



**ANALISIS KONEKSI PELANGI KUAT PADA GRAF
EKSPONENSIAL SERTA GRAF HASIL OPERASI
SHACKLE DAN *CARTESIAN PRODUCT***

SKRIPSI

Oleh

**Winda Riyanti
NIM 121810101007**

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER**

2016



**ANALISIS KONEKSI PELANGI KUAT PADA GRAF
EKSPONENSIAL SERTA GRAF HASIL OPERASI
SHACKLE DAN *CARTESIAN PRODUCT***

SKRIPSI

diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan Program Studi Matematika (S1) dan mencapai gelar Sarjana Sains

Oleh

Winda Riyanti
NIM 121810101007

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER**

2016

PERSEMBAHAN

Skripsi ini saya persembahkan untuk:

1. Ayahanda Slamet Riyadi, Ayahanda Susianto dan Ibunda Tummyati yang tercinta;
2. adikku Renny Listyowati dan Adelia Ananda Putri tersayang;
3. guru dan dosen-dosen, yang telah memberikan ilmu dan membimbing dengan penuh kesabaran;
4. almamater tercinta Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.



MOTTO

"Sukses bukanlah akhir dari segalanya, kegagalan bukanlah sesuatu yang fatal, namun keberanian untuk meneruskan kehidupanlah yang diperhatikan."

(Sir Winston Churchill)*

"Kemenangan yang seindah-indahnya dan sesukar-sukarnya yang boleh direbut oleh manusia ialah menundukkan diri sendiri."

(R. A Kartini)**

* Sir Winston Churchill, perdana menteri Britania Raya.

** Kartini, R.A. pahlawan nasional Indonesia.

HALAMAN PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Winda Riyanti

NIM :121810101007

Menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang berjudul: Analisis Koneksi Pelangi Kuat pada Graf Eksponensial serta Graf hasil Operasi *Shackle* dan *Cartesian Product* adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali jika dalam pengutipan substansi disebutkan sumbernya, dan belum diajukan pada instansi manapun, serta bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa adanya tekanan dan paksaan dari pihak manapun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, Juni 2016

Yang menyatakan,

Winda Riyanti

NIM. 121810101007

SKRIPSI

**ANALISIS KONEKSI PELANGI KUAT PADA GRAF
EKSPONENSIAL SERTA GRAF HASIL OPERASI
SHACKLE DAN *CARTESIAN PRODUCT***

Oleh

Winda Riyanti
NIM 121810101007

Dosen Pembimbing Utama : Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D

Dosen Pembimbing Anggota : Drs. Rusli Hidayat, M.Sc

PENGESAHAN

Skripsi berjudul "Analisis Koneksi Pelangi Kuat pada Graf Eksponensial serta Graf hasil Operasi *Shackle* dan *Cartesian Product*" telah diuji dan disahkan oleh Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam pada:

hari :

tanggal :

tempat : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Tim Penguji :

Ketua,

Sekretaris,

Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D.

Drs. Rusli Hidayat, M.Sc.

NIP. 19680802 199303 1 004

NIP.19661012 199303 1 001

Anggota I,

Anggota II,

Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si.

Dr. Mohamad Fatekurohman, S.Si., M.Si.

NIP. 19840801 200801 2 006

NIP. 19690606 199803 1 001

Mengesahkan

Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Universitas Jember,

Drs. Sujito, Ph.D.

NIP. 19610204 198711 1 001

RINGKASAN

Analisis Koneksi Pelangi Kuat pada Graf Eksponensial serta Graf Hasil Operasi Shackle dan Cartesian Product; Winda Riyanti, 121810101007; 2016: 72 halaman; Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Jember.

Masalah distribusi merupakan masalah yang sangat pelik karena 3 tuntutan yaitu efisiensi, keamanan, dan tepat sasaran. Kompleksitas distribusi sangat meningkat karena elemen sasaran semakin banyak, termasuk konektivitas antara pusat distribusi dan target distribusi semakin rumit. Oleh karena itu, dibutuhkan konsep dan strategi untuk desain distribusi.

Salah satu teori graf yang berkaitan dengan pendistribusian adalah koneksi pelangi (*rainbow connection*) dan koneksi pelangi kuat (*strong rainbow connection*). Koneksi pelangi merupakan pewarnaan pada sisi graf dengan syarat dua sisi yang bertetangga tidak boleh memiliki warna yang sama. Pewarnaan minimal dalam suatu graf disebut dengan bilangan rainbow connection (*rc*). Sedangkan koneksi pelangi kuat merupakan pewarnaan pada lintasan rainbow *u-v* terpendek. Pewarnaan minimal pada koneksi pelangi kuat disebut dengan bilangan koneksi pelangi kuat (*src*).

Penelitian ini menggunakan metode penelitian *deduktif*, *brute force*, dan *pattern recognition*. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk menentukan kardinalitas titik dan sisi, bilangan koneksi pelangi, bilangan koneksi pelangi kuat. Berdasarkan penelitian pada graf hasil operasi *eksponensial*, *cartesian product*, dan *shackle* dihasilkan 10 teorema baru terkait $rc(G)$ dan $src(G)$, diantaranya sebagai berikut :

1. **Teorema 4.1.1** Untuk $n \geq 2$, bilangan koneksi pelangi dan bilangan koneksi pelangi kuat dari graf $H_{2,2} \square P_n$ adalah $n + 1$.
2. **Teorema 4.1.2** Untuk $n \geq 2$, bilangan koneksi pelangi dan bilangan koneksi pelangi kuat dari graf $F_{1,3} \square P_n$ adalah $n + 1$.
3. **Teorema 4.1.3** Untuk $n \geq 2$, bilangan koneksi pelangi dan bilangan koneksi pelangi kuat dari graf $Amal(K_5, v, 2) \square P_n$ adalah $n + 1$.

4. **Teorema 4.1.4** Untuk $n \geq 2$, bilangan koneksi pelangi dan bilangan koneksi pelangi kuat dari graf $Bt_3 \square P_n$ adalah $n + 1$.
5. **Teorema 4.1.5** Untuk $n \geq 2$, bilangan koneksi pelangi dan bilangan koneksi pelangi kuat dari graf $C_5^2 \square P_n$ adalah $n + 1$.
6. **Teorema 4.1.6** Untuk $n \geq 2$, bilangan koneksi pelangi dan bilangan koneksi pelangi kuat dari graf $P_n^{W_3}$ adalah $n - 1$.
7. **Teorema 4.1.7** Untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 4$, bilangan koneksi pelangi dan bilangan koneksi pelangi kuat dari graf $P_n^{K_m}$ adalah $n - 1$.
8. **Teorema 4.1.8** Untuk $n \geq 2$, bilangan koneksi pelangi dan bilangan koneksi pelangi kuat dari graf $shack(Bt_3, v, n)$ adalah $2n$.
9. **Teorema 4.1.9** Untuk $n \geq 2$, bilangan koneksi pelangi dan bilangan koneksi pelangi kuat dari graf $shack(C_5^2, v, n)$ adalah $2n$.
10. **Teorema 4.1.10** Untuk $n \geq 2$, bilangan koneksi pelangi dan bilangan koneksi pelangi kuat dari graf $shack((S_4 + K_1), v, n)$ adalah $2n$.

KATA PENGANTAR

Puji syukur kehadiran Allah SWT atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul Analisis Koneksi Pelangi Kuat pada Graf Eksponensial serta Graf Hasil Operasi *Shackle* dan *Cartesian Product*. Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan pendidikan strata satu (S1) pada Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih atas bantuan dan bimbingan dalam penyusunan skripsi ini, terutama kepada yang terhormat:

1. Drs. Sujito, Ph.D., selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
2. Kusbudiono, S.Si., M.Si., selaku Ketua Jurusan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
3. Ahmad Kamsyakawuni, S.Si., M. Kom., selaku Dosen Pembimbing Akademik yang selalu memberikan motivasi;
4. Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D., selaku Dosen Pembimbing Utama, Drs. Rusli Hidayat, M.Sc., selaku Dosen Pembimbing Anggota, Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si., selaku dosen Penguji I dan Dr. Mohamad Fatekurohman, S.Si., M.Si., selaku dosen penguji II yang telah meluangkan waktu, pikiran, dan perhatian dalam penulisan skripsi ini;
5. sahabat-sahabat terbaikku Viqedina, Ninda, Fahmi, Devita, Fadil, Irman, Massay, Kiki, Ira, Wafi, Jejen, Fenty, Afif dan BATHICS 2012 yang senantiasa membantuku dan menorehkan sebuah pengalaman hidup yang tak terlupakan;
6. Priyo Miliarto yang selalu memberikan dukungan untuk terus semangat;
7. teman-teman seperjuangan graf yang selalu bersama-sama dan memberikan semangat;
8. dosen dan karyawan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;

Semoga bantuan, bimbingan, dan dorongan beliau dicatat sebagai amal baik oleh Allah SWT dan mendapat balasan yang sesuai dari-Nya. Selain itu, penulis juga

menerima segala kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan skripsi ini. Akhirnya penulis berharap, semoga skripsi ini dapat bermanfaat.

Jember, Juni 2016

Penulis



DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
PERSEMBAHAN	ii
HALAMAN MOTTO	iii
HALAMAN PERNYATAAN	iv
HALAMAN PENGESAHAN	vi
RINGKASAN	vii
KATA PENGANTAR	ix
DAFTAR ISI	xi
DAFTAR GAMBAR	xiii
DAFTAR TABEL	xv
1 PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang Masalah	1
1.2 Rumusan Masalah	2
1.3 Batasan Masalah	2
1.4 Tujuan Penelitian	3
1.5 Manfaat Penelitian	3
2 TINJAUAN PUSTAKA	4
2.1 Pengertian dan Terminologi Graf	4
2.2 Graf Eksponensial, Graf Khusus dan Operasi Graf	5
2.3 Koneksi Pelangi dan Koneksi Pelangi Kuat	11
2.4 Aplikasi <i>Koneksi Pelangi (rc)</i> dan <i>Koneksi Pelangi Kuat (Src)</i> pada Distribusi	12
2.5 Hasil-hasil koneksi pelangi	15
3 METODE PENELITIAN	17
3.1 Metode Penelitian	17
3.2 Rancangan Penelitian	17
4 HASIL DAN PEMBAHASAN	20
4.1 Koneksi Pelangi dan Koneksi Pelangi Kuat	21
4.2 Pembahasan	64

