



**ANTIMAGICNESS SUPER TOTAL SELIMUT
PADA *JOINT* GRAF SERTA APLIKASINYA
UNTUK PENGEMBANGAN *CIPHERTEXT***

SKRIPSI

Oleh

Siti Zumrotus Kholifah

NIM 121810101011

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER**

2016



**ANTIMAGICNESS SUPER TOTAL SELIMUT
PADA *JOINT* GRAF SERTA APLIKASINYA
UNTUK PENGEMBANGAN *CIPHERTEXT***

SKRIPSI

diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan Program Studi Matematika (S1) dan mencapai gelar Sarjana Sains

Oleh

Siti Zumrotus Kholifah

NIM 121810101011

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER**

2016

HALAMAN PERSEMBAHAN

Alhamdulillah, atas izin Allah SWT selesailah skripsi saya, yang saya persembahkan untuk:

1. Ibu Asni, Bapak Suwah dan Adik M. Zaenal Arifin tercinta atas doa, dorongan semangat, kasih sayang tanpa batas, dan segala kebaikan yang telah diberikan.
2. Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si. selaku Dosen Pembimbing I dan Kusbudiono, S.Si., M.Si., selaku Dosen Pembimbing II yang telah memberikan ilmu, bimbingan, motivasi, bantuan dan kesabaran dalam mengerjakan skripsi ini.
3. Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D., selaku Dosen Penguji I dan Kosala Dwidja Purnomo, S.Si., M.Si., selaku Dosen Penguji II yang telah memberikan ilmu, penyempurnaan, motivasi, bantuan dan kesabaran dalam mengerjakan skripsi ini.
4. Para guru dan dosen yang telah memberikan ilmu dan membimbing dengan penuh kesabaran.
5. Keluarga, Saudara, Sahabat, dan teman-teman yang senantiasa memberi dukungan, serta tak henti-hentinya menghibur.
6. Almamater Jurusan Matematika FMIPA Universitas Jember.

HALAMAN MOTO

"Karena sesungguhnya, sesudah kesulitan itu ada kemudahan. Sesungguhnya, sesudah kesulitan itu ada kemudahan"

(Q.S. Al-Insyirah : 5-6)*)

"Pengetahuan tidaklah cukup, kita harus mengamalkannya. Niatlah tidaklah cukup, kita harus melakukannya"

(Johann Wolfgang van Goethe)

"Allah akan meninggikan orang-orang yang beriman di antaramu dan orang-orang yang diberi ilmu pengetahuan beberapa derajat. Dan Allah Maha mengetahui apa yang kamu kerjakan"

(Q.S. AL-mujadilah : 11)*)

*) Departemen Agama Republik Indonesia. 2004. *Al-Qur'an dan Terjemahannya*. Bandung. CV Penerbit J-ART.

HALAMAN PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

nama : Siti Zumrotus Kholifah

NIM : 121810101011

menyatakan dengan sesungguhnya bahwa karya ilmiah yang berjudul ”*Antimagicness Super Total Selimut pada Joint Graf serta Aplikasinya untuk Pengembangan Ciphertext*” adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali kutipan yang sudah saya sebutkan sumbernya, belum pernah diajukan pada institusi mana pun, dan bukan karya jiplakan. Saya bertanggungjawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa adanya tekanan dan paksaan dari pihak mana pun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, Juni 2016

Yang menyatakan,

Siti Zumrotus Kholifah

NIM 121810101011

SKRIPSI

***ANTIMAGICNESS SUPER TOTAL SELIMUT
PADA JOINT GRAF SERTA APLIKASINYA
UNTUK PENGEMBANGAN CIPHERTEXT***

Oleh

**Siti Zumrotus Kholifah
NIM 121810101011**

Dosen Pembimbing 1 : Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si.

Dosen Pembimbing 2 : Kusbudiono, S.Si., M.Si.

PENGESAHAN

Skripsi berjudul ”*Antimagicness* Super Total Selimut pada *Joint* Graf serta Aplikasinya untuk Pengembangan *Ciphertext*” telah diuji dan disahkan pada:

Hari / tanggal :

Tempat : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas
Jember

Tim Penguji :

Dosen Pembimbing I,

Dosen Pembimbing II,

Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si.

Kusbudiono, S.Si., M.Si.

NIP 19840801 200801 2 006

NIP 19770430 200501 1 001

Dosen Penguji I,

Dosen Penguji II,

Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D.

Kosala Dwidja Purnomo, S.Si., M.Si.

NIP 19680802 199303 1 004

NIP 19690828 199802 1 001

Mengesahkan,

Dekan

Drs. Sujito, Ph.D.

NIP 19610204 198711 1 001

RINGKASAN

Antimagicness Super Total Selimut pada Joint Graf serta Aplikasinya untuk Pengembangan Ciphertext; Siti Zumrotus Kholifah, 121810101011; 2016:62 halaman; Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Graf merupakan salah satu topik dalam teori graf yang digunakan untuk mencari solusi permasalahan diskrit, yang dalam graf terdapat titik (*vertex*) dan sisi (*edge*). Salah satu aplikasi graf dalam kehidupan sehari-hari adalah pembuatan sandi pesan rahasia. Pesan rahasia (*ciphertext*) adalah pesan tersandi yang merupakan hasil pengamanan *enkripsi* dari pesan yang hendak dikirim berupa data asli (*plaintext*). Pelabelan super didefinisikan sebagai pelabelan titik dan sisi dimana label titik kurang dari label sisi. Pelabelan total selimut \mathcal{H} *magic* sebuah graf $G = (V_G, E_G)$ apabila setiap garis e_G terdapat pada subgraf \mathcal{H} dari G yang isomorfik dengan \mathcal{H} , \mathcal{H} adalah subgraf dari G . Inayah (2013) mengembangkan menjadi pelabelan selimut \mathcal{H} - *antimagic* yang merupakan pelabelan total selimut \mathcal{H} - *antimagic* pada graf G yang mempunyai fungsi bijektif sehingga diperoleh jumlahan barisan aritmatika $a, a+d, a+2d, \dots, a+(n-1)d$ dimana fungsi bijektif tersebut berbeda dan berurutan. *Joint* graf $(G_1 + G_2)$ *joint* dari graf G_1 dan G_2 , dinotasikan dengan $G = G_1 + G_2$, adalah graf G dimana $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ dan $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup uv | u \in V(G_1), v \in V(G_2)$ (Harsya, 2014). Sebuah keluarga himpunan yang terdiri dari himpunan-himpunan bagian tak kosong dari A yang saling asing (*disjoint*) satu sama lain dan gabungan dari semua himpunan bagian tersebut akan kembali membentuk himpunan A merupakan definisi suatu partisi dari sebuah himpunan A . Peneliti akan membahas tentang *antimagicness* super total selimut pada *joint* graf serta aplikasinya untuk pengembangan *ciphertext*. Pencarian batas atas serta nilai-nilai beda d . Nilai $d \leq s$, d bilangan bulat non negatif dan s nilai terbesar d dalam suatu graf. Nilai batas atas digunakan untuk menentukan nilai beda maksimum dalam mencari pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} - *antimagic* total selimut. Graf yang digunakan adalah *joint* graf $nW_z + P_s$ dan untuk memecahkan pelabelan selimut digunakan batas atas dan pola partisi.

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode deskriptif aksiomatik, yaitu menetapkan pengertian dasar *antimagicness* super total selimut,

kemudian dikenalkan beberapa teorema mengenai *antimagicness* super total selimut pada *joint* graf. Selanjutnya menurunkan teorema tersebut untuk memperoleh pelabelan titik dan pelabelan sisi pada *joint* graf. Setelah ditemukan *antimagicness* super total selimut pada *joint* graf, maka dilanjutkan ke metode pendektasian pola. Metode ini digunakan untuk merumuskan pola pelabelan titik dan pelabelan sisi apabila *joint* diperumum, sehingga nantinya didapatkan perumusan *antimagicness* super total selimut pada *joint* graf.

Partisi dan variasi nilai beda yang di temukan adalah

- $\mathcal{P}_{m,d}^n(i, j) = 2i + 2jm - j - 2m; 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ dengan beda $d = 2m^2 - m$
- $\mathcal{P}_{m,d}^n(i, j) = 2mn - n - 2jm + j + 2i - 1; 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ dengan beda $d = -(2m^2 - m)$

dari partisi yang ditemukan dan di kombinasikan dengan partisi yang ada maka di dapat sebuah teorema. Berdasarkan *antimagicness* super total selimut pada *joint* graf $G = nW_z + P_s$ di dapat *ciphertext* alfabet dan *ciphertext* simbol *ciphertext*.

KATA PENGANTAR

Puji syukur ke hadirat Allah Swt. atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul ”*Antimagicness* Super Total Selimut pada *Joint* Graf serta Aplikasinya untuk Pengembangan *Ciphertext*”. Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan pendidikan strata satu (S1) pada Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Penyusunan skripsi ini tidak lepas dari bantuan berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan terimakasih kepada:

1. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
2. Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
3. Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si., selaku Dosen Pembimbing I, Kusbudiono, S.Si., M.Si., selaku Dosen Pembimbing II, Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D., selaku Dosen Penguji I dan Kosala Dwidja Purnomo, S.Si., M.Si., selaku Dosen Penguji II;
4. Ahmad Kamsyakawuni, S.Si., M.Kom., selaku Dosen Pembimbing Akademik;
5. Dosen dan Karyawan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
6. Ibu Asni dan Bapak Suwah;
7. semua pihak yang telah membantu terselesaikannya skripsi ini.

Semoga bantuan, bimbingan, dan dorongan beliau dicatat sebagai amal baik oleh Allah SWT dan mendapat balasan yang sesuai dari-Nya. Selain itu, penulis juga menerima segala kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan skripsi ini. Akhirnya penulis berharap, semoga skripsi ini dapat bermanfaat.

Jember, Juni 2016

Penulis

DAFTAR ISI

	Halaman
HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PERSEMBAHAN	ii
MOTO	iii
HALAMAN PERNYATAAN	iv
HALAMAN PENGESAHAN	vi
RINGKASAN	vii
KATA PENGANTAR	ix
DAFTAR ISI	x
DAFTAR GAMBAR	xii
DAFTAR TABEL	xiii
BAB 1. PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	3
1.3 Tujuan Penelitian	3
1.4 Manfaat Penelitian	4
BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA	5
2.1 Terminologi Dasar Graf	5
2.2 Graf Khusus dan Operasi Graf	8
2.2.1 Graf Khusus	8
2.2.2 Operasi Graf	10
2.3 Aplikasi Graf	11
2.4 Fungsi dan Barisan Aritmatika	15
2.4.1 Fungsi	15
2.4.2 Barisan Aritmatika	17
2.5 Teknik Partisi dengan Menetapkan Beda d	17
2.6 Pelabelan Graf	21
2.6.1 Definisi Pelabelan Graf	21
2.6.2 Pelabelan Selimut Super $(a, d) - \mathcal{H} - Antimagic$	22

2.6.3	Batas Atas Nilai Beda d Pelabelan Selimut Super $(a, d) - \mathcal{H}$ -Antimagic	24
2.7	Hasil Pelabelan Selimut Super $(a, d) - \mathcal{H}$-Antimagic	25
BAB 3. METODE PENELITIAN		27
3.1	Metode Penelitian	27
3.2	Definisi Operasional	27
3.2.1	Super $(a, d) - \mathcal{H}$ - Antimagic Total Selimut	27
3.2.2	<i>Joint</i> Graf	28
3.3	Teknik Penelitian	28
BAB 4. HASIL DAN PEMBAHASAN		32
4.1	Kardinalitas dan Batas Atas Nilai Beda d Antimagicness Super Total Selimut <i>Joint</i> Graf $nW_z + P_s$	33
4.2	Pengembangan Partisi	34
4.3	Antimagicness Super Total Selimut pada <i>Joint</i> Graf $G = nW_z + P_s$	35
4.4	Aplikasi Antimagicness Super Total Selimut <i>Joint</i> Graf $G = nW_z + P_s$ dengan Menggunakan Ciphertext	39
4.4.1	Pembangunan <i>Ciphertext</i> Alfabet pada <i>Joint</i> Graf $3W_5 + P_6$ dengan $d = 128$	47
4.4.2	Pembangunan <i>Ciphertext</i> Simbol Alfabet pada <i>Joint</i> Graf $3W_5 + P_6$ dengan $d = 20$	50
4.5	Hasil dan Pembahasan	53
BAB 5. PENUTUP		59
5.1	Kesimpulan	59
5.2	Saran	61
DAFTAR PUSTAKA		62

DAFTAR GAMBAR

	Halaman
2.1 Contoh Graf G	6
2.2 Graf H subgraf dari Graf G	7
2.3 Graf Isomorfik	7
2.4 Graf Bintang	8
2.5 Graf Lingkaran	9
2.6 Graf Roda (Roosen, 2003)	9
2.7 Graf Lintasan	10
2.8 <i>Joint</i> Graf	10
2.9 <i>Disjoint</i> Graf	11
2.10 <i>Joint</i> Graf $nW_3 + P_9$	13
2.11 (a) Fungsi Injektif, (b) Fungsi Surjektif, dan (c) Fungsi Bijektif	16
2.12 Contoh pada Graf	22
3.1 <i>Joint</i> Graf $nW_z + P_s$	29
3.2 Diagram Alir Penelitian	30
4.1 Super (4949, 128)- <i>HATC</i> pada <i>Joint</i> Graf $3W_5 + P_6$	43
4.2 Super (4615, 462)- <i>HATC</i> pada <i>Joint</i> Graf $3W_5 + P_6$	44
4.3 Super (5057, 20)- <i>HATC</i> pada <i>Joint</i> Graf $3W_5 + P_6$	45
4.4 Diagram Pohon Super (4949, 128)- <i>HATC</i> pada <i>Joint</i> Graf $3W_5 + P_6$	49
4.5 Diagram Pohon Super (5057, 20)- <i>HATC</i> pada <i>Joint</i> Graf $3W_5 + P_6$	52

