau $\forall b \in B, \exists a \in A$ maka $f(a) = b$.
- Fungsi $f: A \rightarrow B$ dikatakan fungsi bijektif apabila fungsi tersebut merupakan gabungan dari fungsi surjektif dan fungsi injektif.

Gambar 2.6 menunjukkan fungsi injektif, surjektif dan bijektif.

Barisan aritmatika adalah suatu barisan yang teratur, dengan a adalah suku pertama dan b merupakan selisih antara 2 suku yang berurutan atau biasa disebut beda (b) = $U_n - U_{n-1}$ yang selalu bernilai tetap untuk membentuk sebuah barisan $U_1, U_2, U_3, \dots, U_{n-1}, U_n$ dimana $U_2 - U_1 = U_3 - U_2 = \dots = U_n - U_{n-1} =$ konstanta. Misalkan contoh barisan bilangan berikut :

$$50, 70, 90, \dots, n$$

Barisan bilangan di atas mempunyai beda 20 (dua puluh). Jika ditulis dalam bentuk aritmatika barisan diatas menjadi bentuk



Gambar 2.6 (a) fungsi injektif, (b) fungsi surjektif, dan (c) fungsi bijektif

$$\begin{aligned}
 U_1 &= a + (n - 1)b = 50 + (1 - 1)20 = 50 \\
 U_2 &= a + (n - 1)b = 50 + (2 - 1)20 = 70 \\
 U_3 &= a + (n - 1)b = 50 + (3 - 1)20 = 90 \\
 &\vdots \\
 U_n &= a + (n - 1)b = 50 + (n - 1)20 = 20n + 30
 \end{aligned}$$

2.5 Partisi

Partisi dari sebuah himpunan P adalah sebuah keluarga himpunan yang terdiri dari himpunan-himpunan bagian tak kosong dari P yang saling asing (*disjoint*) satu sama lain dan gabungan dari semua himpunan bagian tersebut akan kembali membentuk himpunan P . Misalkan terdapat sebuah keluarga himpunan $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ maka keluarga himpunan tersebut dikatakan partisi dari himpunan P apabila $\forall_{i,j} \in 1, 2, 3, \dots, n, i \neq j$ maka $P_i \cap P_j = \phi$ dan $\bigcup_{i=1}^n P_i = P$. (Prihandoko, 2003).

2.6 Pelabelan Graf

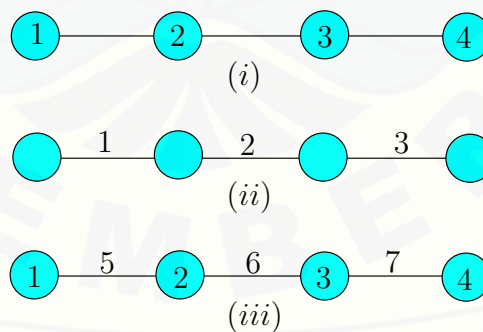
2.6.1 Definisi Pelabelan Graf

Pelabelan graf adalah suatu pemetaan bijektif yang memetakan himpunan titik dan sisi ke himpunan bilangan bulat positif. Fungsi yang memetakan himpunan titik dan sisi ke himpunan bilangan bulat positif. Jadi, fungsi yang memetakan himpunan elemen pada graf ke himpunan bilangan bulat positif disebut fungsi bijektif jika tidak ada dua buah elemen yang berbeda pada graf yang mempunyai

bayangan yang sama atau dengan kata lain semua elemen pada graf dilabeli dengan bilangan bulat positif yang berbeda.

Berdasarkan elemen yang dilabeli, pelabelan dibagi menjadi 3 jenis. Pelabelan (*labelling*) pada sebuah graf G didefinisikan sebagai jika domain dari fungsi tersebut berupa himpunan titik maka pelabelan tersebut disebut pelabelan titik, sedangkan jika domainnya adalah himpunan sisi maka pelabelannya disebut pelabelan sisi. Terdapat juga pelabelan total yaitu pelabelan yang terjadi apabila domainnya meliputi penggabungan dari himpunan titik dan himpunan sisi (Kotzig dan Rosa, 1970). Pada pelabelan titik, bobot sisi ialah jumlah label dua titik yang menempel pada suatu sisi. Apabila semua sisi memiliki bobot sisi yang sama maka dinamakan pelabelan titik sisi *magic*. Apabila semua sisi memiliki bobot sisi yang tidak sama dan himpunan bobot sisi dari seluruh sisi menyusun barisan aritmatika dengan a sebagai suku pertama dan d sebagai beda maka pelabelan tersebut disebut pelabelan titik sisi *antimagic edge antimagic vertex labelling (EAVL)*.

Pada pelabelan total, bobot sisi dijelaskan sebagai jumlah label sisi dan label dua titik yang melekat pada suatu sisi. Apabila semua sisi memiliki bobot sisi yang sama maka pelabelan tersebut dinamakan pelabelan total sisi *magic*. Apabila semua sisi memiliki bobot sisi yang tidak sama dan himpunan bobot sisi dari semua sisi membentuk barisan aritmatika dengan suku pertama a dan beda d maka pelabelan tersebut dinamakan pelabelan total sisi *antimagic* (Maryati et al., 2010). Gambar 2.7 menunjukkan pelabelan graf.



Gambar 2.7 Pelabelan Graf

Pada Gambar 2.7 graf (i) merupakan contoh dari pelabelan titik, graf (ii)

merupakan contoh dari pelabelan sisi, dan graf (iii) merupakan contoh dari pelabelan total.

2.6.2 Pelabelan Super- \mathcal{H} Antimagic Total Covering

Pelabelan super- \mathcal{H} antimagic selimut pada graf G dengan v titik dan e sisi didefinisikan sebagai fungsi bijektif dari titik-titik dan sisi-sisi pada himpunan bilangan bulat dari 1 sampai sejumlah titik dan sisi, secara matematis dapat ditulis dalam bentuk $f : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, |V(G)| + |E(G)|\}$ dengan sifat bahwa setiap subgraf dari G yang isomorfik dengan H dimana H juga subgraf dari G memiliki total label $\omega(H)$ yang berbeda, $\omega(H) = \sum_{v \in V(H)} f(v) + \sum_{e \in E(H)} f(e)$. Graf G dikatakan memiliki pelabelan \mathcal{H} antimagic super jika himpunan titik $V(G)$ merupakan pemetaan bijektif f ke himpunan $\{1, 2, 3, \dots, |V(G)|\}$ (Gutierrez and Llado, 2005).

2.6.3 Lemma untuk batas atas d

Lemma 2.6.1. *Jika sebuah graf $G(V, E)$ adalah pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} antimagic total covering maka*

$$d \leq \frac{(p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H}{s - 1}$$

untuk $s = |H_i|$, $p_G = |V|$, $q_G = |E|$, $p_H = |V'|$, $q_H = |E'|$

Bukti. $f(V) = 1, 2, 3, \dots, p_G$ dan $f(E) = p_G + 1, p_G + 2, p_G + 2, \dots, p_G + q_G$. Misalkan graf (p_G, q_G) memiliki pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} antimagic total dengan fungsi total $f(\text{total}) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots, p_G + q_G\}$ maka himpunan bobot sebuah graf adalah $\{a, a + d, a + 2d, \dots, a + (s - 1)d\}$ dimana a merupakan bobot terkecil maka berlaku:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + p_H + (p_G + 1) + (p_G + 2) + \dots + (p_G + q_H) &\leq a \\ \frac{p_H}{2}(1 + p_H) + q_H p_G + \frac{q_H}{2}(1 + q_H) &\leq a \\ \frac{p_H}{2} + \frac{p_H^2}{2} + q_H p_G + \frac{q_H}{2} + \frac{q_H^2}{2} &\leq a \end{aligned}$$