5 KESIMPULAN DAN SARAN	67
5.1 Kesimpulan	67
5.2 Saran	70
DAFTAR PUSTAKA	71
LAMPIRAN	73



DAFTAR GAMBAR

2.1	Contoh graf G yang memiliki $ V = 5$ dan $ E = 8$	4
2.2	Contoh graf eksponensial $C_4^{K_5}$	6
2.3	Contoh Graf lintasan P_3 dan P_n	6
2.4	Contoh Graf siklus C_4 dan C_n	7
2.5	Contoh Graf roda W_3 dan W_4	7
2.6	Contoh Graf buku segitiga Bt_3 dan Bt_4	8
2.7	Contoh Graf lengkap K_5 dan K_6	8
2.8	Contoh Graf bintang S_4 dan S_5	9
2.9	Contoh Graf kipas $F_{1,2}$ dan $F_{1,3}$	9
2.10	Contoh Graf Shackle $(Bt_3, v, 3)$	10
2.11	Contoh Graf Bt_2 dan P_3	10
2.12	Contoh Graf $Amal(C_3, v = 1, 4)$	11
2.13	Graf Petersen (a) $rc(G)=3$ (b) $src(G) = 4$	12
2.14	Contoh Aplikasi $rc(G)$ (a) dan Contoh Aplikasi <i>Spanning Tree</i> (b)	13
2.15	Contoh Aplikasi $src(G)$ (a) dan Contoh Aplikasi <i>Spanning Tree</i> (b)	14
3.1	Skema Penelitian	19
4.1	Graf Hasil Operasi <i>Cartesian Product</i> dari $H_{2,2} \square P_4$	22
4.2	Contoh pewarnaan pelangi $H_{2,2} \square P_4$	25
4.3	Graf Hasil Operasi $F_{1,3} \square P_5$	26
4.4	Contoh pewarnaan pelangi $F_{1,3} \square P_5$	30
4.5	Graf Hasil Operasi $Amal(K_5, v, 2) \square P_4$	31
4.6	Contoh pewarnaan pelangi $Amal(K_5, v = 1, 2) \square P_4$	36
4.7	Graf Hasil Operasi $Bt_3 \square P_4$	37
4.8	Contoh pewarnaan pelangi $Bt_3 \square P_4$	41
4.9	Graf Hasil Operasi $C_5^2 \square P_4$	42
4.10	Contoh pewarnaan pelangi $C_5^2 \square P_4$	45
4.11	Graf Hasil Operasi $P_4^{W_3}$	47
4.12	Contoh pewarnaan pelangi $P_4^{W_3}$	49

4.13 Graf Hasil Operasi $P_3^{K_5}$	50
4.14 Contoh pewarnaan pelangi $P_3^{K_5}$	52
4.15 Graf Hasil Operasi $shack(Bt_3, v, 3)$	53
4.16 Contoh pewarnaan pelangi $shack(Bt_3, v, 3)$	56
4.17 Graf Hasil Operasi $shack(C_5^2, v, 3)$	57
4.18 Contoh pewarnaan pelangi $shack(C_5^2, v, 3)$	60
4.19 Graf Hasil Operasi $shack((S_4 + K_1), v, 3)$	61
4.20 Contoh pewarnaan pelangi $shack((S_4 + K_1), v, 3)$	64



DAFTAR TABEL

2.1	Hasil Penelitian Terdahulu $rc(G)$ dan $src(G)$	15
4.1	Strong Rainbow Path $(H_{2,2} \square P_n)$	23
4.2	Strong Rainbow Path $F_{1,3} \square P_n$	28
4.3	Strong Rainbow Path $Amal(K_5, v, 2) \square P_n$	34
4.4	Strong Rainbow Path $Bt_3 \square P_n$	39
4.5	Strong Rainbow Path $C_5^2 \square P_n$	44
4.6	Strong Rainbow Path $P_n^{W_3}$	48
4.7	Strong Rainbow Path $P_n^{K_m}$	52
4.8	Strong Rainbow Path $shack(Bt_3, v, n)$	55
4.9	Strong Rainbow Path $shack(C_5^2, v, n)$	59
4.10	Strong Rainbow Path $shack((S_4 + K_1), v, n)$	63

BAB 1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Masalah distribusi merupakan masalah yang sangat pelik karena 3 tuntutan yaitu efisiensi, keamanan dan tepat sasaran. Kompleksitas distribusi sangat meningkat karena elemen sasaran semakin banyak termasuk konektivitas antara pusat distribusi dan target distribusi semakin rumit. Oleh karena itu dibutuhkan konsep dan strategi untuk sistem desain distribusi. Untuk menyelesaikan masalah pendistribusian maka harus ditentukan cara pendistribusian yang aman agar tepat pada sasaraannya, cara tersebut melibatkan pendistribusian yang terstruktur. Misal dalam pendistribusian logistik pemilu, untuk menjaga kerahasiaan surat suara maka untuk sampai ke tps maka harus ada pengawas yang mengawal dimana setiap titik pengawasan terdapat pengawal yang berbeda sehingga dengan begitu tugas pengawal bisa fokus pada titik pengawasan dan kerahasiaan surat suara terjamin dan tidak ada kebocoran dilihat dari jumlah surat suara, apabila jumlah surat dari pusat penyimpanan sampai ke tps masing-masing tetap maka dapat dipastikan surat suara aman. Salah satu teori graf yang berkaitan dengan pendistribusian tersebut adalah Koneksi Pelangi (*Rainbow Connection*).

Pada dasarnya, konsep koneksi pelangi merupakan pengembangan dari pewarnaan graf yang diperkenalkan oleh Chartrand dkk pada tahun 2006. Koneksi pelangi sendiri adalah pewarnaan sisi dimana dua sisi yang saling bertetangga boleh memiliki warna yang sama. Pewarnaan graf ini disebut dengan pewarnaan pelangi. Bilangan koneksi pelangi adalah pewarnaan minimal suatu graf yang dilambangkan dengan $rc(G)$ (Chartrand dkk, 2008). Koneksi pelangi dapat diterapkan pada graf khusus, selain itu koneksi pelangi juga dapat diterapkan pada graf eksponensial dan graf hasil operasi. beberapa jenis operasi yang sering digunakan yaitu operasi *joint*, *cartesian product*, *amalgamation*, *shackle*. Mengingat banyaknya graf khusus dan operasi graf yang masih belum diteliti sehingga dapat dipastikan ditemukan graf baru yang disertai dengan pewarnaannya.

Sebelumnya, Alfarisi (2014) melakukan pengembangan *rainbow connection* pada sebarang graf khusus, Fajariyanto (2015) melakukan penelitian tentang *rainbow connection* pada graf-graf hasil operasi. Saiful (2015) analisa *rainbow connection* dan *strong rainbow connection* pada graf hasil operasi. Berdasarkan penelitian sebelumnya, peneliti akan mengembangkan koneksi pelangi pada graf khusus lainnya dan graf eksponensial dengan menggunakan operasi *shackle* dan *cartesian product*. Dalam penelitian ini, akan dianalisis nilai koneksi pelangi kuat pada graf *eksponensial* serta graf khusus hasil pengoperasian *shackle* dan *cartesian product*. Sehingga pada penelitian ini penulis memilih judul ” Analisis Koneksi Pelangi Kuat pada Graf *Eksponensial* serta Graf Hasil Operasi *Shackle* dan *Cartesian Product*”.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang tersebut, maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah :

- bagaimana kardinalitas titik dan sisi pada $H_{2,2} \square P_n$; $F_{1,3} \square P_n$; $Amal(K_5, v, 2) \square P_n$; $Bt_3 \square P_n$; $C_5^2 \square P_n$; $P_n^{W_3}$; $P_n^{K_m}$; $shack(Bt_3, v, n)$; $shack(C_5^2, v, n)$, dan $shack((S_4 + K_1), v, n)$?
- bagaimana nilai koneksi pelangi kuat pada graf $H_{2,2} \square P_n$; $F_{1,3} \square P_n$; $Amal(K_5, v, 2) \square P_n$; $Bt_3 \square P_n$; $C_5^2 \square P_n$; $P_n^{W_3}$; $P_n^{K_m}$; $shack(Bt_3, v, n)$; $shack(C_5^2, v, n)$, dan $shack((S_4 + K_1), v, n)$?
- bagaimana fungsi pewarnaan pelangi kuat pada graf $H_{2,2} \square P_n$; $F_{1,3} \square P_n$; $Amal(K_5, v, 2) \square P_n$; $Bt_3 \square P_n$; $C_5^2 \square P_n$; $P_n^{W_3}$; $P_n^{K_m}$; $shack(Bt_3, v, n)$; $shack(C_5^2, v, n)$, dan $shack((S_4 + K_1), v, n)$?

1.3 Batasan Masalah

Adapun batasan masalah dari penelitian ini adalah:

- operasi yang digunakan adalah operasi *shackle*, *cartesian product*.
- graf hasil operasi yang digunakan adalah $H_{2,2} \square P_n$; $F_{1,3} \square P_n$; $Amal(K_5, v, 2) \square P_n$; $Bt_3 \square P_n$; $C_5^2 \square P_n$; $P_n^{W_3}$; $P_n^{K_m}$; $shack(Bt_3, v, n)$; $shack(C_5^2, v, n)$, dan $shack((S_4 + K_1), v, n)$.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah :

- menentukan kardinalitas titik dan sisi pada graf $H_{2,2} \square P_n$; $F_{1,3} \square P_n$; $Amal(K_5, v, 2) \square P_n$; $Bt_3 \square P_n$; $C_5^2 \square P_n$; $P_n^{W_3}$; $P_n^{K_m}$; $shack(Bt_3, v, n)$; $shack(C_5^2, v, n)$, dan $shack((S_4 + K_1), v, n)$.
- menentukan nilai koneksi pelangi kuat pada graf $H_{2,2} \square P_n$; $F_{1,3} \square P_n$; $Amal(K_5, v, 2) \square P_n$; $Bt_3 \square P_n$; $C_5^2 \square P_n$; $P_n^{W_3}$; $P_n^{K_m}$; $shack(Bt_3, v, n)$; $shack(C_5^2, v, n)$, dan $shack((S_4 + K_1), v, n)$.
- menentukan fungsi pewarnaan pelangi kuat pada graf $H_{2,2} \square P_n$; $F_{1,3} \square P_n$; $Amal(K_5, v, 2) \square P_n$; $Bt_3 \square P_n$; $C_5^2 \square P_n$; $P_n^{W_3}$; $P_n^{K_m}$; $shack(Bt_3, v, n)$; $shack(C_5^2, v, n)$ dan $shack((S_4 + K_1), v, n)$.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari penelitian ini, antara lain :

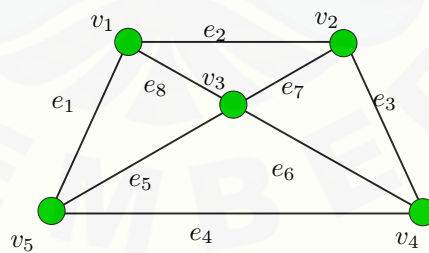
- menambah wawasan baru dalam bidang graf, khususnya dalam ruang lingkup koneksi pelangi kuat (*strong rainbow connection*).
- memberi motivasi pada peneliti lain untuk melakukan penelitian lebih lanjut tentang koneksi pelangi kuat (*strong rainbow connection*) pada graf eksponensial dan graf lainnya.

BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Pengertian dan Terminologi Graf

Graf didefinisikan sebagai pasangan (V, E) , ditulis dengan notasi $G=(V, E)$ yang mana V adalah himpunan tak kosong yang anggotanya disebut titik (*vertex*) dan E adalah himpunan yang anggotanya adalah pasangan tak berurut dari titik V dan disebut sisi (*edge*). Secara umum graf dapat digambarkan dengan suatu diagram, yang mana titik dinotasikan dengan v_i , $i = 1, 2, 3, \dots, p$, dan sisi ditampilkan berupa garis yang menghubungkan dua titik (v_i, v_j) dan dinotasikan dengan e_k , $k = 1, 2, 3, \dots, q$. v_i dan v_j disebut titik-titik ujung dari sisi. Dua sisi atau lebih yang menghubungkan pasangan titik yang sama disebut sisi rangkap (*multiple edges*) dan sebuah sisi yang menghubungkan sebuah titik ke dirinya sendiri disebut gelung (*loop*). Suatu graf dikatakan *null graph* jika graf tersebut tidak memiliki sisi. Himpunan titik dinyatakan dengan $V = \{v_1, v_2, \dots, v_i\}$ dan $E = \{e_1, e_2, \dots, e_i\}$ (Slamin, 2009).

Jumlah titik dari graf G juga disebut *order* graf sedangkan jumlah sisi dari graf G disebut *size*. Misal diberikan suatu graf G seperti Gambar 2.1. Dari gambar tersebut diketahui jumlah titik $|V| = 5$ dengan himpunan titik $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan $|E| = 8$, dengan himpunan sisi $E = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_8\}$.



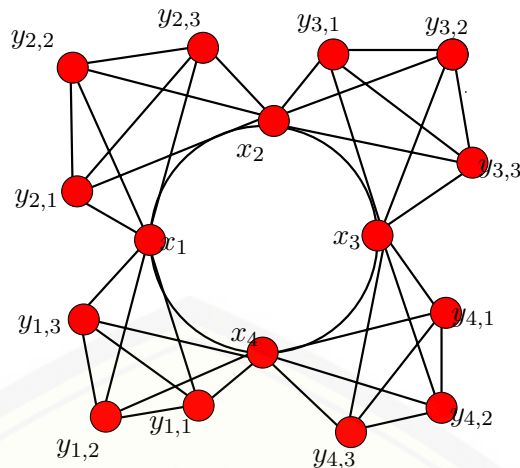
Gambar 2.1 Contoh graf G yang memiliki $|V| = 5$ dan $|E| = 8$

Sebuah jalan (*walk*) didefinisikan sebagai barisan alternatif berhingga dari titik-titik dan sisi yang diawali dan diakhiri dengan titik sedemikian hingga setiap sisi yang bersisian (*edge incident*) dengan titik yang terdahulu dan dengan titik yang berikutnya. Titik akhir disebut dengan titik terminal. Dapat juga sebuah jalan (*walk*) dimulai dan diakhiri oleh titik yang sama, jalan (*walk*) yang demikian disebut dengan *close walk*. Sebaliknya sebuah jalan (*walk*) yang tidak *close* disebut *open walk*. Dalam jalan terdapat jejak (*trail*). Dikatakan jejak jika semua sisinya dalam jalan berbeda atau tanpa ada sisi yang berulang (Hartsfield and Ringel, 1994).

Jarak (*distance*) dinotasikan $d(v_i, v_j)$ yang artinya jarak antara dua titik v_i dan v_j . Jarak pada graf G adalah panjang lintasan terpendek dari titik v_i ke v_j . Sebagai contoh, perhatikan Gambar 2.1 memiliki $d(v_i - v_j) = 2$. Diameter pada suatu graf G adalah jarak maksimum diantara 2 titik pada G , yang dinotasikan dengan $diam(G) = \max\{e(v) : v \in V\}$. Sebagai contoh, perhatikan Gambar 2.1 memiliki diameter 2. Sedangkan derajat adalah banyaknya sisi yang bersisian pada titik, dinotasikan dengan $d(v)$, pada Gambar 2.1 jumlah derajatnya adalah 3. Suatu graf G dapat dikatakan terhubung dan tidak terhubung. Dikatakan graf terhubung (*connected graph*) jika setiap pasangan titik di dalam G terdapat paling tidak satu *path*, sebaliknya jika terdapat pasangan titik yang tidak mempunyai *path* penghubung maka graf itu disebut graf tak terhubung (*disconnected graph*). Dalam suatu graf tak terhubung memungkinkan terdapat dua atau lebih graf terhubung. Setiap graf terhubung dari graf tak terhubung disebut komponen (Dafik, 2007).

2.2 Graf Eksponensial, Graf Khusus dan Operasi Graf

Suatu graf yang dibentuk dengan cara mengombinasikan dua buah graf misal graf G dan graf H , dimana setiap sisi yang ada pada graf G diganti dengan graf H yang disebut dengan graf eksponensial, dinotasikan dengan G^H . Jika $|V(G)| = p_1$ dan $|E(G)| = q_1$, sedangkan $|V(H)| = p_2$ dan $|E(H)| = q_2$ maka untuk $|V(G^H)| = q_1(p_2 - 2) + p_1$ dan $|E(G^H)| = q_1 q_2$ (Dafik, 2016). Contoh dari graf eksponensial dapat dilihat pada Gambar 2.2.



Gambar 2.2 Contoh graf eksponensial $C_4^{K_5}$

Pada gambar 2.2 graf $C_4^{K_5}$ merupakan graf siklus yang dikombinasikan dengan graf lengkap, graf siklus memiliki $V(C_4) = \{x_i; 1 \leq i \leq 4\}$ dan $E(C_4) = \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq 3\} \cup \{x_1 x_4\}$ dan graf lengkap memiliki $V(K_5) = \{x_i; 1 \leq i \leq 5\}$ dan $E(K_5) = \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq 4\} \cup \{x_i x_{2i+1}; 1 \leq i \leq 2\} \cup \{x_i x_{i+3}; 1 \leq i \leq 2\} \cup \{x_3 x_5\} \cup \{x_1 x_5\}$. Graf $C_4^{K_5}$ memiliki himpunan titik ($V(C_4^{K_5})$) = $\{x_i; 1 \leq i \leq 4\} \cup \{y_{ij}; 1 \leq i \leq 4, 1 \leq j \leq 3\}$ dan ($E(C_4^{K_5})$) = $\{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq 3\} \cup \{x_n x_1\} \cup \{y_{ij} x_{ij+1}; 1 \leq i \leq 4, 1 \leq j \leq 2\} \cup \{x_i y_{ij}; 1 \leq i \leq 4, 1 \leq j \leq 3\} \cup \{x_i y_{2ij}; 1 \leq i \leq 4, 1 \leq j \leq 3\} \cup \{x_{i,1} x_{i,3}; 1 \leq i \leq 4\}$.

Graf khusus adalah graf yang mempunyai karakteristik bentuk khusus. Karakteristik bentuknya dapat diperluas sampai order ke n dan tetap simetris. Terdapat beberapa macam bentuk graf khusus antara lain:

a. Graf Lintasan (*Path*)

Graf lintasan adalah graf sederhana yang terdiri dari satu lintasan. Graf lintasan dengan n titik dinotasikan dengan P_n dengan $n \geq 2$. Graf lintasan memiliki $V(G) = \{x_i; 1 \leq i \leq n\} = n$ dan $E(G) = \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n\} = n - 1$ (Munir, 2009). Contoh graf lintasan dapat dilihat pada Gambar 2.3.



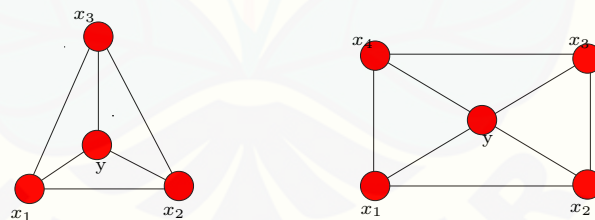
Gambar 2.3 Contoh Graf lintasan P_3 dan P_n

b. Graf Siklus (*Cycle*)

Graf siklus adalah graf sederhana yang setiap titiknya berderajat dua. Graf siklus dengan n titik dilambangkan dengan C_n . Graf siklus memiliki himpunan titik $V(G) = \{x_i; 1 \leq i \leq n\} = n$ dan himpunan sisi $E(G) = \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_n x_1\} = n$ (Harary, 2007). Contoh graf siklus dapat dilihat pada Gambar 2.4.

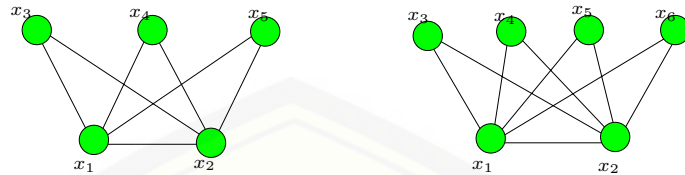
Gambar 2.4 Contoh Graf siklus C_4 dan C_n c. Graf Roda (*Wheel Graph*)

Graf roda W_n ($n > 3$) adalah graf yang didapat dengan menghubungkan semua titik dari graf siklus C_n dengan suatu titik yang disebut titik pusat. Graf Roda memiliki $V(G) = \{x_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y\} = n + 1$ dan $E(G) = \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_n x_1\} \cup \{y x_i; 1 \leq i \leq n\} = 2n$ (Harary, 2007). Contoh graf roda dapat dilihat pada Gambar 2.5.

Gambar 2.5 Contoh Graf roda W_3 dan W_4 d. Graf Buku Segitiga (*Triangular Book*)

Graf Buku Segitiga dinotasikan dengan Bt_n adalah suatu graf yang memiliki $V(G) = \{x_i; 1 \leq i \leq 2\} \cup \{x_i; 1 \leq i \leq 2\} = n + 2$ dan $E(G) = \{x_i x_{i+1}\} \cup \{x_i y_j; 1 \leq i \leq 2, 1 \leq j \leq n\} = 2n + 1$. Graf Buku Segitiga terdiri dari

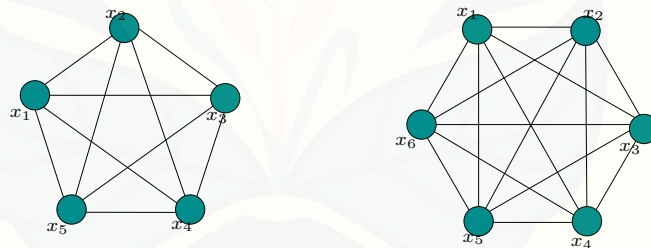
n buah segitiga ($n \geq 1$) dengan setiap segitiga memiliki sebuah sisi yang dipakai bersama atau dengan kata lain setiap segitiga memiliki 2 titik yang sama (Munir, 2009). Contoh graf buku segitiga dapat dilihat pada Gambar 2.6.