DAFTAR TABEL

	Halaman
2.1 Aturan Julius Caesar.....	12
2.2 Klasifikasi partisi $d = 2m^2 - m$	12
2.3 Stream Cipher	14
2.4 Klasifikasi Partisi $d = m$	20
2.5 Klasifikasi Partisi $d = m^2$	21
2.6 Klasifikasi Partisi $d = \frac{m}{2}$	21
2.7 Klasifikasi Partisi $d = 8$	22
2.8 Ringkasan Pelabelan Selimut Super (a, d) - \mathcal{H} -Antimagic.	26
4.1 Label Titik, Label Sisi dan Bobot Total Selimut dari Super (4949, 128)- \mathcal{HATC} pada <i>Joint</i> Graf $3W_5 + P_6$	40
4.2 Label Titik, Label Sisi dan Bobot Total Selimut dari Super (4615, 462)- \mathcal{HATC} pada <i>Joint</i> Graf $3W_5 + P_6$	41
4.3 Label Titik, Label Sisi dan Bobot Total Selimut dari Super (5057, 20)- \mathcal{HATC} pada <i>Joint</i> Graf $3W_5 + P_6$	42
4.4 Pembentukan <i>Chipertext</i> Alfabet dari Gambar 4.4	48
4.5 Pengkodean untuk bilangan (mod 46).....	50
4.6 Pembentukan <i>Chipertext</i> Simbol Alfabet dari Gambar 4.5.....	51
4.7 <i>Ciphertext</i> Alfabet <i>Antimagicness</i> Super (4949, 128)- \mathcal{HATC} pada <i>Joint</i> Graf $3W_5 + P_6$	56
4.8 <i>Ciphertext</i> Simbol Alfabet <i>Antimagicness</i> Super (5057, 20)- \mathcal{HATC} pada <i>Joint</i> Graf $3W_5 + P_6$	56
5.1 <i>Ciphertext</i> Alfabet <i>Antimagicness</i> Super (4949, 128)- \mathcal{HATC} pada <i>Joint</i> Graf $3W_5 + P_6$	60
5.2 <i>Ciphertext</i> Simbol Alfabet <i>Antimagicness</i> Super (5057, 20)- \mathcal{HATC} pada <i>Joint</i> Graf $3W_5 + P_6$	60

BAB 1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori graf dikemukakan matematikawan berasal dari Swiss yang bernama Leonhard Euler pada tahun 1736. Graf merupakan salah satu topik dalam teori graf yang digunakan untuk mencari solusi permasalahan diskrit, yang dalam graf terdapat titik(*vertex*) dan sisi(*edge*). Salah satu aplikasi graf dalam kehidupan sehari-hari adalah pembuatan sandi pesan rahasia. Pesan rahasia (*ciphertext*) adalah pesan tersandi yang merupakan hasil pengamanan (*enkripsi*) dari pesan yang hendak dikirim berupa data asli (*plaintext*). Sedangkan ilmu yang mempelajari bagaimana cara menjaga agar data atau pesan tetap aman saat dikirimkan, dari pengirim ke penerima tanpa mengalami gangguan dari pihak ketiga di sebut sebagai kriptografi. Salah satu metode yang digunakan dalam pembuatan sandi pesan rahasia adalah menggunakan pelabelan graf.

Pelabelan graf pada pertengahan tahun 1960-an diperkenalkan melalui hipotesis Ringel dan Rosa. Pelabelan graf merupakan fungsi bijektif yang memetakan himpunan dari elemen-elemen graf ke himpunan bilangan bulat positif. Elemen-elemen graf terdiri dari himpunan titik, himpunan sisi, serta himpunan titik dan sisi. Pelabelan berkembang menjadi pelabelan super, pelabelan titik, pelabelan sisi, pelabelan total, pelabelan *magic*, dan pelabelan *antimagic*. Pelabelan super didefinisikan sebagai pelabelan titik dan sisi dimana label titik kurang dari label sisi, pelabelan titik mempunyai daerah asal berupa himpunan titik, pelabelan sisi mempunyai daerah asal berupa himpunan sisi, pelabelan total mempunyai daerah asal berupa himpunan titik dan sisi (Dafik,2007:17). Pelabelan *magic* didefinisikan sebagai pelabelan dengan jumlah bobot total yang sama. Hartsfield dan Ringel (1994) mendefinisikan *antimagic* merupakan suatu graf G yang mempunyai verteks sebanyak v_G dan e_G jika label titik dan sisinya berupa $\{1, 2, \dots, e_G\}$ sehingga mempunyai bobot total berbeda. Gutiérrez dan Lladó (2005) mengatakan bahwa pelabelan total selimut *magic* berawal dari pelabelan total *magic*. Pelabelan total selimut \mathcal{H} *magic*

sebuah graf $G = (v_G, e_G)$ apabila setiap garis e_G terdapat pada subgraf \mathcal{H} dari G yang isomorfik dengan \mathcal{H} , \mathcal{H} adalah subgraf dari G . Inayah (2013) mengembangkan menjadi pelabelan selimut $\mathcal{H} - antimagic$ yang merupakan pelabelan total selimut $\mathcal{H} - antimagic$ pada graf G yang mempunyai fungsi bijektif sehingga diperoleh jumlahan barisan aritmatika $a, a + d, a + 2d, \dots, a + (n - 1)d$ dimana fungsi bijektif tersebut berbeda dan berurutan. Pelabelan graf mempunyai nilai d (batas atas) yang berbeda dan nilai d tidak tunggal (Dafik *et al.*, 2009).

Beberapa penelitian terdahulu tentang pelabelan selimut, yaitu dilakukan oleh Inayah (2013) tentang Pelabelan Selimut $(a, d) - \mathcal{H}$ -Anti Ajaib Super pada Graf Kipas F_n dan Graf Roda W_n ditemukan beberapa suku awal dan beda (a, d) pada graf kipas $(h^2 + 2hn - h + 3, 2h - 5), (h^2 + 2hn + h - 2n + 1, 2h - 1), (3hn + 3h - 4n, 3), (3h^2 - 3h + 3, 6h - 3); 3 \leq h \leq n$ serta pada graf roda $((2n + 3)h + n, 1), (3hn + 5); 3 \leq h \leq n + 1$, Pudyaningrum *et al.*, (2014) meneliti Pengembangan Total Selimut Super pada Graf *Shackle triangular book* menghasilkan $d = \{0, 1, 2, \dots, 96\}$, $(36n + 84, 96), (52n + 68, 60), (60n + 60, 48), (61n + 59, 40), (64n + 56, 33), (66n + 54, 30), (52n + 68, 28), (68n + 52, 25), (69n + 51, 23), (72n + 48, 20), (72n + 48, 18), (73n + 47, 15), (76n + 44, 12), (77n + 43, 8) - C_3; n \geq 2$ pada graf konektif sedangkan pada graf diskonektif dihasilkan $d = \{0, 2, 4, 6\}$, $(73mn + 32m + 15, 15), (70mn + 34m + 16, 17), (69mn + 34m + 17, 19), (68mn + 34m + 18, 21), (67mn + 34m + 19, 23) - C_3; n \geq 2; m \geq 2$, Wuni *et al.*, (2014) meneliti Super $(a, d) - \mathcal{H} - antimagic$ Total Covering pada Gabungan Saling Lepas Graf *Semiwindmill* dengan hasil $(22n + 20, 1), (23n + 13, 3), (25n + 17, 5), (18n + 27, 7) - C_3; n \geq 1$, serta Azizah (2016) meneliti Super $(a, d) - A_O^P$ Anti Ajaib Total Dekomposisi Graf *Shackle* Generalisasi Antiprisma untuk Pengembangan *Ciphertext* dan Keterampilan Berpikir Tingkat Tinggi menemukan d konektif dan diskonektif berturut-turut $d \in \{0, 1, 2, \dots, (op - 2)^2 + (3op - 2o)^2 + 2\}$ dan $d \in \{0, 2, \dots, (op - 2)^2 + (3op - 2o)^2 + 2\}$ yang memenuhi $d = d(t) \oplus (\pm(op - 2 - t)^2) \oplus d(r) \oplus (\pm(3op - 2o - r)^2) \pm 2$ dimana $l = 0, 1, \dots, op - 2$ dan $r = 0, 1, \dots, 3op - 2op$ dengan $p, n, m \geq 2$ dan $o \geq 3$.

Pada graf terdapat beberapa operasi graf, diantaranya adalah *joint* graf $(G_1 + G_2)$ dan *disjoint* graf. Berdasarkan latar belakang di atas, peneliti akan membahas tentang *Antimagicness* Super Total Selimut pada *Joint* Graf serta Aplikasinya untuk Pengembangan *Ciphertext*. Pencarian batas atas serta nilai-nilai beda d . Nilai $d \leq s$, d bilangan bulat non negatif dan s nilai terbesar d dalam suatu graf untuk $d = \{1, 2, \dots, s\}$ tidak akan ditemukan $d > s$. Nilai batas atas digunakan untuk menentukan nilai beda maksimum dalam mencari pelabelan super $(a, d) - \mathcal{H} - antimagic$ total selimut. Graf yang digunakan adalah *joint* graf $nW_z + P_s$ dan untuk memecahkan pelabelan selimut digunakan batas atas dan pola partisi.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka dapat dirumuskan masalah dalam penelitian ini sebagai berikut:

- a. bagaimana menentukan kardinalitas titik dan sisi *joint* graf $nW_z + P_s$?
- b. bagaimana menentukan batas atas *antimagicness* super total selimut *joint* graf $nW_z + P_s$?
- c. bagaimana menentukan nilai-nilai d pada ke-*antimagic*-an super total selimut *joint* graf $nW_z + P_s$?
- d. bagaimana mengembangkan aplikasi *antimagicness* super total selimut *joint* graf dengan menggunakan *ciphertext*?

1.3 Tujuan Penelitian

Sesuai dengan rumusan masalah dan latar belakang di atas, maka tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

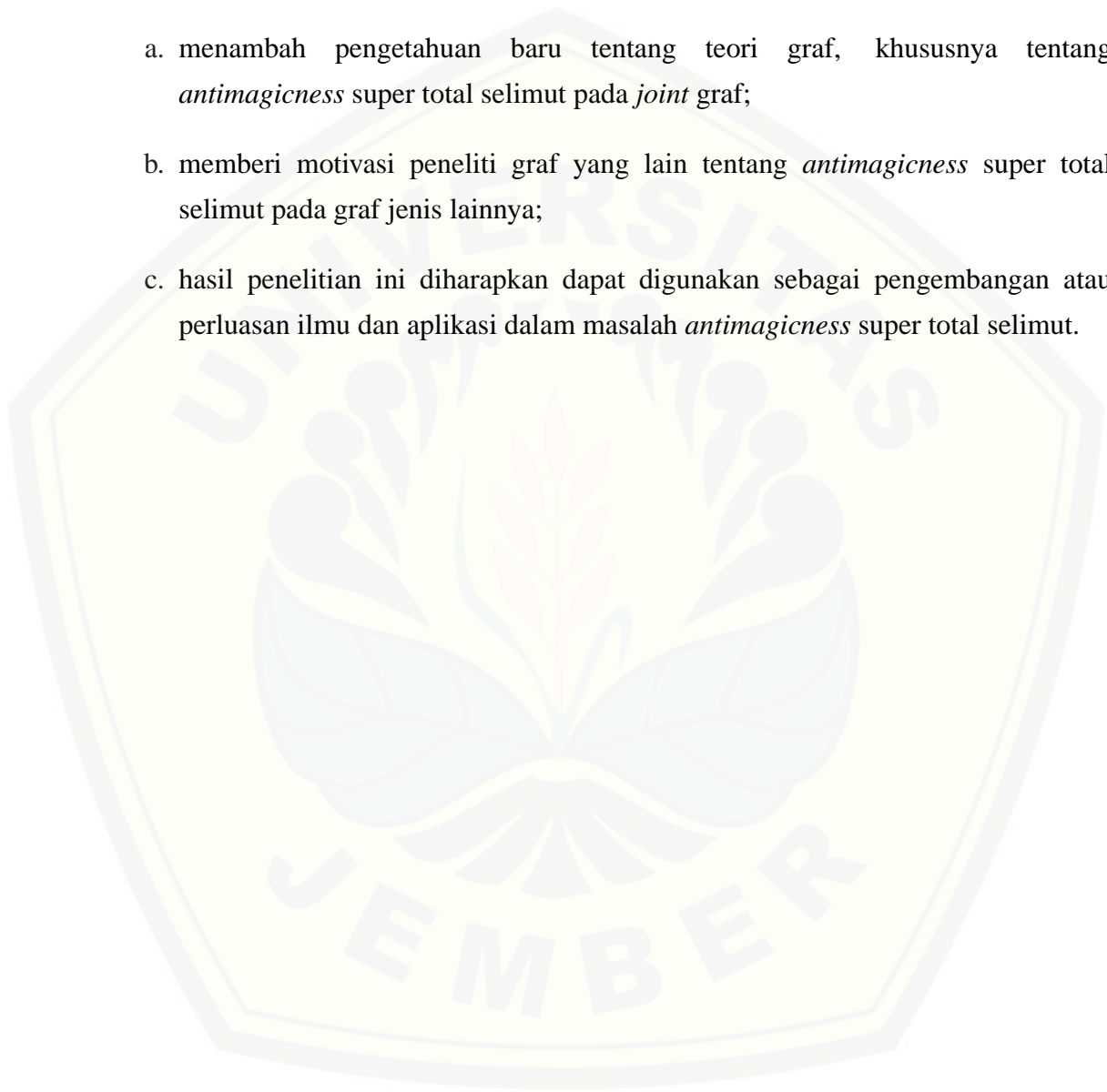
- a. menentukan kardinalitas titik dan sisi *joint* graf $nW_z + P_s$;
- b. menentukan batas atas *antimagicness* super total selimut *joint* graf $nW_z + P_s$;
- c. menentukan nilai-nilai d *antimagicness* super total selimut *joint* graf $nW_z + P_s$;

- d. menentukan aplikasi *antimagicness* super total selimut *joint* graf dengan menggunakan *ciphertext*.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat yang didapatkan dari penelitian ini adalah:

- a. menambah pengetahuan baru tentang teori graf, khususnya tentang *antimagicness* super total selimut pada *joint* graf;
- b. memberi motivasi peneliti graf yang lain tentang *antimagicness* super total selimut pada graf jenis lainnya;
- c. hasil penelitian ini diharapkan dapat digunakan sebagai pengembangan atau perluasan ilmu dan aplikasi dalam masalah *antimagicness* super total selimut.



BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

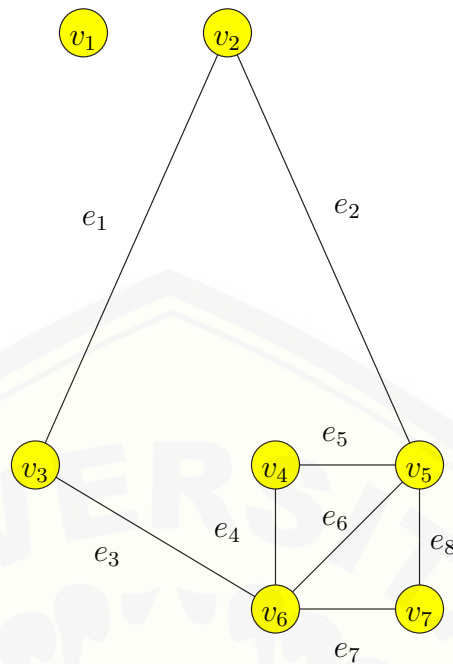
2.1 Terminologi Dasar Graf

Graf G adalah pasangan himpunan $(V(G), E(G))$. $V(G)$ adalah himpunan tak kosong dari elemen yang disebut titik dan $E(G)$ adalah sebuah himpunan yang mungkin kosong dari pasangan terurut $\{u, v\}$ dari titik $u, v \in V(G)$ yang disebut sisi. Terdapat graf yang tidak memiliki sisi tetapi hanya memiliki titik. Titik-titik yang berkelompok dan membentuk suatu himpunan titik tanpa sisi disebut graf kosong (*null graph/empty graph*).

Graf terdiri dari beberapa jenis, namun yang sering digunakan ada dua jenis. Berdasarkan ada atau tidaknya gelang (*loop*) maupun sisi ganda pada suatu graf dan berdasarkan sisi pada graf yang mempunyai orientasi arah. Graf sederhana (*simple graf*) adalah graf yang tidak mengandung gelang atau sisi ganda. Pada graf sederhana sisi merupakan pasangan tak terurut. Jadi sisi (u, v) sama saja dengan (v, u) . Graf tak-sederhana (*unsimple-graf/multigraf*) adalah graf yang mengandung sisi ganda atau gelang.

Berdasarkan orientasi arah pada sisi, ada dua jenis graf yaitu graf tidak berarah dan graf berarah. Graf tidak berarah (*undirect graph*) adalah graf yang tidak mempunyai orientasi arah. Urutan pasangan simpul yang dihubungkan oleh sisi tidak diperhatikan. Jadi, $(u, v) = (v, u)$ adalah sisi yang sama. Graf berarah (*directed graf/digraf*) adalah graf yang setiap sisinya diberikan orientasi arah.

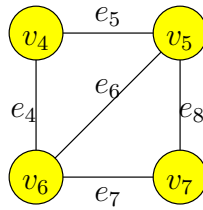
Ordo dari sebuah graf G adalah banyaknya titik pada G . Berdasarkan Gambar 2.1 menunjukkan sebuah contoh graf sederhana dan tidak berarah yang berordo 7 dengan himpunan titik $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ dan himpunan sisi $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$. Misalkan u dan v merupakan titik-titik dari graf G , u dikatakan bertetangga dengan v . Sebuah sisi e yang menghubungkan u dan v yaitu $e = uv$, selanjutnya kita sebut v tetangga dari u . Himpunan semua tetangga dari u disebut ketetanggaan dari u dan dinotasikan dengan $N(u)$. Kedua titik u dan v dapat juga disebut bersisian dengan sisi e (Slamin, 2009).



Gambar 2.1 Contoh Graf G

Derajat titik v pada G adalah banyaknya titik-titik yang bertetangga dengan v yaitu jumlah semua tetangga dari v . Jika sebuah titik v mempunyai derajat 0, dengan kata lain v tidak bertetangga dengan sembarang titik yang lain, maka v adalah titik terasing. Titik yang mempunyai derajat satu disebut titik akhir (*end vertex*) atau daun. Jika semua titik pada graf G mempunyai derajat yang sama d maka dikatakan graf singular d (Dafik dkk, 2009).

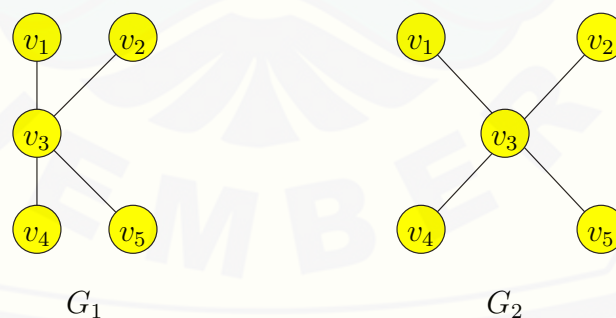
Graf H merupakan subgraf dari G jika setiap titik di H adalah titik di G dan setiap sisi di H adalah sisi di G ($V(H) \subseteq V(G)$ dan $E(H) \subseteq E(G)$). Graf H merupakan subgraf dari G maka dapat ditulis $H \subseteq G$. Gambar 2.2 graf H yang merupakan subgraf dari graf G .



Gambar 2.2 Graf H subgraf dari Graf G

Dua buah graf G_1 dan G_2 dikatakan graf isomorfik jika graf G_1 dan G_2 dapat dipresentasikan sehingga tampak identik dan tidak merubah ketetanggaan. Graf $V(G_1) \cong V(G_2)$ terdapat korespondensi satu-satu $f : V(G_1) \rightarrow V(G_2)$, jika $(u, v) \in E(G_1)$ maka $(f(u), f(v)) \in E(G_2)$. Dengan demikian, jika $G_1 \cong G_2$ maka $|V(G_1)| = |V(G_2)|$ dan $|E(G_1)| = |E(G_2)|$. Kesamaan jumlah *vertex* dan *edge* dari graf tidak menjamin bahwa graf tersebut isomorfik. Sehingga untuk membuktikan dua graf isomorfik yaitu dengan mencari korespondensi satu-satu dari $V(G_1)$ ke $V(G_2)$.

Graf $G(V, E)$ dan $G(v^*, e^*)$ disebut *isomorfik* jika ada korespondensi satu satu $f : V \rightarrow V^*$ sedemikian hingga u, v adalah suatu sisi dari G jika dan hanya jika $f(u), f(v)$ adalah suatu sisi dari graf G^* . Graf isomorfik tidak dibedakan meskipun diagramnya "tampak beda". Gambar 2.3 menunjukkan graf G_1 mirip dengan huruf K dan G_2 mirip dengan huruf X . Perhatikan gambar 2.3 bahwa K dan X adalah graf-graf isomorfik (Lipschutz dan Lipson, 2002:138).



Gambar 2.3 Graf Isomorfik

Jalan (*walk*) pada sebuah graf adalah barisan titik (*edge*) dan sisi (*vertex*) yang diawali dan diakhiri dengan titik. Jalan (*walk*) dikatakan tertutup jika titik awal dan titik akhirnya sama atau *identik*. Jika titik jalan yang berbeda maka disebut lintasan (*path*), sedangkan jika semua sisinya yang berbeda maka jalan tersebut disebut jejak (*trail*). Sikel (*cycle*) adalah jalan tertutup dengan barisan titik yang berbeda (lintasan yang tertutup).

Suatu graf dikatakan terhubung atau konektif (*connected*), jika ada lintasan dari u ke v dan jika tidak ada lintasan dari u ke v disebut graf tak terhubung atau diskonektif (*disconnected*). Jarak antara verteks u dan v dalam G yang ditulis $d(u, v)$ adalah panjang dari jarak tersingkat antara u dan v . Diameter dari G yang dituliskan $\text{diam}(G)$ adalah jarak maksimum antara sembarang dua titik dalam G (Lipchutz dan Lipson, 2002)

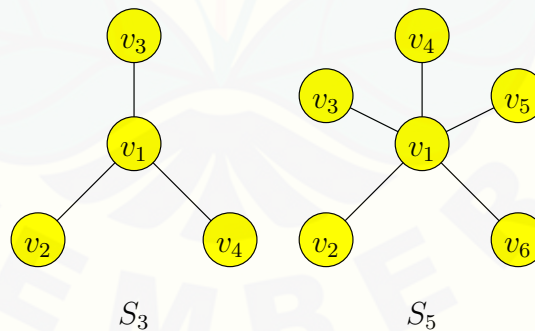
2.2 Graf Khusus dan Operasi Graf

2.2.1 Graf Khusus

Berikut ini beberapa contoh graf khusus.

a. Graf Bintang (*Star Graph*)

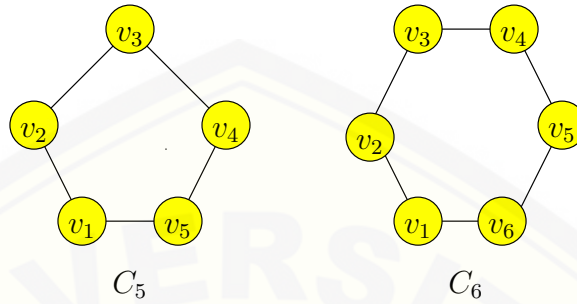
Graf Bintang adalah graf pohon yang terdiri dari satu titik pusat yang memiliki derajat n dan $n + 1$ titik dan n sisi. Gambar 2.4 merupakan contoh graf bintang.



Gambar 2.4 Graf Bintang

b. Graf Lingkaran (*Cycle graph*)

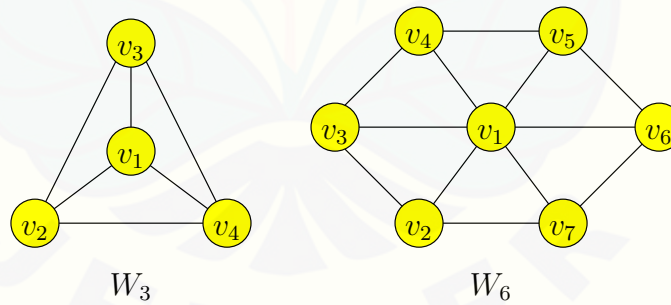
Graf lingkaran adalah graf sederhana yang setiap simpulnya berderajat dua. Graf lingkaran dengan n simpul dilambangkan dengan C_n . Gambar 2.5 adalah contoh graf lingkaran



Gambar 2.5 Graf Lingkaran

c. Graf Roda (*Wheels Graph*)

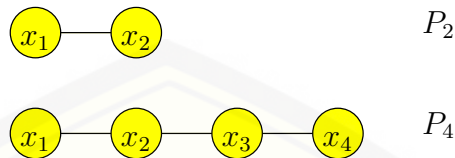
Graf roda adalah graf yang diperoleh dengan cara menambahkan satu simpul pada graf lingkaran C_n dan menghubungkan simpul baru tersebut dengan semua simpul pada graf lingkaran tersebut. Gambar 2.6 adalah contoh graf roda dari graf roda W_3 dan W_6 ..



Gambar 2.6 Graf Roda (Roosen, 2003)

d. Graf Lintasan (*Path Graph*)

Graf lintasan atau *path graph* adalah graf yang terdiri dari satu lintasan. Graf lintasan dengan n titik dinotasikan P_n dengan $n \geq 2$. Contoh Gambar 2.7 dari graf lintasan P_2 dan P_4 .



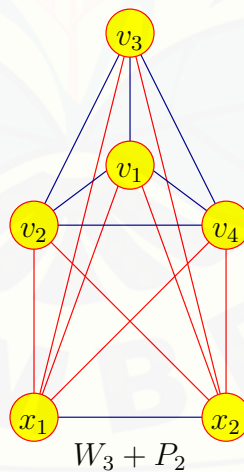
Gambar 2.7 Graf Lintasan

2.2.2 Operasi Graf

Berikut ini beberapa contoh Operasi Graf.

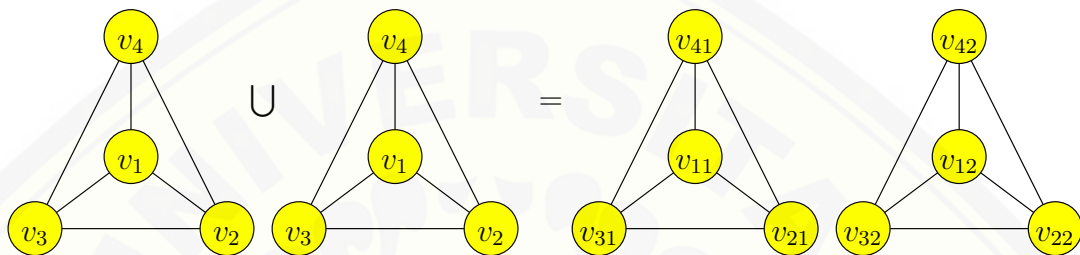
a. *Joint Graf*

Joint graf ($G_1 + G_2$) *joint* dari graf G_1 dan G_2 , dinotasikan dengan $G = G_1 + G_2$, adalah graf G dimana $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ dan $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup uv | u \in V(G_1), v \in V(G_2)$ (Harsya, 2014). Contoh dari operasi joint ditunjukkan pada Gambar 2.8.

Gambar 2.8 *Joint Graf*

b. *Disjoint Graf*

Disjoint graf adalah gabungan dari dua graf atau lebih misalkan pada G_1 dan G_2 dinotasikan dengan $G_1 \cup G_2$, didefinisikan sebagai graf dengan himpunan titiknya adalah $V(G_1) \cup V(G_2)$ dan himpunan sisi $E(G_1) \cup E(G_2)$. Pada Gambar 2.9, graf G merupakan gabungan graf G_1 dan G_2 , yaitu $G = G_1 \cup G_2$. *Union graf* nG didefinisikan sebagai gabungan saling lepas dari n buah kopi graf G dan dapat juga dikatakan sebagai graf dengan n komponen, dimana setiap komponennya adalah graf G .

