



**SUPER (a,d) - \mathcal{H} -ANTI AJAIB TOTAL SELIMUT PADA *JOINT*
GRAF DAN APLIKASINYA DALAM *CIPHERTEXT***

SKRIPSI

Oleh

Yuni Wardatus Zuroh

NIM 121810101073

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS JEMBER

2016



**SUPER (a,d) - \mathcal{H} -ANTI AJAIB TOTAL SELIMUT PADA *JOINT*
GRAF DAN APLIKASINYA DALAM *CIPHERTEXT***

SKRIPSI

diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan Program Studi Matematika (S1) dan mencapai gelar Sarjana Sains

Oleh

Yuni Wardatus Zuroh

NIM 121810101073

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER**

2016

PERSEMBAHAN

Dengan menyebut nama Allah yang Maha Pengasih lagi Maha Penyayang, Sholawat serta salam kepada junjungan Rosulullah Muhammad SAW, kupersembahkan sebuah kebahagiaan dalam perjalanan hidupku teriring rasa terima kasih kepada:

1. Allah SWT, yang telah memberikan nikmat, Ridho, dan Rahmat-Nya sehingga skripsi ini dapat terselesaikan;
2. ayahanda Suwarso Wangsiting Dumadi dan ibunda Supiah yang senantiasa mendo'akan serta memberikan kasih sayang dan dukungan baik secara moral maupun materi, kakak-kakakku Arif Widianoro dan Miftahul ulum, juga adekku Yuli Fatma Sari, serta keluarga besarku yang selalu memberikan motivasi dan dukungan;
3. Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si selaku Dosen Pembimbing I dan Kusbudiono, S.Si., M.Si selaku Dosen Pembimbing II yang telah meluangkan waktu, pikiran, dan perhatian dalam penulisan skripsi ini;
4. seluruh pahlawan tanpa tanda jasaku dari TK Al-Islamiah, SDN Juwet Kenongo 1, SMPN 1 Porong, SMAN 1 Porong, PonPes Al-Karimi 1 dan Dosen MIPA UNEJ;
5. Keluarga Besar Matematika Angkatan 2012 (BATHICS'12) dan sahabat-sahabatku yang selalu membantuku dan menorehkan pengalaman hidup tak terlupakan;
6. teman-teman pejuang graf yang selalu berbagi suka maupun duka dan selalu memberikan dukungan serta semangat;
7. Almamater tercinta Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
8. semua pihak yang telah membantu terselesaikannya skripsi ini.

MOTTO

"Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan."

(Terjemahan QS. Al-Insyirah : 6)*)

"Ridha Allah tergantung pada ridha orang tua dan murka Allah tergantung pula pada murka orang tua"

(HR. Tabrani)**)

"Sebaik-baik manusia adalah yang paling bermanfaat bagi manusia"

(HR. Ahmad, ath -Thabrani, ad-Daruqutni***)

*) Departemen Agama Republik Indonesia. 2004. *Al-Qur'an* dan Terjemahannya.

***) muslim.or.id

***) muslim.or.id



PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Yuni Wardatus Zuroh

NIM : 121810101073

Menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang berjudul:
SUPER (a,d) - \mathcal{H} -ANTI AJAIB TOTAL SELIMUT PADA *JOINT* GRAF DAN
APLIKASINYA DALAM CIPHERTEXT adalah benar-benar hasil karya sendiri,
kecuali jika dalam pengutipan substansi disebutkan sumbernya, dan belum diajukan
pada instansi manapun, serta bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas
keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung
tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa adanya tekanan
dan paksaan dari pihak manapun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika
ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, Juni 2016

Yang menyatakan,

Yuni Wardatus Zuroh

NIM. 121810101073

SKRIPSI

**SUPER (a,d) - \mathcal{H} - ANTI AJAIB TOTAL SELIMUT PADA *JOINT*
GRAF DAN APLIKASINYA DALAM *CIPHERTEXT***

Oleh

Yuni Wardatus Zuroh
NIM 121810101073

Pembimbing

Dosen Pembimbing 1 : Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si.

Dosen Pembimbing 2 : Kusbudiono, S.Si., M.Si.

PENGESAHAN

Skripsi berjudul Super (a,d) - \mathcal{H} - Anti Ajaib Total Selimut pada *Joint* Graf dan Aplikasinya dalam *Ciphertext* telah diuji dan disahkan oleh Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam pada:

Hari / tanggal :

Tempat : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas
Jember

Tim Penguji :

Ketua,

Sekretaris,

Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si.

Kusbudiono, S.Si., M.Si.

NIP.19840801 200801 2 006

NIP.19770430 200501 1 001

Anggota I,

Anggota 2,

Prof. Drs. Dafik, M.Sc, Ph.D.

Kosala Dwidja Purnomo, S.Si., M.Si.

NIP.19680802 199303 1 004

NIP.19690828 199802 1 001

Mengesahkan,

Dekan

Drs. Sujito, Ph.D.

NIP. 19610204 198711 1 001

RINGKASAN

SUPER (a,d) - \mathcal{H} -ANTI AJAIB TOTAL SELIMUT PADA *JOINT* GRAF DAN APLIKASINYA DALAM *CIPHERTEXT*; Yuni Wardatus Zuroh, 121810101073; 2016: 63 halaman; Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Jember.

Kajian topik dari matematika diskrit yang saat ini banyak dikembangkan salah satunya adalah teori graf. Permasalahan yang cukup menarik dalam teori graf adalah pelabelan graf. Pelabelan graf adalah pemetaan yang bersifat bijektif dari elemen-elemen graf (titik dan sisi) ke himpunan bilangan bulat positif. Pelabelan ajaib merupakan pelabelan yang mempunyai jumlah bobot total sama. Sedangkan pelabelan anti ajaib merupakan pelabelan dengan jumlah bobot total berbeda dan membentuk barisan aritmatika dengan a adalah suku pertama dan d beda. Dalam hal ini a, d bilangan tak negatif dan $a \neq 0$. Salah satu pelabelan anti ajaib yaitu pelabelan selimut $(a, d) - \mathcal{H}$ -anti ajaib pada suatu graf $G = (V(G), E(G))$ dimana v titik dan e sisi adalah sebuah pelabelan total λ dari $V(G) \cup E(G)$ terdapat bilangan bulat $\{1, 2, 3, \dots, |V(G) \cup E(G)|\}$, untuk setiap subgraf H dari G yang isomorfik dengan \mathcal{H} dimana $\Sigma H = \sum_{v \in V(H)} \lambda(v) + \sum_{e \in E(H)} \lambda(e)$ merupakan barisan aritmatika $\{a, a + d, a + 2d, \dots, a + (s - 1)d\}$ dimana a, d bilangan positif dengan a adalah suku pertama, d adalah beda, dan s adalah jumlah selimutnya.

Tujuan dari penelitian ini adalah untuk menentukan kardinalitas titik dan sisi pada *joint* graf dari graf lengkap dan graf *triangular ladder*, menentukan batas atas d pada pelabelan super (a,d) - \mathcal{H} -anti ajaib total selimut pada *joint* graf dari graf lengkap dan graf *triangular ladder*, menentukan beberapa nilai d pada pelabelan super (a,d) - \mathcal{H} -anti ajaib total selimut pada *joint* graf dari graf lengkap dan graf *triangular ladder*, mengembangkan *ciphertext* sebagai aplikasi pelabelan dengan menggunakan pelabelan super (a,d) - \mathcal{H} -anti ajaib total selimut pada graf *joint* dari graf lengkap dan graf *triangular ladder*. Berdasarkan penelitian dihasilkan kardinalitasnya yaitu himpunan titik $V_1 = \{u_{ik}; 1 \leq i \leq m, 1 \leq k \leq n\}$ dan $V_2 = \{v_j; 1 \leq j \leq s, s = 2h\}$, himpunan sisi $E_1 = \{e_{lk}; 1 \leq l \leq c, 1 \leq k \leq n\}$ dan $E_2 = \{z_r; 1 \leq r \leq t, t = 4h - 3\}$, jumlah titik $|V_1| = mn$ dan $|V_2| = s$

maka $p_G = |V_1| + |V_2|$, serta jumlah sisi $|E_1| = cn$ dan $|E_2| = t$ maka $q_G = |E_1| + |E_2|$. Batas atas d untuk pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} -anti ajaib total selimut pada *joint* graf dari graf lengkap dan graf *triangular ladder* yaitu $d \leq p_H^2 + q_H^2 - (s)p_H - (t)q_H$ dengan $p_H = m + s$ dan $q_H = c + t$. Kemudian dihasilkan 2 lemma tentang partisi meliputi $\mathcal{P}_{m, m^2+2m}^n(i, k)$, dan $\mathcal{P}_{m, -(m^2+2m)}^n(i, k)$. Dari partisi yang dihasilkan dilakukan kombinasi dengan partisi yang telah ditemukan sebelumnya, sehingga diperoleh sebuah teorema yaitu *Joint* graf dari graf lengkap dan graf *triangular ladder* yang dinotasikan dengan $nK_y + L_h$. memiliki super (a, d) - \mathcal{H} -anti ajaib total selimut dengan $a = \{(m_2 + s_2)(n(m_1 + 2)) + \sum_{o=3}^8 m_o(n \sum_{\varphi=1}^{o-1} m_\varphi + 4n) + (c_1 + t)(mn + s) + tcn + \sum_{o=2}^6 c_o(n \sum_{\varphi=1}^{o-1} c_\varphi + mn + s) + \frac{n}{2}(m_3^2 - m_3 + m_4^2 + m_4 + c_1^2 - c_1 + c_2^2 + c_2) + \frac{1}{2}[-m_1^2 - 3m_1 + m_2^2 + m_2 + m_5 - m_5^2 + c_3 - c_3^2 + m_6(2m_6n + m_6 + 1) + c_4(2c_4n + c_4 + 1) + t^2 + t] + \frac{1}{4}[m_7(2m_7n - n + 1) + m_8(2m_8n + n + 3) + s_1(2m_1 + m_1s_1 + 2s_1 + 2) + s_2(2m_2 + m_2s_2 + 2s_2 + 2) + c_5(2c_5n - n + 1) + c_6(2c_6n + n + 3)] + n(m_2^2 + 2m_2) + m_4 + c_2\}$ dan $d = (m_1^2 + 2m_1) - (m_2^2 + 2m_2) + m_3 - m_4 + m_5^2 - m_6^2 + \frac{m_7}{2} - \frac{m_8}{2} + c_1 - c_2 + c_3^2 - c_4^2 + \frac{c_5}{2} - \frac{c_6}{2}$. Selain itu diperoleh tahapan pembentukan *ciphertext* pada pelabelan. *Ciphertext* yang dihasilkan terdiri dari dua contoh yaitu *ciphertext* alfabet dan *ciphertext* simbol. Pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} -anti ajaib total selimut pada graf *joint* $nK_y + L_h$ dapat menghasilkan *ciphertext* bermacam-macam bergantung pada n, y, h, d , kombinasi partisi yang digunakan, peletakan label, dan jumlah karakter yang akan dijadikan *ciphertext*.

PRAKATA

Puji syukur atas ke hadirat Allah Swt atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul super (a,d) - \mathcal{H} - anti ajaib total selimut pada *joint* graf dan aplikasinya dalam *ciphertext*. Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat menyelesaikan pendidikan strata satu (S1) pada Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih atas bantuan, serta bimbingan dan dukungan dalam penyusunan skripsi ini, terutama kepada yang terhormat:

1. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
2. Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
3. Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si. selaku Dosen Pembimbing I dan Kusbudiono, S.Si., M.Si. selaku Dosen Pembimbing II yang telah meluangkan waktu, pikiran, dan perhatian dalam penulisan skripsi ini;
4. Prof. Drs. Dafik, M.Sc, Ph.D. selaku Dosen Penguji I dan Kosala Dwidja Purnomo, S.Si., M.Si. selaku Dosen Penguji II;
5. Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si. selaku Dosen Pembimbing Akademik;
6. dosen dan karyawan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
7. ayahanda Suwarso Wangsiting Dumadi dan ibunda Supiah yang senantiasa mendo'akan serta memberikan kasih sayang dan dukungan baik secara moral maupun materi, kakak-kakakku Arif Widiatoro dan Miftahul ulum, juga adekku Yuli Fatma Sari, serta keluarga besarku yang selalu memberikan motivasi dan dukungan;

8. semua pihak yang telah membantu terselesaikannya skripsi ini.

Semoga bantuan, bimbingan, dan dorongan beliau dicatat sebagai amal baik oleh Allah SWT dan mendapat balasan yang sesuai dari-Nya. Selain itu, penulis juga menerima segala kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan skripsi ini. Akhirnya penulis berharap, semoga skripsi ini dapat bermanfaat.