Gambar 2.6 Contoh Graf buku segitiga Bt_3 dan Bt_4

e. Graf Lengkap (*Complete Graph*)

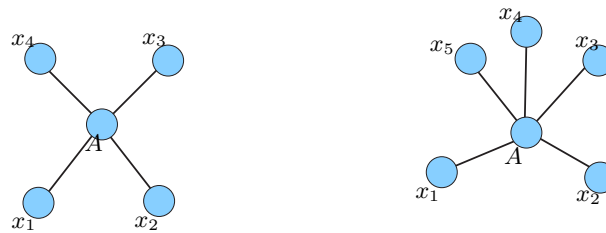
Graf lengkap adalah graf sederhana yang setiap titiknya mempunyai sisi ke semua titik lainnya. Graf lengkap dengan n buah titik dilambangkan dengan K_n . Himpunan sisi dan titik pada graf lengkap (K_n) adalah $V(G) = \{x_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan $E(G) = \{x_i x_j; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n, i \neq j\}$. Jumlah sisi pada graf lengkap yang terdiri dari n buah titik adalah $n(n-1)/2$ (Slamin, 2009). Contoh graf lengkap dapat dilihat pada Gambar 2.7.



Gambar 2.7 Contoh Graf lengkap K_5 dan K_6

f. Graf Bintang (*Star Graph*)

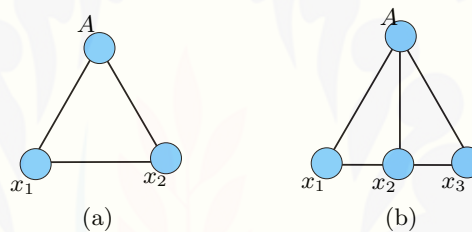
Graf Bintang adalah graf pohon yang terdiri dari satu titik pusat yang berderajat n dan n titik yang berderajat 1. Jadi, graf bintang S_n terdiri dari $n+1$ titik dan n sisi dengan $n \geq 2$ (Slamin, 2009). Contoh graf bintang dapat dilihat pada Gambar 2.8.



Gambar 2.8 Contoh Graf bintang S_4 dan S_5

g. Graf Kipas (*Fan Graph*)

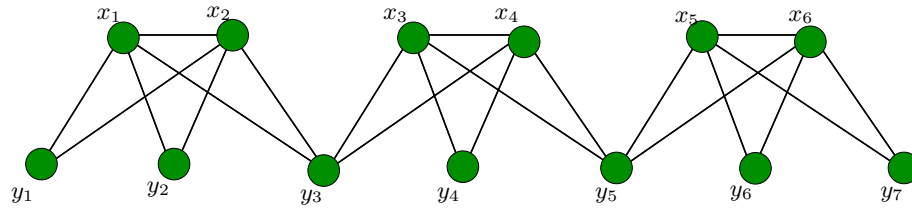
Graf Kipas atau *fan graph* dinotasikan dengan $F_{n,m}$, merupakan graf yang terbentuk dari menghubungkan semua titik m yang berupa graf lintasan P_m pada sebanyak n titik pusat. Sehingga graf kipas terdiri dari $n+m$ titik dan $mn+m-1$ sisi, dimana $n \geq 1$ dan $m \geq 2$ (Munir, 2009). Contoh graf kipas dapat dilihat pada Gambar 2.9.



Gambar 2.9 Contoh Graf kipas $F_{1,2}$ dan $F_{1,3}$

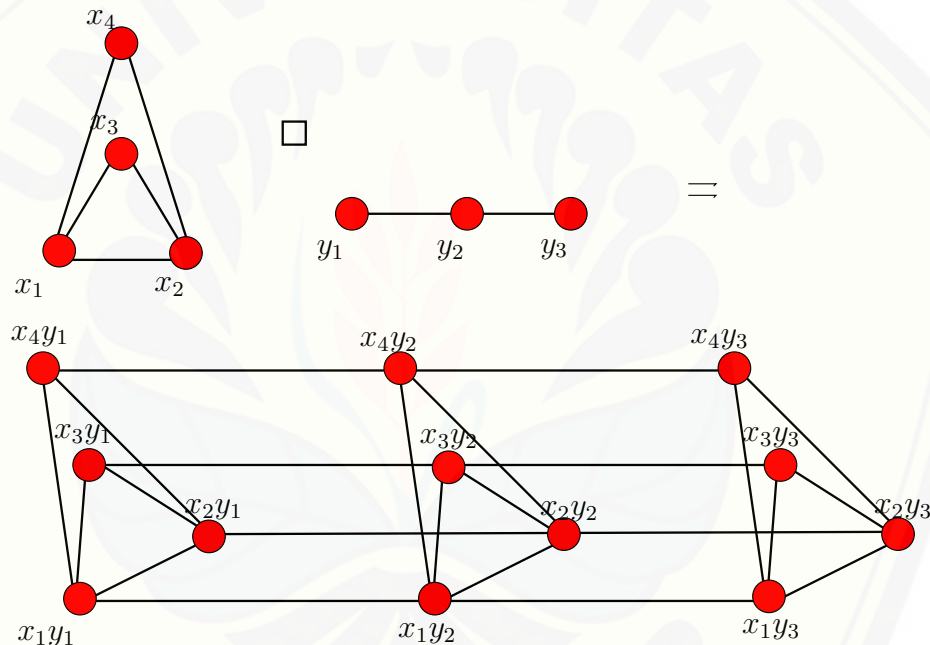
Operasi graf adalah metode yang digunakan untuk mendapatkan sebuah graf baru dengan cara mengombinasikan dua graf. Berikut ini adalah beberapa operasi graf, yaitu :

Definisi 2.2.1 Graf Shackle dari G_1, G_2, \dots, G_n dinotasikan dengan $Shack(G,n)$ ialah graf yang dibangun dari graf terhubung non trivial dari graf $\{G_1, G_2, \dots, G_n\}$ sedemikian hingga untuk setiap $s, t \in [1, n]$ dengan $|s - t| \geq 2, G_s$ dan G_t tidak memiliki titik umum dan untuk setiap $i \in [1, n - 1]$, G_i dan G_{i+1} memiliki tepat satu titik yang sama yang disebut titik penghubung dan $k-1$ titik penghubung tersebut adalah berbeda. Jika $G = shack(H, v, n)$ titik penghubung digantikan dengan subgraf $K \subset H$ disebut dengan *generalized shackle*, dan dinotasikan dengan $G = gshack(H, K \subset H, n)$ (Dafik et al., 2010). Contoh operasi shackle dapat dilihat pada Gambar 2.10.



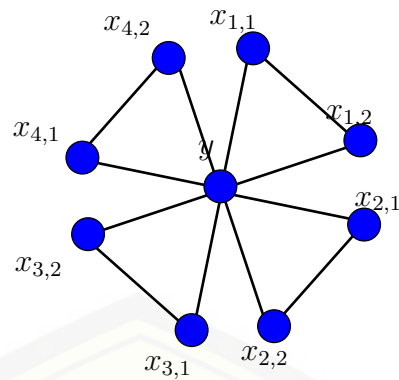
Gambar 2.10 Contoh Graf Shackle ($Bt_3, v, 3$)

Definisi 2.2.2 Cartesian Product dari graf $G_1(V_1, E_1)$ dan $G_2(V_2, E_2)$ adalah graf $G(V, E)$, ditulis $G = G_1 \square G_2$, jika $V = V(G_1) \times V(G_2)$, dan dua titik $\langle u_1, u_2 \rangle$ dan $\langle v_1, v_2 \rangle$ di G bertetangga jika dan hanya jika salah satu dari dua hal berikut berlaku: $u_1 = v_1$ dan $(u_2, v_2) \in E(G_2)$ atau $u_2 = v_2$ dan $(u_1, v_1) \in E(G_1)$ (Harary, 2007). Contoh operasi Cartesian Product dapat dilihat pada Gambar 2.11.



Gambar 2.11 Contoh Graf Bt_2 dan P_3

Definisi 2.2.3 Amalgamation dinotasikan dengan $Amal(H_i, v, r)$. Misalkan H_i adalah suatu keluarga graf berhingga dan setiap H_i mempunyai suatu titik v_i yang disebut titik terminal, dan r menyatakan banyaknya graf H_i yang akan diamalgamasi, sehingga semua H_i dengan seluruh terminalnya direkatkan menjadi satu titik (Ardiyansah, 2013). Contoh operasi Amalgamasi dapat dilihat pada Gambar 2.12.

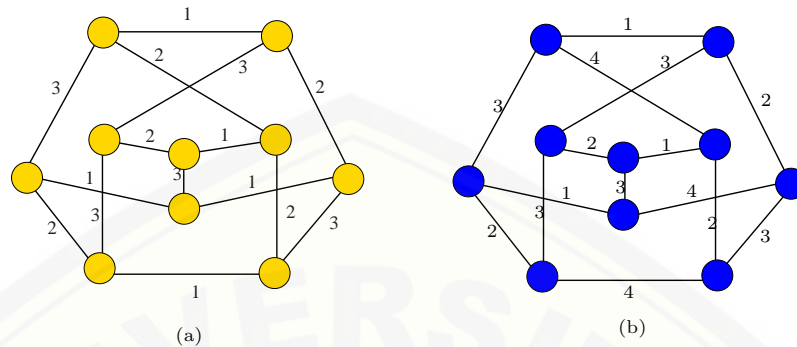
Gambar 2.12 Contoh Graf $Amal(C_3, v = 1, 4)$

2.3 Koneksi Pelangi dan Koneksi Pelangi Kuat

Misalkan pada graf $G = (V(G), E(G))$ adalah graf terhubung yang tak-trivial, didefinisikan suatu pewarnaan $e = E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k | k \in \mathbb{N}\}$, dengan sisi yang bertetangga (*adjacent*) boleh memiliki warna sama. Suatu lintasan (*path*) adalah jalan (*walk*) yang semua titiknya dilalui berbeda. Lintasan $u - v$ di G dapat dikatakan dengan lintasan pelangi (*rainbow path*) jika tidak ada dua sisi pada lintasan di G yang memiliki warna sama. Pewarnaan sisi pada graf G yang dihubungkan oleh lintasan pelangi dikatakan sebagai pewarnaan pelangi (*rainbow coloring*). Jika terdapat k warna di G maka c dikatakan fungsi *rainbow k -coloring*. Minimum k sehingga terdapat *rainbow k -coloring* di G disebut bilangan koneksi pelangi, dinotasikan dengan $rc(G)$. Suatu pewarnaan pelangi yang menggunakan $rc(G)$ warna dikatakan sebagai pewarnaan pelangi minimum (*minimum rainbow coloring*) (Li and Sun, 2011).