Gambar 2.9 *Disjoint Graf*2.3 **Aplikasi Graf**

Salah satu aplikasi graf dalam kehidupan sehari-hari adalah pembuatan sandi pesan rahasia (*ciphertext*) dan lain lain. *ciphertext* didefinisikan sebagai bentuk pesan tersandi ke bentuk lain yang tidak dapat dipahami. Proses pengembangan ini disebut sebagai *cryptosystem* yang di dalamnya menyangkut kriptografi. Terdapat banyak metode yang dapat digunakan untuk memperoleh *ciphertext*. Metode yang digunakan pada penelitian ini merupakan aplikasi pelabelan total *covering* dimana proses *enkripsi* dilakukan menggunakan pelabelan graf dengan merujuk pada *caesar system* yaitu menggunakan sistem (mod 26), atau disebut dengan aturan Julius Caesar. Teknik dalam menjaga keamanan data supaya tidak dapat diketahui dan dibaca pihak yang tidak berwenang ini disebut kriptosistem.

Selanjutnya jenis *chipertext* yang digunakan adalah *stream chiper*. *Stream cipher* merupakan salah satu bentuk algoritma kriptografi simetris yaitu sistem kriptografi yang menggunakan kunci data yang diamankan (*enkripsi*) dan perubahan pesan rahasia menjadi data asli (*decryption*) yang sama. Sistem ini mengharuskan dua

Tabel 2.1 Aturan Julius Caesar.

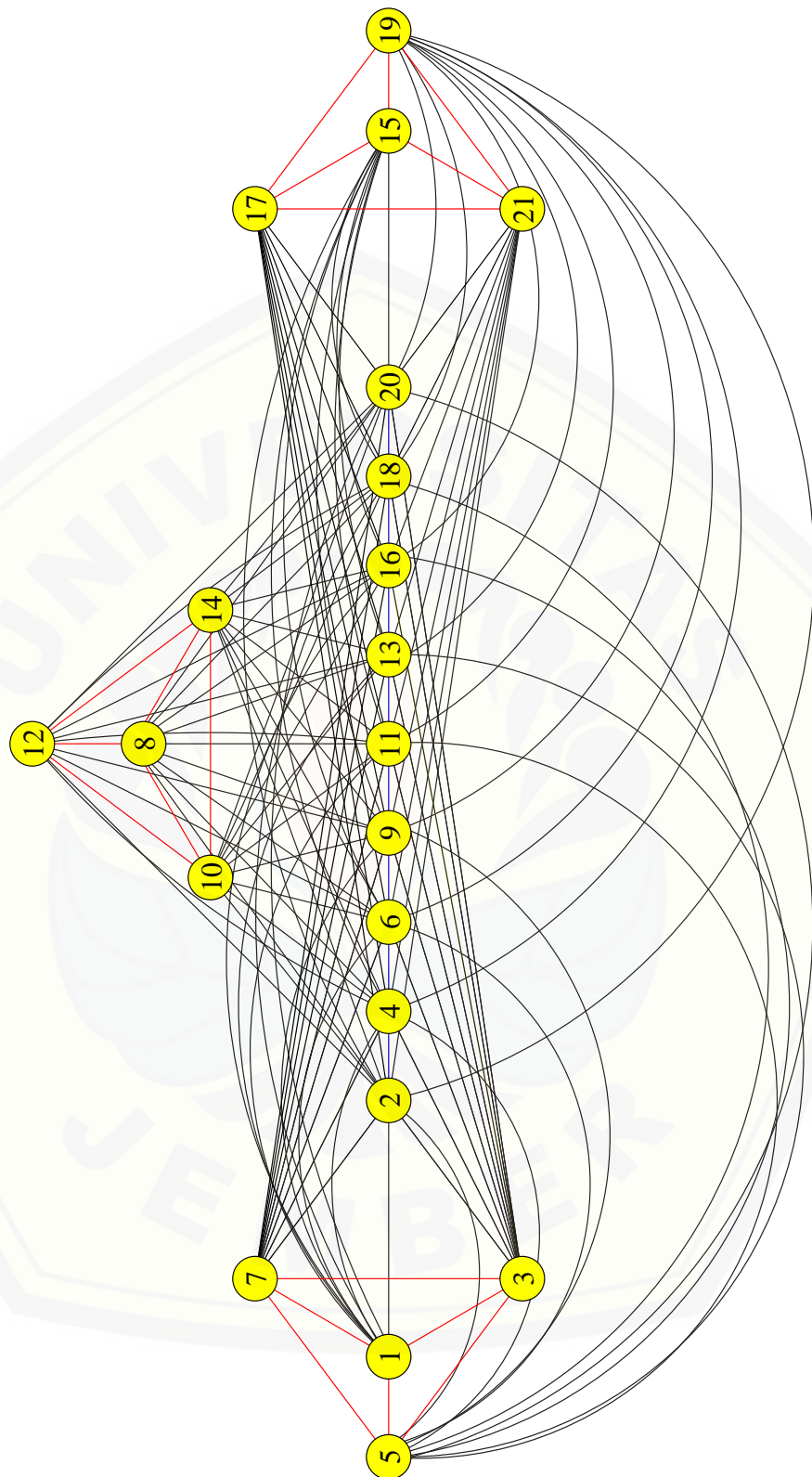
A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

pihak yang berkomunikasi menyepakati suatu kunci rahasia yang sama sebelum keduanya saling berkomunikasi. *Stream ciphertex* adalah algoritma kriptografi beroperasi pada data asli (*plaintext*) atau pesan rahasia (*ciphertex*) dalam bentuk bit tunggal, yang dalam hal ini rangkaian bit yang diamankan (*enkripsi*) atau perubahan pesan rahasia menjadi data asli (*decryption*) bit per bit. *Stream cipher* mengamankan satu bit setiap kali transformasi atau *byte per byte* (1 karakter = 1 *byte*). Misalkan pesan rahasia tersebut di tulis menggunakan *antimagicness* super total selimut pada *joint* graf $3W_3 + P_9$ seperti pada Gambar 2.10 Pelabelan *antimagic joint* graf $3W_3 + P_9$ dapat digunakan untuk membuat pesan rahasia menggunakan pola partisi pada Gambar 2.2

Tabel 2.2 Klasifikasi partisi $d = 2m^2 - m$.

$j \setminus k$	1	2	3
1	1	8	15
2	3	10	17
3	5	12	19
4	7	14	21
5	2	2	2
6	4	4	4
7	6	6	6
8	9	9	9
9	11	11	11
10	13	13	13
11	16	16	16
12	18	18	18
13	20	120	20
	115	143	171
			$d = 28$

Berdasarkan Gambar 2.2 misal pada *plaintext* "SAYA TUNGGU DI GEDUNG



Gambar 2.10 Joint Graf $nW_3 + P_9$

MATEMATIKA JAM DUA SIANG” (spasi dan tanda baca diabaikan). maka dapat di bentuk *ciphertext*

Tabel 2.3 Stream Cipher

<i>Plaintext</i>	x_i	k_i	$y_i = x_i + k_i(mod26)$	<i>Chipertext</i>	$x_i = y_i - k_i(mod26)$	<i>Decryption</i>
S	18	1	19	T	18	S
A	0	3	3	D	0	A
Y	24	5	3	D	24	Y
A	0	7	7	H	0	A
T	19	2	21	V	19	T
U	20	4	24	Y	20	U
N	13	6	19	T	13	N
G	6	9	15	P	6	G
G	6	11	17	R	6	G
U	20	13	7	H	20	U
D	3	16	19	T	3	D
I	8	18	0	A	8	I
G	6	20	0	A	6	G
E	4	8	12	M	4	E
D	3	10	13	N	3	D
U	20	12	6	G	20	U
N	13	14	1	B	13	N
G	6	2	8	I	6	G
M	12	4	16	Q	12	M
A	0	6	6	G	0	A
T	19	9	2	C	19	T
E	4	11	15	P	4	E
M	12	13	25	Z	12	M
A	0	16	16	Q	0	A
T	19	18	11	L	19	T
I	8	20	2	C	8	I

<i>Plaintext</i>	x_i	k_i	$y_i = x_i + k_i(mod26)$	<i>Chipertext</i>	$x_i = y_i - k_i(mod26)$	<i>Decryption</i>
K	10	15	25	Z	10	K
A	0	17	17	R	0	A
J	9	19	2	C	9	J
A	0	21	21	V	0	A
M	12	2	14	O	12	M
D	3	4	7	H	3	D
U	20	6	0	A	20	U
A	0	9	9	J	0	A
S	18	11	3	D	18	S
I	8	13	21	V	8	I
A	0	16	16	Q	0	A
N	13	18	5	F	13	N
G	6	20	0	A	6	G

Sehingga kalimat dapat dituliskan dalam pesan rahasia dan pesan tersebut tersampaikan dengan aman.

2.4 Fungsi dan Barisan Aritmatika

2.4.1 Fungsi

Fungsi atau pemetaan dari A ke B merupakan suatu relasi yang setiap unsur suatu himpunan A dikaitkan dengan tepat satu unsur dari himpunan B , dan ditulis $f : A \rightarrow B$ Unsur tunggal di B yang dikaitkan dengan $a \in A$ oleh f diberi notasi $f(a)$ dan disebut peta a oleh f atau nilai f di a . A disebut daerah asal (*domain*) oleh f dan B disebut daerah kawan (*kodomain*) oleh f .

Berdasarkan sifat-sifat fungsi, fungsi di bedakan menjadi tiga yaitu fungsi injektif, fungsi surjektif dan fungsi bijektif.

a. Fungsi Injektif atau Fungsi *Into*

Fungsi injektif atau fungsi *into* atau di sebut juga fungsi satu-satu adalah pemetaan dimana setiap elemen di daerah kawan *kodomain* yang berpasangan

mempunyai pasangan elemen tepat satu di daerah *kodomain*, secara matematika dituliskan sebagai berikut :

Fungsi $f : A \rightarrow B$, injektif $\Leftrightarrow \forall a_1, a_2 \in A, a_1 \neq a_2 \rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$

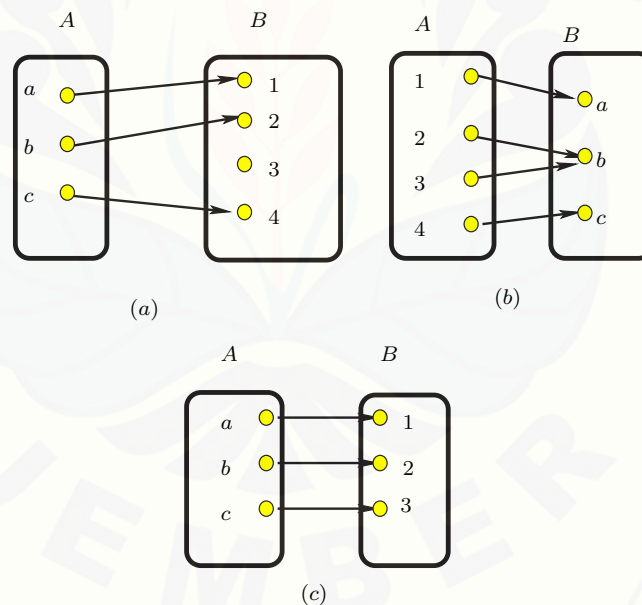
b. Fungsi Surjektif atau Fungsi *Onto*

Fungsi surjektif atau fungsi *onto* atau di sebut juga fungsi kepada adalah pemetaan dimana semua elemen didaerah *kodomain* mempunyai pasangan elemen didaerah *domain*, secara matematika dituliskan sebagai berikut :

Fungsi $f : A \rightarrow B$, Surjektif $\Leftrightarrow \forall b \in B, \exists a \in A \rightarrow f(a) = b$.

c. Fungsi Bijektif

Fungsi bijektif yaitu pemetaan yang memenuhi pemetaan injektif dan surjektif. Istilah ini berasal dari kenyataan bahwa setiap elemen *domain* akan berkorespondensi secara unik ke elemen *kodomain* dan sebaliknya. Pada gambar 2.11 adalah fungsi injektif, fungsi surjektif dan fungsi bijektif.



Gambar 2.11 (a) Fungsi Injektif, (b) Fungsi Surjektif, dan (c) Fungsi Bijektif

2.4.2 Barisan Aritmatika

Barisan yang dibentuk dengan cara menambah atau mengurangi suku sebelumnya dengan suatu bilangan tetap tertentu disebut barisan aritmatika. barisan aritmatika adalah suatu barisan yang teratur, dengan a adalah suku pertama dan b merupakan selisih antara 2 suku yang berurutan atau biasa disebut *beda* ($b = U_n - U_{n-1}$) yang selalu bernilai tetap untuk membentuk sebuah barisan $U_1, U_2, U_3, \dots, U_{n-1}, U_n$ dimana $U_2 - U_1 = U_3 - U_2 = \dots = U_n - U_{n-1} = \text{konstanta}$. Perhatikan contoh barisan bilangan berikut:

(i) 100, 200, 300, 400, ...

(ii) 27, 24, 21, 18, 15, ...

Barisan (i) mempunyai beda $b=100$. Barisan (i) disebut barisan aritmatika naik karena nilai suku sukunya makin besar. Barisan (ii) mempunyai beda, $b=-3$. Barisan (ii) disebut barisan aritmatika turun karena nilai suku sukunya makin kecil.

2.5 Teknik Partisi dengan Menetapkan Beda d

Sebuah keluarga himpunan yang terdiri dari himpunan-himpunan bagian tak kosong dari A yang saling asing (*disjoint*) satu sama lain dan gabungan dari semua himpunan bagian tersebut akan kembali membentuk himpunan A merupakan definisi suatu partisi dari sebuah himpunan A . Berdasarkan definisi tersebut, untuk menunjukkan bahwa sebuah keluarga himpunan $\{A_1, A_2, A_3, \dots, A_n\}$ maka harus dibuktikan bahwa :

(i) $\forall i, j \in 1, 2, 3, \dots, n, i \neq j$ maka $A_i \cap A_j = \phi$.

(ii) $\bigcup_{i=1}^n A_i = A$.

contoh partisi pada himpunan bilangan bulat \mathcal{Z} , dapat dipartisikan menjadi himpunan bilangan bulat genap dan himpunan bilangan ganjil (Prihandoko, 2003).