Jember, Juni 2016

Penulis



DAFTAR ISI

	Halaman
HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PERSEMBAHAN	ii
HALAMAN MOTTO	iii
HALAMAN PERNYATAAN	v
HALAMAN PEMBIMBING	vi
HALAMAN PENGESAHAN	vii
RINGKASAN	viii
PRAKATA	x
DAFTAR ISI	xii
DAFTAR GAMBAR	xiv
DAFTAR TABEL	xv
BAB 1. PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	3
1.3 Tujuan Penelitian	3
1.4 Manfaat Penelitian	4
BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA	5
2.1 Konsep Dasar dan Terminologi Graf	5
2.2 Graf Khusus dan Operasi Graf	9
2.2.1 Graf Khusus	9
2.2.2 Operasi Graf	10
2.3 Fungsi dan Barisan Aritmatika	11
2.4 Partisi	13
2.5 Pelabelan Graf	13
2.5.1 Definisi Pelabelan Graf	13
2.5.2 Pelabelan Selimut- \mathcal{H} -Anti Ajaib Super	14
2.5.3 Teknik Partisi pada Pelabelan Graf	15
2.5.4 Lemma Batas Atas (d)	19

2.6	Aplikasi Graf	20
2.7	Hasil-Hasil Penelitian Pelabelan Selimut \mathcal{H} -Anti Ajaib	21
BAB 3.	METODE PENELITIAN	23
3.1	Metode Penelitian	23
3.2	Rancangan Penelitian	23
3.2.1	Penotasian Titik dan Sisi	23
3.2.2	Indikator Pelabelan	24
3.3	Teknik Penelitian	25
BAB 4.	HASIL DAN PEMBAHASAN	28
4.1	Kardinalitas dan Batas Atas <i>Joint</i> Graf $nK_y + L_h$ Konektif	28
4.2	Pengembangan Partisi dan Variasi Nilai Beda d	30
4.3	Super (a,d) - \mathcal{H} -Anti Ajaib Total Selimut pada <i>joint</i> $nK_y + L_h$ Graf Konektif	31
4.4	Pengembangan <i>Ciphertext</i> pada Super (a,d) - \mathcal{H} -Anti Ajaib Total Selimut pada <i>Joint</i> Graf $nK_y + L_h$	43
4.4.1	Pengembangan <i>Ciphertext</i> Alfabet pada Super $(10028,14)$ - \mathcal{H} -Anti Ajaib Total Selimut pada <i>Joint</i> Graf $3K_4 + L_6$	45
4.4.2	Pengembangan <i>Ciphertext</i> Simbol pada Super $(10000, 30)$ - \mathcal{H} -Anti Ajaib Total Selimut pada <i>Joint</i> Graf $3K_4 + L_6$	47
4.5	Hasil dan Pembahasan	51
BAB 5.	KESIMPULAN DAN SARAN	57
5.1	Kesimpulan	57
5.2	Saran	60
DAFTAR PUSTAKA	61

DAFTAR GAMBAR

	Halaman
2.1 Contoh graf G	6
2.2 (a) Graf G (b) Subgraf dari G (c) <i>Spanning Subgraph</i> dari G	7
2.3 Contoh graf isomorfis	7
2.4 Contoh gabungan graf <i>Disjoint union of disconnected graph</i>	8
2.5 Contoh graf lengkap K_4 dan K_6	9
2.6 Graf <i>triangular ladder</i> L_n dengan $n = 4$	10
2.7 Hasil <i>joint</i> graf pada K_4 dan L_3	10
2.8 (a) Fungsi Injektif, (b) Fungsi Surjektif, dan (c) Fungsi Bijektif	12
2.9 (a) Pelabelan Titik, (b) Pelabelan Sisi, dan (c) Pelabelan Total	14
2.10 contoh super $(a, d) - \mathcal{H}$ -anti ajaib total selimut pada graf Semi Jahangir SJ_6	15
3.1 Penotasian pada <i>joint</i> graf $3K_4 + L_3$ tunggal.....	25
3.2 Diagram alir penelitian.....	27
4.1 Super $(10028, 14)$ - \mathcal{H} -Anti Ajaib Total Selimut pada <i>Joint</i> Graf $3K_4 + L_6$...	35
4.2 Super $(10000, 30)$ - \mathcal{H} -Anti Ajaib Total Selimut pada <i>Joint</i> Graf $3K_4 + L_6$	38
4.3 Super $(10031, 23)$ - \mathcal{H} -Anti Ajaib Total Selimut pada <i>Joint</i> Graf $3K_4 + L_6$	41
4.4 graf pohon $3K_4 + L_6$	46
4.5 graf pohon $3K_4 + L_6$	49

DAFTAR TABEL

	Halaman
2.1 Klasifikasi partisi $d = c$	17
2.2 Klasifikasi partisi $d = c^2$	17
2.3 Klasifikasi partisi $d = \frac{c}{2}$	17
2.4 Aturan Julius Caesar	21
2.5 Hasil pelabelan selimut super (a, d) - \mathcal{H} -anti ajaib	22
4.1 Pelabelan <i>joint</i> graf $3K_4 + L_6$ dengan $d = 14$	36
4.2 Lanjutan pelabelan <i>joint</i> graf $3K_4 + L_6$ dengan $d = 14$	37
4.3 Pelabelan <i>joint</i> graf $3K_4 + L_6$ dengan $d = 30$	39
4.4 Lanjutan pelabelan <i>joint</i> graf $3K_4 + L_6$ dengan $d = 30$	40
4.5 Pelabelan <i>joint</i> graf $3K_4 + L_6$ dengan $d = 23$	42
4.6 Lanjutan pelabelan <i>joint</i> graf $3K_4 + L_6$ dengan $d = 23$	43
4.7 Pembentukan <i>ciphertext</i> alfabet dari gambar 4.1	47
4.8 Aturan pengkodean untuk bilangan mod 48	48
4.9 Pembentukan <i>ciphertext</i> simbol dari gambar 4.2	50
4.10 <i>ciphertext</i> alfabet dari super $(10028,14)$ - \mathcal{H} -anti ajaib total selimut pada <i>joint</i> graf $3K_4 + L_6$	53
4.11 <i>Ciphertext</i> simbol dari super $(10000,30)$ - \mathcal{H} -anti ajaib total selimut pada <i>joint</i> graf $3K_4 + L_6$	53
5.1 Aturan pengkodean untuk bilangan modulo 26 dengan alfabet	58
5.2 Aturan pengkodean untuk bilangan modulo 48 dengan simbol	59
5.3 <i>Ciphertext</i> alfabet dari super $(10028,14)$ - \mathcal{H} -anti ajaib total selimut pada <i>joint</i> graf $3K_4 + L_6$	59
5.4 <i>Ciphertext</i> simbol dari super $(10000,30)$ - \mathcal{H} -anti ajaib total selimut pada <i>joint</i> graf $3K_4 + L_6$	60

BAB 1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Salah satu kajian topik dari matematika diskrit yang saat ini banyak dikembangkan adalah teori graf. Teori Graf diperkenalkan pertama kali oleh Leonhard Euler, matematikawan asal Swiss pada tahun 1736. Teori tersebut digunakan untuk menyelesaikan permasalahan jembatan Königsberg yaitu bagaimana cara melewati setiap jembatan tepat satu kali dari satu tempat dan kembali ke tempat semula. Euler mempresentasikan masalah tersebut ke dalam graf dimana jembatan dinyatakan dengan garis (*edge*) dan daratan dinyatakan dengan titik (*vertex*). Graf merupakan himpunan titik (*vertex*) dimana satu dengan yang lain dihubungkan oleh sisi (*edge*). Semakin berkembangnya ilmu pengetahuan maka teori graf juga mengalami perkembangan yang semakin luas dan beragam. Topik yang berkembang cukup luas yaitu tentang pelabelan graf. Selain itu, aplikasi teori graf dalam permasalahan sehari-hari juga mulai dikembangkan. Salah satunya yaitu aplikasi pelabelan graf pada *ciphertext* atau pesan rahasia. Pelabelan graf berfungsi sebagai kunci rahasia untuk mengatur proses enkripsi atau deskripsi pada *ciphertext*.

Pelabelan graf adalah pemetaan yang bersifat bijektif dari elemen-elemen graf (titik dan sisi) ke himpunan bilangan bulat positif. Pelabelan pertama kali diperkenalkan oleh Sedlacek pada tahun 1964, dilanjutkan oleh Stewart tahun 1966. Berdasarkan elemen-elemen yang dilabeli, pelabelan dibagi menjadi 3 jenis, yaitu pelabelan titik, pelabelan sisi, dan pelabelan total. Jika elemen yang dilabeli adalah titik, maka disebut pelabelan titik (*vertex labeling*). Jika elemen yang dilabeli adalah sisi, maka disebut pelabelan sisi (*edge labeling*), dan jika elemen yang dilabeli titik dan sisi maka disebut pelabelan total (*total labeling*). Terdapat beberapa jenis pelabelan yaitu pelabelan *graceful*, pelabelan ajaib (*magic*), pelabelan anti ajaib (*antimagic*) dan lain-lain. Pelabelan ajaib diperkenalkan pertama kali oleh Kotzig dan Rosa pada tahun 1970 (Kotzig dan Rosa, 1970). Kemudian pada tahun 1990 Hartsfield dan Ringel mengembangkan pelabelan anti ajaib. Pelabelan ajaib

merupakan pelabelan yang mempunyai jumlah bobot total sama. Sedangkan pelabelan anti ajaib merupakan pelabelan dengan jumlah bobot total berbeda dan membentuk barisan aritmatika dengan a adalah suku pertama dan d beda. Dalam hal ini a, d bilangan tak negatif dan $a \neq 0$.

Gutierrez dan Llado pada tahun 2005 memperkenalkan pelabelan selimut \mathcal{H} ajaib yaitu suatu graf $G = (V(G), E(G))$ dikatakan memiliki pelabelan selimut \mathcal{H} ajaib apabila setiap garis pada $E(G)$ termuat dalam subgraf H' dari G yang isomorfik dengan \mathcal{H} . Dalam hal ini \mathcal{H} merupakan subgraf dari G . Selanjutnya Inayah *et al* (2009) mengembangkan pelabelan selimut $(a, d) - \mathcal{H}$ -anti ajaib yaitu sebuah pelabelan selimut \mathcal{H} anti ajaib pada graf G dengan fungsi bijektif yang membentuk barisan aritmatika $\{a, a + d, a + 2d, \dots, a + (s - 1)d\}$ dimana a, d bilangan positif dengan a adalah suku pertama, d adalah beda, dan s adalah jumlah selimutnya. Jika himpunan titik V merupakan fungsi bijektif f ke himpunan $\{1, \dots, |V(G)|\}$ maka graf tersebut disebut \mathcal{H} -anti ajaib super. Setiap pelabelan graf memiliki nilai batas atas d yang berbeda dan nilai d tidak tunggal. Nilai $d \leq s$ dimana d merupakan bilangan bulat non negatif dan s merupakan nilai terbesar d dalam suatu graf yang berarti $d = \{0, 1, 2, \dots, s\}$ dan tidak akan ditemukan nilai $d > s + 1$ (Agustin *et al.*, 2014). Terdapat beberapa macam pengoperasian graf, dan dalam penelitian ini operasi graf yang digunakan yaitu *Joint* ($G + H$).

Hasil-hasil pelabelan super $(a, d) - \mathcal{H}$ -anti ajaib total selimut yang telah ditemukan yaitu Super $(a, d) - \mathcal{H} - Antimagic Total Covering$ pada *Amalgamation* Graf K_4 dan W_4 oleh Anggraeni (2014) dan memberikan kesimpulan dari penelitiannya bahwa graf K_n dan W_n dengan $n \geq 4$ dan $m \geq 4$ memiliki super $(12n + 9i + 106, 9)$ dan $(14n + 7i + 103, 7)$. Pelabelan Super $(a, d) - \mathcal{H} - Antimagic Covering$ pada *Shackle* Graf *Triangular Book* oleh Pudyaningrum (2014) yang menemukan super \mathcal{H} antimagic total covering untuk *shackle* graf *triangular book* tunggal $d = \{96, 60, 48, 40, 33, 30, 28, 25, 23, 20, 18, 15, 12, 8\}$ dan gabungan saling lepas $d = \{15, 17, 19, 21, 23\}$ dengan $n \geq 2$ dan $m \geq 2$. Super $(a, d) - \mathcal{H} - Antimagic Total Covering$ pada Graf *Triangular Ladder* oleh Jamil (2014) yang menemukan super \mathcal{H} antimagic total covering untuk graf *triangular ladder* tunggal

$d = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9\}$ dan gabungan saling lepas $d = \{0, 2, 4, 6\}$. Pelabelan Super $(a, d) - \mathcal{H} - \text{Antimagic Total Selimut}$ pada Graf Semi Jahangir oleh Hardiyantik (2015) yang menemukan super \mathcal{H} antimagic total covering untuk graf semi jahangir tunggal $d = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 18\}$ dan gabungan saling lepas $d = \{0, 2, 4, 6, 8\}$. Berdasarkan hasil penelitian sebelumnya, peneliti akan meneliti tentang super $(a, d) - \mathcal{H}$ -anti ajaib total selimut pada *joint* graf dan aplikasinya dalam *ciphertext*. Graf yang digunakan dalam penelitian ini yaitu graf lengkap dan *triangular ladder*. Untuk pelabelan super $(a, d) - \mathcal{H}$ -anti ajaib total selimut pada *joint* graf tersebut akan dilakukan dengan mencari kardinalitas, batas atas dan nilai-nilai beda d . *Joint* graf dinotasikan dengan $nK_y + L_h$ n, y, h adalah bilangan asli.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka dapat dirumuskan masalah dalam penelitian ini yaitu :

- bagaimana kardinalitas titik dan sisi pada *joint* graf $nK_y + L_h$?
- bagaimana batas atas nilai beda dari super $(a, d) - \mathcal{H}$ -anti ajaib total selimut pada *joint* graf $nK_y + L_h$?
- bagaimana nilai-nilai d dari super $(a, d) - \mathcal{H}$ -anti ajaib total selimut pada *joint* graf $nK_y + L_h$?
- bagaimana mengembangkan aplikasi *ciphertext* yang berdasarkan super $(a, d) - \mathcal{H}$ -anti ajaib total selimut pada graf *joint* $nK_y + L_h$?