Misalkan c merupakan suatu fungsi pewarnaan pelangi pada graf terhubung G . Untuk sebarang dua titik u dan v di G , lintasan $u - v$ terpendek (*geodesic*) di G adalah suatu lintasan pelangi dengan panjang $d(u, v)$, dimana $d(u, v)$ adalah jarak antara u dan v . Graf G dikatakan koneksi pelangi kuat jika pada graf G memuat satu lintasan $u - v$ terpendek untuk setiap dua titik u dan v pada G . Dalam hal ini, fungsi pewarnaan c dikatakan fungsi pewarnaan koneksi pelangi kuat (*strongly rainbow coloring*) di G . Kemudian didefinisikan bilangan koneksi pelangi kuat dari graf G yang dinotasikan dengan $src(G)$. Dimana, $src(G)$ adalah nilai terkecil yang dibutuhkan untuk mewarnai graf G . (Chartrand, 2008). Dari

defnisi, jelas bahwa $rc(G) \leq src(G)$ untuk setiap graf terhubung G . Pada Gambar 2.13, ditunjukkan bilangan koneksi pelangi dan bilangan koneksi pelangi kuat pada graf Petersen.



Gambar 2.13 Graf Petersen (a) $rc(G)=3$ (b) $src(G) = 4$

Hubungan $k(G),rc(G),src(G)$ dengan jumlah sisi q pada graf ditunjukkan dengan pertidaksamaan : $k(G) \leq rc(G) \leq src(G) \leq q$.

Sebelumnya telah dilakukan penelitian tentang batas bawah dan batas atas dari koneksi pelangi (*Rainbow Connection*). Berikut adalah teorema yang telah ditemukan dan akan digunakan untuk membuktikan beberapa teorema yang didapatkan dalam penelitian ini.

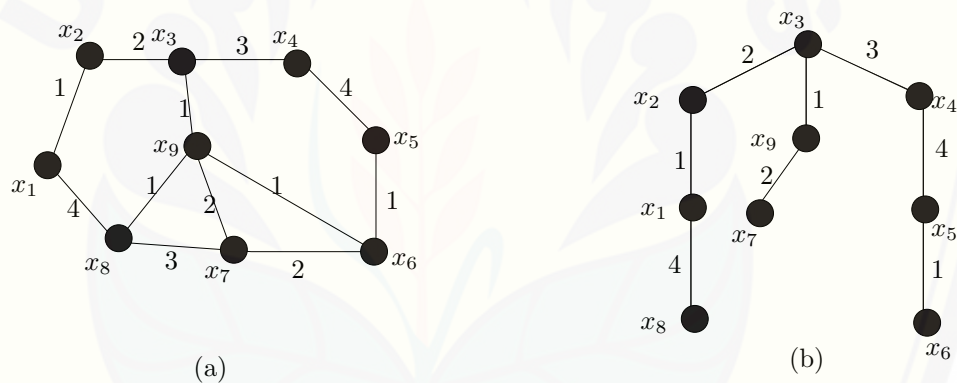
Teorema 2.3.1. *Misal G adalah graf terhubung dengan $d(G) \geq 2$, Jika G adalah interval graf, maka $k(G) \leq rc(G) \leq k(G) + 1$, dengan $k(G)$ adalah diameter, sedangkan yang lainnya jika G unit interval graf, maka $k(G) = rc(G)$ (Li and Sun, 2011).*

2.4 Aplikasi Koneksi Pelangi (rc) dan Koneksi Pelangi Kuat (Src) pada Distribusi

Konsep koneksi pelangi dapat diaplikasikan pada proses distribusi, misalnya digunakan dalam pendistribusian logistik pemilu dari KPUD kabupaten/kota sampai ke Kecamatan. Kartu surat suara ini bersifat rahasia sehingga dalam pendistribusiannya diperlukan tim pengawalan agar kerahasiannya terjamin dan tidak terjadi kebocoran pada saat pendistribusian maupun pada waktu penyimpanan. Pendistribusian surat suara sampai ke kecamatan diperlukan pengawal

misalnya terdiri dari polres, panitia pelaksana, KPUD karena ditakutkan terjadi penyelewengan oleh salah satu pihak apabila tidak diantarkan oleh pihak yang berwenang seperti yang telah ditetapkan diatas. Jadi hal-hal buruk seperti kecurangan dapat diminimalkan. Dengan demikian, dapat dipilih jalur yang bisa menjangkau kecamatan terbanyak dan jalur yang dilewati tidak ada penjaga dari tim yang sama. Sehingga harus ditentukan jumlah minimal tim pengawas yang dibutuhkan. Situasi inilah yang dapat dimodelkan dalam bilangan Koneksi Pelangi (*rainbow connection*).

Pada Gambar 2.14(a) peta jalur pendistribusian memiliki $k=4$, yang menurut Teorema 2.3.1 adalah $k(G) \leq rc(G) \leq k(G) + 1$ (Li, Sun; 2011), maka batas bawah dan batas atas dari $rc(G)$ adalah $4 \leq rc(G) \leq 4 + 1$, setelah diwarnai $c : E(G) \rightarrow 1, 2, 3, 4$ sehingga $rc(G) = 4$. Jadi yang harus dibentuk adalah 4 tim pengawas dan disebar menurut *rainbow coloring* seperti Gambar 2.14.



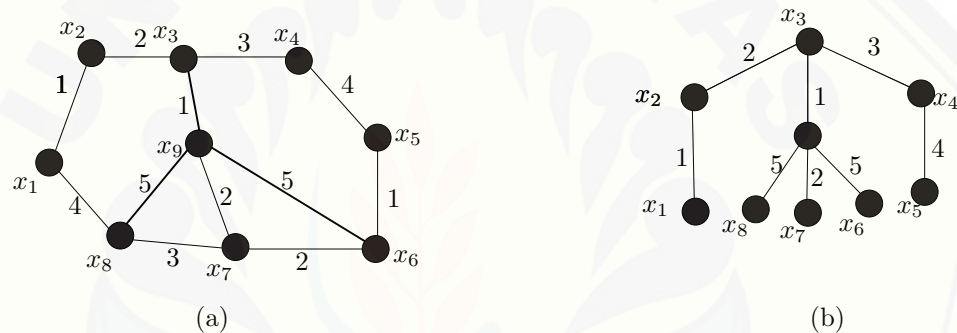
Gambar 2.14 Contoh Aplikasi $rc(G)$ (a) dan Contoh Aplikasi *Spanning Tree*(b)

Setelah ditemukan bilangan koneksi pelanginya, dibentuk tim sebanyak bilangan koneksi pelangi yang telah ditemukan yaitu 4, misalnya tim pertama dari b,a dan d, tim kedua dari b, c dan a, tim ketiga dari d, c dan a dan tim keempat dari b, c dan d . Kemudian diambil lintasan yang dapat menjangkau titik terbanyak dengan warna sisi harus berbeda. kondisi tersebut dapat dimodelkan dalam bentuk spaning tree seperti Gambar 2.14(b).

Pada Gambar 2.14(b) dimisalkan pusat penyimpanan dan distribusi kartu suara ditetapkan di x_3 . Untuk menuju ke titik x_7 harus melewati x_2, x_1, x_8 , dan

x_7 diperiksa oleh tim 2, 1, 4 dan 3 secara berurutan. Untuk menuju ke titik x_9 diperiksa oleh 1. Untuk menuju ke titik x_6 harus melewati x_4 , x_5 dan x_6 diperiksa oleh tim 3,4,1.

Konsep *koneksi pelangi kuat* juga dapat diaplikasikan pada proses distribusi surat suara. Sedikit berbeda dengan *koneksi pelangi*, perbedaannya adalah tim pengawas minimal sama dengan konsep koneksi pelangi namun waktu yang dibutuhkan untuk pendistribusian minimal sama atau bisa lebih cepat (diasumsikan anantara dua titik memiliki jarak tempuh yang sama), karena kecamatan dilalui dengan lintasan yang terpendek. Sesuai dengan konsep koneksi pelangi kuat bahwa antara dua titik harus menggunakan lintasan terpendek, sehingga pada Gambar 2.15 (a) terdapat perubahan yaitu pada sisi x_9x_8 .



Gambar 2.15 Contoh Aplikasi $src(G)$ (a) dan Contoh Aplikasi *Spanning Tree*(b)

Pada Gambar 2.15(b) dimisalkan KPUD kabupaten berpusat di x_3 . Untuk menuju ke titik x_1 harus melewati x_2 kemudian diperiksa oleh tim 2 dan 1 secara berturut-turut. Untuk menuju ke titik x_7 harus melewati x_9 diperiksa oleh tim 1 dan 2 secara berturut-turut, diperlukan tambahan kendaraan menuju titik x_8 diperiksa oleh tim 1 dan 5. Untuk menuju ke titik x_6 harus melewati x_9 diperiksa oleh tim 1 dan 5 secara berturut-turut. Jadi waktu yang diperlukan untuk pengiriman soal dari pusat sedikit lebih cepat, karena semua titik memiliki lintasan sama dengan 2 titik pusat pengiriman.

2.5 Hasil-hasil koneksi pelangi

Beberapa hasil penelitian terkait koneksi pelangi ($rc(G)$) dan koneksi pelangi kuat ($src(G)$) dapat dilihat dari rangkuman tabel berikut ini.