Sedangkan untuk nilai terbesar berlaku:

$$\begin{aligned}
 a + (s-1)d &\leq p_G + (p_G - 1) + (p_G - 2) + \dots + (p_G - (p_H - 1)) + (p_G + q_G) \\
 &\quad + (p_G + q_G - 1) + (p_G + q_G - 2) + \dots + (p_G + q_G - (q_H - 1)) \\
 &= p_H p_G - \frac{p_H - 1}{2}(1 + (p_H - 1)) + q_H p_G + q_H q_G \\
 &\quad - \frac{q_H - 1}{2}(1 + (q_H - 1)) \\
 &= p_H p_G - \frac{p_H - 1}{2}(p_H) + q_H p_G + q_H q_G - \frac{q_H - 1}{2}(q_H)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (s-1)d &\leq p_H p_G - \frac{p_H - 1}{2}(p_H) + q_H p_G + q_H q_G - \frac{q_H - 1}{2}(q_H) - a \\
 &\leq p_H p_G - \frac{p_H - 1}{2}(p_H) + q_H p_G + q_H q_G - \frac{q_H - 1}{2}(q_H) - \\
 &\quad \left(\frac{p_H}{2} + \frac{p_H^2}{2} + q_H p_G + \frac{q_H}{2} + \frac{q_H^2}{2}\right) \\
 &= p_H p_G - \frac{p_H^2}{2} + \frac{p_H}{2} + q_H q_G - \frac{q_H^2}{2} + \frac{q_H}{2} - \left(\frac{p_H}{2} + \frac{p_H^2}{2} + \frac{q_H}{2} + \frac{q_H^2}{2}\right) \\
 &= p_H p_G + q_H q_G - p_H^2 - q_H^2 \\
 &= p_H p_G - p_H^2 + q_H q_G - q_H^2 \\
 &= (p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H \\
 d &\leq \frac{(p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H}{(s-1)}
 \end{aligned}$$

Dari persamaan diatas terbukti bahwa batas atas $d \leq \frac{(p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H}{s-1}$ jika graf G memiliki super (a, d) - \mathcal{H} -*antimagic* total *covering* dari berbagai famili graf (Dafik, 2007). \square

2.6.4 Teknik Partisi pada Pelabelan Graf

Teknik partisi merupakan suatu teknik yang dapat diterapkan pada pelabelan (a, d) - \mathcal{H} -*antimagic* super pada suatu graf. Misalkan n , c , d , dan k merupakan bilangan bulat positif dimana n merupakan banyaknya selimut, c merupakan banyaknya himpunan pada setiap subgraf dan d merupakan merupakan ni-

lain berbeda. Partisi $\mathcal{P}_{c,d}^n(i, k)$ dari himpunan $\{1, 2, 3, \dots, cn\}$ dapat dinyatakan dalam n kolom, $n \geq 2$, dan c baris adalah partisi pelabelan $(a, d) - \mathcal{H}$ -antimagic super dengan jumlah bilangan-bilangan sebanyak c baris untuk masing-masing kolom membentuk barisan aritmatika dengan beda d dan $k = 1, 2, \dots, n$. $\Sigma \mathcal{P}_{c,d}^n(i, k)$ adalah jumlah bilangan pada $\mathcal{P}_{c,d}^n(i, k)$ dan $d = \mathcal{P}_{c,d}^n(i, k - 1) - \mathcal{P}_{c,d}^n(i, k)$. Notasi $\mathcal{P}_{c,d}^n(i, k) \oplus b$ artinya setiap bilangan pada $\mathcal{P}_{c,d}^n(i, k)$ ditambahkan dengan b , dimana b dapat berupa bilangan asli atau anggota partisi yang lain dan \oplus dibaca *oplus* (Baca dkk, 2013).

Misal terdapat suatu partisi dari suatu pelabelan $\mathcal{P}_{c,d}^n(i, k)$ seperti pada tabel 2.1, dengan menerapkan aturan suku ke- n (U_n) dan jumlah suku ke- n (S_n) pada barisan aritmatika maka diperoleh $\mathcal{P}_{c,d}^n(i, k) = (i - 1)n + k, 1 \leq i \leq c$ dan jumlah dari partisi yaitu $\Sigma \mathcal{P}_{c,d}^n(i, k) = \frac{c^2n - nc}{2} + ck$ dengan beda $d = c$.

Tabel 2.1 Klasifikasi partisi $d = c$.

$i \setminus k$	1	2	...	n	
1	1	2	...	n	
2	$n + 1$	$n + 2$...	$n + n$	
3	$2n + 1$	$2n + 2$...	$2n + n$	
...	
c	$(c - 1)n + 1$	$(c - 1)n + 2$...	$(c - 1)n + n$	+
	a	$a + c$...	$a + (n - 1)c$	$d = c$

Pada tabel 2.2 juga merupakan contoh partisi $\mathcal{P}_{c,d}^n(k)$ lain yang digunakan pada c -tuple. Maka dengan melakukan perhitungan diperoleh $\mathcal{P}_{c,d}^n(k) = \{(k - 1)l + i, 1 \leq i \leq c\}$ dan jumlah dari partisinya adalah $\Sigma \mathcal{P}_{c,d}^n(k) = \frac{c - c^2}{2} + c^2k$ dengan beda $d = c^2$ (Yuli, 2016).

Lemma 2.6.2. Misal m, n dan s bilangan bulat positif dengan variasi nilai beda. Jumlah dari $\mathcal{P}_{m,d}^{n,s}(i, j, k) = \{j + ins - ns + kn - n; 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n; 1 \leq k \leq s\}$ membentuk barisan aritmatik yang berbeda $d = m$.

Bukti. Melalui proses perhitungan sederhana, untuk $j = 1, 2, \dots, n$ dan $k =$

Tabel 2.2 Klasifikasi partisi $d = c^2$.

$i \setminus k$	1	2	3	4	...	n	
1	1	$c + 1$	$2c + 1$	$3c + 1$...	$(n - 1)c + 1$	
2	2	$c + 2$	$2c + 2$	$3c + 2$...	$(n - 1)c + 1$	
3	3	$c + 3$	$2c + 3$	$3c + 3$...	$(n - 1)c + 1$	
...		
c	c	$c + c$	$2c + c$	$3c + c$...	$(n - 1)c + 1$	+
	a	$a + c^2$	$a + 2c^2$	$a + c^3$...	$a + (n - 1)c^2$	$d = c^2$

1, 2, ..., s didapat

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \mathcal{P}_{m,d}^{n,s}(i, j, k) &= \mathcal{P}_{m,d}^{n,s}(j, k) \\ &= \left\{ \frac{n}{2}(m^2s - ms - 2m) + m(j + nk) \right\} \\ &= \left\{ \frac{n}{2}(m^2s - ms - 2m) + m(1 + n), \frac{n}{2}(m^2s - ms - 2m) + \right. \\ &\quad \left. m(2 + 2n), \dots, \frac{n}{2}(m^2s - ms - 2m) + mm(n + ns) \right\} \end{aligned}$$

terbukti. □

Lemma 2.6.3. Misal m, n dan s bilangan bulat positif dengan variasi nilai beda. Jumlah dari $\mathcal{P}_{m,d}^{n,s}(i, j, k) = \{n + 1 - j + ins - kn; 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n; 1 \leq k \leq s\}$ membentuk barisan aritmatik yang berbeda, $d = -m$.