1.3 Tujuan Penelitian

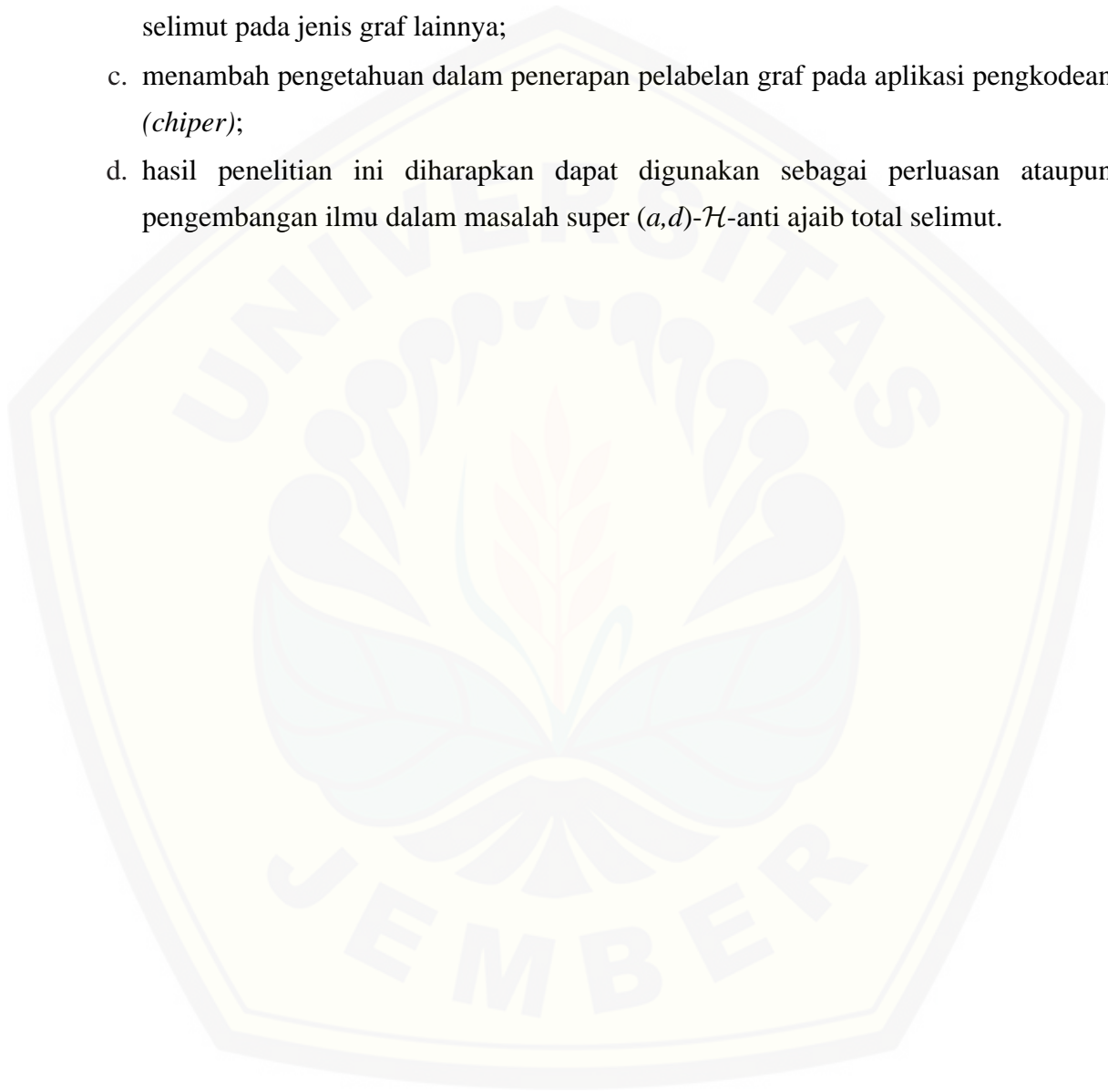
Adapun tujuan dari penelitian ini adalah:

- menentukan kardinalitas titik dan sisi pada *joint* graf $nK_y + L_h$;
- menentukan batas atas nilai beda d dari super $(a, d) - \mathcal{H}$ -anti ajaib total selimut pada *joint* graf $nK_y + L_h$;
- menentukan nilai-nilai d dari super $(a, d) - \mathcal{H}$ -anti ajaib total selimut pada *joint* graf $nK_y + L_h$;
- menentukan aplikasi super $(a, d) - \mathcal{H}$ -anti ajaib total selimut pada *joint* graf $nK_y + L_h$ dengan menggunakan *ciphertext*.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari hasil penelitian ini yaitu:

- a. menambah pengetahuan baru dalam bidang teori graf, khususnya tentang super (a,d) - \mathcal{H} -anti ajaib total selimut pada *joint* graf;
- b. memberi motivasi pada peneliti lain untuk meneliti super (a,d) - \mathcal{H} -anti ajaib total selimut pada jenis graf lainnya;
- c. menambah pengetahuan dalam penerapan pelabelan graf pada aplikasi pengkodean (*chip*);
- d. hasil penelitian ini diharapkan dapat digunakan sebagai perluasan ataupun pengembangan ilmu dalam masalah super (a,d) - \mathcal{H} -anti ajaib total selimut.



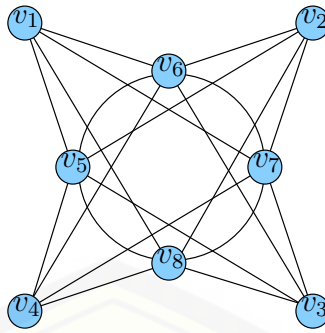
BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Konsep Dasar dan Terminologi Graf

Suatu graf G didefinisikan dengan $G = (V, E)$ yang berarti graf G merupakan pasangan himpunan V dan E dimana V merupakan himpunan tak kosong dari titik-titik (*vertices*) dan E merupakan himpunan sisi (*edges*) yang menghubungkan sepasang titik. Himpunan titik pada graf G dinyatakan dengan $V(G)$ sedangkan himpunan sisi pada graf G dinyatakan dengan $E(G)$. Uraian di atas menyatakan bahwa suatu graf harus mempunyai minimal satu titik, tetapi boleh tidak mempunyai sisi sama sekali. Dengan kata lain, V tidak boleh kosong sedangkan E boleh kosong.

Sebuah graf yang tidak mempunyai sisi dinamakan (*null graph*). *null graph* (graf tanpa sisi) yang hanya mempunyai satu buah titik dinamakan graf trivial. Banyaknya titik pada graf G disebut *order* yang dinotasikan dengan $|V(G)|$. Sedangkan banyaknya sisi dari graf G disebut *size* dan dinotasikan dengan $|E(G)|$. Pada gambar 2.1, G adalah graf dengan $|V(G)| = 8$ yang terdiri atas himpunan titik $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$ dan $|E(G)| = 20$ yang terdiri atas himpunan sisi $E = \{(v_1, v_5), (v_1, v_6), (v_1, v_7), (v_1, v_8), (v_2, v_5), (v_2, v_6), (v_2, v_7), (v_2, v_8), (v_3, v_5), (v_3, v_6), (v_3, v_7), (v_3, v_8), (v_4, v_5), (v_4, v_6), (v_4, v_7), (v_4, v_8), (v_5, v_6), (v_6, v_7), (v_7, v_8), (v_8, v_5)\}$.

Dua buah titik pada graf G misal u dan v dikatakan bertetangga (*adjacent*) jika kedua titik terhubung langsung dengan sebuah sisi pada graf G . Jika sebuah sisi menghubungkan dua titik, maka titik tersebut dikatakan bersisian (*incident*) dengan sisi tersebut. Sebuah titik v *incident* dengan sebuah sisi apabila titik v merupakan titik ujung dari sisi tersebut. Demikian juga sisi tersebut dikatakan *incident* dengan v ketika v merupakan titik ujung dari sisi tersebut (Hartsfield dan Ringel, 1994). Pada gambar 2.1, v_1 bertetangga dengan v_5, v_6, v_7, v_8 dan v_7 bersisian dengan $(v_1, v_7), (v_2, v_7), (v_3, v_7), (v_4, v_7), (v_6, v_7), (v_8, v_7)$.

Gambar 2.1 Contoh graf G

Derajat (*degree*) dari suatu titik pada graf adalah jumlah sisi yang bersisian dengan titik tersebut. Derajat suatu titik dibagi menjadi dua yaitu derajat minimum dinyatakan dengan $\delta(G)$ dan derajat maksimum dinyatakan dengan $\Delta(G)$. Pada gambar 2.1 derajat minimum $\delta(G)=4$ dan derajat maksimum $\Delta(G)=6$. Suatu graf dengan setiap titiknya memiliki derajat yang sama disebut graf reguler (Harary, 2007).

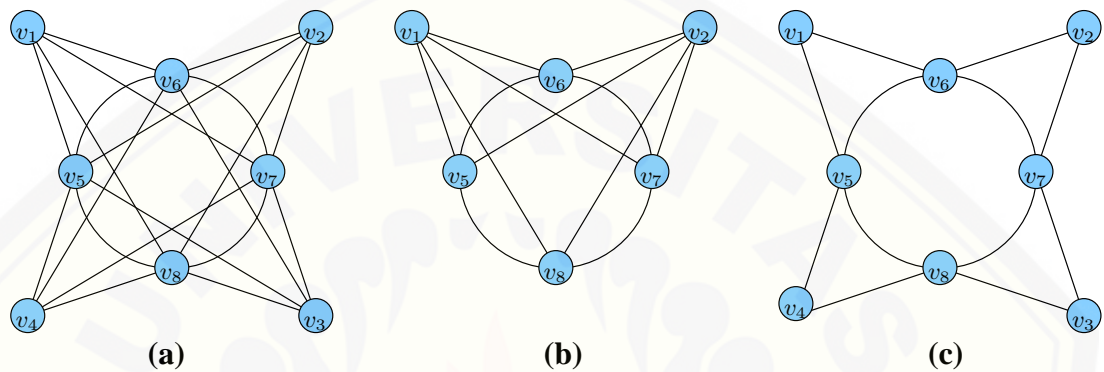
Jalan (*walk*) dari suatu graf didefinisikan dengan $A_1e_1A_2e_2 \dots A_{n-1}$

$e_{n-1}A_n$ adalah barisan titik dan sisi berhingga yang bergantian dari titik-titik dan sisi-sisi dalam suatu graf dengan ketentuan setiap sisi e_i menempel pada A_i dan A_{i+1} dimana $A_i \neq A_{i+1}$ jika e_i bukan merupakan sebuah *loop*. Jalan suatu graf G dinotasikan dengan $W(G)$. Panjang sebuah jalan merupakan jumlah sisi yang membangun jalan tersebut. Jika jalan $W(G)$ berlaku $A_1 = A_n$ maka $W(G)$ dikatakan jalan tertutup. Sebaliknya, dikatakan jalan terbuka jika $A_1 \neq A_n$.

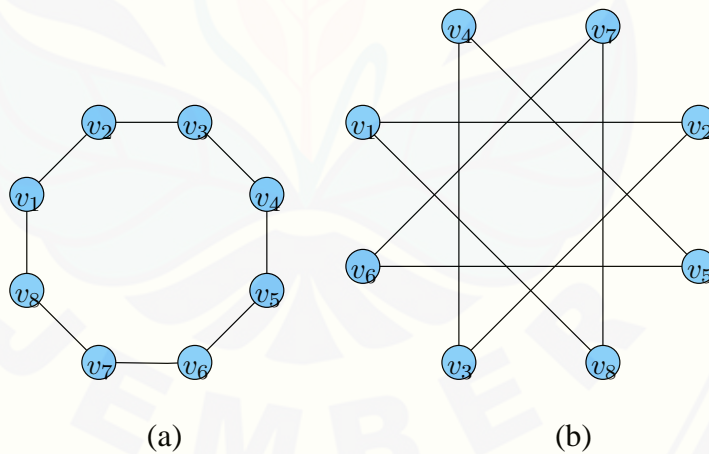
Jalan disebut lintasan (*path*) jika semua titik pada jalan tidak berulang atau berbeda, sedangkan jika semua sisinya yang tidak berulang atau berbeda maka disebut jejak (*trail*). Dengan kata lain, *path* merupakan *trail* yang tidak memiliki titik yang berulang. Jika *path* berawal dan berakhir pada titik yang sama maka membentuk lintasan tertutup dan disebut *cycle*. *Cycle* terpendek memiliki panjang 3 dan disebut segitiga (Hartsfield dan Ringel, 1994). Pada gambar 2.1 v_5, v_6, v_7, v_8, v_5 merupakan *cycle* dan v_1, v_5, v_4 merupakan *path*.