Pelabelan super $(a, d) - \mathcal{H} - \text{antimagic}$ pada graf dapat menggunakan teknik partisi dari himpunan bilangan bulat dengan menetapkan beda d . Misal n, m, d, i dan j adalah bilangan positif atau nol. Partisi $\mathcal{P}_{m,d}^n(i, j)$ dari himpunan $\{1, 2, 3, \dots, mn\}$ adalah partisi pelabelan $(a, d) - \mathcal{H} - \text{antimagic}$ bila sebanyak n kolom dan m baris dengan $n \geq 2$ jumlah bilangan-bilangan sebanyak m baris untuk masing-masing kolom membentuk barisan aritmatika dengan beda d , dengan $i = 1, 2, 3, \dots, m$ dan

$j = 1, 2, 3, \dots, n$. Apabila partisi bilangan bulat dinotasikan $\mathcal{P}_{m,d}^n(i, j)$ maka $\sum \mathcal{P}_{m,d}^n(i, j)$ adalah jumlah bilangan pada $\mathcal{P}_{m,d}^n(i, j)$ dan untuk sebarang konstanta b , $\mathcal{P}_{m,d}^n(i, j) \oplus b$ adalah hasil penjumlahan b dengan masing-masing elemen pada $\mathcal{P}_{m,d}^n(i, j)$ (Baca dkk, 2013).

Lemma 2.5.1. Misal n dan m bilangan bulat positif. Untuk $j = 1, 2, \dots, n$ jumlah dari $\mathcal{P}_{m,d_1}^n(i, j) = \{(i - 1)n + j, 1 \leq i \leq m\}$ membentuk baris aritmatika dengan beda $d_1 = m$.

Bukti. Melalui proses perhitungan sederhana, untuk $j = 1, 2, \dots, n$ didapat $\sum_{i=1}^m \mathcal{P}_{m,d_1}^n(i, j) = \frac{m^2n-nm}{2} + mj \longleftrightarrow \sum_{i=1}^m \mathcal{P}_{m,d_1}^n(i, j) = \{\frac{m^2n-nm}{2} + m, \frac{m^2n-nm}{2} + 2m, \dots, \frac{m^2n-nm}{2} + (n - 1)m, \frac{m^2n-nm}{2} + nm\}$ Terbukti bahwa himpunan tersebut membentuk deret arimatika dengan $d_1 = m$. \square

Lemma 2.5.2. Misal n dan m bilangan bulat positif. Untuk $j = 1, 2, \dots, n$ jumlah dari $\mathcal{P}_{m,d_2}^n(i, j) = \{(j - 1)m + i; 1 \leq i \leq m\}$ membentuk baris aritmatika dengan beda $d_2 = m^2$.

Bukti. Melalui proses perhitungan sederhana, untuk $j = 1, 2, \dots, n$ didapat $\sum_{i=1}^m \mathcal{P}_{m,d_2}^n(i, j) = \frac{(m-m^2)}{2} + m^2j \longleftrightarrow \sum_{i=1}^m \mathcal{P}_{m,d_2}^n(i, j) = \{\frac{(m-m^2)}{2} + m^2, \frac{(m-m^2)}{2} + 2m^2, \dots, \frac{m^2n-nm}{2} + (n - 1)m^2, \frac{m^2n-nm}{2} + nm^2\}$ Terbukti bahwa himpunan tersebut membentuk deret arimatika dengan $d_2 = m^2$. \square

Lemma 2.5.3. Misal n dan m bilangan bulat positif. Untuk $j = 1, 2, \dots, n$ jumlah dari

$$\mathcal{P}_{m,d_3}^n(i, j) = \begin{cases} \{(i - 1)n + \frac{j+1}{2}; 1 \leq i \leq m, i \equiv 1 \pmod{2}\} \cup \\ \{\frac{j-n}{2} + in; 1 \leq i \leq m, i \equiv 0 \pmod{2}\}, j \equiv 1 \pmod{2} \\ \{\frac{j+1-n}{2} + in; 1 \leq i \leq m, i \equiv 1 \pmod{2}\} \cup \\ \{(i - 1)n + \frac{j}{2}; 1 \leq i \leq m, i \equiv 0 \pmod{2}\}, j \equiv 0 \pmod{2} \end{cases}$$

membentuk baris aritmatika dengan beda $d_3 = \frac{m}{2}$.

Bukti. Melalui proses perhitungan sederhana, untuk $j = 1, 2, \dots, n$ didapat $\sum_{i=1}^m \mathcal{P}_{m,d_3}^n(i, j) = \mathcal{P}_{m,d}^n(j) \longleftrightarrow \mathcal{P}_{m,d_3}^n(j) = \{\frac{(m)}{4} + (2mn - n + 1) + \frac{m}{2}j\} \longleftrightarrow$

$\sum_{i=1}^m \mathcal{P}_{m,d_3}^n(i, j) = \left\{ \frac{\binom{m}{4}}{4} + (2mn - n + 1) + \frac{m}{2}, \frac{\binom{m}{4}}{4} + (2mn - n + 1) + m, \dots, \frac{\binom{m}{4}}{4} + (2mn - n + 1) + \frac{m(n-1)}{2}, \frac{\binom{m}{4}}{4} + (2mn - n + 1) + \frac{mn}{2} \right\}$ Terbukti bahwa himpunan tersebut membentuk deret arimatika dengan $d_3 = \frac{m}{2}$. (Dafik *et al.*, 2016) \square

Lemma 2.5.4. Misal n dan m bilangan bulat positif. Untuk $j = 1, 2, \dots, n$ jumlah dari $\mathcal{P}_{m,d_1}^n(i, j) = \{1 + ni - j; 1 \leq i \leq m\}$ membentuk baris aritmatika dengan beda $d_4 = -m$.

Bukti. Melalui proses perhitungan sederhana, untuk $j = 1, 2, \dots, n$ didapat

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \mathcal{P}_{m,d_4}^n(i, j) &= \mathcal{P}_{m,d_4}^n(j) \\ &= \left\{ \frac{n}{2}(m^2 + m) + m - mj \right\} \\ &= \left\{ \frac{n}{2}(m^2 + m), \frac{n}{2}(m^2 + m) - m, \frac{n}{2}(m^2 + m) - 2m, \dots, \frac{n}{2}(m^2 + m) - m(n-1), \frac{n}{2}(m^2 + m) - mn \right\} \end{aligned}$$

Terbukti bahwa himpunan tersebut membentuk deret arimatika dengan $d_4 = -m$. \square

Lemma 2.5.5. Misal n dan m bilangan bulat positif. Untuk $j = 1, 2, \dots, n$ jumlah dari $\mathcal{P}_{m,d}^n(i, j) = \{mn + i - mj; 1 \leq i \leq m\}$ membentuk baris aritmatika dengan beda $d_5 = -m^2$.

Bukti. Melalui proses perhitungan sederhana, untuk $j = 1, 2, \dots, n$ didapat

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \mathcal{P}_{m,d_5}^n(i, j) &= \mathcal{P}_{m,d_5}^n(j) \\ &= \left\{ \frac{m}{2}(2mn + m + 1) - m^2 j \right\} \\ &= \left\{ \frac{m}{2}(2mn + m + 1) - m^2, \frac{m}{2}(2mn + m + 1) - 2m^2, \dots, \frac{m}{2}(2mn + m + 1) - m^2(n-1), \frac{m}{2}(2mn + m + 1) - m^2 n \right\} \end{aligned}$$

Terbukti bahwa himpunan tersebut membentuk deret arimatika dengan $d_5 = -m^2$. \square

Lemma 2.5.6. Misal n dan m bilangan bulat positif. Untuk $j = 1, 2, \dots, n$. jumlah dari

$$\mathcal{P}_{m,d_6}^n(i, j) = \begin{cases} \{ni - \frac{n}{2} - \frac{j}{2} + 1; 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n; i \text{ ganjil}; j \text{ ganjil}\} \\ \{ni - \frac{j}{2} + \frac{1}{2}; 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n; i \text{ genap}; j \text{ ganjil}\} \\ \{ni + \frac{j}{2} + 1; 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n; i \text{ ganjil}; j \text{ genap}\} \\ \{ni - \frac{j}{2} - \frac{n}{2} + \frac{1}{2}; 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n; i \text{ genap}; j \text{ genap}\} \end{cases}$$

membentuk baris aritmatika dengan beda $d_6 = \frac{-m}{2}$.

Bukti. Melalui proses perhitungan sederhana, untuk $j = 1, 2, \dots, n$ didapat

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \mathcal{P}_{m,d_6}^n(i, j) &= \mathcal{P}_{m,d_6}^n(j) \\ &= \left\{ \frac{m}{4}(2mn - n + 3) - \frac{m}{2}j \right\} \\ &= \left\{ \frac{m}{4}(2mn - n + 3) - \frac{m}{2}, \frac{m}{4}(2mn - n + 3) - m, \dots, \frac{m}{4}(2mn - n + 3) - \frac{m}{2}(n - 1), \frac{m}{4}(2mn - n + 3) - \frac{m}{2}n \right\} \end{aligned}$$

Terbukti bahwa himpunan tersebut membentuk deret arimatika dengan $d_6 = \frac{-m}{2}$ (Agustin, I.H. *et al.*, 2016). □

Tabel 2.4 Klasifikasi Partisi $d = m$.

$i \setminus j$	1	2	...	n	
1	1	2	...	n	
2	$n + 1$	$n + 2$...	$n + n$	
3	$2n + 1$	$2n + 2$...	$2n + n$	
...	
m	$(m - 1)n + 1$	$(m - 1)n + 2$...	$(m - 1)n + n$	+
	a	$a + m$...	$a + (n - 1)m$	$d = m$

Tabel 2.5 Klasifikasi Partisi $d = m^2$.

$i \setminus j$	1	2	3	4	...	n	
1	1	$m + 1$	$2m + 1$	$3m + 1$...	$(n - 1)m + 1$	
2	2	$m + 2$	$2m + 2$	$3m + 2$...	$(n - 1)m + 1$	
3	3	$m + 3$	$2m + 3$	$3m + 3$...	$(n - 1)m + 1$	
...		
m	m	$m + m$	$2m + m$	$3m + m$...	$(n - 1)m + 1$	+
	a	$a + m^2$	$a + 2m^2$	$a + m^3$...	$a + (n - 1)m^2$	$d = m^2$

Tabel 2.6 Klasifikasi Partisi $d = \frac{m}{2}$.

$i \setminus j$	1	2	3	4	5	
1	1	4	2	5	3	
2	8	6	9	7	10	
3	11	14	12	15	13	
4	18	16	19	17	20	+
	38	40	42	44	46	$d = \frac{m}{2}$

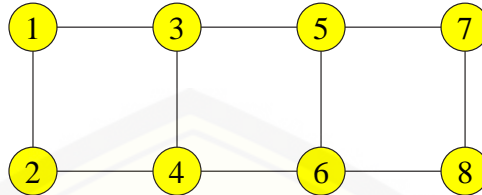
2.6 Pelabelan Graf

2.6.1 Definisi Pelabelan Graf

Pelabelan graf merupakan suatu fungsi bijektif yang memetakan himpunan dari elemen-elemen graf berupa sisi dan titik ke himpunan bilangan bulat positif. Secara umum, fungsi f yang memetakan himpunan A ke dalam B disebut fungsi injektif jika setiap elemen dalam A mempunyai bayangan yang berbeda pada B jika dan hanya jika $range f$ sama dengan B . Secara lebih singkat, $f : A \rightarrow B$ adalah satu satu jika $f(a) = f(a')$ maka $a = a'$ dan merupakan onto jika $f(A) = B$ (Baca, 2007). Secara matematik definisi pelabelan graf dapat dituliskan sebagai berikut:

Pelabelan graf $G = (V, E)$ adalah suatu pemetaan: $D \rightarrow N$, dimana D : domain, N : himpunan label dari G , jika $D = V$ maka disebut pelabelan titik, $D = E$ maka disebut pelabelan sisi dan $D = V \cup E$ maka disebut pelabelan total. Pada pelabelan titik, jumlah label titik lebih dari dua yang saling menempel disebut bobot selimut. Semua selimut yang mempunyai bobot selimut yang sama disebut pelabelan titik selimut magic. Semua selimut yang mempunyai bobot selimut berbeda dan himpunan

bobot selimut dari semua selimut membentuk barisan aritmatika dengan suku pertama a dan beda b disebut pelabelan titik selimut antimagic (Simanjuntak dan Salman, 2010). sebagai contoh partisi diterapkan dalam pelabelan graf sebagai berikut :



Gambar 2.12 Contoh pada Graf

Tabel 2.7 Klasifikasi Partisi $d = 8$.

$i \setminus j$	1	2	3	
1	1	3	5	
2	2	4	6	
3	3	5	7	
4	4	6	8	+
	10	18	26	$d = 8$

dengan m baris $m = 4$ dan n kolom $n = 3$, menghasilkan $d = 8$ dan membentuk barisan aritmatika:

$$P_{4,8}^n(i, j) = (k - 1)2 + i; 1 \leq i \leq 4; 1 \leq j \leq n$$

2.6.2 Pelabelan Selimut Super $(a, d) - \mathcal{H} - Antimagic$

Pelabelan pada graf adalah pemetaan atau fungsi yang memasangkan setiap titik pada graf dengan bilangan bulat positif. Jika domain dari pemetaan tersebut merupakan titik maka disebut pelabelan titik. Jika domain dari pemetaan tersebut adalah sisi maka disebut pelabelan sisi dan jika domainnya merupakan titik dan sisi maka disebut pelabelan total.

Pelabelan selimut super $(a, d) - \mathcal{H}$ -antimagic merupakan fungsi injektif karena label selimut dalam setiap selimut pasti berbeda sesuai dengan definisi pelabelan selimut antimagic, label selimutnya selalu berbeda dan berurutan. Label selimut

dikatakan surjektif karena label selimutnya merupakan range dan semuanya adalah kodomain yang diperoleh dari melabeli setiap selimut graf dengan bilangan berurutan setelah label titik terbesar. Penelitian ini merupakan fungsi bijektif.