Tabel 2.1 Hasil Penelitian Terdahulu $rc(G)$ dan $src(G)$

Graf	Hasil	Keterangan
C_n (Cycle Graph); $n \geq 4$	$rc(C_n) = src(C_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$.	Chartand,dkk,2008
K_n (Compleat Graph); $n \geq 2$	$rc(K_n) = src(K_n) = 1$.	Chartand,dkk,2008
T_n (Tree); $n \geq 2$	$rc(T_n) = src(T_n) = n$.	Chartand,dkk,2008
W_n (Wheel Graph); $n \geq 3$	$rc(W_n) = 1; n = 3$. $rc(W_n) = 2; 4 \leq n \leq 6$. $rc(W_n) = 3; n \geq 7$. $src(W_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$.	Chartand,dkk,2008
G_n (Gear Graph); $n \geq 4$	$rc(G_n) = 4$.	Syafrizal,dkk, 2013
B_n (Book Graph); $n \geq 3$	$rc(B_n) = 4$.	Syafrizal,dkk, 2013
Dl_n (Diamond Ladder); $n \geq 2$	$rc(Dl_n) = n + 1$.	Alfarisi,dkk,2014
PC_n (Parachute Graph); $n \geq 2$	$rc(PC_n) = n + 1$.	Alfarisi,dkk,2014
W_4^n (Windmill Graph); $n \geq 2$	$rc(W_4^n) = 3$.	Alfarisi,dkk,2014
$H_{n,m}$ (Helmet Graph); $n \geq 3$; $m \geq 1$	$rc(H_{n,m}) = nm + 3$.	Alfarisi,dkk,2014
Graph $P_n + C_n$; $n \geq 3$	$rc(P_n + C_n) = 2$.	Fajariyanto,dkk,2014
Graph $C_n + S_n$; $n \geq 3$	$rc(C_n + S_n) = 2$.	Fajariyanto,dkk,2014
Graph $P_n + W_n$; $n \geq 3$	$rc(P_n + W_n) = 2$.	Fajariyanto,dkk,2014
Graph $C_n + W_n$; $n \geq 3$	$rc(C_n + W_n) = 2$.	Fajariyanto,dkk,2014
Graph $S_n + W_n$; $n \geq 3$	$rc(S_n + W_n) = 2$.	Fajariyanto,dkk,2014
Graph $P_n \square C_n$; $n \geq 2; m \geq 3$	$rc(P_n \square C_n) = n; m = 6$. $rc(P_n \square C_n) = n + 1$; $4 \leq m \leq 6$. $rc(P_n \square C_n) = n + 2$; $m \geq 6$.	Fajariyanto,dkk,2014
Graph Amal($W_n, v = 1, r$) $\square P_2$; $n \geq 3; r \geq 3$	$rc(\text{Amal}(W_n, v = 1, r) \square P_2) = 4$.	Fajariyanto,dkk,2014
Graph $P_n \otimes C_m$; $n \geq 3$	$rc(P_n \otimes C_m) = n$.	Fajariyanto,dkk,2014
Graph Amal($W_n, v = 1, r$) $\square P_2$; $n \geq 3; r \geq 3$	$rc(\text{Amal}(W_n, v = 1, r) \square P_2) = 4$.	Fajariyanto,dkk,2014

Graf	Hasil	Keterangan
$Graph P_n[S_m];$ $n \geq 3; m \geq 3$	$rc(P_n[S_m]) = 3; n = 3.$ $rc(P_n[S_m]) = n - 1;$ $n \geq 4.$	Fajariyanto,dkk,2014
$Graph P_n[C_n];$ $n \geq 2; m \geq 3$	$rc(P_n[C_n]) = n - 1;$ $n - 1 \geq \frac{m}{2}.$ $rc(P_n[C_n]) = 1; m = 3;$ $n - 1 < \frac{m}{2}.$ $rc(P_n[C_n]) = \frac{m}{2};$ $n - 1 < \frac{m}{2};$ $m \text{ genap}.$ $rc(P_n[C_n]) = \frac{m-1}{2} + 1;$ $n - 1 < \frac{m}{2};$ $m \text{ ganjil} > 3.$	Fajariyanto,dkk,2014
$Graph P_n[W_m];$ $n \geq 3; m \geq 3$	$rc(P_n[W_m]) = 3; n = 3.$ $rc(P_n[W_m]) = n - 1;$ $n \geq 4.$	Fajariyanto,dkk,2014
$Graph mP_n + K_1; m \geq 2;$ $n \geq 2$	$rc(mP_n + K_1) = 3.$	Darmawan,dkk,2015
$Graph mP_n + K_1; m \geq 2;$ $n \geq 2$	$src(mP_n + K_1) =$ $(\lceil \frac{n}{3} \rceil) m.$	Darmawan,dkk,2015
$Graph S_n \square P_m; n \geq 3;$ $m \geq 2$	$rc(S_n \square P_m) =$ $src(S_n \square P_m) =$ $n + m - 1.$	Darmawan,dkk,2015
$Graph W_n \square P_m; n \geq 3;$ $m \geq 2$	$rc(W_n \square P_m) = m; n = 3.$ $rc(W_n \square P_m) = m + 1;$ $4 \leq n \leq 6.$ $rc(W_n \square P_m) = m + 2;$ $n \geq 7.$	Darmawan,dkk,2015
$Graph W_n \square P_m; n \geq 3;$ $m \geq 2$	$src(W_n \square P_m) =$ $rc(W_n \square P_m); n = 3.$ $src(W_n \square P_m) =$ $rc(W_n \square P_m);$ $4 \leq n \leq 6.$ $src(W_n \square P_m) =$ $\lceil \frac{n}{3} \rceil + m - 1; n \geq 7.$	Darmawan,dkk,2015
$Graph W_n \square P_m; n \geq 3;$ $m \geq 2$	$src(W_n \square P_m) =$ $rc(W_n \square P_m); n = 3.$ $src(W_n \square P_m) =$ $rc(W_n \square P_m);$ $4 \leq n \leq 6.$ $src(W_n \square P_m) =$ $\lceil \frac{n}{3} \rceil + m - 1; n \geq 7.$	Darmawan,dkk,2015

BAB 3. METODE PENELITIAN

3.1 Metode Penelitian

Adapun metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

- Metode deduktif adalah metode yang menggunakan prinsip-prinsip pembuktian deduktif yang berlaku dalam logika matematika dengan menggunakan aksioma atau teorema yang telah ada untuk memecahkan suatu masalah yang akan diteliti.
- Metode Brute Force adalah metode penelitian dengan mencoba segala kemungkinan yang ada.
- Metode pattern recognition adalah metode penelitian dengan mengklarifikasikan objek kedalam suatu kelas atau kelompok tertentu.

3.2 Rancangan Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada graf $H_{2,2} \square P_n$, $F_{1,3} \square P_n$, $Amal(K_5, v, 2) \square P_n$, $Bt_3 \square P_n$, $C_5^2 \square P_n$, $P_n^{W_3}$, $P_n^{K_m}$, $shack(Bt_3, v, n)$, $shack(C_5^2, v, n)$, $shack((S_4 + K_1), v, n)$.

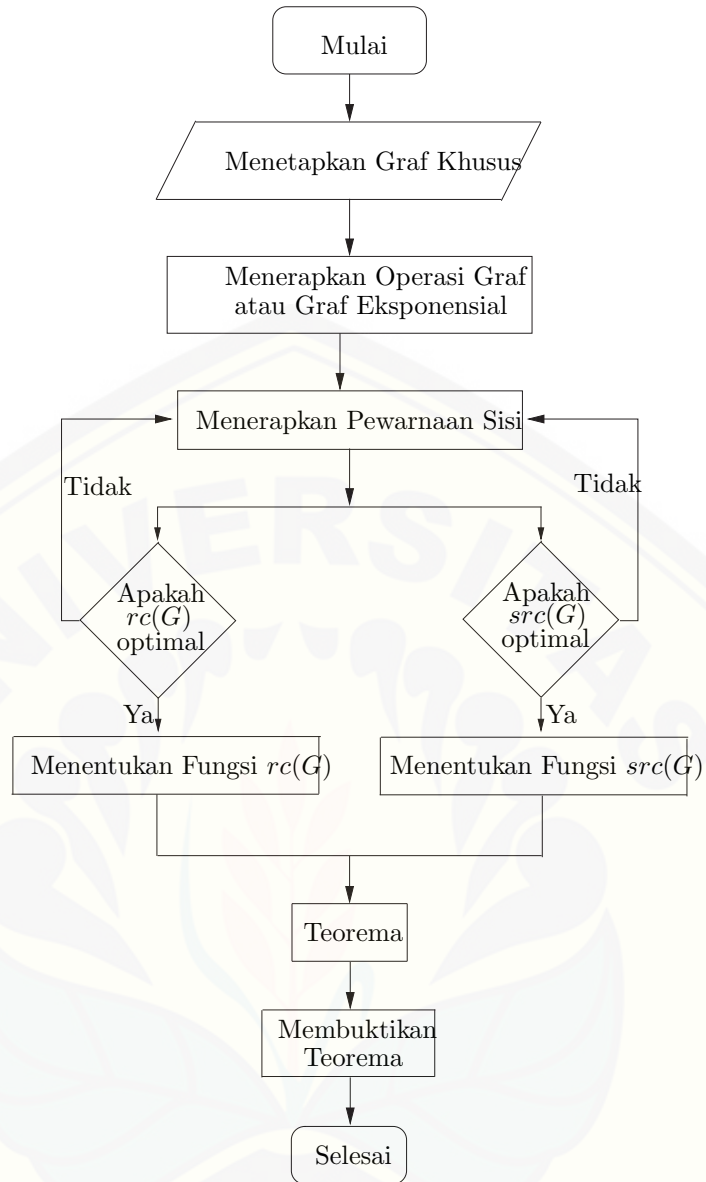
Adapun rancangan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

- Menentukan graf sebagai objek penelitian.
- Menerapkan operasi graf atau graf eksponensial pada graf-graf yang telah ditentukan.
- Menentukan kardinalitas titik dan sisi dari graf.
- Menerapkan pewarnaan pelangi dan pewarnaan pelangi kuat pada graf yang telah dioperasikan dengan menerapkan prinsip koneksi pelangi (*rainbow connection*) dan koneksi pelangi kuat (*strong rainbow connection*).
- Memeriksa $rc(G)$ dan $src(G)$ dengan menggunakan Teorema 2.3.1, apabila sudah berada dalam selang, maka dilanjutkan dengan menentukan fungsi, apabila belum berada dalam selang, maka kembali ke tahap sebelumnya yaitu menerapkan pewarnaan pelangi dan pewarnaan pelangi kuat pada graf.

- f. Menentukan fungsi sisi berdasarkan keteraturan dari $rc(G)$ dan $src(G)$ pada graf.
- g. Melakukan pembuktian teorema dengan menggunakan fungsi sehingga didapatkan teorema baru.
- h. Membuktikan teorema yang telah didapatkan.

Secara umum, rancangan penelitian diatas dapat disajikan dalam skema pada Gambar 3.1.