Sebuah graf H dikatakan *subgraph* dari G jika setiap titik dan sisi pada H adalah titik dan sisi dari G . Atau secara matematis, $V(H) \subseteq V(G)$ dan $E(H) \subseteq E(G)$. *Subgraph* H adalah sebuah *spanning subgraph* dari G jika H memuat semua titik dari

graf G , atau $V(H) \subseteq V(G)$). Dua buah graf G dan G' dikatakan isomorfis jika terdapat korespondensi satu-satu antara titik-titik dan sisi pada kedua graf sehingga jika sisi e bersisian dengan titik u_1 dan u_2 di G , maka sisi e' yang berkorespondensi di G' juga harus bersisian dengan titik u'_1 dan u'_2 di G' (Dafik, 2007). Secara sederhananya, dua graf isomorfik adalah dua buah graf yang sama, hanya tampilan secara geometrik yang terlihat berbeda dimana jumlah titik, sisi, dan derajat yang sama. Untuk lebih jelas, perhatikan gambar 2.2 dan 2.3



Gambar 2.2 (a) Graf G (b) Subgraf dari G (c) *Spanning Subgraph* dari G



Gambar 2.3 Contoh graf isomorfis

Berdasarkan ada tidaknya gelang (*loop*) dan sisi ganda pada suatu graf, graf dibedakan menjadi dua jenis yaitu :

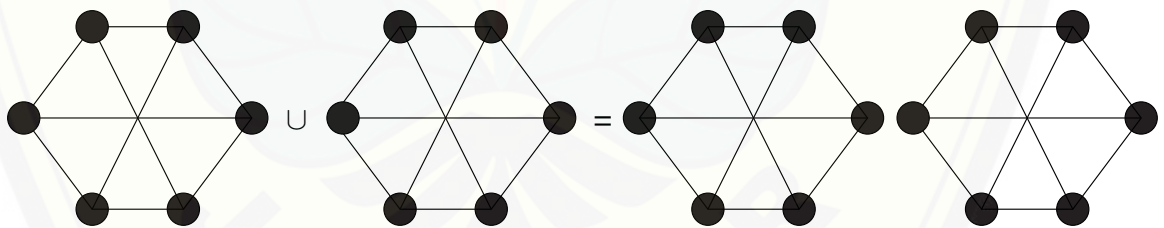
- Graf sederhana (*simple graph*) adalah graf yang tidak memuat gelang dan sisi ganda.
- Graf tak sederhana (*unsimple graph/multigraph*) adalah graf yang memuat gelang dan sisi ganda.

Sedangkan berdasarkan orientasi arah pada sisinya, graf dibedakan atas dua jenis yaitu graf tak berarah (*undirected graph*) dan graf berarah (*directed graph*).

- Graf tak berarah (*undirected graph*) adalah graf yang sisinya tidak mempunyai orientasi arah.
- Graf berarah (*directed graph*) adalah graf yang setiap sisinya diberikan orientasi arah.

Kemudian sebuah graf G disebut terhubung (*connected*) jika untuk sembarang dua titik u dan v pada G terdapat sebuah *path* antara u dan v , sedangkan jika yang terjadi adalah sebaliknya, maka G disebut tidak terhubung (*disconnected*).

Disjoint union of disconnected graph didefinisikan sebagai gabungan saling lepas dari m buah salinan graf G atau graf dengan m komponen, dimana setiap komponennya adalah graf G dan dinotasikan dengan mG . Dengan kata lain $mG = G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup \dots \cup G_m$ dengan $G_1 = G_2 = G_3 = \dots = G_m = G$ (Wijaya, 2000). Pada gambar 2.4 dapat dilihat contoh graf gabungan $2G$ yang mempunyai 2 salinan graf G .



Gambar 2.4 Contoh gabungan graf *Disjoint union of disconnected graph*

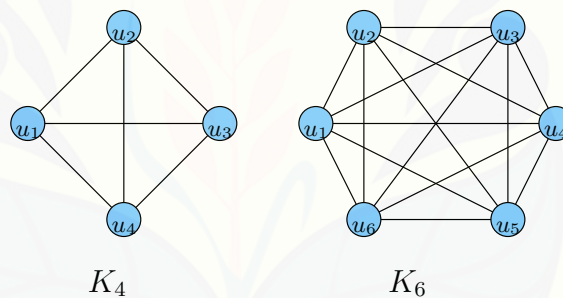
2.2 Graf Khusus dan Operasi Graf

2.2.1 Graf Khusus

Graf khusus merupakan graf dengan ciri-ciri tertentu yang mudah dikenali dan mempunyai keunikan dan karakteristik bentuk khusus. Keunikan dari graf khusus adalah tidak isomorfis dengan graf lainnya. Karakteristik bentuknya yaitu tetap simetris meskipun diperluas sampai *order* n . Berikut beberapa contoh graf khusus beserta penjelasannya.

a. Graf Lengkap

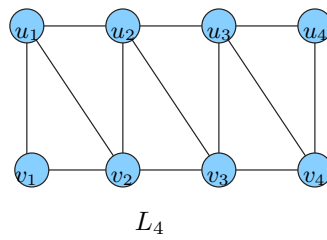
Graf Lengkap adalah graf sederhana yang setiap titiknya terhubung ke semua titik lainnya. Graf lengkap dengan m titik dilambangkan dengan K_m (Wibisosno, 2008). Graf lengkap dengan titik $V(K_m) = \{u_i; 1 \leq i \leq m\}$ dan sisi $E(K_m) = \{u_i u_j; 1 \leq i, j \leq m, i \neq j\}$ mempunyai jumlah titik sebanyak m titik dan jumlah sisi sebanyak $m(m-1)/2$ sisi. Graf lengkap disebut juga *complete graph*. Pada gambar 2.5 merupakan contoh graf lengkap K_4 dan K_6 .



Gambar 2.5 Contoh graf lengkap K_4 dan K_6

b. Graf *Triangular Ladder*

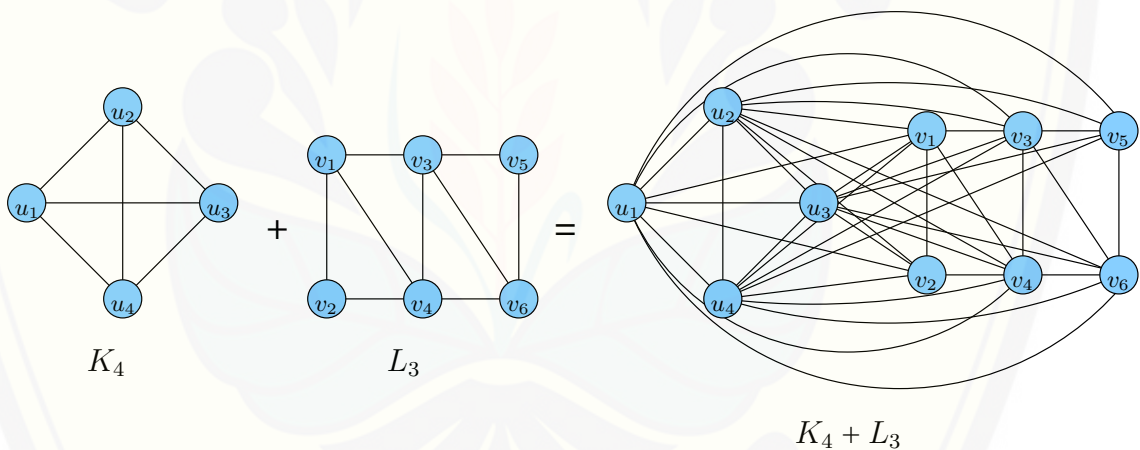
Graf *triangular ladder* adalah graf yang dihasilkan dari graf *ladder* dengan menambahkan sisi $u_i v_{i+1}$ untuk $1 \leq i \leq n-1$ dan dinotasikan dengan $L_n, n \geq 2$ (Jamil, 2014). Graf *triangular ladder* dengan titik $V(L_n) = \{u_i, v_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan sisi $E(L_n) = \{u_i u_{i+1}, v_i v_{i+1}, u_i v_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{u_i v_i; 1 \leq i \leq n\}$ mempunyai jumlah titik yaitu $2n$ titik dan jumlah sisi yaitu $4n-3$ sisi. Pada gambar 2.6 merupakan contoh graf *triangular ladder* L_n dengan $n = 4$.



Gambar 2.6 Graf *triangular ladder* L_n dengan $n = 4$

2.2.2 Operasi Graf

Operasi graf adalah salah satu teknik untuk menghasilkan graf baru dengan cara melakukan operasi pada dua buah graf atau lebih. Dalam penelitian ini, operasi graf yang digunakan yaitu *joint graph*. *Joint* dari graf G_1 dan G_2 , dinotasikan dengan $G = G_1 + G_2$ adalah graf G dimana $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ dan $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup uv | u \in V(G_1), v \in V(G_2)$ (Harary, 2007). Gambar 2.7 menunjukkan contoh dari operasi *joint* pada graf lengkap dan *triangular ladder*.



Gambar 2.7 Hasil *joint* graf pada K_4 dan L_3

2.3 Fungsi dan Barisan Aritmatika

Fungsi adalah suatu relasi dari himpunan X ke himpunan Y yang memasangkan setiap anggota himpunan X tepat satu dengan anggota himpunan Y . Fungsi dikenal juga dengan istilah "pemetaan" dan dinotasikan dengan $f : X \rightarrow Y$ dibaca " f adalah pemetaan dari X ke Y " atau " f memetakan X ke Y ". Notasi $f : X \rightarrow Y$ artinya suatu fungsi f yang memetakan setiap $x \in X$ tepat satu dengan anggota Y . Himpunan X disebut daerah asal fungsi (*domain*) f dan dinyatakan sebagai D_f . Sedangkan himpunan Y disebut daerah kawan (*kodomain* f). Fungsi dapat dibedakan menjadi 3 macam yaitu injektif, surjektif, dan bijektif.

a. Fungsi Injektif

Fungsi injektif disebut juga fungsi satu-satu. Fungsi f dari X ke Y dikatakan injektif jika setiap unsur di daerah kawan memiliki pasangan tepat satu unsur pada daerah asal. Atau secara matematika dituliskan sebagai berikut:

$$f: \text{injektif} \leftrightarrow \forall x_1, x_2 [(x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))].$$

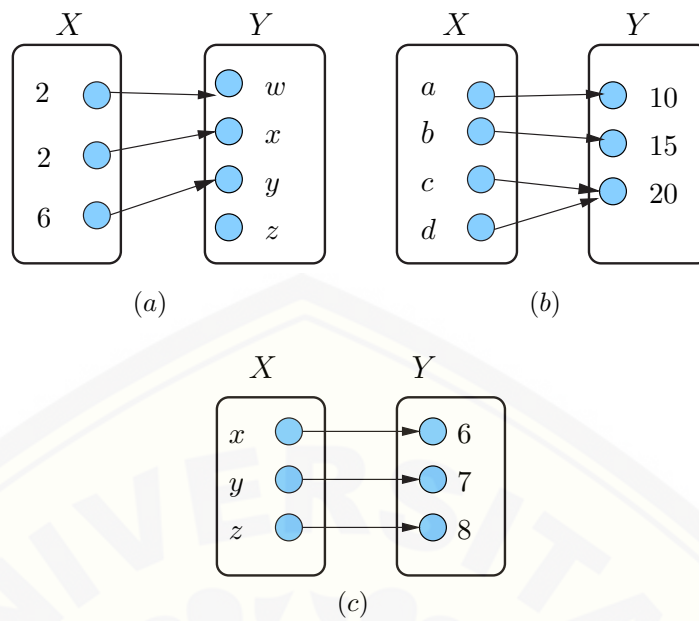
b. Fungsi Surjektif

Fungsi surjektif disebut juga fungsi pada. Fungsi f dari X ke Y dikatakan surjektif jika setiap unsur di daerah kawan memiliki pasangan pada unsur di daerah asal. Atau secara matematika dituliskan sebagai berikut:

$$f: \text{surjektif} \Leftrightarrow \forall y \in Y, \exists x \in X \ni f(x) = y.$$

c. Fungsi Bijektif

Fungsi bijektif disebut juga fungsi korespondensi satu-satu. Fungsi f dari X ke Y dikatakan bijektif jika fungsi tersebut merupakan fungsi injektif dan fungsi surjektif. Gambar 2.8 merupakan contoh fungsi injektif, surjektif, dan bijektif.



Gambar 2.8 (a) Fungsi Injektif, (b) Fungsi Surjektif, dan (c) Fungsi Bijektif

Barisan aritmatika adalah suatu barisan yang teratur, dengan a adalah suku pertama dan selisih bilangan-bilangan berurutan pada barisan aritmatika disebut beda yang dinotasikan dengan b . Beda ($b = U_n - U_{n-1}$) selalu bernilai tetap untuk membentuk sebuah barisan $U_1, U_2, U_3, \dots, U_{n-1}, U_n$ dimana $U_1 - U_2 = U_3 - U_2 = \dots = U_n - U_{n-1} = \text{konstanta}$. Perhatikan contoh barisan aritmatika berikut:

- a. 119, 129, 139, 149, ...
- b. 209, 200, 191, 182, ...