Pelabelan selimut super $(a, d) - \mathcal{H}$ -antimagic pada graf G dengan v merupakan titik dan e merupakan sisi, didefinisikan sebagai fungsi bijektif dari titik-titik dan sisi-sisi pada himpunan bilangan bulat dari 1 sampai dengan sejumlah titik dan sisi yang ada. Secara matematis dapat ditulis $f : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, |V(G)| + |E(G)|\}$ dengan setiap subgraf dari G yang isomorfik dengan H dimana H juga subgraf dari G mempunyai total label.

Graf G dikatakan memiliki pelabelan selimut \mathcal{H} antimagic jika himpunan titik $V(G)$ merupakan pemetaan bijektif f ke $\{1, 2, 3, \dots, |V(G)|\}$ (Gutierrez dan Lliado, 2005). Suatu selimut dari G adalah $\mathcal{H} = \{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3, \dots, \mathcal{H}_n\}$ keluarga subgraf dari G dengan sifat setiap sisi di G termuat pada sekurang-kurangnya satu graf \mathcal{H}_i , untuk suatu $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Jika untuk setiap $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, \mathcal{H}_i isomorfik dengan suatu subgraf H , maka \mathcal{H} dikatakan suatu selimut- \mathcal{H} dari G . Selanjutnya dikatakan bahwa G memuat selimut- \mathcal{H} . Diberikan $G = (V(G), E(G))$ graf sederhana dan berhingga yang memuat selimut- \mathcal{H} dengan $|V(G)| = v_G$, $|E(G)| = e_G$, dan banyak subgraf \mathcal{H}_i dari G yang isomorfik dengan H adalah n . Graf G adalah $(a, d) - \mathcal{H}$ -antimagic jika ada suatu pelabelan total $\xi : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, v_G + e_G\}$ yang memenuhi $\xi(H_i) | H_i \cong H = \{a, a + d, a + 2d, \dots, a + (n - 1)d\}$ untuk dua bilangan bulat positif a dan d tertentu. Dalam hal ini, $\xi(H_i)$ dikatakan bobot dari H_i (bobot - H_i) dan didefinisikan $\xi(H_i) = \{\sum_{v \in V(H_i)} \xi(v) + \sum_{e \in E(H_i)} \xi(e)\}$. Kemudian, ξ dikatakan pelabelan total super $(a, d) - \mathcal{H}$ -antimagic, jika $\xi(V(G)) = \{1, 2, \dots, v_G\}$. Suatu graf yang mempunyai pelabelan total super $(a, d) - \mathcal{H}$ -antimagic disebut super $(a, d) - H$ -antimagic. Jika G memuat suatu selimut- \mathcal{H} , maka pelabelan total super $(a, d) - \mathcal{H}$ -antimagic dikatakan *pelabelan selimut (super) $(a, d) - \mathcal{H} - antimagic$* (Inayah, 2013).

Dengan demikian pelabeian selimut super $(a, d) - \mathcal{H}$ antimagic adalah pelabelan terhadap unsur titik dan sisi pada graf dengan bilangan $\{1, 2, 3, \dots, p + q\}$ sedemikian hingga bobot selimut \mathcal{H}_i nya membentuk barisan aritmatika $\{a, a + d, a + 2d, \dots, a + (n - 1)d\}$ dengan a adalah suku pertama, b adalah beda, dan k adalah

jumlah selimutnya.

2.6.3 Batas Atas Nilai Beda d Pelabelan Selimut Super $(a, d) - \mathcal{H}$ -Antimagic

Lemma 2.6.1. *Jika sebuah graf $G(V, E)$ adalah pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} -antimagic total covering maka*

$$d \leq \frac{(p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H}{n - 1}$$

untuk $s = |H_i|$, $p_G = |V|$, $q_G = |E|$, $p_H = |V'|$, $q_H = |E'|$

Bukti. $f(V) = 1, 2, 3, \dots, p_G$ dan $f(E) = p_G + 1, p_G + 2, p_G + 2, \dots, p_G + q_G$. Misal-kan graf (p_G, q_G) mempunyai pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} -antimagic total covering dengan fungsi total $f(\text{total}) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots, p_G + q_G\}$ maka himpunan bobot covering sebuah graf adalah $\{a, a + d, a + 2d, \dots, a(n - 1)d\}$ dimana a merupakan bobot dekomposisi terkecil maka berlaku:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + p_H + (p_G + 1) + (p_G + 2) + \dots + (p_G + q_H) &\leq a \\ \frac{p_H}{2}(1 + p_H) + q_H p_G + \frac{q_H}{2}(1 + q_H) &\leq a \\ \frac{p_H}{2} + \frac{p_H^2}{2} + q_H p_G + \frac{q_H}{2} + \frac{q_H^2}{2} &\leq a \end{aligned}$$

Sedangkan untuk nilai terbesar berlaku:

$$\begin{aligned} a + (n - 1)d &\leq p_G + p_G - 1 + p_G - 2 + \dots + (p_G - (p_H - 1)) + (p_G + q_G) \\ &\quad + (p_G + q_G - 1) + (p_G + q_G - 2) + \dots + (p_G + q_G - (q_H - 1)) \\ &= p_H p_G - \frac{p_H - 1}{2}(1 + (p_H - 1)) + q_H p_G + q_H p_G \\ &\quad - \frac{q_H - 1}{2}(1 + (q_H - 1)) \\ &= p_H p_G - \frac{p_H - 1}{2}(p_H) + q_H p_G + q_H p_G - \frac{q_H - 1}{2}(q_H) \end{aligned}$$

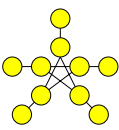

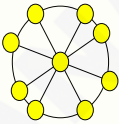
$$\begin{aligned}
 (s-1)d &\leq p_{HPG} - \frac{p_H-1}{2}(p_H) + q_{HPG} + q_{HPG} - \frac{q_H-1}{2}(q_H) - a \\
 &\leq p_{HPG} - \frac{p_H-1}{2}(p_H) + q_{HPG} + q_{HPG} - \frac{q_H-1}{2}(q_H) - \\
 &\quad \left(\frac{p_H}{2} + \frac{p_H^2}{2} + q_{HPG} + \frac{q_H}{2} + \frac{q_H^2}{2}\right) \\
 &= p_{HPG} - \frac{p_H^2}{2} + \frac{p_H}{2} + q_{HPG} - \frac{q_H^2}{2} + \frac{q_H}{2} - \left(\frac{p_H}{2} + \frac{p_H^2}{2} + \frac{q_H}{2} + \frac{q_H^2}{2}\right) \\
 &= p_{HPG} + q_H q_G - p_H^2 - q_H^2 \\
 &= p_{HPG} - p_H^2 + q_H q_G - q_H^2 \\
 &= (p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H \\
 d &\leq \frac{(p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H}{(n-1)}
 \end{aligned}$$

Persamaan diatas membuktikan bahwa batas atas $d \leq \frac{(p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H}{n-1}$ jika graf G memiliki pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} -antimagic total covering dari berbagai famili graf (Dafik. 2007). □

2.7 Hasil Pelabelan Selimut Super $(a, d) - \mathcal{H}$ -Antimagic

Pada bagian ini disajikan beberapa rangkuman hasil pelabelan selimut super $(a, d) - \mathcal{H}$ -antimagic super yang dapat digunakan sebagai rujukan penelitian ini.

Tabel 2.8: Ringkasan Pelabelan Selimut Super (a, d) - \mathcal{H} -Antimagic.

Graf	a	d	Hasil
S_n 	$12n + 5 + \lceil n/2 \rceil$	$d = 2$	$(a, d) - K_{1,3} -$
		(Karyanti, 2012)	-
F_n 	$12 + 4n + \lceil n/2 \rceil$	$d = 4$	$(a, d) - C_3 -$
		(Karyanti, 2012)	-
W_n 	$3hn + 5$	$d = 3$	$(a, d) - C_3 -$
		(Inayah, 2009)	-

BAB 3. METODE PENELITIAN

3.1 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode deskriptif aksiomatik, yaitu menetapkan pengertian dasar *antimagicness* super total selimut, kemudian dikenalkan beberapa teorema mengenai *antimagicness* super total selimut pada *joint* graf. Selanjutnya menurunkan teorema tersebut untuk memperoleh pelabelan titik dan pelabelan sisi pada *joint* graf. Setelah ditemukan *antimagicness* super total selimut pada *joint* graf, maka dilanjutkan ke metode pendektesian pola. Metode ini digunakan untuk merumuskan pola pelabelan titik dan pelabelan sisi apabila *joint* diperumum, sehingga nantinya didapatkan perumusan *antimagicness* super total selimut pada *joint* graf.

3.2 Definisi Operasional

Definisi Operasional digunakan untuk memberikan gambaran sistematis dalam penelitian dan untuk menghindari terjadinya perbedaan pengertian makna. Definisi Operasional yang dimaksud adalah sebagai berikut:

3.2.1 Super $(a, d) - \mathcal{H} - \text{Antimagic}$ Total Selimut

Super $(a, d) - \mathcal{H} - \text{antimagic}$ total selimut pada graf G dengan v titik dan sisi e didefinisikan sebagai fungsi bijektif dari titik-titik dan sisi-sisi pada himpunan bilangan bulat dari 1 sampai sejumlah titik dan sisi, secara matematis ditulis dalam bentuk $f : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, |V(G)| + |E(G)|\}$ dengan sifat setiap subgraf dari G yang isomorfik dengan H , dan H juga subgraf dari G dimana $\sum H = \sum_{v \in V(H)} \lambda(v) + \sum_{e \in E(H)} \lambda(e)$ merupakan barisan aritmatika. Graf G dikatakan memiliki pelabelan \mathcal{H} *antimagic* super jika $\{\lambda(v)\}_{v \in V} = \{1, \dots, |V|\}$.

3.2.2 Joint Graf

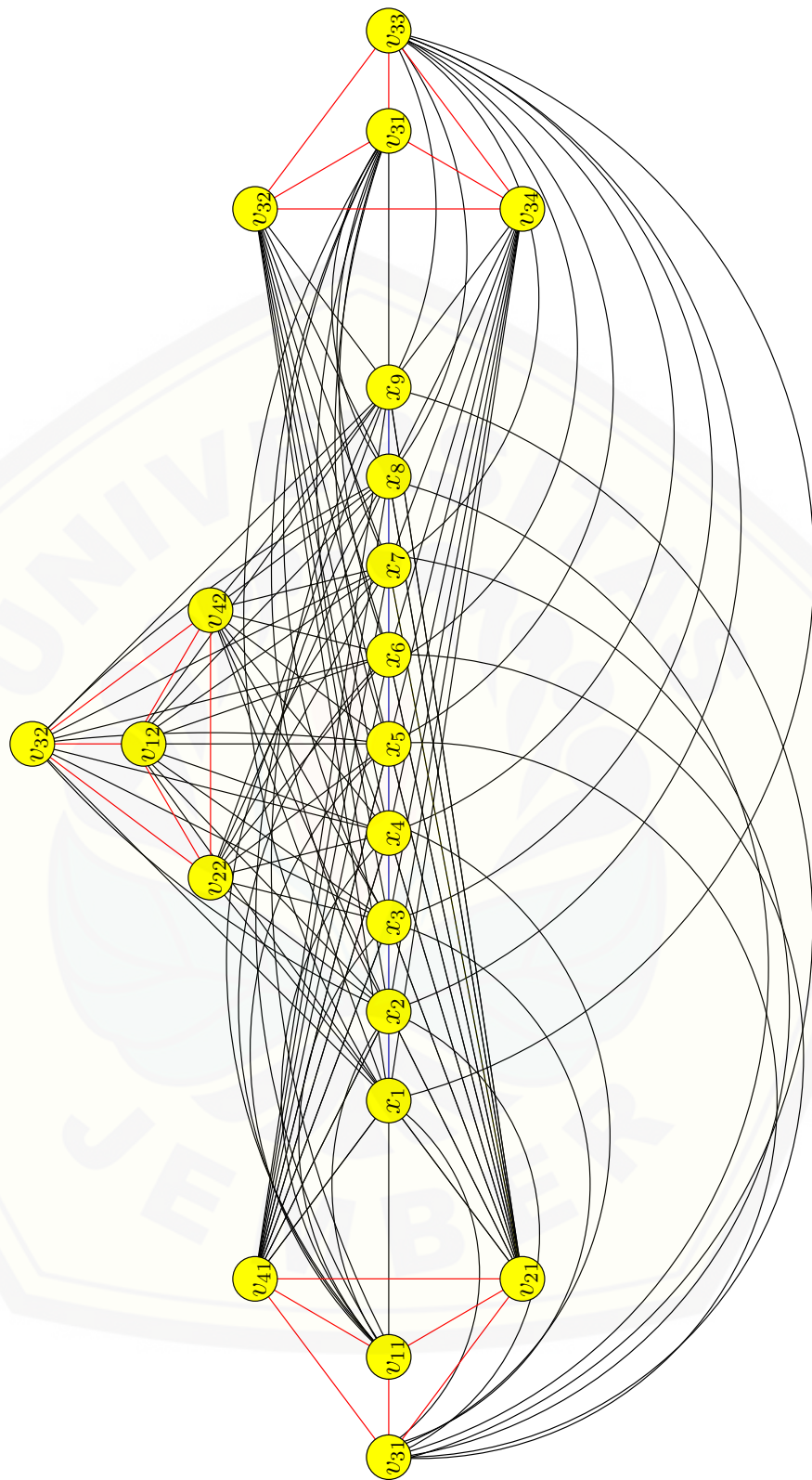
Joint graf, dengan menggunakan graf roda dan lintasan dinotasikan dengan $G = nW_z + P_s$ memiliki himpunan titik $|V_1| = \{v_{ij}; 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n\}$ dan $|V_2| = \{x_k; 1 \leq k \leq s\}$ dan sisi $|E_1| = \{e_{lj}; 1 \leq l \leq c; 1 \leq j \leq n\}$ dan $|E_2| = \{x_k x_{k+1}; 1 \leq k \leq s - 1\}$.