Bukti. Melalui proses perhitungan sederhana, untuk $j = 1, 2, \dots, n$ dan $k = 1, 2, \dots, s$ didapat

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \mathcal{P}_{m,d}^{n,s}(i, j, k) &= \mathcal{P}_{m,d}^{n,s}(j, k) \\ &= \left\{ \frac{m}{2}(mns + ns + 2n + 2) - m(j + nk) \right\} \\ &= \left\{ \frac{m}{2}(mns + ns + 2n + 2) - m(1 + n), \frac{m}{2}(mns + ns + 2n + 2) \right. \\ &\quad \left. - m(2 + 2n), \dots, \frac{m}{2}(mns + ns + 2n + 2) - m(n + ns) \right\} \end{aligned}$$

terbukti. □

Lemma 2.6.4. Misal m, n dan s bilangan bulat positif dengan variasi nilai beda. Jumlah dari $\mathcal{P}_{m,d}^{n,s}(i, j, k) = \{i + jm - m + kmn - mn; 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n; 1 \leq k \leq s\}$ membentuk barisan aritmatik yang berbeda, $d = m^2$.

Bukti. Melalui proses perhitungan sederhana, untuk $j = 1, 2, \dots, n$ dan $k = 1, 2, \dots, s$ didapat

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \mathcal{P}_{m,d}^{n,s}(i, j, k) &= \mathcal{P}_{m,d}^{n,s}(j, k) \\ &= \left\{ \frac{m}{2}(1 - 2mn - m) + m^2(j + nk) \right\} \\ &= \left\{ \frac{m}{2}(1 - 2mn - m) + m^2(1 + n), \frac{m}{2}(1 - 2mn - m) + m^2(2 + 2n), \dots, \frac{m}{2}(1 - 2mn - m) + m^2(n + ns) \right\} \end{aligned}$$

terbukti. □

Lemma 2.6.5. Misal m, n dan s bilangan bulat positif dengan variasi nilai beda. Jumlah dari $\mathcal{P}_{m,d}^{n,s}(i, j, k) = \{mns + mn - jm + i - kmn; 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n; 1 \leq k \leq s\}$ membentuk barisan aritmatik yang berbeda $d = -m^2$.

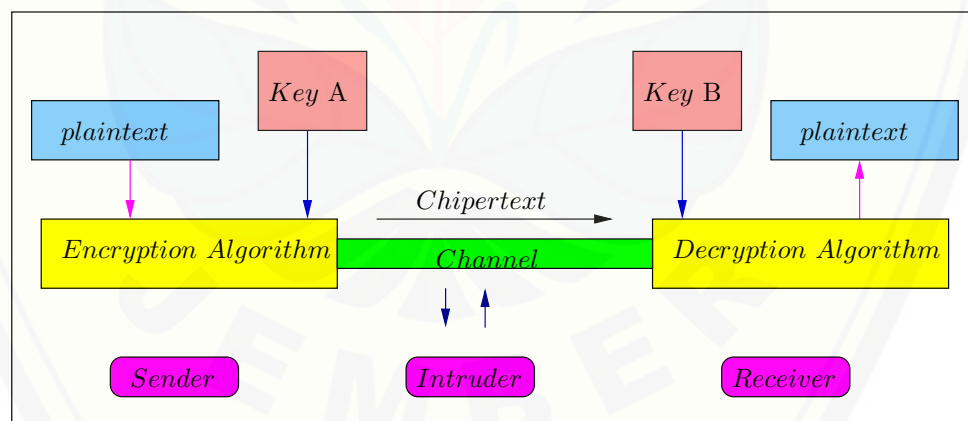
Bukti. Melalui proses perhitungan sederhana, untuk $j = 1, 2, \dots, n$ dan $k = 1, 2, \dots, s$ didapat

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \mathcal{P}_{m,d}^{n,s}(i, j, k) &= \mathcal{P}_{m,d}^{n,s}(j, k) \\ &= \left\{ \frac{m}{2}(2mns + 2mn + m + 1) - m^2(j + nk) \right\} \\ &= \left\{ \frac{m}{2}(2mns + 2mn + m + 1) - m^2(1 + n), \frac{m}{2}(2mns + 2mn + m + 1) - m^2(2 + 2n), \dots, \frac{m}{2}(2mns + 2mn + m + 1) - m^2(n + ns) \right\} \end{aligned}$$

terbukti. □

2.7 Aplikasi Graf

Aplikasi pada graf meliputi berbagai macam, yaitu dalam transparansi, komunikasi, pewarnaan peta, ikatan kimia, desain arsitektur. Untuk aplikasi graf yang lain adalah untuk kristografi, pengaturan jadwal, dan astronomi, dan sebagainya. Aplikasi graf mulai berkembang lagi pada pengembangan *chiphertext*. *Chiphertext* merupakan proses pengembangan dari *cryptosystem*. *Chiphertext* adalah kalimat rahasia yang dikembangkan. Sedangkan *cryptosystem* merupakan suatu fasilitas yang mengkonversikan *plaintext* ke dalam bentuk *chiphertext* dan sebaliknya. Di dalam *cryptosystem* menyangkut *cryptography* yang merupakan skema yang mungkin untuk *encryption* dan *decryption* (Kak, 2015). *Encryption* adalah proses perubahan *plaintext* (pesan yang akan dikirim) menjadi *chiphertext* (pesan rahasia) sedangkan *decryption* adalah proses untuk memperoleh kembali *plaintext* dari *chiphertext*. Dalam proses ini dibutuhkan sebuah kunci rahasia untuk mengatur beberapa atau semua yang digunakan dalam proses *encryption* maupun *decryption*. Secara umum kunci-kunci yang digunakan untuk proses pengenkripsian dan pendeskripsian tidak perlu identik dan tergantung pada sistem yang digunakan (Pearson,2006). Berikut adalah alur kerja pada pengembangan *chiphertext* yang ditunjukkan pada gambar 2.8.



Gambar 2.8 Alur Kerja Kriptografi

Terdapat banyak metode yang dapat digunakan untuk memperoleh *chiphertext* seperti *affine ciphers*, *vigenere ciphers*, *the one-time pad*, *Caesar system*, dan

sebagainya. Metode yang digunakan pada penelitian ini merupakan aplikasi pelabelan total *covering*. Metode ini merujuk pada Caesar *system* yaitu menggunakan sistem (mod 26), atau disebut dengan aturan Julius Caesar. Berikut akan ditunjukkan aturan Julius Caesar pada tabel 2.3

Tabel 2.3 Aturan Julius Caesar.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

2.8 Hasil-hasil Pelabelan Selimut Super (a, d) - \mathcal{H} -Antimagic

Beberapa ringkasan hasil pelabelan selimut super (a, d) - \mathcal{H} -antimagic yang juga dapat digunakan sebagai rujukan penelitian ini yang disajikan sebagai berikut:

Tabel 2.4: Ringkasan pelabelan selimut super (a, d) - \mathcal{H} -antimagic pada graf konektif.