Barisan aritmatika (a) mempunyai beda $b = 10$ dan suku awal $a = 119$. Sedangkan barisan aritmatika (b) mempunyai beda $b = -9$ dan suku awal $a = 209$. Rumus suku ke- n dari suatu barisan aritmatika adalah $a + (n - 1)b$ dimana $U_1 = a$ adalah suku pertama, $n =$ urutan suku, dan $b =$ beda. Barisan aritmatika yang mempunyai beda positif disebut barisan aritmatika naik, sebaliknya apabila bedanya negatif disebut barisan aritmatika turun. Jadi contoh barisan aritmatika (a) merupakan barisan aritmatika naik, sebaliknya (b) merupakan barisan aritmatika turun.

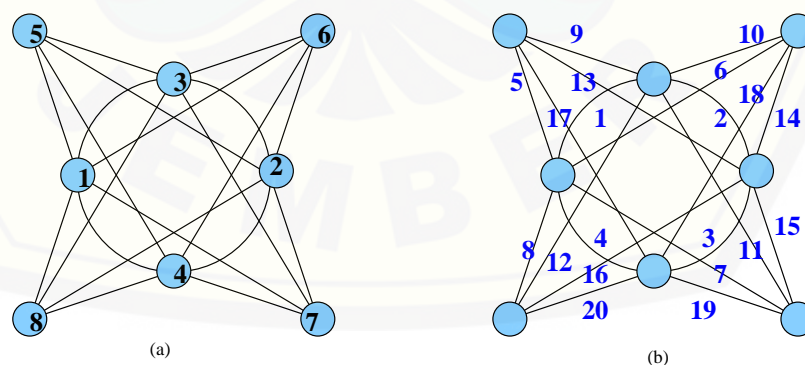
2.4 Partisi

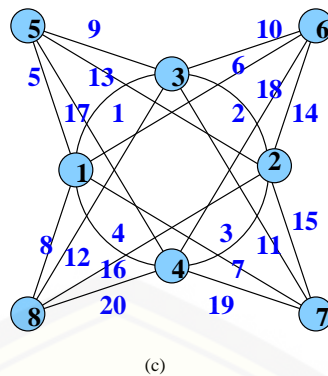
Suatu partisi dari sebuah himpunan A merupakan sebuah keluarga himpunan yang terdiri dari himpunan-himpunan bagian tak kosong dari A yang sa-ling asing (*disjoint*) satu sama lain dan gabungan dari semua himpunan bagian tersebut akan kembali membentuk himpunan A . Misalkan terdapat sebuah keluarga himpunan $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ maka keluarga himpunan tersebut dikatakan partisi dari himpunan A apabila $\forall_{i,j} \in 1, 2, 3, \dots, n, i \neq j$ maka $A_i \cap A_j = \phi$ dan $\bigcup_{i=1}^n A_i = A$. Contohnya himpunan bilangan bulat dapat dipartisi menjadi kelas-kelas yang mempunyai sifat yaitu jika dibagi tiga menghasilkan sisa yang sama. Partisi yang dihasilkan yaitu $\{0, 1, 2\}$ dengan $0 = \{\dots, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \dots\}$; $1 = \{\dots, -8, -5, -2, 1, 4, 7, 10, \dots\}$; $2 = \{\dots, -7, -4, -1, 2, 5, 8, 11, \dots\}$ (Prihandoko, 2003).

2.5 Pelabelan Graf

2.5.1 Definisi Pelabelan Graf

Pelabelan graf adalah suatu pemetaan atau fungsi bijektif yang memetakan himpunan dari elemen graf berupa titik dan sisi ke himpunan bilangan bulat positif. Jika pelabelan dengan domainnya berupa himpunan titik disebut pelabelan titik (*vertex labeling*), jika domainnya berupa sisi maka disebut pelabelan sisi (*edge labeling*) dan jika domainnya adalah gabungan dari titik dan sisi, maka disebut pelabelan total (*total labeling*) (Wallis, 2001:2). Gambar 2.10 menunjukkan pelabelan titik, pelabelan sisi, dan pelabelan total.





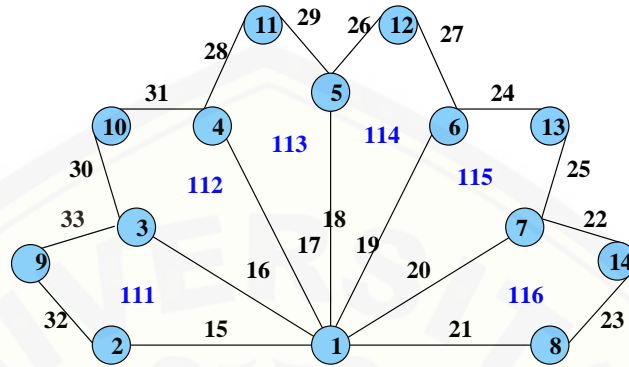
Gambar 2.9 (a) Pelabelan Titik, (b) Pelabelan Sisi, dan (c) Pelabelan Total

Pada pelabelan titik suatu graf, jumlah label dua titik yang menempel pada sisi disebut bobot sisi. Jika semua sisi mempunyai bobot sisi yang sama maka disebut pelabelan titik sisi ajaib (*edge magic vertex labeling*). Sedangkan jika mempunyai bobot sisi yang berbeda dan membentuk barisan aritmatika dengan a merupakan suku pertama dan d merupakan nilai bedanya maka disebut pelabelan titik sisi anti ajaib (*edge antimagic vertex labelling*) atau (*EAVL*). Pada pelabelan total, bobot sisi diartikan sebagai jumlah label sisi dan label dua titik yang menempel pada suatu sisi. Jika semua sisi mempunyai bobot sisi yang sama maka disebut pelabelan total sisi ajaib (*magic*). Sedangkan jika semua bobot sisinya berbeda dan membentuk deret aritmatika dengan suku pertama a dan beda d maka pelabelan tersebut disebut pelabelan total sisi anti ajaib (pelabelan total sisi *antimagic*) (Maryanti et al., 2010). Pelabelan super adalah pelabelan titik dan pelabelan sisi dimana label titik kurang dari label sisi yang berarti pelabelan sisi dilakukan setelah pelabelan titik.

2.5.2 Pelabelan Selimut- \mathcal{H} -Anti Ajaib Super

Pelabelan selimut $(a, d) - \mathcal{H}$ -anti ajaib pada suatu graf $G = (V(G), E(G))$ dimana v titik dan e sisi adalah sebuah pelabelan total λ dari $V(G) \cup E(G)$ terdapat bilangan bulat $\{1, 2, 3, \dots, |V(G) \cup E(G)|\}$, untuk setiap subgraf H dari G yang isomorfik dengan \mathcal{H} dimana $\Sigma H = \sum_{v \in V(H)} \lambda(v) + \sum_{e \in E(H)} \lambda(e)$ merupakan barisan aritmatika $\{a, a + d, a + 2d, \dots, a + (s - 1)d\}$ dimana a, d bilangan positif dengan a adalah suku pertama, d adalah beda, dan s adalah jumlah selimutnya. Jika

$\lambda(v)\}_{v \in V} = \{1, \dots, |V(G)|\}$ maka graf G dikatakan memiliki pelabelan \mathcal{H} -anti ajaib super (Inayah et al., 2013). Gambar 2.10 contoh super $(a, d) - \mathcal{H}$ -anti ajaib total selimut pada graf Semi Jahangir SJ_6 dengan $a = 111$, $d = 1$ dan $\mathcal{H} = C_4$ (Hardiyantik, 2015).



Gambar 2.10 contoh super $(a, d) - \mathcal{H}$ -anti ajaib total selimut pada graf Semi Jahangir SJ_6

2.5.3 Teknik Partisi pada Pelabelan Graf

Salah satu teknik yang dapat diterapkan untuk mendapatkan pelabelan $(a, d) - \mathcal{H}$ -anti ajaib super pada suatu graf yaitu teknik partisi dari himpunan bilangan bulat dengan menetapkan beda d . Misalkan n , c , d , i , dan k merupakan bilangan bulat positif dimana n jumlah kolom, c jumlah baris, d beda, i baris dan k selimut atau kolom. Partisi $\mathcal{P}_{c,d}^n(i, k)$ dari himpunan $\{1, 2, 3, \dots, cn\}$ dalam n kolom, $n \geq 2$, dan c baris adalah partisi pelabelan $(a, d) - \mathcal{H}$ -anti ajaib super dengan jumlah bilangan-bilangan sebanyak c baris untuk masing-masing kolom membentuk barisan aritmatika dengan beda d dan $k = 1, 2, \dots, n$. $\Sigma \mathcal{P}_{c,d}^n(i, k)$ adalah jumlah bilangan pada $\mathcal{P}_{c,d}^n(i, k)$ dan $d = \mathcal{P}_{c,d}^n(i, k - 1) - \mathcal{P}_{c,d}^n(i, k)$. Notasi $\mathcal{P}_{c,d}^n(i, k) \oplus b$ artinya setiap bilangan pada $\mathcal{P}_{c,d}^n(i, k)$ ditambahkan dengan b , dimana b dapat berupa bilangan asli atau anggota partisi yang lain dan \oplus dibaca *oplus* (Baca dkk, 2013).

Azizah, Y (2016) telah meneliti tentang partisi dan menghasilkan $\mathcal{P}_{c,d}^n(i, k)$ dengan $d = c$, $d = c^2$, dan $d = \frac{c}{2}$. Hasil penelitian tersebut disajikan dalam bentuk Lemma sebagai berikut:

Lemma 2.5.1. Misal n dan c adalah bilangan bulat positif. Untuk $k = 1, 2, \dots, n$ jumlah dari $\mathcal{P}_{c,d}^n(i, k) = \{(i-1)n + k, 1 \leq i \leq c\}$ membentuk barisan aritmatika dengan beda $d_1 = c$.

Bukti. Dengan perhitungan sederhana untuk $k = 1, 2, 3, \dots, n$ maka $\sum_{i=1}^c \mathcal{P}_{c,d}^n(i, k) = \mathcal{P}_{c,d}^n(k) \longleftrightarrow \mathcal{P}_{c,d}^n(k) = \{\frac{c^2n-cn}{2} + ck\} \longleftrightarrow \mathcal{P}_{c,d}^n(k) = \{\frac{c^2n-cn}{2} + c, \frac{c^2n-cn}{2} + 2c, \frac{c^2n-cn}{2} + 3c, \dots, \frac{c^2n-cn}{2} + nc\}$ Dengan mudah dapat dilihat dari barisan tersebut bahwa $d_1 = c$. \square

Lemma 2.5.2. Misal n dan c adalah bilangan bulat positif. Untuk $k = 1, 2, \dots, n$ jumlah dari $\mathcal{P}_{c,d}^n(i, k) = \{(k-1)c + i, 1 \leq i \leq c\}$ membentuk barisan aritmatika dengan beda $d_2 = c^2$.

Bukti. Dengan perhitungan sederhana untuk $k = 1, 2, \dots, n$ maka $\sum_{i=1}^c \mathcal{P}_{c,d}^n(i, k) = \mathcal{P}_{c,d}^n(k) \longleftrightarrow \mathcal{P}_{c,d}^n(k) = \{\frac{c-c^2}{2} + c^2k\} \longleftrightarrow \mathcal{P}_{c,d}^n(k) = \{\frac{c-c^2}{2} + c^2, \frac{c-c^2}{2} + 2c^2, \frac{c-c^2}{2} + 3c^2, \dots, \frac{c-c^2}{2} + nc^2\}$ Dengan mudah dapat dilihat dari barisan tersebut bahwa $d_2 = c^2$. \square

Lemma 2.5.3. Misal n dan c adalah bilangan bulat positif. Untuk $k = 1, 2, \dots, n$ jumlah dari

$$\mathcal{P}_{c, \frac{c}{2}}^n(i, k) = \begin{cases} \{(i-1)n + \frac{k+1}{2}; 1 \leq i \leq c, i \equiv 1 \pmod{2}\} \cup \\ \{\frac{k-n}{2} + in; 1 \leq i \leq c, i \equiv 0 \pmod{2}\}, k \equiv 1 \pmod{2} \\ \{\frac{k+1-n}{2} + in; 1 \leq i \leq c, i \equiv 1 \pmod{2}\} \cup \\ \{(i-1)n + \frac{k}{2}; 1 \leq i \leq c, i \equiv 0 \pmod{2}\}, k \equiv 0 \pmod{2} \end{cases}$$

membentuk barisan aritmatika dengan beda $d_3 = \frac{c}{2}$.

Bukti. Dengan perhitungan sederhana untuk $k = 1, 2, \dots, n$ maka $\sum_{i=1}^c \mathcal{P}_{c,d}^n(i, k) = \mathcal{P}_{c,d}^n(k) \longleftrightarrow \mathcal{P}_{c,d}^n(k) = \{\frac{c}{4}(2cn - n + 1) + \frac{c}{2}k\} \longleftrightarrow \mathcal{P}_{c,d}^n(k) = \{\frac{c}{4}(2cn - n + 1) + \frac{c}{2}, \frac{c}{4}(2cn - n + 1) + c, \frac{c}{4}(2cn - n + 1) + \frac{3c}{2}, \dots, \frac{c}{4}(2cn - n + 1) + \frac{cn}{2}\}$ Dengan mudah dapat dilihat dari barisan tersebut bahwa $d_3 = \frac{c}{2}$. \square

Tabel 2.1 merupakan contoh partisi $\mathcal{P}_{c,d}^n(i, k)$ dengan $d = c$. Sedangkan Tabel 2.2 merupakan contoh partisi $\mathcal{P}_{c,d}^n(i, k)$ dengan $d = c^2$.