3.3 Teknik Penelitian

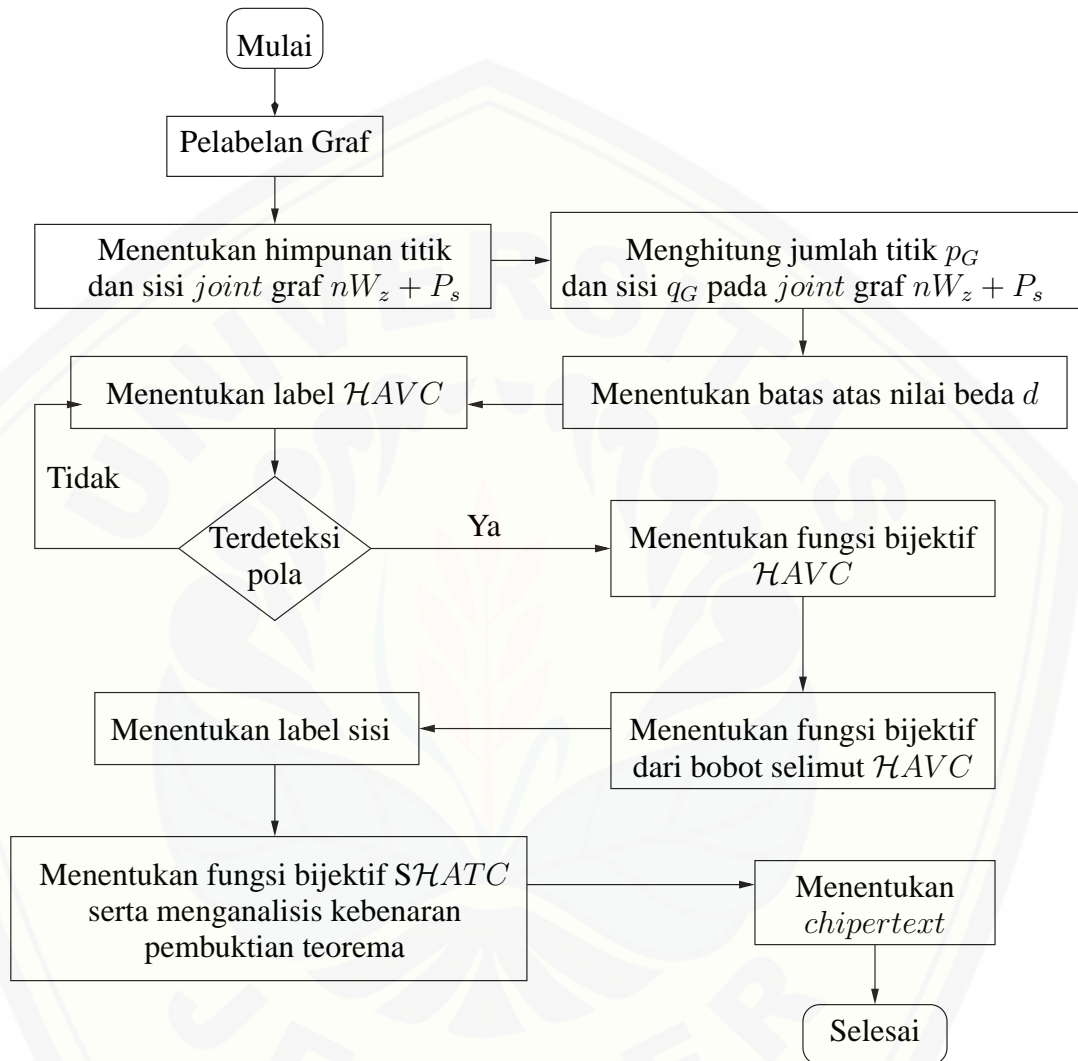
Penelitian ini dilakukan pada *Joint* graf. Adapun teknik penelitian adalah sebagai berikut:

- a. menghitung jumlah titik p_G dan sisi q_G pada *joint* graf serta menghitung jumlah selimut titik p_H , jumlah selimut sisi q_H , dan jumlah selimut pada *joint* graf;
- b. menentukan batas atas nilai beda d pada *joint* graf;
- c. menentukan label $\mathcal{H}AVC$ (\mathcal{H} Antimagic Vertex Covering) pada *joint* graf;
- d. apabila label $\mathcal{H}AVC$ berlaku untuk beberapa graf maka dikatakan pelabelan itu dapat dikembangkan *expandable* sehingga dilanjutkan menentukan fungsi bijektif dari $\mathcal{H}AVC$ pada *joint* graf;
- e. menentukan fungsi bijektif $\mathcal{H}AVC$ pada *joint* graf;
- f. menentukan label sisi pada *joint* graf;
- g. menentukan fungsi bijektif $\mathcal{S} \mathcal{H}ATC$ serta menganalisis kebenaran pembuktian teorema pada *joint* graf;
- h. membentuk *ciphertext* yang disesuaikan dengan pesan dimana *ciphertext* bergantung pada pelabelan masing-masing graf.

Penelitian ini akan menemukan berbagai pola super $(a, d) - \mathcal{H} - antimagic$ total selimut dengan berbagai nilai beda d yang ditentukan. Secara umum, langkah-langkah penelitian di atas dapat juga disajikan dalam bagan alir pada Gambar 3.2.



Gambar 3.1 Joint Graf $nW_z + P_s$



Gambar 3.2 Diagram Alir Penelitian

Selanjutnya adalah aplikasi *antimagicness* super total selimut pada *joint* graf $nW_z + P_s$ yaitu untuk pengembangan *ciphertext*. Langkah-langkah pembentukan *ciphertext* adalah sebagai berikut :

- a. Menentukan graf, pilihlah graf yang memiliki sisi lebih dari banyaknya karakter *plaintext*, misalkan 26.
- b. Melabeli titik dan sisi menggunakan ke-*antimagic*-an super total selimut.
- c. Mengeliminasi sisi yang memiliki label $f_{uv} > |V| + 26$.
- d. Membuat graf pohon dengan utamalah satu label titik, sedangkan akar selanjutnya mengikuti pola graf. Sisi yang sudah dieliminasi tidak perlu digunakan.
- e. Mencantumkan label sisi pada graf pohon sesuai pelabelan pada graf yang digunakan. Mengubah bilangan tersebut menjadi bilangan mod 26.
- f. Memasangkan setiap karakter *plaintext* dengan sisi pada graf pohon. Pemasangan diurutkan dari kiri mulai dari layer teratas.
- g. Membuat aturan untuk mentransformasi bilangan mod 26 ke karakter yang digunakan sebagai *ciphertext*, aturan yang digunakan adalah aturan Julius Caesar.
- h. Memubuat tabel yang terdiri dari *plaintext*, label sisi yang bersesuaian dengan *plaintext*, (mod 26) dari label sisi, dan *ciphertext* yang bersesuaian dengan (mod 26).

BAB 4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini disajikan hasil penelitian mengenai *Antimagicness* Super Total Selimut pada *Joint* Graf Serta Aplikasinya untuk Pengembangan *Ciphertext*. Penelitian ini diawali dengan menentukan nilai batas atas (d), menentukan pelabelan titik sedemikian hingga \mathcal{H} *antimagic* titik ($\mathcal{H}AVC$) dan bobot selimut $\mathcal{H}AV$, menentukan pelabelan sisi sedemikian hingga \mathcal{H} *antimagic* sisi ($\mathcal{H}AE$), kemudian menentukan super \mathcal{H} *antimagic* total covering (\mathcal{SHATC}) dan selanjutnya bobot total selimut dari \mathcal{SHATC} . Tahapan selanjutnya adalah menciptakan *ciphertext* berdasarkan pada *antimagicness* super total selimut pada *joint* graf.

Hasil dari penelitian yang akan dibahas pada *Antimagicness* Super Total Selimut pada *Joint* Graf ini berupa pelabelan titik dan sisi yang disajikan dalam bentuk partisi, lemma dan teorema yang diberi tanda permata \diamond , cara mengembangkan aplikasinya pada *ciphertext*, contoh *ciphertext* yang dapat diciptakan. Terdapat 8 macam partisi yang digunakan pada graf konektif yang disajikan dalam bentuk lemma dan teorema. Pada tahap lanjutan dijelaskan cara membentuk *ciphertext* beserta pengembangannya yang ditemukan dan menyajikan *ciphertext* berdasarkan teorema yang telah ditemukan.

Sebagaimana disebutkan dalam bab 2, untuk menunjukkan keberadaannya dapat menggunakan teknik partisi dari himpunan bilangan bulat. Teknik ini digunakan untuk menetapkan variasi nilai beda d . misal n, m, d, i dan j adalah bilangan bulat positif. Partisi $\mathcal{P}_{m,d}^n(i, j)$ dari himpunan $\{1, 2, 3, \dots, mn\}$ adalah partisi pelabelan $(a, d) - \mathcal{H} - \textit{antimagic}$ bila sebanyak n kolom dan m baris dengan $n \geq 2$ jumlah bilangan-bilangan sebanyak m baris untuk masing-masing kolom membentuk barisan aritmatika dengan beda d , dengan $i = 1, 2, 3, \dots, m$ dan $j = 1, 2, 3, \dots, n$. Apabila partisi bilangan bulat dinotasikan $\mathcal{P}_{m,d}^n(i, j)$ maka $\sum \mathcal{P}_{m,d}^n(i, j)$ adalah jumlah bilangan pada $\mathcal{P}_{m,d}^n(i, j)$. sehingga $d = \sum \mathcal{P}_{m,d}^n(j + 1) - \sum \mathcal{P}_{m,d}^n(j)$.

4.1 Kardinalitas dan Batas Atas Nilai Beda d Antimagicness Super Total Selimut Joint Graf $nW_z + P_s$

Kardinalitas dan batas atas nilai beda d adalah hal penting dalam penelitian ini, sehingga harus ditentukan. Kardinalitas digunakan untuk mengetahui banyaknya titik $|V(G)| = p_G$ dan banyaknya sisi $|E(G)| = q_G$ pada *joint* graf. Batas atas digunakan untuk mengetahui nilai tertinggi beda yang dimiliki. Penentuan beberapa nilai d tersebut, perlu diketahui banyaknya titik p_G dan banyaknya sisi q_G pada *joint* graf, serta perlu diketahui banyaknya titik selimut p_H dan banyaknya sisi selimut q_H pada subgraf atau selimut *joint* graf konektif serta banyak selimutnya (n).

Observasi 4.1.1. Misal G sebuah *joint* graf yang dinotasikan dengan $G = nW_z + P_s$. Misal p_G, p_H, q_G, q_H berturut-turut adalah jumlah titik dan jumlah sisi pada *joint* graf. Dimana m, n, z, s dan c adalah bilangan bulat positif dengan $n \geq 2$ dimana m dan c merupakan jumlah titik dan sisi pada satu selimut n, s merupakan banyaknya titik pada graf lintasan, serta z merupakan graf lingkaran yang di tambahkan pada satu simpul pada graf roda $z = m - 1$. Memiliki pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} antimagic total covering untuk $|V(G)| = p_G = (p_H - s)n + s = nm + s$ dan $|E(G)| = q_G = (q_H - (s - 1))n + (s - 1) = nc + s + 1$, sehingga $p_H = m + s$ dan $q_H = c + s - 1$.

Bukti. *Joint* graf yang dinotasikan dengan $G = nW_z + P_s$ memiliki himpunan titik $|V_1| = \{v_{ij}; 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n\}$ dan $|V_2| = \{x_k; 1 \leq k \leq s\}$ dan sisi $|E_1| = \{e_{lj}; 1 \leq l \leq c; 1 \leq j \leq n\}$ dan $|E_2| = \{x_k x_{k+1}; 1 \leq k \leq s - 1\}$. Sedangkan jumlah titik $|V_1| = nm$ dan $|V_2| = s$ maka $p_G = |V_1| + |V_2| = nm + s$ dan jumlah sisi $|E_1| = nc$ dan $|E_2| = s - 1$ maka $q_G = |E_1| + |E_2| = nc + s - 1$ sedangkan p_H dan q_H merupakan selimut $p_H = m + s$ dan $q_H = c + s - 1$ terbukti. \square

\diamond **Akibat 4.1.1.** Misal *joint* graf yang dinotasikan dengan $G = nW_z + P_s$ adalah pelabelan selimut super (a, d) - \mathcal{H} antimagic untuk graf konektif dengan $n \geq 2$ maka $d \leq p_H^2 - sp_H + q_H^2 - sq_H + q_H$.

Bukti. Sesuai dengan 2.6.1 dan juga 4.1.1 *joint* graf yang dinotasikan dengan $G = nW_z + P_s$ memiliki pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} antimagic total covering untuk $|V(G)| = p_G = (p_H - s)n + s = nm + s$ dan $|E(G)| = q_G = (q_H - (s - 1))n + (s - 1) =$

$nc + s + 1$, $p_H = m + s$ dan $q_H = c + s - 1$, batas atas nilai beda d adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 d &\leq \frac{(p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H}{n - 1} \\
 &= \frac{[(p_H - s)n + s - p_H]p_H + [(q_H - (s - 1))n + s - 1 - q_H]q_H}{n - 1} \\
 &= \frac{[np_H - sn + s - p_H]p_H + [nq_H - sn + n + s - 1 - q_H]q_H}{n - 1} \\
 &= \frac{np_H^2 - snp_H + sp_H - p_H^2 + nq_H^2 - snq_H + nq_H + sq_H - q_H - q_H^2}{n - 1} \\
 &= \frac{(n - 1)p_H^2 - (n - 1)sp_H + (n - 1)q_H^2 - (n - 1)sq_H + (n - 1)q_H}{n - 1} \\
 &= p_H^2 - sp_H + q_H^2 - sq_H + q_H
 \end{aligned}$$

sehingga terbukti bahwa *antimagicness* super total selimut pada *joint* graf $G = nW_z + P_s$ memiliki $d \leq p_H^2 - sp_H + q_H^2 - sq_H + q_H$

4.2 Pengembangan Partisi

Pada tahap ini setelah mengetahui batas atas nilai d , langkah selanjutnya adalah menentukan partisi dari sebuah bilangan bulat. Partisi ini sangat penting didalam membangun *antimagicness* super total selimut pada *joint* graf $G = nW_z + P_s$. Berikut adalah beberapa Lemma yang terkait dengan pengembangan partisi yang digunakan pada *joint* graf $G = nW_z + P_s$.