Gambar 3.1 Skema Penelitian

BAB 5. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dari pembahasan pada bab sebelumnya, didapatkan kardinalitas pada graf hasil operasi sebagai berikut :

1. $|V(H_{2,2} \square P_n)| = 4n$ dan $|E(H_{2,2} \square P_n)| = 8n - 4$
2. $|V(F_{1,3} \square P_n)| = 4n$, $|E(F_{1,3} \square P_n)| = 9n - 4$
3. $|V(\text{Amal}(K_5, v, 2) \square P_n)| = 9n$ dan $|E(\text{Amal}(K_5, v, 2) \square P_n)| = 29n - 9$
4. $|V(Bt_3 \square P_n)| = 5n$ dan $|E(Bt_3 \square P_n)| = 12n - 5$
5. $|V(C_5^2 \square P_n)| = 5n$, $|E(C_5^2 \square P_n)| = 12n - 5$
6. $|V(P_n^{W_3})| = 3n - 2$ dan $|E(P_n^{W_3})| = 5(n - 1)$
7. $|V(P_n^{K_m})| = m(n - 1) - n + 2$ dan $|E(P_n^{K_m})| = 3m(n - 1) - 5n + 3$
8. $|V(\text{shack}(Bt_3, v, n))| = 4n + 1$, $|E(\text{shack}(Bt_3, v, n))| = 7n$
9. $|V(\text{shack}(C_5^2, v, n))| = 4n + 1$ dan $|E(\text{shack}(C_5^2, v, n))| = 7n$
10. $|V(\text{shack}((S_4 + K_1), v, n))| = 5n + 1$ dan $|E(\text{shack}((S_4 + K_1), v, n))| = 9n$

Berdasarkan hasil dari pembahasan pada bab sebelumnya, disimpulkan bahwa bilangan koneksi pelangi dan bilangan koneksi pelangi kuat pada graf hasil operasi didapatkan 10 teorema baru yaitu sebagai berikut :

1. $rc(H_{2,2} \square P_n) = src(H_{2,2} \square P_n) = n + 1$
2. $rc(F_{1,3} \square P_n) = src(F_{1,3} \square P_n) = n + 1$
3. $rc(\text{Amal}(K_5, v = 1, 2) \square P_n) = src(\text{Amal}(K_5, v = 1, 2) \square P_n) = n + 1$
4. $rc(Bt_3 \square P_n) = src(Bt_3 \square P_n) = n + 1$

5. $rc(C_5^2 \square P_n) = src(C_5^2 \square P_n) = n + 1$
6. $rc(P_n^{W_3}) = src(P_n^{W_3}) = n - 1$
7. $rc(P_n^{K_m}) = src(P_n^{K_m}) = n - 1$
8. $rc(shack(Bt_3, v, n)) = src(shack(Bt_3, v, n)) = 2n$
9. $rc(shack(C_5^2, v, n)) = src(shack(C_5^2, v, n)) = 2n$
10. $rc(shack((S_4 + K_1), v, n)) = src(shack((S_4 + K_1), v, n)) = 2n$

Berdasarkan hasil dari pembahasan pada bab sebelumnya, disimpulkan bahwa fungsi pewarnaan koneksi pelangi dan fungsi pewarnaan koneksi pelangi kuat pada graf hasil operasi sebagai berikut :

1. Pewarnaan pada graf $H_{2,2} \square P_n$

$$f(e) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } e = x_{i,j}x_{i,j+1}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq 3 \\ 2, & \text{untuk } e = x_{i,1}x_{i,4}; 1 \leq i \leq n - 1 \\ i+2, & \text{untuk } e = x_{i,j}x_{i+1,j}; 1 \leq i \leq n - 1, 1 \leq j \leq 4 \end{cases}$$

2. Pewarnaan pada graf $F_{1,3} \square P_n$

$$f(e) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } e = y_i x_{i,j}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq 3 \\ i, & \text{untuk } e = x_{i,j} x_{i,j+1}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq 2 \\ i+2, & \text{untuk } e = y_i y_{i+1}; x_{i,j} x_{i+1,j}; 1 \leq i \leq n - 1, 1 \leq j \leq 3 \end{cases}$$

3. Pewarnaan pada graf $Amal(K_5, v, 2) \square P_n$

$$f(e) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } e = x_{i,j} x_{i,j+1}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq 3 \\ 1, & \text{untuk } e = y_i x_{i,4}, y_i z_{i,4}; 1 \leq i \leq n \\ 1, & \text{untuk } e = x_{i,4} x_{i,j}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq 2 \\ 2, & \text{untuk } e = y_i x_{i,j}, y_i z_{i,j}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq 3 \\ 2, & \text{untuk } e = x_{i,1} x_{i,3}, z_{i,1} z_{i,3}; 1 \leq i \leq n \\ i+2, & \text{untuk } e = y_i y_{i+1}; 1 \leq i \leq n - 1 \\ i+2, & \text{untuk } e = x_{i,j} x_{i+1,j}, z_{i,j} z_{i+1,j}; 1 \leq i \leq n - 1, 1 \leq j \leq 4 \end{cases}$$

4. Pewarnaan pada graf $Bt_3 \square P_n$

$$f(e) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } e = x_{i,j}x_{i,j+1}, x_{i,j}x_{i,4}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq 2 \\ 2, & \text{untuk } e = x_{i,j}x_{i,5}, x_{i,1}x_{i,3}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq 2 \\ i+2, & \text{untuk } e = x_{i,j}x_{i+1,j}; 1 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq 5 \end{cases}$$

5. Pewarnaan pada graf $C_5^2 \square P_n$

$$f(e) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } e = x_{i,5}x_{i,3}; 1 \leq i \leq n \\ 1 & \text{untuk } e = x_{i,j}x_{i,j+1}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq 4 \\ 2 & \text{untuk } e = x_{i,5}x_{i,j}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq 2 \\ i+2, & \text{untuk } e = x_{i,j}x_{i+1,j}; 1 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq 5 \end{cases}$$

6. Pewarnaan pada graf $P_n^{W_3}$

$$f(e) = \begin{cases} i, & \text{untuk } e = x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1 \\ i, & \text{untuk } e = x_{i+1} y_i; 1 \leq i \leq n-1 \\ i, & \text{untuk } e = x_{i+1} z_i; 1 \leq i \leq n-1 \\ i, & \text{untuk } e = x_i y_i, x_i z_i; 1 \leq i \leq n-1 \end{cases}$$

7. Pewarnaan pada graf $P_n^{K_m}$

$$f(e) = \begin{cases} i, & \text{untuk } e = x_i y_{i,j}; 1 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq m-2 \\ i, & \text{untuk } e = x_{i+1} y_{i,j}; 1 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq m-2 \\ i, & \text{untuk } e = y_{i,1} y_{i,n-2}, x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1 \\ i, & \text{untuk } e = y_{i,j} y_{i,j+1}; 1 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq m-3 \end{cases}$$

8. Pewarnaan pada graf $shack(Bt_3, v, n)$

$$f(e) = \begin{cases} 2i-1, & \text{untuk } e = x_{2i-1} x_{2i}, x_{2i} y_{2i-1}; 1 \leq i \leq n \\ 2i-1, & \text{untuk } e = x_{2i} y_{2i}, x_{2i-1} y_{2i-1}; 1 \leq i \leq n \\ 2i, & \text{untuk } e = x_{2i} y_{2i+1}; 1 \leq i \leq n \\ 2i, & \text{untuk } e = x_{2i-1} y_{2i+1}, y_{2i} x_{2i-1}; 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

9. Pewarnaan pada graf $shack(C_5^2, v, n)$

$$f(e) = \begin{cases} 2i - 1, & \text{untuk } e = x_{2i}x_{2i-1}; 1 \leq i \leq n \\ 2i - 1, & \text{untuk } e = x_{2i-1}y_i; x_{2i-1}z_i; 1 \leq i \leq n \\ 2i - 1, & \text{untuk } e = y_i z_i; 1 \leq i \leq n \\ 2i, & \text{untuk } e = x_{2i}z_i; 1 \leq i \leq n \\ 2i, & \text{untuk } e = x_{2i}y_{i+1}; 1 \leq i \leq n \\ 2i, & \text{untuk } e = y_{i+1}z_i; 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

10. Pewarnaan pada graf $shack((S_4 + K_1), v, n)$

$$f(e) = \begin{cases} 2i - 1, & \text{untuk } e = x_i y_i, x_i z_{i-2}; 1 \leq i \leq n \\ 2i - 1, & \text{untuk } e = A_i x_i, A_i y_i, A_i z_i; 1 \leq i \leq n \\ 2i, & \text{untuk } e = x_i z_{i,1}, x_i y_{i+1}; 1 \leq i \leq n \\ 2i, & \text{untuk } e = A_i z_{i,2}, A_i y_{i+1}; 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

5.2 Saran

Berdasarkan hasil penelitian mengenai analisa koneksi pelangi kuat pada graf *eksponensial* serta graf hasil operasi *cartesian product* dan *shackle*, dengan graf yang digunakan adalah graf lintasan, lingkaran, lengkap, roda, triangular book, kipas dan cocktail party, maka peneliti memberikan saran kepada peneliti selanjutnya untuk melakukan penelitian tentang karakteristik $rc(G) = src(G)$ dan koneksi pelangi dan koneksi pelangi kuat pada graf hasil operasi yang lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

- Alfarisi, R. dan Dafik. 2014. The Rainbow Connection Number of Special graphs. *Prosiding Seminar Matematika dan Pendidikan Matematika FMIPA UNEJ*,**1**:457-461.
- Chartrand, G., Kalamazoo, G., Johns, S., Valley, K. A., dan McKeon. 2008. *Rainbow Connection in Graphs*. Jurnal:*Math. Bohem.*, **133**:85-98.
- Dafik., Slamini., Dushyant., Andrea Semanicova- Fenovcikova., Martin Baca., Tanna, D. 2016. Contructions of H-antimagic graphs using snaller edge-antimagic graphs.*Ars Combinatoria*,100 (2016), In Press.
- Darmawan, R. N. 2015. *Analisis Rainbow Connection Number pada Graf Khusus dan Hasil Operasinya*. Tidak dipublikasikan. Tesis. Jember: Universitas Jember.
- Fajariyanto, A. 2015. *Penerapan Rainbow Connection pada Graf-Graf Hasil Operasi*. Tidak dipublikasikan. Skripsi. Jember: Universitas Jember.
- Harary, F. 2007. *Graph Theory*. New London: Wesley.
- Harsya, A. Y., Agustin, I. H., dan Dafik. 2014. Pewarnaan Titik Pada Operasi Graf Lintasan, Graf Sikel, dan Graf Bintang. *Prosiding Seminar Matematika dan Pendidikan Matematika Universitas Jember*, 1 (1).
- Hartsfield, N. dan Ringel, G. 1990. *Pearls in Graph Theory*. Boston San Diego New York London: Academic Press.
- Histamedika, G. 2012. Rainbow Connection pada Beberapa Graf. *Matematika UNAND*, **2**:17-25.
- Li, X. dan Sun, Y. 2011. *Rainbow Connection of Graphs- A survey*. ArXiv: 1101.5747v2[math.CO].
- M.A. Shulhany dan A.N.M. Salman. 2016. The (Strong) Rainbow Connection Number of Stellar Graphs. *AIP Conference Proceedings*. Bandung: Institut Teknologi Bandung.