Tabel 2.1 Klasifikasi partisi $d = c$.

$i \setminus k$	1	2	...	n	
1	1	2	...	n	
2	$n + 1$	$n + 2$...	$n + n$	
3	$2n + 1$	$2n + 2$...	$2n + n$	
...	
c	$(c - 1)n + 1$	$(c - 1)n + 2$...	$(c - 1)n + n$	+
	a	$a + c$...	$a + (n - 1)c$	$d = c$

Tabel 2.2 Klasifikasi partisi $d = c^2$.

$i \setminus k$	1	2	3	4	...	n	
1	1	$c + 1$	$2c + 1$	$3c + 1$...	$(n - 1)c + 1$	
2	2	$c + 2$	$2c + 2$	$3c + 2$...	$(n - 1)c + 1$	
3	3	$c + 3$	$2c + 3$	$3c + 3$...	$(n - 1)c + 1$	
...	
c	c	$c + c$	$2c + c$	$3c + c$...	$(n - 1)c + 1$	+
	a	$a + c^2$	$a + 2c^2$	$a + c^3$...	$a + (n - 1)c^2$	$d = c^2$

Tabel 2.3 Klasifikasi partisi $d = \frac{c}{2}$.

$i \setminus k$	1	2	3	4	5	
1	1	4	2	5	3	
2	8	6	9	7	10	
3	11	14	12	15	13	
4	18	16	19	17	20	+
	38	40	42	44	46	$d = \frac{c}{2}$

Selanjutnya, Tabel 2.3 merupakan contoh bentuk partisi lain $\mathcal{P}_{c,d}^n(i, k)$ dengan $d = \frac{c}{2}$, dimana $c \equiv 0 \pmod{2}$ dan $n \equiv 1 \pmod{2}$.

Suatu partisi yang didefinisikan dengan $\mathcal{P}_{c,d}^n(k)$ dapat dibentuk dengan meng-kombinasikan partisi lain sehingga diperoleh beda d yang bervariasi. Konstruksi partisi tersebut mengikuti fakta di bawah ini:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{c,d}^n(i, k) &= \mathcal{P}_{c_1,d_1}^n(i, k) \cup (\mathcal{P}_{c_2,d_2}^n(i, k) \oplus (nc_1)); \text{ untuk } 1 \leq k \leq n \\ \sum \mathcal{P}_{c,c}^n(i, k) &= \sum \mathcal{P}_{c_1,d_1}^n(i, k) + \sum (\mathcal{P}_{c_2,d_2}^n(i, k) \oplus nc_1), \text{ untuk } 1 \leq k \leq n \\ &= \sum \mathcal{P}_{c_1,d_1}^n(i, k) + \sum (\mathcal{P}_{c_2,d_2}^n(i, k) \oplus nc_1c_2), 1 \leq i \leq c\end{aligned}$$

dimana $c = c_1 + c_2$ dan $d = d_1 + d_2$.

Selanjutnya partisi $\mathcal{P}_{c,d}^n(i, k)$ dengan $d = -c$, $d = -c^2$, dan $d = -\frac{c}{2}$ dikembangkan oleh Agustin et al., (2016), berikut temuan partisi tersebut:

Lemma 2.5.4. *Diberikan n dan c bilangan bulat positif. Untuk $k = 1, 2, \dots, n$ jumlah dari $\mathcal{P}_{c,d}^n(i, k) = \{1 + ni - k; 1 \leq i \leq c\}$ membentuk baris aritmatika dengan beda $d_4 = -c$*

Bukti. Dengan menggunakan perhitungan sederhana, untuk $k = 1, 2, \dots, n$ didapat $\sum_{i=1}^c \mathcal{P}_{c,d}^n(i, k) = \mathcal{P}_{c,d}^n(k) \longleftrightarrow \mathcal{P}_{c,d}^n(k) = \{\frac{n}{2}(c^2 + c) + c - ck\} \longleftrightarrow \mathcal{P}_{c,d}^n(k) = \{\frac{n}{2}(c^2 + c), \frac{n}{2}(c^2 + c) - c, \frac{n}{2}(c^2 + c) - 2c, \dots, \frac{n}{2}(c^2 + c) - cn\}$ terbukti bahwa himpunan tersebut membentuk baris aritmatika dengan beda $d_4 = -c$. \square

Lemma 2.5.5. *Misal c dan n bilangan bulat positif. Untuk $k = 1, 2, \dots, n$ jumlah dari $\mathcal{P}_{c,d}^n(i, k) = \{cn + i - ck; 1 \leq i \leq c\}$ membentuk baris aritmatika dengan beda $d_5 = -c^2$*

Bukti. Dengan menggunakan perhitungan sederhana, untuk $k = 1, 2, \dots, n$ didapat $\sum_{i=1}^c \mathcal{P}_{c,d}^n(i, k) = \mathcal{P}_{c,d}^n(k) \longleftrightarrow \mathcal{P}_{c,d}^n(k) = \{\frac{c}{2}(2cn + c + 1) - c^2k\} \longleftrightarrow \mathcal{P}_{c,d}^n(k) = \{\frac{c}{2}(2cn + c + 1) - c^2, \frac{c}{2}(2cn + c + 1) - 2c^2, \dots, \frac{c}{2}(2cn + c + 1) - c^2n\}$ terbukti bahwa himpunan tersebut membentuk baris aritmatika dengan beda $d_5 = -c^2$. \square

Lemma 2.5.6. Misal c dan n bilangan bulat positif. Untuk $k = 1, 2, \dots, n$ jumlah dari

$$\mathcal{P}_{c,d}^n(i, k) = \begin{cases} \{ni - \frac{n}{2} - \frac{k}{2} + 1; 1 \leq i \leq c; 1 \leq k \leq n; i \text{ genap}; k \text{ ganjil}\} \\ \{ni - \frac{k}{2} + \frac{1}{2}; 1 \leq i \leq c; 1 \leq k \leq n; i \text{ ganjil}; k \text{ ganjil}\} \\ \{ni - \frac{k}{2} + 1; 1 \leq i \leq c; 1 \leq k \leq n; i \text{ genap}; k \text{ genap}\} \\ \{ni - \frac{k}{2} - \frac{n}{2} + \frac{1}{2}; 1 \leq i \leq c; 1 \leq k \leq n; i \text{ ganjil}; k \text{ genap}\} \end{cases}$$

membentuk barisan aritmatika dengan beda $d_3 = \frac{-c}{2}$.

Bukti. Dengan menggunakan perhitungan sederhana, untuk $k = 1, 2, \dots, n$ didapat $\sum_{i=1}^c \mathcal{P}_{c,d}^n(i, k) = \mathcal{P}_c^n(k) \longleftrightarrow \mathcal{P}_{c,d}^n(k) = \{\frac{c}{4}(2cn - n + 3) - \frac{c}{2}k\} \longleftrightarrow \mathcal{P}_{c,d}^n(k) = \{\frac{c}{4}(2cn - n + 3) - \frac{c}{2}, \frac{c}{4}(2cn - n + 3) - c, \dots, \frac{c}{4}(2cn - n + 3) - \frac{c}{2}n\}$ terbukti bahwa himpunan tersebut membentuk baris arimatika dengan beda $d_6 = \frac{-c}{2}$. \square

2.5.4 Lemma Batas Atas (d)

Terdapat suatu Lemma untuk menentukan batas atas d pada graf, yaitu :

Lemma 2.5.7. Jika sebuah graf $G(V, E)$ adalah pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} - anti ajaib total selimut maka

$$d \leq \frac{(p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H}{n - 1}$$

untuk $n = |H_i|$, $p_G = |V(G)|$, $q_G = |E(G)|$, $p_H = |V(H)|$, $q_H = |E(H)|$

Bukti. $f(V) = 1, 2, 3, \dots, p_G$ dan $f(E) = p_G + 1, p_G + 2, p_G + 2, \dots, p_G + q_G$. Mi-salkan graf (p_G, q_G) mempunyai pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} anti ajaib total dengan fungsi total $f(\text{total}) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots, p_G + q_G\}$ maka himpunan bobot sebuah graf adalah $\{a, a + d, a + 2d, \dots, a(s - 1)d\}$ dimana a merupakan bobot terkecil maka berlaku:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + p_H + (p_G + 1) + (p_G + 2) + \dots + (p_G + q_H) &\leq a \\ \frac{p_H}{2}(1 + p_H) + q_H p_G + \frac{q_H}{2}(1 + q_H) &\leq a \\ \frac{p_H}{2} + \frac{p_H^2}{2} + q_H p_G + \frac{q_H}{2} + \frac{q_H^2}{2} &\leq a \end{aligned}$$

Sedangkan untuk nilai terbesar berlaku:

$$\begin{aligned}
 a + (n - 1)d &\leq p_G + p_G - 1 + p_G - 2 + \dots + (p_G - (p_H - 1)) + (p_G + q_G) \\
 &\quad + (p_G + q_G - 1) + (p_G + q_G - 2) + \dots + (p_G + q_G - (q_H - 1)) \\
 &= p_H p_G - \frac{p_H - 1}{2}(1 + (p_H - 1)) + q_H p_G + q_H p_G \\
 &\quad - \frac{q_H - 1}{2}(1 + (q_H - 1)) \\
 &= p_H p_G - \frac{p_H - 1}{2}(p_H) + q_H p_G + q_H p_G - \frac{q_H - 1}{2}(q_H) \\
 (n - 1)d &\leq p_H p_G - \frac{p_H - 1}{2}(p_H) + q_H p_G + q_H p_G - \frac{q_H - 1}{2}(q_H) - a \\
 &\leq p_H p_G - \frac{p_H - 1}{2}(p_H) + q_H p_G + q_H p_G - \frac{q_H - 1}{2}(q_H) - \\
 &\quad \left(\frac{p_H}{2} + \frac{p_H^2}{2} + q_H p_G + \frac{q_H}{2} + \frac{q_H^2}{2}\right) \\
 &= p_H p_G - \frac{p_H^2}{2} + \frac{p_H}{2} + q_H p_G - \frac{q_H^2}{2} + \frac{q_H}{2} - \left(\frac{p_H}{2} + \frac{p_H^2}{2} + \frac{q_H}{2} + \frac{q_H^2}{2}\right) \\
 &= p_H p_G + q_H q_G - p_H^2 - q_H^2 \\
 &= p_H p_G - p_H^2 + q_H q_G - q_H^2 \\
 &= (p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H \\
 d &\leq \frac{(p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H}{(n - 1)}
 \end{aligned}$$

Dari persamaan di atas membuktikan bahwa batas atas $d \leq \frac{(p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H}{n - 1}$ jika graf G memiliki pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} -anti ajaib total selimut dari berbagai famili graf (Dafik, 2014). \square

2.6 Aplikasi Graf

Teori graf memiliki beragam aplikasi dalam berbagai permasalahan sehari-hari seperti masalah jaringan komputer, jaringan telepon, pencarian jalur terpendek, penjadwalan, dan lain-lain. Aplikasi graf yang dikembangkan pada pelabelan super anti ajaib total selimut salah satunya yaitu *ciphertext*. *Ciphertext* merupakan pesan

tersandi dan berhubungan dengan kriptografi. Kriptografi adalah ilmu yang mengkaji tentang penyandian dan penguraian isi sandi yang berupa pesan rahasia. Dalam kriptografi terdapat proses enkripsi dan deskripsi. Proses enkripsi merupakan proses merubah pesan yang tidak disandi atau teks biasa (*plaintext*) menjadi pesan yang disandi atau teks sandi (*ciphertext*). Sebaliknya, proses deskripsi merupakan proses merubah *ciphertext* ke *plaintext*. Pada proses enkripsi dan deskripsi dibutuhkan kunci rahasia. Berdasarkan kunci yang digunakan kriptografi dibagi menjadi 3 macam yaitu kriptografi simetris, kriptografi asimetris, dan kriptografi hybrid. Kriptografi simetris yaitu jenis kriptografi yang menggunakan kunci sama pada proses enkripsi dan deskripsi. Kriptografi asimetris yaitu jenis kriptografi yang menggunakan kunci berbeda pada proses enkripsi dan deskripsi. Sedangkan kriptografi hybrid merupakan gabungan dari kriptografi simetris dan asimetris. Terdapat beberapa macam metode untuk membuat *ciphertext* antara lain: *Caesar*, *Affine*, *Monoalphabetic*, *Polyalphabetic*, *Vigenere*, *Beaufort*, *Playfair*, dan sebagainya. Metode yang digunakan pada penelitian ini merupakan aplikasi pelabelan pelabelan super anti ajaib total selimut yang merujuk pada *Caesar* dengan menggunakan sistem (mod 26) atau disebut dengan aturan Julius Caesar. Berikut aturan Julius Caesar,

Tabel 2.4 Aturan Julius Caesar.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

2.7 Hasil-Hasil Penelitian Pelabelan Selimut \mathcal{H} -Anti Ajaib

Beberapa ringkasan hasil penelitian pelabelan selimut \mathcal{H} -anti ajaib yang juga dapat digunakan sebagai rujukan dalam penelitian ini akan disajikan sebagai berikut :

Tabel 2.5: Hasil pelabelan selimut super (a, d) - \mathcal{H} -anti ajaib.