Graf	a	d	Hasil
Graf Triangular Book (SBT_n)	$61n + 59$	40	$(a, d) - Bt_3 + 2e$
	$64n + 56$	33	
	$66n + 54$	30	
	$52n + 68$	28	
(Pudyaningrum et al., 2014)			-
Graf Shackle Kipas (F_n)	$18n + 115$	3	$(a, d) - B_{k-1, n}$
	$18n + 111$	8	
	$18n + 87$	24	
	$18n + 82$	29	
(Azizah dan Dafik, 2014)			-
Graf Pohon pisang (B_n)	$2k^2n^2 - 2kn^2$	2	$(a, d) - B_{k-1, n}$
	$+3kn - 3n - k + 2$	(Sari, 2014)	
Graf Matahari (S_n)	$13n + 4$	1	$(a, d) - K_{1,3}$
	$12n + 5 + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$	2	
(Karyanti, 2012)			-
Graf Roda (W_n)	$3hn + 5$	3	$(a, d) - C_3$
	$3hn + 3h + n$	1	
(Inayah, 2013)			-
Graf Triangular Ladder (L_n)	$16n - 3$	0	$(a, d) - C_3$
	$15n - 1$	1	
(jamil, 2014)			-

BAB 3. METODE PENELITIAN

3.1 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah deduktif aksiomatik, yaitu dengan menurunkan aksioma atau teorema yang telah ada, kemudian diterapkan dalam Analisa *Antimagic Total Covering Super* pada Eksponensial dari Graf Lintasan dan Amalgamasi Graf *Cycle* yang dinotasikan dengan $P_{n+1}^{Amal(C_{m+2}, e, s)}$. Dalam penelitian ini, akan ditentukan terlebih dahulu nilai beda (d) pada eksponensial dari graf lintasan dan amalgamasi graf *cycle*, setelah itu nilai d tersebut diterapkan dalam *Antimagic Total Covering Super* pada Eksponensial dari Amalgamasi Graf *Cycle*. Jika terdapat pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} -*antimagic*, maka akan dirumuskan pola pelabelan dengan menggunakan metode pendeteksian pola (*pattern recognition*) untuk menentukan pola umumnya.

3.2 Rancangan Penelitian

Rancangan penelitian dimanfaatkan untuk memberikan gambaran secara sistematis. Rancangan penelitian yang dimaksud adalah sebagai berikut:

3.2.1 Penotasian Titik dan Sisi

Eksponensial dari graf lintasan dan amalgamasi graf *cycle* yang dinotasikan dengan $P_{n+1}^{Amal(C_{m+2}, e, s)}$ adalah sebuah graf yang dikembangkan dari graf lintasan yang tiap sisinya ditambah dengan amalgamasi graf *cycle* dengan penghubung sisi. Graf *cycle* yang memiliki himpunan *vertex*, $V = \{x_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan himpunan *edge*, $E = \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_n x_1\}$. Adapun eksponensial dari graf lintasan dan amalgamasi graf *cycle* konektif $P_{n+1}^{Amal(C_{m+2}, e, s)}$ didefinisikan sebagai gabungan konektif dari graf P_{n+1} dengan mengganti semua sisi dari graf P_{n+1} dengan graf $Amal(C_{m+2}, e, s)$ yang mempunyai titik $V_1 = \bigcup_{j=1}^n \{x_j, x_{j+1}\}$ dengan jumlah titik $|V_1| = n + 1$ dan $V_2 = \bigcup_{j=1}^m \bigcup_{k=1}^s \{v_{i,j,k}; 1 \leq i \leq m\}$ dengan jumlah titik $|V_2| = mns$ dan sisi $E_1 = \bigcup_{j=1}^n \{x_j x_{j+1}\}$ dengan jumlah sisi $|E_1| = n$ dan

$E_2 = \bigcup_{j=1}^n \bigcup_{k=1}^s \{e_{i,l,k}; 1 \leq l \leq t\}$ dengan jumlah titik $|E_2| = tns$.

3.2.2 Indikator Pelabelan

Indikator pelabelan selimut super (a, d) - \mathcal{H} -*antimagic* pada eksponensial dari graf lintasan dan amalgamasi graf *cycle* pada penelitian ini adalah:

- a. Label titik berbeda semua

Label titik untuk pelabelan selimut super (a, d) - \mathcal{H} -*antimagic* pada eksponensial dari graf lintasan dan amalgamasi graf *cycle* ialah fungsi bijektif dari himpunan sisi ke bilangan bulat dari 1 sampai sejumlah sisi.

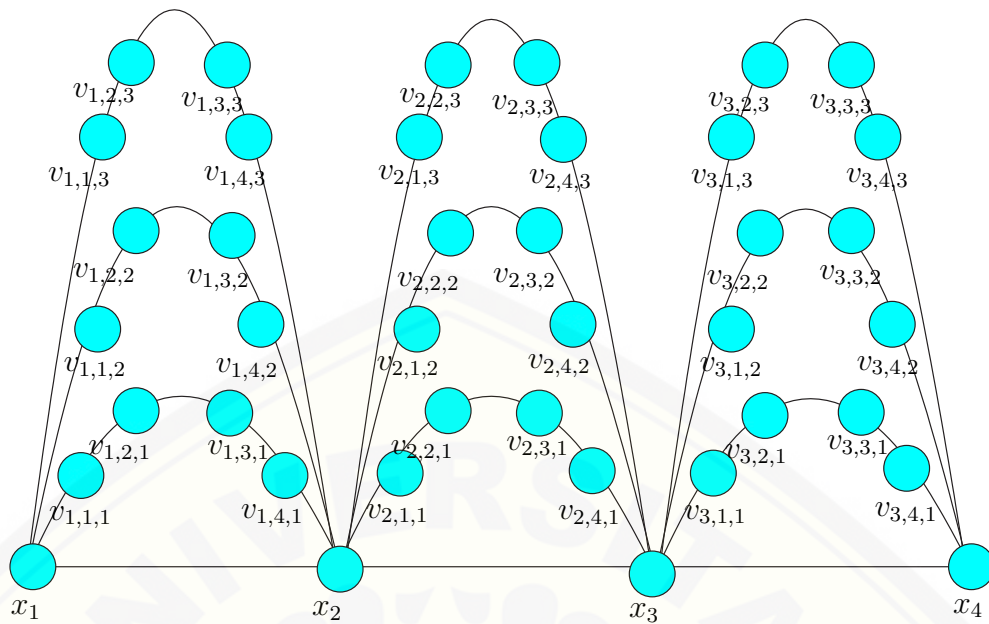
- b. Label sisi berbeda semua

Label sisi untuk pelabelan selimut super (a, d) - \mathcal{H} -*antimagic* pada eksponensial dari graf lintasan dan amalgamasi graf *cycle* ialah fungsi bijektif dari himpunan titik pada eksponensial dari graf lintasan dan amalgamasi graf *cycle* ke bilangan bulat dari banyaknya sisi ditambah 1 sampai sejumlah titik dan sisi.

- c. Bobot total selimut

Bobot total selimut ialah jumlah label titik dan label sisi pada setiap selimut. Dimana pada penelitian ini, bobot total selimut harus membentuk barisan aritmatik.

Gambar 3.1 merupakan contoh eksponensial dari graf lintasan dan amalgamasi graf *cycle* konektif.