- Munir, R. 2009. *Matematika Diskrit Edisi 3*. Bandung: Informatika Bandung.
- Purwanto, H., Indriani, G., dan Dayanti, E. 2006. *Matematika Diskrit*. Jakarta: PT. Ercontara Rajawali.
- Slamin. 2009. *Desain Jaringan: Pendekatan Teori Graf*. Jember: Universitas Jember.
- Syafrizal, Sy., dan Estetikasari, Dewi. 2013. *On Rainbow Connection for Some Corona Graphs*. *Jurnal: Applied Mathematical Sciences.*, **7**:4975-4979.
- Syafrizal, Sy., Medika, GH., Yulianti, Lyra. 2013. *The Rainbow Connection of Fan and Sun*. *Jurnal: Applied Mathematical Sciences.*, **7**:3155-3159.
- Yulianti, A. dan Dafik. 2014. Rainbow Connection Number pada Operasi Graf. *Prosiding Seminar Matematika dan Pendidikan Matematika FMIPA UNEJ*, **1**:521-525.

LAMPIRAN

Lanjutan Hasil Penelitian Terdahulu $rc(G)$ dan $src(G)$

Graf	Hasil	Keterangan
Dl_n (Diamond Ladder); $n \geq 2$	$rc(Dl_n) = n + 1.$	Alfarisi,dkk,2014
PC_n (Parachute Graph); $n \geq 2$	$rc(PC_n) = n + 1.$	Alfarisi,dkk,2014
W_4^n (Windmill Graph); $n \geq 2$	$rc(W_4^n) = 3.$	Alfarisi,dkk,2014
$H_{n,m}$ (Helmet Graph); $n \geq 3;$ $m \geq 1$	$rc(H_{n,m}) = nm + 3.$	Alfarisi,dkk,2014
Graph $P_n + C_n; n \geq 3$	$rc(P_n + C_n) = 2.$	Fajariyanto,dkk,2014
Graph $C_n + S_n; n \geq 3$	$rc(C_n + S_n) = 2.$	Fajariyanto,dkk,2014
Graph $P_n + W_n; n \geq 3$	$rc(P_n + W_n) = 2.$	Fajariyanto,dkk,2014
Graph $C_n + W_n; n \geq 3$	$rc(C_n + W_n) = 2.$	Fajariyanto,dkk,2014
Graph $S_n + W_n; n \geq 3$	$rc(S_n + W_n) = 2.$	Fajariyanto,dkk,2014
Graph $P_n \square C_n;$ $n \geq 2; m \geq 3$	$rc(P_n \square C_n) = n; m = 6.$ $rc(P_n \square C_n) = n + 1;$ $4 \leq m \leq 6.$ $rc(P_n \square C_n) = n + 2;$ $m \geq 6.$	Fajariyanto,dkk,2014
Graph Amal($W_n, v = 1, r$) $\square P_2; n \geq 3; r \geq 3$	$rc(\text{Amal}(W_n, v = 1, r)$ $\square P_2) = 4.$	Fajariyanto,dkk,2014
Graph $P_n \otimes C_m; n \geq 3$	$rc(P_n \otimes C_m) = n.$	Fajariyanto,dkk,2014
Graph $P_n[C_n];$ $n \geq 2; m \geq 3$	$rc(P_n[C_n]) = n - 1;$ $n - 1 \geq \frac{m}{2}.$ $rc(P_n[C_n]) = 1; m = 3;$ $n - 1 < \frac{m}{2}.$ $rc(P_n[C_n]) = \frac{m}{2};$ $n - 1 < \frac{m}{2};$ $m \text{ genap}.$ $rc(P_n[C_n]) = \frac{m-1}{2} + 1;$ $n - 1 < \frac{m}{2};$ $m \text{ ganjil} > 3.$	Fajariyanto,dkk,2014

Graf	Hasil	Keterangan
<i>Graph</i> $P_n[W_m]$; $n \geq 3; m \geq 3$	$rc(P_n[W_m]) = 3; n = 3.$ $rc(P_n[W_m]) = n - 1;$ $n \geq 4.$	Fajariyanto, dkk, 2014
<i>Graph</i> $P_n[S_m]$; $n \geq 3; m \geq 3$	$rc(P_n[S_m]) = 3; n = 3.$ $rc(P_n[S_m]) = n - 1;$ $n \geq 4.$	Fajariyanto, dkk, 2014
<i>Graph Amal</i> ($C_n, v = 1, r$) $\square P_2; n \geq 3; r \geq 3$	$rc(\text{Amal}(C_n, v = 1, r)$ $\square P_2) = n + 1.$	Fajariyanto, dkk, 2014
<i>Graph Amal</i> ($P_n, v = 1, r$) $\square P_2; n \geq 3; r \geq 3$	$rc(\text{Amal}(P_n, v = 1, r)$ $\square P_2) = 2n.$	Fajariyanto, dkk, 2014
<i>Graph</i> $mP_n + K_1; m \geq 2;$ $n \geq 2$	$rc(mP_n + K_1) = 3.$	Darmawan, dkk, 2015
<i>Graph</i> $mP_n + K_1; m \geq 2;$ $n \geq 2$	$src(mP_n + K_1) =$ $(\lceil \frac{n}{3} \rceil) m.$	Darmawan, dkk, 2015
<i>Graph</i> $S_n \square P_m; n \geq 3;$ $m \geq 2$	$rc(S_n \square P_m) =$ $src(S_n \square P_m) =$ $n + m - 1.$	Darmawan, dkk, 2015
<i>Graph</i> $W_n \square P_m; n \geq 3;$ $m \geq 2$	$rc(W_n \square P_m) = m; n = 3.$ $rc(W_n \square P_m) = m + 1;$ $4 \leq n \leq 6.$ $rc(W_n \square P_m) = m + 2;$ $n \geq 7.$	Darmawan, dkk, 2015
<i>Graph</i> $W_n \square P_m; n \geq 3;$ $m \geq 2$	$src(W_n \square P_m) =$ $rc(W_n \square P_m); n = 3.$ $src(W_n \square P_m) =$ $rc(W_n \square P_m);$ $4 \leq n \leq 6.$ $src(W_n \square P_m) =$ $\lceil \frac{n}{3} \rceil + m - 1; n \geq 7.$	Darmawan, dkk, 2015
<i>Graph</i> $P_n \odot C_m; n \geq 2;$ $m \geq 3$	$rc(P_n \odot C_m) = 2n - 1;$ $m = 3.$ $rc(P_n \odot C_m) = 3n - 1;$ $m \geq 4.$	Darmawan, dkk, 2015
<i>Graph Amal</i> [($S_4 \square P_2$), $v = 1, n$]; $n \geq 2$	$rc(\text{Amal}[(S_4 \square P_2),$ $v = 1, n]) =$ $src(\text{Amal}[(S_4 \square P_2),$ $v = 1, n]) = 5n.$	Darmawan, dkk, 2015
<i>Graph</i> $Pr_{(n,m)}; n \geq 3;$ $m \geq 1$	$rc(Pr_{(n,m)}) = src(Pr_{(n,m)})$ $= m; n = 3.$ $rc(Pr_{(n,m)}) = src(Pr_{(n,m)})$ $= \lceil \frac{n}{2} \rceil + (m - 1); n \geq 4.$	Darmawan, dkk, 2015
<i>Graph</i> $AP_n; n \geq 3;$ $m \geq 1$	$rc(AP_n) = src(AP_n)$ $= 2; n = 3.$ $rc(AP_n) = src(AP_n)$ $= \lceil \frac{n}{2} \rceil; n \geq 4.$	Darmawan, dkk, 2015

Graf	Hasil	Keterangan
$Graph P_n \odot C_m; n \geq 2; m \geq 3$	$src(P_n \odot C_m) =$ $rc(P_n \odot C_m); m = 3.$ $src(P_n \odot C_m) =$ $rc(P_n \odot C_m);$ $4 \leq m \leq 6.$ $src(P_n \odot C_m) =$ $n \left(\lceil \frac{m}{3} \rceil \right) + (n - 1); m \geq 7.$	Darmawan,dkk,2015
$Graph shack[(P_2 \otimes W_3), n]; n \geq 2$	$rc(shack[(P_2 \otimes W_3), n]) =$ $src(shack[(P_2 \otimes W_3), n])$ $= 3n.$	Darmawan,dkk,2015
$Graph shack[(P_3 \otimes C_3), n]; n \geq 2$	$rc(shack[(P_3 \otimes C_3), n]) =$ $src(shack[(P_3 \otimes C_3), n])$ $= 4n.$	Darmawan,dkk,2015
$Graph Amal[(S_4 + K_1), v = 1, n]; n \geq 2$	$rc(Amal[(S_4 + K_1), v = 1, n]) = 3.$	Darmawan,dkk,2015
$Graph Amal[(S_4 + K_1), v = 1, n]; n \geq 2$	$src(Amal[(S_4 + K_1), v = 1, n]) = 2n.$	Darmawan,dkk,2015
$Graph F_{2,6} \square P_m; m \geq 2;$	$rc(F_{2,6} \square P_m) = .$ $src(F_{2,6} \square P_m) = m + 1.$	Hasan,dkk,2015
$Graph Amal(F_{1,3}, v = 1, 2), \square P_m; m \geq 2$	$rc(Amal(F_{1,3}, v = 1, 2) \square P_m) =$ $src(Amal(F_{1,3}, v = 1, 2) \square P_m) = m + 1,$	Hasan,dkk,2015
$Graph Amal(W_4, v = 1, 2), \square P_m; m \geq 2$	$rc(Amal(W_4, v = 1, 2) \square P_m) =$ $src(Amal(W_4, v = 1, 2) \square P_m) = m + 1,$	Hasan,dkk,2015
$Graph P_2[F_{2,n}]; m \geq 2$	$rc(P_2[F_{2,n}]) =$ $src(P_2[F_{2,n}]) = 2,$	Hasan,dkk,2015
$Graph gshack(K_n, P_2, r),$	$rc(gshack(K_n, P_2, r)) =,$ $src(gshack(K_n, P_2, r)) = r$	Hasan,dkk,2015
$Graph gshack(K_n, C_3, r),$	$rc(gshack(K_n, C_3, r)) =,$ $src(gshack(K_n, C_3, r)) = r$	Hasan,dkk,2015
$Graph gshack(W_6, C_3, r),$	$rc(gshack(W_6, C_3, r)) =,$ $src(gshack(W_6, C_3, r)) = 2r$	Hasan,dkk,2015
$Graph gshack(W_6, C_4^1, r),$	$rc(gshack(W_6, C_4^1, r)) =,$ $src(gshack(W_6, C_4^1, r)) = 2r$	Hasan,dkk,2015