Graf	a	d	Hasil
SBt_n (<i>Shackle Graph Triangular Book</i>) (Pudyaningrum, 2014)	$36n + 84$ $73n + 47$	$d = 96$ $d = 15$	$\mathcal{H} = Bt_3 + 2e$
SJ_n (<i>Semi Jahangir</i>) (Hardiyantik, 2015)	$15n + 21$ $13n + 23$	$d = 1$ $d = 5$	$\mathcal{H} = C_4$
L_n (<i>Triangular Ladder</i>) (Jamil, 2014)	$16n - 3$ $15n - 1$	$d = 0$ $d = 1$	$\mathcal{H} = C_3$
W_n (<i>Wheel</i>) (Inayah, 2013)	$3hn + 5$ $3hn + 3h + n$	$d = 3$ $d = 1$	$\mathcal{H} = C_3$
$amal(F_n, P_n, 2)$ (<i>Amalgamasi Graf Kipas</i>) (Latifah, 2015)	$13n + 19$ $11n + 23$	$d = 1$ $d = 3$	$\mathcal{H} = B_2$

BAB 3. METODE PENELITIAN

3.1 Metode Penelitian

Dalam penelitian ini metode yang digunakan adalah metode deduktif aksiomatik dan pendeteksian pola. Metode deduktif aksiomatik yaitu metode penelitian yang menggunakan aksioma atau teorema yang telah ada, kemudian menurunkan sebagai alternatif penyelesaian masalah. Masalah dalam penelitian ini adalah pelabelan super (a,d) - \mathcal{H} -anti ajaib pada *joint* graf. Penerapan teorema digunakan untuk memperoleh pelabelan titik dan pelabelan sisi pada *joint* graf lengkap dan *triangular ladder*. Kemudian menemukan pelabelan super (a,d) - \mathcal{H} -anti ajaib pada *joint* graf. Metode pendeteksian pola digunakan untuk merumuskan pola pelabelan titik dan pelabelan sisi agar *joint* graf dapat digeneralisasi sehingga diperoleh perumusan pelabelan super (a,d) - \mathcal{H} -anti ajaib pada *joint* graf.

3.2 Rancangan Penelitian

Rancangan penelitian ini bertujuan untuk memberikan gambaran secara sistematis dan untuk menghindari terjadinya perbedaan pengertian makna. Rancangan penelitian yang dimaksud adalah sebagai berikut:

3.2.1 Penotasian Titik dan Sisi

Joint graf yang dinotasikan dengan $nG + H$ dimana graf G merupakan graf lengkap dan graf H merupakan graf *triangular ladder* adalah suatu graf yang dikembangkan dari beberapa salinan graf lengkap kemudian di*joint*kan dengan graf *triangular ladder*. Sehingga *joint* graf $nG + H$ dimana graf G merupakan graf lengkap dan graf H merupakan graf *triangular ladder* dinotasikan dengan $nK_y + L_h$. Himpunan titik dan himpunan sisi pada $nK_y + L_h$ berturut-turut yaitu $V(nK_y + L_h) = \{u_{ik}; 1 \leq i \leq m, 1 \leq k \leq n\} \cup \{v_j; 1 \leq j \leq s, s = 2h\}$ dan $E(nK_y + L_h) = \{e_{lk}; 1 \leq l \leq c, 1 \leq k \leq n\} \cup \{z_r; 1 \leq r \leq t, t = 4h - 3\}$. Jumlah titik dan jumlah sisi berturut-turut yaitu $|V(nK_y + L_h)| = mn + s$ dan

$$|E((nK_y + L_h))| = cn + t.$$

3.2.2 Indikator Pelabelan

Indikator pelabelan super $(a, d) - \mathcal{H}$ -anti ajaib total selimut pada *joint* graf dalam penelitian ini adalah:

a. Label titik berbeda semua

Label titik untuk pelabelan super $(a, d) - \mathcal{H}$ -anti ajaib total selimut pada *joint* graf $nK_y + L_h$ merupakan fungsi bijektif yang memetakan himpunan titik pada *joint* graf $nK_y + L_h$ ke bilangan bulat positif dari 1 sampai $|V(nK_y + L_h)|$;

b. Label sisi berbeda semua

Label sisi untuk pelabelan super $(a, d) - \mathcal{H}$ -anti ajaib total selimut pada *joint* graf $nK_y + L_h$ merupakan fungsi bijektif yang memetakan himpunan sisi pada *joint* graf $nK_y + L_h$ ke bilangan bulat positif dari $|V(nK_y + L_h)| + 1$ sampai $|V(nK_y + L_h)| + |E(nK_y + L_h)|$;

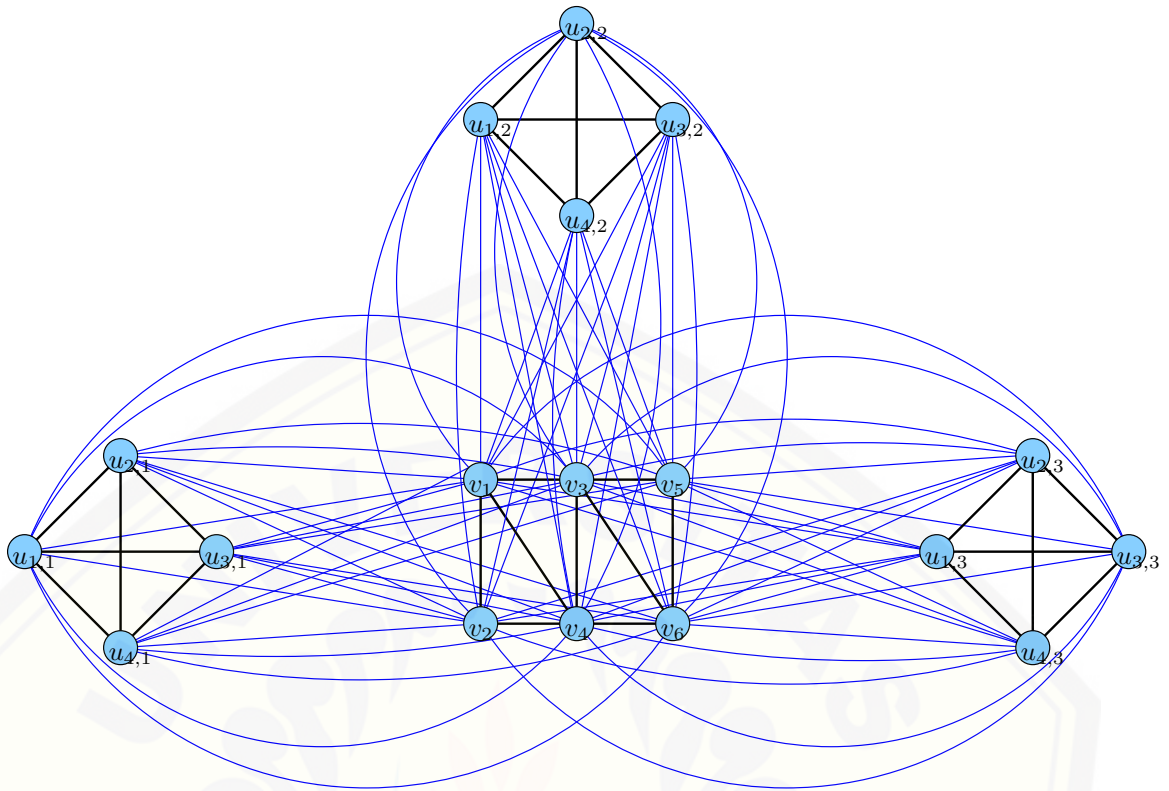
c. Bobot titik selimut

Bobot titik selimut adalah jumlah label titik pada setiap selimut. Dalam penelitian ini, bobot titik selimut adalah jumlah label titik pada setiap selimut yang merupakan *joint graph* $nK_y + L_h$. Bobot titik tersebut membentuk barisan aritmatika.

d. Bobot total selimut

Bobot total selimut adalah jumlah label titik dan sisi pada setiap selimut. Dalam penelitian ini, bobot total selimut adalah jumlah label titik dan label sisi pada setiap selimut yang merupakan *joint* graf $nK_y + L_h$. Bobot total selimut tersebut membentuk barisan aritmatika.

Gambar 3.1 merupakan contoh penotasian *joint* graf $nK_y + L_h$ tunggal



Gambar 3.1 Penotasian pada *joint* graf $3K_4 + L_3$ tunggal

3.3 Teknik Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada *joint* graf $nK_y + L_h$. Adapun teknik penelitian sebagai berikut:

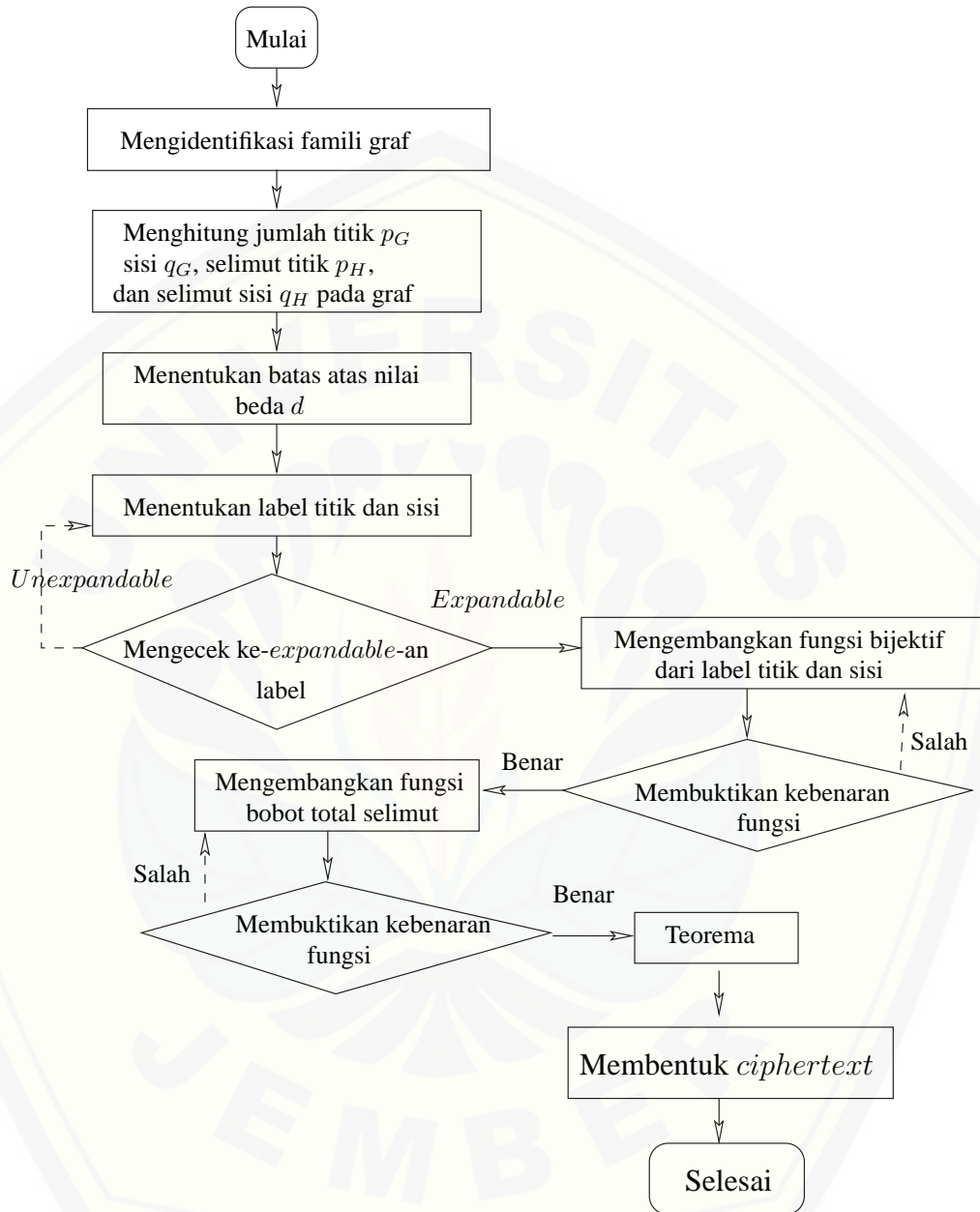
- mengidentifikasi famili graf $nK_y + L_h$;
- menghitung jumlah titik p_G , jumlah sisi q_G , jumlah selimut titik p_H , jumlah selimut sisi q_H , dan jumlah selimut pada $nK_y + L_h$;
- menentukan batas atas nilai beda d pada $nK_y + L_h$;
- menentukan label titik dan label sisi pada $nK_y + L_h$;
- apabila label titik dan label sisi berlaku untuk beberapa graf maka dikatakan pelabelan itu *expandable*,
- menentukan fungsi bijektif label titik dan label sisi pada $nK_y + L_h$;
- mengembangkan fungsi bobot selimut dan fungsi bobot total selimut pada $nK_y + L_h$;

- h. membuktikan kebenaran fungsi;
- i. menemukan teorema;
- j. menciptakan ciphertext dengan cara mengaplikasikan pola pelabelan super (a,d) - \mathcal{H} -anti ajaib total selimut pada *joint* graf;

Pada penelitian ini akan ditemukan berbagai pola pelabelan super anti ajaib total selimut dengan nilai awal a dan beda d . Langkah-langkah penelitian di atas juga dapat disajikan dalam bentuk diagram aliran penelitian pada gambar 3.2.