Gambar 3.1 Graf $P_4^{Amal(C_6,e,3)}$

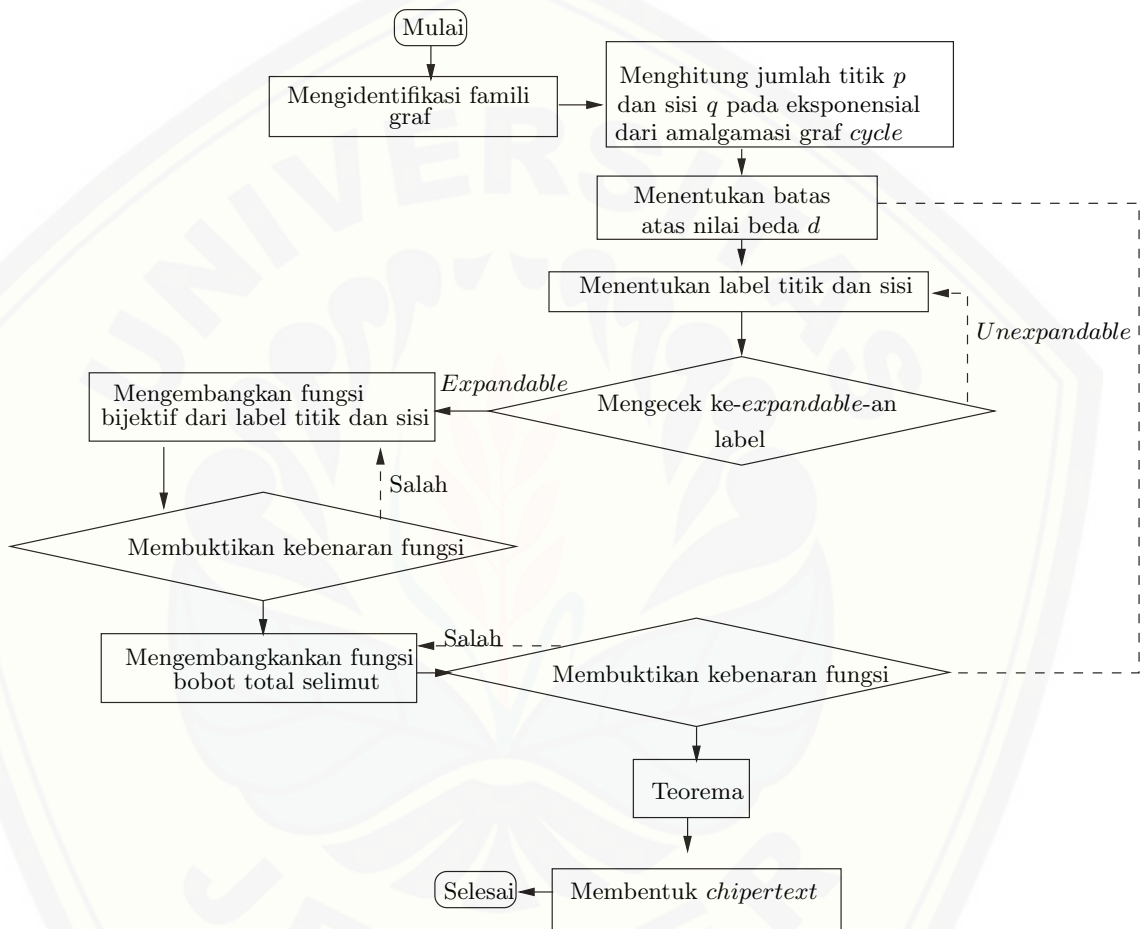
3.3 Teknik Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada eksponensial dari graf lintasan dan amalgamasi graf *cycle* $P_{n+1}^{Amal(C_{m+2},e,s)}$. Dengan teknik penelitian sebagai berikut:

- mengidentifikasi famili graf $P_{n+1}^{Amal(C_{m+2},e,s)}$;
- menentukan jumlah titik dan sisi pada graf $P_{n+1}^{Amal(C_{m+2},e,s)}$;
- menentukan batas atas nilai beda d pada pada graf $P_{n+1}^{Amal(C_{m+2},e,s)}$;
- menentukan label titik dan sisi dengan menggunakan metode partisi;
- apabila label titik dan sisi berlaku untuk beberapa graf baik secara *heuristik* maupun *determination* maka pelabelan dikatakan *expandable*;
- menentukan fungsi bijektif label titik dan sisi dengan menggunakan metode partisi pada graf $P_{n+1}^{Amal(C_{m+2},e,s)}$;
- mengembangkan fungsi bobot fungsi bobot total selimut pada graf $P_{n+1}^{Amal(C_{m+2},e,s)}$;
- membuktikan kebenaran fungsi;

- i. menemukan teorema;
- j. membentuk *ciphertext* dengan cara mengaplikasikan pola pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} -*antimagic total covering* pada graf $P_{n+1}^{Amal(C_{m+2}, e, s)}$;

Secara umum, langkah-langkah penelitian di atas dapat juga disajikan dalam bagan pada Gambar 3.2.



Gambar 3.2 Diagram Alir Penelitian

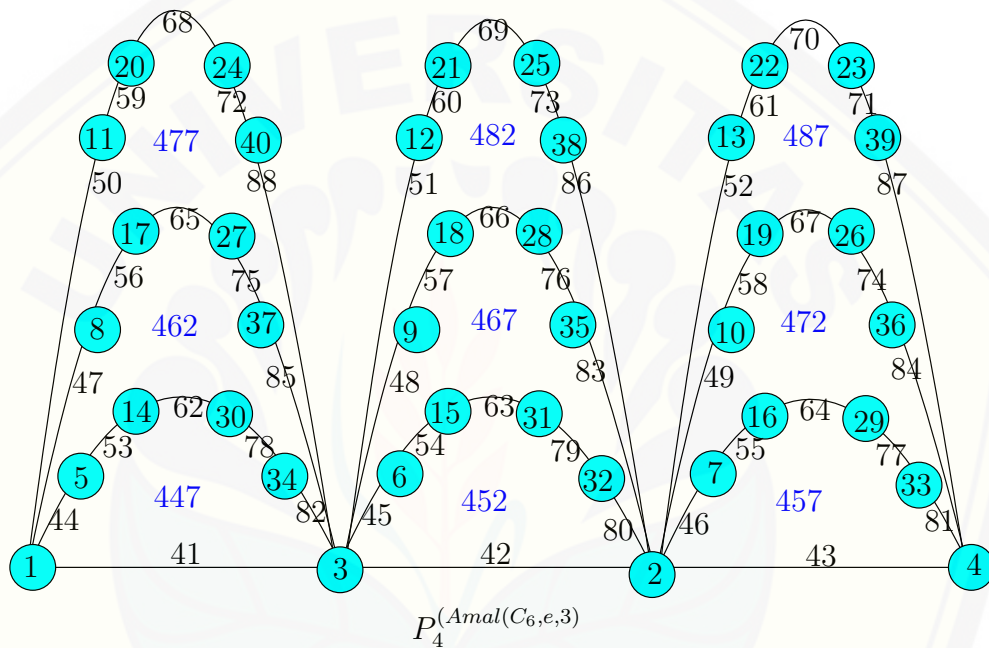
Adapun pada penelitian ini langkah-langkah untuk membentuk *ciphertext* sebagai berikut.

- a. Menentukan dan memilih graf yang memiliki sisi lebih dari banyaknya karakter *plaintext*, misalkan 26.

- b. Melabeli titik dan sisi menggunakan super $(a, d)\mathcal{H}$ -*antimagic total covering*.
- c. Mengeliminasi sisi yang memiliki label $f_e > |V| + 26$.
- d. Membuat diagram pohon dengan utama label titik terkecil, pada penelitian ini label titik yang dipilih yaitu 1 (satu), sedangkan akar selanjutnya mengikuti pola graf. Sisi yang sudah dieliminasi tidak perlu digunakan.
- e. Mencantumkan label sisi pada diagram pohon sesuai pelabelan pada graf yang digunakan dan mengubah bilangan pada label sisi tersebut menjadi bilangan mod 26.
- f. Memasangkan setiap karakter *plaintext* dengan sisi pada diagram pohon. Pemasangan diurutkan dari kiri mulai dari layer teratas.
- g. Membuat aturan untuk mentransformasi bilangan mod 26 ke karakter yang digunakan sebagai *ciphertext*, pada penelitian ini aturan yang digunakan adalah aturan Julius Caesar.
- h. Membuat tabel yang terdiri dari *plaintext*, label sisi yang bersesuaian dengan *plaintext*, (mod 26) dari label sisi, dan *ciphertext* yang bersesuaian dengan (mod 26).

3.4 Observasi

Sebelum penelitian lanjutan pada eksponensial dari graf lintasan dan amalgamasi graf *cycle* $P_{n+1}^{Amal(C_{m+2,e,s})}$, nilai n , m dan s ditentukan terlebih dahulu untuk digunakan sebagai observasi awal sebagai pedoman dengan menduga eksistensi pelabelan selimut $(a, d) - \mathcal{H}$ *antimagic total covering* serta menentukan pola pelabelannya. Observasi awal telah dilakukan dan ternyata, peneliti menemukan pola pelabelan titik pada $P_{n+1}^{Amal(C_{m+2,e,s})}$, antara lain dengan tahapan sebagai berikut:



Gambar 3.3 Observasi Awal

Berdasarkan Gambar 3.3 pada observasi awal penulis telah menemukan pelabelan selimut $(a, d) - \mathcal{H}$ *antimagic total covering* pada eksponensial dari graf lintasan dan amalgamasi graf *cycle* $P_{n+1}^{Amal(C_{m+2,e,s})}$ untuk $n = 3$, $m = 6$ dan $s = 3$ dengan nilai d adalah 5 dan jumlah selimut 9.

Berikut adalah partisi untuk eksponensial dari graf lintasan dan amalgamasi graf *cycle* pada tabel 3.2 dan partisi yang digunakan pada tabel 3.1

Tabel 3.1 Klasifikasi partisi yang digunakan.

k	1			2			3			
$i \setminus k$	1	2	3	1	2	3	1	2	3	
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
2	10	11	12	13	14	15	16	17	18	
3	19	20	21	22	23	24	25	26	27	+
	40	43	46	49	52	55	58	61	64	$d = 3$

Tabel 3.2 Klasifikasi eksponensial dari graf lintasan dan amalgamasi graf *cycle*.

k	1			2			3			
$i \setminus j$	1	2	3	1	2	3	1	2	3	
1	1	3	2	1	3	2	1	3	2	
2	3	2	4	3	2	4	3	2	4	
3	5	6	7	8	9	10	11	12	13	
4	14	15	16	17	18	19	20	21	22	
5	30	31	29	27	28	26	24	25	23	
6	34	32	33	37	35	36	40	38	39	
7	41	42	43	41	42	43	41	42	43	
8	44	45	46	47	48	49	50	51	52	
9	53	54	55	56	57	58	59	60	61	
10	62	63	64	65	66	67	68	69	70	
11	78	79	77	75	76	74	72	73	71	
12	82	80	81	85	83	84	88	86	87	+
	447	452	457	462	467	472	477	482	487	$d = 5$

Dari klasifikasi diatas didapat partisi sebagai berikut:

$$\mathcal{P}_{m,m}^{n,s}(i, j, k) = \{j + ins - ns + kn - n; 1 \leq i \leq m\}, 1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq s$$

$$\mathcal{P}_{1,-2}^{n,s}(i, j, k) = \begin{cases} \{mns - ns + 2n + 2 - 2j - kn\}; & 1 \leq j \leq \frac{n-1}{2}, 1 \leq k \leq s \\ \{mns - ns + 3n + 2 - 2j - kn\}; & \frac{n+1}{2} \leq j \leq n, 1 \leq k \leq s \end{cases}$$

$$\mathcal{P}_{1,1}^{n,s}(i, j, k) = \begin{cases} \{mns - ns + n - 1 + j + kn\}; & 1 \leq j \leq \frac{n-1}{2}, 1 \leq k \leq s \\ \{mns - ns - \frac{1}{2}n + \frac{3}{2} + j + kn\}; & \frac{n+1}{2} \leq j \leq n, 1 \leq k \leq s \end{cases}$$

Sehingga didapat fungsi titik:

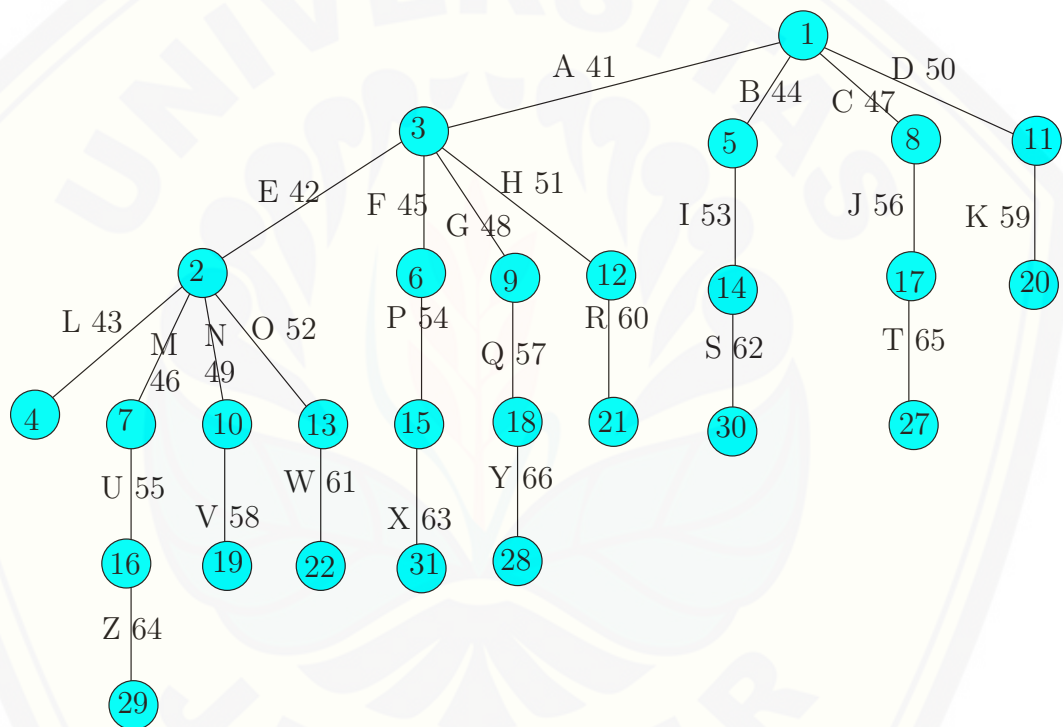
$$f(V_1) = \bigcup_{j=1}^n \begin{cases} \{\frac{j+1}{2}, \frac{n+j+2}{2}\}; & j \equiv 1 \pmod{2} \\ \{\frac{n+j+1}{2}, \frac{j+2}{2}\}; & j \equiv 0 \pmod{2} \end{cases}$$

$$f(V_2) = \mathcal{P}_{m_1, m_1}^{n,s}(i, j, k) \oplus (n+1) \cup \mathcal{P}_{1,-2}^{n,s}(i, j, k) \oplus (ns(m_1) + n+1) \cup \mathcal{P}_{1,1}^{n,s}(i, j, k) \oplus (ns(m_1) + ns + n+1)$$

$$f(E_1) = \bigcup_{j=1}^n \{mns + n + j + 1\}$$

$$f(E_2) = \mathcal{P}_{t_1, t_1}^{n, s}(i, j, k) \oplus (mns + 2n + 1) \cup \mathcal{P}_{1, -2}^{n, s}(i, j, k) \oplus (ns(t_1) + mns + 2n + 1) \\ \cup \mathcal{P}_{1, -2}^{n, s}(i, j, k) \oplus (ns(t_1) + ns + mns + 2n + 1)$$

Graf G adalah $P_4^{Amal(C_6, e, 3)}$ dan pelabelan mengikuti pada Gambar 3.3. Pesan yang akan dikirim adalah "PASSWORD ANDA ADALAH IAZDH". Kalimat tersebut akan diubah menjadi kalimat rahasia yang dibuat oleh *chipertext* dengan menggunakan pelabelan graf $P_4^{Amal(C_6, e, 3)}$ kemudian dibuat diagram pohon seperti pada Gambar 3.4



Gambar 3.4 Observasi Awal Pembentukan *Chipertext*

Tabel 3.3 Pembentukan *chipertext* dari Gambar 3.4.