Langkah-langkah membentuk *ciphertext* pada penelitian ini sebagai berikut:

- a. menentukan graf yang akan digunakan dengan syarat graf tersebut memiliki jumlah sisi lebih dari karakter *plaintext* yang akan digunakan sebagai *ciphertext*, misalkan 26;
- b. melabeli titik dan sisi berdasarkan pelabelan super anti ajaib total selimut;
- c. mengeliminasi sisi pada graf yang memiliki label $f_e > |V(G)| + 26$;
- d. membuat diagram pohon dengan akar utama label titik terkecil dan akar selanjutnya mengikuti pola graf. Sisi yang telah dieliminasi tidak perlu digunakan;
- e. meletakkan label sisi pada diagram pohon sesuai pelabelan pada graf;
- f. memasang setiap karakter *plaintext* dengan sisi pada diagram pohon secara berurutan dari kiri ke kanan dimulai dari *layer* atas;
- g. membuat aturan untuk mentransformasi bilangan modulo 26 ke karakter yang digunakan sebagai *ciphertext*. Pada penelitian ini aturan yang digunakan adalah aturan Julius Caesar;
- h. membuat tabel *ciphertext* yang terdiri dari *plaintext*, label sisi pada diagram pohon, $(\text{mod } 26)$ dari label sisi, dan *ciphertext* yang bersesuaian dengan $(\text{mod } 26)$.



Gambar 3.2 Diagram alir penelitian

BAB 5. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dari pembahasan pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa:

1. Kardinalitas pada *joint* graf dari graf lengkap dan graf *triangular ladder* yaitu himpunan titik $V_1 = \{u_{ik}; 1 \leq i \leq m, 1 \leq k \leq n\}$ dan $V_2 = \{v_j; 1 \leq j \leq s, s = 2h\}$, himpunan sisi $E_1 = \{e_{lk}; 1 \leq l \leq c, 1 \leq k \leq n\}$ dan $E_2 = \{z_r; 1 \leq r \leq t, t = 4h - 3\}$, jumlah titik $|V_1| = mn$ dan $|V_2| = s$ maka $p_G = |V_1| + |V_2| = mn + s$, serta jumlah sisi $|E_1| = cn$ dan $|E_2| = t$ maka $q_G = |E_1| + |E_2| = cn + t$.
2. Batas atas d untuk pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} -anti ajaib total selimut pada *joint* graf dari graf lengkap dan graf *triangular ladder* yaitu $d \leq p_H^2 + q_H^2 - (s)p_H - (t)q_H$ dengan $p_H = m + s$ dan $q_H = c + t$.
3. *Joint* graf dari graf lengkap dan graf *triangular ladder* yang dinotasikan dengan $nK_y + L_h$. memiliki super (a, d) - \mathcal{H} -anti ajaib total selimut dengan $a = \{(m_2 + s_2)(n(m_1 + 2)) + \sum_{o=3}^8 m_o(n \sum_{\varphi=1}^{o-1} m_\varphi + 4n) + (c_1 + t)(mn + s) + tcn + \sum_{o=2}^6 c_o(n \sum_{\varphi=1}^{o-1} c_\varphi + mn + s) + \frac{n}{2}(m_3^2 - m_3 + m_4^2 + m_4 + c_1^2 - c_1 + c_2^2 + c_2) + \frac{1}{2}[-m_1^2 - 3m_1 + m_2^2 + m_2 + m_5 - m_5^2 + c_3 - c_3^2 + m_6(2m_6n + m_6 + 1) + c_4(2c_4n + c_4 + 1) + t^2 + t] + \frac{1}{4}[m_7(2m_7n - n + 1) + m_8(2m_8n + n + 3) + s_1(2m_1 + m_1s_1 + 2s_1 + 2) + s_2(2m_2 + m_2s_2 + 2s_2 + 2) + c_5(2c_5n - n + 1) + c_6(2c_6n + n + 3)] + n(m_2^2 + 2m_2) + m_4 + c_2\}$ dan $d = (m_1^2 + 2m_1) - (m_2^2 + 2m_2) + m_3 - m_4 + m_5^2 - m_6^2 + \frac{m_7}{2} - \frac{m_8}{2} + c_1 - c_2 + c_3^2 - c_4^2 + \frac{c_5}{2} - \frac{c_6}{2}$.
4. Pembentukan *ciphertext* sebagai aplikasi pada pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} -anti ajaib total selimut pada graf *joint* $nK_y + L_h$ dilakukan dengan tahap-tahap berikut:
 - a. menentukan graf yang akan digunakan dengan syarat graf tersebut memiliki jumlah sisi lebih dari karakter *plaintext*, misalkan N ;

- b. melabeli titik dan sisi berdasarkan pelabelan super anti ajaib total selimut;
- c. mengeliminasi sisi pada graf yang memiliki label $f_e > |V(G)| + N$;
- d. membuat diagram pohon dengan akar utama label titik terkecil dan akar selanjutnya mengikuti pola graf. Sisi yang telah dieliminasi tidak perlu digunakan;
- e. meletakkan label sisi pada diagram pohon sesuai pelabelan pada graf;
- f. memasang setiap karakter *plaintext* pada sisi diagram pohon secara berurutan dari kiri ke kanan dimulai dari *layer* atas;
- g. membuat aturan untuk mentransformasi bilangan modulo N ke karakter yang digunakan sebagai *ciphertext*. Berikut aturan yang digunakan dalam penelitian ini,

Tabel 5.1 Aturan pengkodean untuk bilangan modulo 26 dengan alfabet

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z

Aturan pengkodean untuk bilangan modulo 26 ini merujuk pada aturan Julius Caesar dan menambah pengkodean tanda spasi dengan # karena pentingnya tanda spasi.

Tabel 5.2 Aturan pengkodean untuk bilangan modulo 48 dengan simbol

<i>Plaintext</i>	0	1	1	3	4	5	6	7	8	9	10	11
<i>Ciphertext</i>	⊥	⊥	⊥	⊂	⊂	⊗	⊇	⊆	∑	∫	∫	F
<i>Plaintext</i>	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
<i>Ciphertext</i>	⌈	⌈	⌈	⌈	⌈	◀	▶	⊗	⊗	⊗	×	∅
<i>Plaintext</i>	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
<i>Ciphertext</i>	×	⌈	⊗	★	◆	■	∞	⊥	▼	◁	⊗	▲
<i>Plaintext</i>	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47
<i>Ciphertext</i>	b	*	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞

- h. membuat tabel *ciphertext* yang terdiri dari *plaintext*, label sisi pada diagram pohon, (mod N) dari label sisi, dan *ciphertext* yang bersesuaian dengan (mod N). Sehingga diperoleh pasangan antara *plaintext* dan *ciphertext*. *Ciphertext* yang dihasilkan bergantung pada n, y, h, d , kombinasi yang digunakan, peletakan label, dan jumlah karakter yang akan dijadikan *ciphertext*. Pada penelitian ini diberikan dua contoh *ciphertext* sebagai berikut

Tabel 5.3 *Ciphertext* alfabet dari super $(10028, 14)$ - \mathcal{H} -anti ajaib total selimut pada *joint* graf $3K_4 + L_6$

<i>Plaintext</i>	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
<i>Ciphertext</i>	Z	R	U	X	A	B	C	D	S	T	V	W	Y	E
<i>Plaintext</i>	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	sp	
<i>Ciphertext</i>	F	G	H	L	M	N	I	J	K	O	P	Q	#	

Tabel 5.4 *Ciphertext* simbol dari super $(10000,30)$ - \mathcal{H} -anti ajaib total selimut pada *joint* graf $3K_4 + L_6$

<i>Plaintext</i>	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
<i>Ciphertext</i>	⌋	▼	◁	Ⓢ	▲	♭	⌋	≡	⊗	×	⌒	□
<i>Plaintext</i>	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X
<i>Ciphertext</i>	★	#	∇	Ⓜ	∑	∂	♯	⊖	∫	⊕	F	⊥
<i>Plaintext</i>	Y	Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
<i>Ciphertext</i>	⌋	⌋	Υ	◀	▶	⊗	⊕	∅	×	◆	■	∞
<i>Plaintext</i>	sp.	.	,	”	’	;	:	?	!	()	&
<i>Ciphertext</i>	*	λ	γ	⊥	⊥	∪	∞	∴	⋈	∩	⊗	∇

5.2 Saran

Berdasarkan hasil penelitian mengenai pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} anti ajaib total selimut pada *joint* graf dari graf lengkap dan graf *triangular ladder* serta mengacu pada *open problem* dari hasil penelitian yang telah ditemukan, maka peneliti memberikan saran kepada pembaca untuk melakukan penelitian pada pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} anti ajaib total selimut pada *joint* graf dari graf lengkap dan graf *triangular ladder* untuk graf diskonektif.

DAFTAR PUSTAKA

- Agustin, I. H., Rizky, P dan Dafik. 2014. *Keantimagikan Super Total Selimut pada Gabungan Saling Lepas Graf Shackle Triangular Book*. Seminar Nasional Pendidikan Matematika Ahmad Dahlan.
- Agustin, I. H., Dafik, dan Milasari, M.D. 2016. *Super Complete-Antimagicness Of Amalgamation Total Of Complete Graph*. Working Paper. Jember : CGANT UNEJ.
- Anggraeni, N., dan Dafik. 2014. Super (a, d) - \mathcal{H} -Antimagic Total Covering of Amalgamation Graph K_4 and W_4 . *Prosiding Seminar Nasional*, 1: 708-804.
- Azizah, Y. N. 2016. "Super $(a, d) - A_p^o$ -Anti Ajaib Total Dekomposisi Graf Shackle Antiprisma untuk Pengembangan *Chipertext* dan Ketrampilan Berfikir Tingkat Tinggi". Tidak Dipublikasikan. Skripsi. Jember: FKIP Universitas Jember.
- Bača, Bronkovic, L., Lascsakova, M., Phanalasy, dan Fenovcikova, A. S. 2013. On d -Antimagic Labelings of Plane Graph. *Electonica Journal of Graph Theory and Application*, **1**. 28-39.
- Dafik. 2007. *Structural Properties and Labeling of Graphs*. Australia: School of Information Technology and Mathematical Sciences University of Ballarat.
- Dafik. 2014. *Batas Atas d dari Sebuah Graf yang Memiliki Super (a,d) - \mathcal{H} -Antimagic Covering*. Working Paper. Jember: FKIP UNEJ.
- Gutierrez,A. dan Llado. 2005. Magic coverings. *Of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, **55**:451461.
- Harary, F. 2007. *Graph Theory*. New London: Wesley.
- Hardiyantik, D. 2015. *Super (a,d) - \mathcal{H} -Antimagic Total Selimut pada Graf Semi Jahangir*. Jember: FMIPA Universitas Jember.
- Hartsfield, N. dan Ringel, G. 1994. *Pearls in Graph Theory*. London: Accademic Press Limited.

- Inayah, N., Simanjuntak, R., Salman, A. 2009. On (a,d) - \mathcal{H} -Antimagic Covering of Graph. *The Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, **71**, 273-281.
- Inayah, N. 2013. "Pelabelan (a,d) - \mathcal{H} -Anti Ajaib pada Beberapa Kelas Graf". Tidak Dipublikasikan. Disertasi.
- Inayah, N., Simanjuntak, R., Salman, A. 2013. On (a,d) - \mathcal{H} -Antimagic Total Labelings for Shackle of A Connected Graph H . *Australasian Journal of Combinatorics*, **57**, 127-138.
- Jamil, N. A. 2014. " Super (a,d) - \mathcal{H} -Antimagic Total Covering pada Graf Triangular Ladder ". Tidak Dipublikasikan. Skripsi. Jember: FMIPA Universitas Jember.
- Latifah, S. 2015. " Super (a,d) - \mathcal{H} -Antimagic Total Covering pada Amalgamasi Graf Kipas". Tidak Dipublikasikan. Skripsi. Jember: FMIPA Universitas Jember.
- Kotzig, A. and Rosa, A. 1970. *Magic Valuations of Finite Graphs*. *Canad. Math. Bull.*, **13**:451-461.
- Maryati, Salman, Baskoro, Ryan, dan Miller. 2010. On H Super magic Labellings for Certain Shackles and Amalgamations of A Connected Graph Antimagic Total Labelings For Shackles of A Connected Graph. *Utilitas Math*, 83: 333-342.
- Prihandoko, A. C. 2003. *Pengantar pada Teori Grup*. Jember: FKIP Universitas Jember.
- Pudyaningrum, P. R. H. 2014. Super (a,d) - \mathcal{H} -Antimagic Total Covering pada Shackle Graf Triangular Book. *Prosiding Seminar Matematika dan Pendidikan Matematika*.
- Wallis, W. D. 2001. *Magic Graphs*. Boston: Birkhäuser, 80:2.
- Wibisono, S. 2008. *Matematika Diskrit*. Edisi 2. Yogyakarta: Graha Ilmu.
- Wijaya, K., and Baskoro, E. T. 2000. Edge-Magic Total Labelling On Disconnected Graphs. In Proc. *Eleventh Australasian Workshop on Combinatorial Algorithms*, (pp 139-144).