<i>Plaintext</i>	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
Label Sisi	41	44	47	50	42	45	48	51	53	56	59	43	46
(Mod 26)	15	18	21	24	16	19	22	25	1	4	7	17	20
<i>Chipertext</i>	P	S	V	Y	Q	T	W	Z	B	E	H	R	U
<i>Plaintext</i>	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
Label Sisi	49	52	54	57	60	62	65	55	58	61	63	66	64
(Mod 26)	23	0	2	5	8	10	13	3	6	9	11	14	12
<i>Chipertext</i>	X	A	C	F	I	K	N	D	G	J	L	O	M

Tabel 3.3 menjelaskan tentang pembentukan *chipertext*. Jika terdapat *plaintext* "PASSWORD ANDA ADALAH IAZDH" kemudian abaikan tanda bacanya sehingga menjadi "PASSWORDANDAADALAHIAZDH" maka *chipertext* alfabetiknya adalah "CPKKJAIYPXYPPYPRPZBPMYZ".

BAB 5. PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dari pembahasan pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa:

1. Eksponensial dari Graf Lintasan dan Amalgamasi Graf *Cycle* $P_{n+1}^{Amal(C_{m+2},e,s)}$ memiliki himpunan titik $V_1 = \bigcup_{j=1}^n \{x_j, x_{j+1}\}$ dan $V_2 = \bigcup_{j=1}^n \bigcup_{k=1}^s \{v_{i,j,k}; 1 \leq i \leq m\}$ dan sisi $E_1 = \bigcup_{j=1}^n \{x_j x_{j+1}\}$ dan $E_2 = \bigcup_{j=1}^n \bigcup_{k=1}^s \{e_{l,j,k}; 1 \leq l \leq t\}$. Sedangkan jumlah titik $|V_1| = n + 1$ dan $|V_2| = mns$ maka $p_G = |V_1| + |V_2|$ dan jumlah sisi $|E_1| = n + 1$ dan $|E_2| = mns$ maka $q_G = |E_1| + |E_2|$ sedangkan p_H dan q_H merupakan selimut ketika $n = 1$ dan $s = 1$ sehingga $p_H = m + 2$ dan $q_H = t + 1$ dengan jumlah selimut $z = ns$.
2. Eksponensial dari graf lintasan dan amalgamasi graf cycle yang dinotasikan dengan $P_{n+1}^{Amal(C_{m+2},e,s)}$ dengan $n \geq 3$ and $s \geq 2$ memiliki pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} antimagic total covering maka $d \leq (p_H)^2 - p_H + (q_H)^2 + t + \frac{(ns-n)p_H + (ns-n)q_H}{ns-1}$.
3. Eksponensial dari Graf Lintasan dan Amalgamasi Graf *Cycle* yang dinotasikan dengan $P_{n+1}^{Amal(C_{m+2},e,s)}$, memiliki super (a, d) - \mathcal{H} antimagic total covering dengan $a = 4ns + 3n + mns + \frac{n+1}{2} + m_1(n+1) + \sum_{c=2}^6 m_c(ns \sum_{a=1}^{c-1} m_a + n + 1) + 2(ns \sum_{a=1}^6 m_a + n + 1) + t_1(mns + n + 1) + \sum_{c=2}^6 m_c(ns \sum_{a=1}^{c-1} m_a + mns + 2n + 1) + \frac{n}{2}(m_1^2 s - m_1 s - 2m_1 + m_2^2 s + m_2 s + 2m_2 + t_1^2 s - t_1 s - 2t_1 + t_2^2 s + t_2 s + 2t_2) + \frac{1}{2}(m_3 - 2m_3^2 n - m_3^2 + t_3 - 2r_3^2 n - t_3^2 + m_4(2m_4 ns + 2m_4 n + m_4 + 1) + t_4(2t_4 ns + 2t_4 n + t_4 + 1)) + \frac{1}{4}(m_5(2m_5 ns - ns - 2n + 1) + m_6(2m_6 ns + ns + 2n + 3) + t_5(2t_5 ns - ns - 2n + 1) + t_6(2t_6 ns + ns + 2n + 3))$ dan $d = m_1 - m_2 + m_3^2 - m_4^2 + \frac{m_5}{2} - \frac{m_6}{2} + t_1 - t_2 + t_3^2 - t_4^2 + \frac{t_5}{2} - \frac{t_6}{2}$.
4. Eksponensial dari Graf Lintasan dan Amalgamasi Graf *Cycle* yang dinotasikan dengan $P_{n+1}^{Amal(C_{m+2},e,s)}$ memiliki macam-macam *chiphertext* bergantung pada nilai m, n, t, s yang disajikan pada contoh berikut

Tabel 5.1 *Chiphertext* alfabet dari Graf $P_4^{Amal(C_9,e,3)}$ dengan $d=9$.

<i>Plaintext</i>	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
<i>Chiphertext</i>	Q	B	Y	V	R	A	X	U	C	F	I	S	Z	W
<i>Plaintext</i>	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	sp	
<i>Chiphertext</i>	T	D	G	J	L	E	H	K	N	M	P	O	@	

Tabel 5.2 *Chiphertext* simbol dari Graf $P_4^{Amal(C_{11},e,3)}$ dengan $d=22$.

<i>Plaintext</i>	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
<i>Chiphertext</i>	⚡	∂	ℵ	*	¥	ħ	★	∪	ι	⊥	£	◇	∞	∓	□
<i>Plaintext</i>	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	0	1	2	3
<i>Chiphertext</i>	∇	‡	∇	∠	✓	ℑ	♠	∅	◇	∫	∖	®	√	¶	∃
<i>Plaintext</i>	4	5	6	7	8	9	sp.	.	,	?	!	@	#	\$	&
<i>Chiphertext</i>	#	△	b	/	‡	ℜ	♡	ℓ	♣	∓	©	¬		∅	§

Stream Chipher disebut juga dengan sandi aliran. *Stream Chipher* ini yang didasarkan pada fungsi *chaos*. Fungsi *chaos* dalam matematika merupakan suatu fungsi yang mempunyai sifat bahwa nilai fungsinya sensitif terhadap nilai awal, artinya perubahan kecil pada nilai awal akan mengakibatkan perubahan besar pada nilai fungsinya. Penerapan fungsi *chaos* dalam *stream chipher* tentu menguntungkan, karena sifat sensitif pada nilai awal tersebut, sehingga diharapkan dapat meningkatkan keamanan dari *stream chipher*. Keuntungan dari *stream chipher* adalah tidak dibatasi oleh panjang *plaintext*. Sama seperti metode eliminasi, *stream chipher* juga menggunakan aturan Julius Caesar. Sehingga *plaintext* y_1, y_2, y_3, \dots dengan $y_i \in Z_{26}$ dan kunci aliran k_1, k_2, k_3, \dots dengan $k_i \in Z_{26}$. *Chiphertext* z_1, z_2, z_3, \dots diperoleh dengan proses enkripsi sebagai berikut:
 $z_1 = y_1 + k_1, z_2 = y_2 + k_2, \dots, z_n = y_n + k_n, z_{n+1} = y_{n+1} + k_{n+1} \dots \pmod{26}$.
Plaintext y_1, y_2, y_3, \dots diperoleh dengan proses deskripsi sebagai berikut:
 $y_1 = z_1 + k_1, y_2 = z_2 + k_2, \dots, y_n = z_n + k_n, y_{n+1} = z_{n+1} + k_{n+1} \dots \pmod{26}$.

5.2 Saran

Berdasarkan hasil penelitian mengenai pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} antimagic total covering Eksponensial dari Graf Lintasan dan Amalgamasi Graf *Cycle* serta mengacu pada *open problem* dari hasil penelitian yang telah ditemukan, maka peneliti memberikan saran kepada pembaca agar dapat melakukan penelitian pada pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} antimagic total covering pada Eksponensial dari Graf Lintasan dan Amalgamasi Graf *Cycle* untuk diskonektif.



DAFTAR PUSTAKA

- Agustin, I. H., Sih, Muhni and Dafik. 2014. Pelabelan Total Super (a, d) - \mathcal{H} -Antimagic Pada Graf Daun. *Prosiding Seminar Matematika dan Pendidikan Matematika*, **1**:95-104.
- Ardiyansyah, R., dan Darmaji. 2013. Bilangan Kromatik Graf Hasil Amalgamasi Dua Buah Graf. *Jurnal Sains dan Seni Pomits*, **2**(1):2337-3520.
- Azizah, I. and Dafik. 2014. Super (a, d) - \mathcal{H} -antimagic total selimut pada graf shackle kipas f_4 . *Prosiding Seminar Matematika dan Pendidikan Matematika*, **1**:242-250.
- Azizah, Y.N. 2016. *Super (a, d) - \mathcal{A}_p^Q -Anti Ajaib Total Dekomposisi Graf Shackle Antiprisma Untuk Pengembangan Chipertext Dan Keterampilan Tingkat Tinggi*. Tidak Dipublikasikan (Skripsi). Jember: Universitas Jember.
- Bača, Bronkovic, L., Lascsakova, M., Phanalasy, and Fenovcikova, A. S. 2013. On d - antimagic labelings of plane graphs. *Electonica Journal of Graph Theory and Application*, **1**:28-39.
- Dafik. 2007. *Structural Properties and Labeling of Graphs*. School of Information Technology and Mathematical Sciences University of Ballarat, Australia, Ph.D. Thesis, November : 1 - 140.
- Dafik, M.Miller, J.Ryan and M.Baca. 2009. On Super (a, d) -edge antimagic total labeling of disconnected graphs. *Discrete Math*, **309**(15):4909-4915.
- Dafik. 2013. *Antimagic Total Labelling of Disjoint Union of Disconnected Graph*. Jember: CSS.

- Gallian, J. A. 2009. Dinamyc survey of graph labeling. *The Electronic Journal of Combinatorics*, **16**:1-219.
- Gutierrez and Llado. 2005. Magic coverings. *Of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, **55**:451-461.
- Hartsfield,N. and Ringel. 1994. *Pearls in graph theory* . London : Accademic Press Limited.
- Inayah, N. 2013. *Pelabelan (a, d) - \mathcal{H} -Antiajaib Pada Beberapa Kelas Graf*. Tidak Dipublikasikan (Disertasi).
- Jamil, N. A. 2014. Super (a, d) - \mathcal{H} -Antimagic Total Covering Pada Graf Triangular Ladder. *Prosiding Seminar Matematika dan Pendidikan Matematik*, **1**:110-118.
- Kak, Avi. 2015. *Lecture 2: Classical Encryption Techniques*. Purdue University.
- Karyanti. 2012. *Pelabelan Selimut (a, d) - \mathcal{H} -Antiajaib Super Pada Graf Fan, Sun, dan Generalized Petersen*. Tidak Dipublikasikan (Skripsi). Surakarta: Universitas Sebelas Maret.
- Kotzig, A. and Rosa, A. 1970. Magic Valuations of Finite Graphs. *Canad. Math. Bull.*, **13**:451 - 461.
- Latifah, S. 2015. *Super (a, d) - \mathcal{H} -Antimagic Total Covering Pada Amalgamasi Graf Kipas*. Tidak Dipublikasikan (Skripsi). Jember: Universitas Jember.
- Maryati, T. K., Salman, A., Baskoro, E. T., Ryan, J. Miller, M. 2010. On H Supermagic Labellings for Certain Shackles and Amalgamations of A

Connected Graph Antimagic Total Labelings For Shackles of A Connected Graph. *Utilitas Math* **83**:333-342.

Munir, R. 2001. *Matematika Diskrit. Buku Teks Ilmu Komputer*. Bandung: Penerbit Informatika.

Pearson, E. 2006. *Introduction To Cryptography With Coding Theory*. America: United States of America.

Prihandoko, A. C. 2003. *Pengantar pada Teori Grup*. Jember: FKIP Universitas Jember.

Pudyaningrum, P. R. H. 2014. Super (a, d) - \mathcal{H} -Antimagic Total Covering Pada Shackle Graf Triangular Book. *Prosiding Seminar Matematika dan Pendidikan Matematik*,1:68-77.

Purwanto, Heri dkk. 2006. *Matematika Diskrit*. Jakarta: PT. Ercontara Rajawali dan WIT.

Sari, F. K. 2014. *Super Pelabelan selimut- (a, d) -anti ajaib super pada graf pohon pisang, kembang api dan buku*. Universitas Sebelas Maret Surakarta.

Solehah, S.A. 2016. *Independent Domination Number pada Beberapa Graf Operasi*. Tidak Dipublikasikan (Skripsi). Jember: Universitas Jember.

LAMPIRAN

LAMPIRAN. Beberapa Klasifikasi Partisi dan Variasi Nilai Beda d

Tabel 5.3 Contoh klasifikasi partisi $d = m$.

k	1			2			3			
$i \setminus k$	1	2	3	1	2	3	1	2	3	
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
2	10	11	12	13	14	15	16	17	18	
3	19	20	21	22	23	24	25	26	27	+
	40	43	46	49	52	55	58	61	64	$d = 3$

Tabel 5.4 Contoh klasifikasi partisi $d = -m$.

k	1			2			3			
$i \setminus k$	1	2	3	1	2	3	1	2	3	
1	9	8	7	6	5	4	3	2	1	
2	18	17	16	15	14	13	12	11	10	
3	27	26	25	24	23	22	21	20	19	+
	64	61	58	55	52	49	46	43	40	$d = -3$

Tabel 5.5 Contoh klasifikasi partisi $d = m^2$.

k	1			2			3			
$i \setminus k$	1	2	3	1	2	3	1	2	3	
1	1	4	7	10	13	16	19	22	25	
2	2	5	8	11	14	17	20	23	26	
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	+
	6	15	24	33	42	51	60	69	78	$d = 9$

Tabel 5.6 Contoh klasifikasi partisi $d = -m^2$.

k	1			2			3			
$i \setminus k$	1	2	3	1	2	3	1	2	3	
1	25	22	19	16	13	10	7	4	1	
2	26	23	20	17	14	11	8	5	2	
3	27	24	21	18	15	12	9	6	3	
	78	69	60	51	42	33	24	15	6	$d = -9$

Tabel 5.7 Contoh klasifikasi partisi $d = \frac{m}{2}$.

k	1			2			3			
$i \setminus k$	1	2	3	1	2	3	1	2	3	
1	5	1	6	2	7	3	8	4	9	
2	10	15	11	16	12	17	13	18	14	
3	23	19	24	20	25	21	26	22	27	
4	28	33	29	34	30	35	31	36	32	
	66	68	70	72	74	76	78	80	82	$d = 2$

Tabel 5.8 Contoh klasifikasi partisi $d = -\frac{m}{2}$.

k	1			2			3			
$i \setminus k$	1	2	3	1	2	3	1	2	3	
1	9	4	8	3	7	2	6	1	5	
2	14	18	13	17	12	16	11	15	10	
3	27	22	26	21	25	20	24	19	23	
4	32	36	31	35	30	34	29	33	28	
	82	80	78	76	74	72	70	68	66	$d = 2$