◇ **Lemma 4.2.1.** Misal n , m , s dan z bilangan bulat positif dimana $s = nz$ dan $z = (m - 1)$. Untuk $j = 1, 2, \dots, n$ jumlah dari $\mathcal{P}_{m,d_7}^n(i, j) = 2i + 2jm - j - 2m$; $1 \leq i \leq m$, membentuk baris aritmatika dengan beda $d_7 = 2m^2 - m$.

Bukti. Melalui proses perhitungan sederhana, untuk $j = 1, 2, \dots, n$ didapat

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^m \mathcal{P}_{m,d_7}^n(i, j) &= \mathcal{P}_{m,d_7}^n(j) \\
 &= \mathcal{P}_{m,d_7}^n(j) = \{(1 + 2jm - j - m)m\} \\
 &= \{m^2, 3m^2 - m, 5m^2 - 2m, \dots, (1 + 2(n - 1)m - (n - 1) - m)m, \\
 &\quad (1 + 2nm - n - m)m\}
 \end{aligned}$$

Terbukti bahwa himpunan tersebut membentuk deret arimatika dengan $d_7 = 2m^2 - m$.

□

◇ **Lemma 4.2.2.** Misal n, m, s dan z bilangan bulat positif dimana $s = nz$ dan $z = (m - 1)$. Untuk $j = 1, 2, \dots, n$ jumlah dari $\mathcal{P}_{m,d_8}^n(i, j) = 2mn - n - 2jm + j + 2i - 1; 1 \leq i \leq m$, membentuk baris aritmatika dengan beda $d_8 = -(2m^2 - m)$.

Bukti. Melalui proses perhitungan sederhana, untuk $j = 1, 2, \dots, n$ didapat

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \mathcal{P}_{m,d_8}^n(i, j) &= \mathcal{P}_{m,d_8}^n(j) \\ &= \{(2mn - n - 2jm + j + m)m\} \\ &= \{(2nm - n - m + 1)m, (2nm - n - 3m + 2)m, (2nm - n - 5m \\ &\quad + 3)m, \dots, 3m^2 - m, m^2\} \end{aligned}$$

Terbukti bahwa himpunan tersebut membentuk deret arimatika dengan $d_8 = -(2m^2 - m)$. □

4.3 Antimaginess Super Total Selimut pada Joint Graf $G = nW_z + P_s$

Pada sub bab ini, akan disajikan teorema utama tentang keberadaan pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} antimagic total pada joint graf. Teorema dibangun dengan mengembangkan kombinasi linear antara Lemma 2.5.1, 2.5.2, 2.5.3, 2.5.4, 2.5.5, 2.5.6, 4.2.1 dan 4.2.2. Dari teorema inilah nantinya *ciphertext* akan dibangun.

◇ **Teorema 4.3.1.** Misal m, n, z, s dan c adalah bilangan bulat positif dengan $n \geq 2$ maka joint graf yang dinotasikan dengan $G = nW_z + P_s$, memiliki super $(a, d) - \mathcal{H}$ antimagic total covering dengan $a = m_1 - m_1^2 + 2m_2^2n - nm_2 + m_2^2 + (2m_1 - 1)n + \frac{m_3n}{2}(m_3 - 1) + (2m_2 - 1)n + (2m_1 - 1)n + \frac{m_4n}{2}(m_4 + 1) + m_4 + nm_3 + (2m_2 - 1)n + (2m_1 - 1)n + \frac{m_5}{2}(1 - m_5) + nm_4 + nm_3 + (2m_2 - 1)n + (2m_1 - 1)n + \frac{m_6}{2}(2m_6n + m_6 + 1) + nm_5 + nm_4 + nm_3 + (2m_2 - 1)n + (2m_1 - 1)n + \frac{m_7}{4}(2m_7n - n + 1) + nm_6 + nm_5 + nm_4 + nm_3 + (2m_2 - 1)n + (2m_1 - 1)n + \frac{m_8}{4}(2m_8n + n + 3) + nm_7 + nm_6 + nm_5 + nm_4 + nm_3 + (2m_2 - 1)n + (2m_1 - 1)n + \frac{nz_1}{2}[2(1 + z_1) + (n - 1)(2z_1 + 1)] + \frac{nz_2}{2}[2(1 + z_2) + (n - 1)(2z_2 + 1)] + 2(m_1 - 1)mn^2 + \frac{c_1n}{2}(c_1 - 1) + nm + s + \frac{c_2n}{2}(c_2 + 1) + c_2 + nc_1 + nm + s + \frac{c_3}{2}(1 - c_3) + nc_2 + nc_1 + nm + s + \frac{c_4}{2}(2c_4n + c_4 + 1) + nc_3 +$

$$nc_2 + nc_1 + nm + s + \frac{c_5}{4}(2c_5n - n + 1) + nc_4 + nc_3 + nc_2 + nc_1 + nm + s + \frac{c_6}{4}(2c_6n + n + 3) + nc_5 + nc_4 + nc_3 + nc_2 + nc_1 + nm + s + (s-1)(nm + s + nc) + \frac{s(s-1)}{2} \text{ dan } d = 2m_1^2 - m_1 - 2m_2^2 + m_2 + m_3 - m_4 + m_5^2 - m_6^2 + \frac{m_7}{2} - \frac{m_8}{2} + c_1 - c_2 + c_3^2 - c_4^2 + \frac{c_5}{2} - \frac{c_6}{2}$$

Bukti. Menurut 4.1.1 *joint* graf memiliki himpunan titik $|V_1| = \{v_{ij}; 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n\}$ dan $|V_2| = \{x_k; 1 \leq k \leq s\}$ dan sisi $|E_1| = \{e_{lj}; 1 \leq l \leq c; 1 \leq j \leq n\}$ dan $|E_2| = \{x_k x_{k+1}; 1 \leq k \leq s-1\}$. Sedangkan jumlah titik $|V_1| = nm$ dan $|V_2| = s$ maka $p_G = |V_1| + |V_2| = nm + s$ dan jumlah sisi $|E_1| = nc$ dan $|E_2| = s-1$ maka $q_G = |E_1| + |E_2| = nc + s - 1$ sedangkan p_H dan q_H merupakan selimut $p_H = m + s$ dan $q_H = c + s - 1$. Selanjutnya labeli titik dan fungsi *joint* graf sebagai berikut.

$$\begin{aligned} f(V_1) = & \{\mathcal{P}_{m_1, 2m_1^2 - m_1}^n\} \cup \{\mathcal{P}_{m_2, -(2m_2^2 - m_2)}^n \oplus [(2m_1 - 1)n]\} \cup \{\mathcal{P}_{m_3, m_3}^n \oplus [(2m_2 - 1)n + (2m_1 - 1)n]\} \\ & \cup \{\mathcal{P}_{m_4, -m_4}^n \oplus [nm_3 + (2m_2 - 1)n + (2m_1 - 1)n]\} \\ & \cup \{\mathcal{P}_{m_5, m_5^2}^n \oplus [nm_4 + nm_3 + (2m_2 - 1)n + (2m_1 - 1)n]\} \cup \{\mathcal{P}_{m_6, -m_6^2}^n \oplus \\ & [nm_5 + nm_4 + nm_3 + (2m_2 - 1)n + (2m_1 - 1)n]\} \cup \{\mathcal{P}_{m_7, \frac{m_7}{2}}^n \oplus [nm_6 + \\ & nm_5 + nm_4 + nm_3 + (2m_2 - 1)n + (2m_1 - 1)n]\} \cup \{\mathcal{P}_{m_8, -(\frac{m_8}{2})}^n \oplus [nm_7 \\ & + nm_6 + nm_5 + nm_4 + nm_3 + (2m_2 - 1)n + (2m_1 - 1)n]\} \end{aligned}$$

untuk $r = \{1, 2, \dots, n\}$ didapat

$$f(V_2) = \bigcup_{j=1}^n \begin{cases} \{2i + (r-1)(2z_1 + 1); 1 \leq i \leq m_1 - 1 = z_1\} \\ \{2i + (r-1)(2z_2 + 1) + (2m_1 - 1)n; 1 \leq i \leq m_2 - 1 = z_2\} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f(E_1) = & \{\mathcal{P}_{c_1, c_1}^n \oplus [nm + s]\} \cup \{\mathcal{P}_{c_2, -c_2}^n \oplus [nc_1 + nm + s]\} \cup \{\mathcal{P}_{c_3, c_3^2}^n \oplus [nc_2 + \\ & nc_1 + nm + s]\} \cup \{\mathcal{P}_{c_4, -c_4^2}^n \oplus [nc_3 + nc_2 + nc_1 + nm + s]\} \cup \{\mathcal{P}_{c_5, \frac{c_5}{2}}^n \oplus \\ & [nc_4 + nc_3 + nc_2 + nc_1 + nm + s]\} \cup \{\mathcal{P}_{c_6, -(\frac{c_6}{2})}^n \oplus [nc_5 + nc_4 + nc_3 \\ & + nc_2 + nc_1 + nm + s]\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(E_2) = & \bigcup_{j=1}^n \{(|V_1| + |V_2| + |E_1| + 1 + (k-1)1); 1 \leq k \leq s-1\} \\ = & \bigcup_{j=1}^n \{nm + s + nc + k; 1 \leq k \leq s-1\} \end{aligned}$$

Terlihat dengan mudah bahwa $f : V_1 \cup V_2 \rightarrow \{1, 2, \dots, |V(G)|\}$ dan $f : E_1 \cup E_2 \rightarrow \{|V(G)| + 1, |V(G)| + 2, \dots, |V(G)| + |E(G)|\}$. Jika W adalah bobot total selimut, maka W dapat diperoleh dengan menjumlahkan seluruh label titik dan sisi diatas dengan $j = 1, 2, \dots, n$ dan $s = n(m_1 - 1) + n(m_2 - 1)$. Bobot total tersebut dapat dirumuskan.

$$\begin{aligned}
 W &= \left\{ \sum f(v_1) + \sum f(v_2) + \sum f(e_1) + \sum f(e_2) \right\} \\
 W &= (1 + 2m_1 - j - m_1)m_1 + (2m_2n - n - 2jm_2 + j + m_2)m_2 + (2m_1 - 1)n \\
 &\quad + \frac{m_3n}{2}(m_3 - 1) + m_3j + (2m_2 - 1)n + (2m_1 - 1)n + \frac{m_4n}{2}(m_4 + 1) + m_4 \\
 &\quad - m_4j + nm_3 + (2m_2 - 1)n + (2m_1 - 1)n + \frac{m_5}{2}(1 - m_5) + m_5^2j + nm_4 \\
 &\quad + nm_3 + (2m_2 - 1)n + (2m_1 - 1)n + \frac{m_6}{2}(2m_6n + m_6 + 1) - m_6^2j + nm_5 \\
 &\quad + nm_4 + nm_3 + (2m_2 - 1)n + (2m_1 - 1)n + \frac{m_7}{4}(2m_7n - n + 1) + \frac{m_7}{2}j \\
 &\quad + nm_6 + nm_5 + nm_4 + nm_3 + (2m_2 - 1)n + (2m_1 - 1)n + \frac{m_8}{4}(2m_8n + n \\
 &\quad + 3) - \frac{m_8}{2}j + nm_7 + nm_6 + nm_5 + nm_4 + nm_3 + (2m_2 - 1)n + (2m_1 - \\
 &\quad 1)n + \frac{nz_1}{2}[2(1 + z_1) + (n - 1)(2z_1 + 1)] + \frac{nz_2}{2}[2(1 + z_2) + (n - 1)(2z_2 + \\
 &\quad 1)] + 2(m_1 - 1)mn^2 + \frac{c_1n}{2}(c_1 - 1) + c_1j + nm + s + \frac{c_2n}{2}(c_2 + 1) + c_2 -
 \end{aligned}$$

$$c_2j + nc_1 + nm + s + \frac{c_3}{2}(1 - c_3) + c_3^2j + nc_2 + nc_1 + nm + s + \frac{c_4}{2}(2c_4n + c_4 + 1) - c_4^2j + nc_3 + nc_2 + nc_1 + nm + s + \frac{c_5}{4}(2c_5n - n + 1) + \frac{c_5}{2}j + nc_4 + nc_3 + nc_2 + nc_1 + nm + s + \frac{c_6}{4}(2c_6n + n + 3) - \frac{c_6}{2}j + nc_5 + nc_4 + nc_3 + nc_2 + nc_1 + nm + s + (s - 1)(nm + s + nc) + \frac{s(s - 1)}{2}$$

$$\begin{aligned} W = & m_1 - m_1^2 + 2m_2^2n - nm_2 + m_2^2 + (2m_1 - 1)n + \frac{m_3n}{2}(m_3 - 1) + (2m_2 - 1)n + (2m_1 - 1)n + \frac{m_4n}{2}(m_4 + 1) + m_4 + nm_3 + (2m_2 - 1)n + (2m_1 - 1)n + \frac{m_5}{2}(1 - m_5) + nm_4 + nm_3 + (2m_2 - 1)n + (2m_1 - 1)n + \frac{m_6}{2}(2m_6n + m_6 + 1) + nm_5 + nm_4 + nm_3 + (2m_2 - 1)n + (2m_1 - 1)n + \frac{m_7}{4}(2m_7n - n + 1) + nm_6 + nm_5 + nm_4 + nm_3 + (2m_2 - 1)n + (2m_1 - 1)n + \frac{m_8}{4}(2m_8n + n + 3) + nm_7 + nm_6 + nm_5 + nm_4 + nm_3 + (2m_2 - 1)n + (2m_1 - 1)n + \frac{nz_1}{2}[2(1 + z_1) + (n - 1)(2z_1 + 1)] + \frac{nz_2}{2}[2(1 + z_2) + (n - 1)(2z_2 + 1)] + 2(m_1 - 1)mn^2 + \frac{c_1n}{2}(c_1 - 1) + nm + s + \frac{c_2n}{2}(c_2 + 1) + c_2 + nc_1 + nm + s + \frac{c_3}{2}(1 - c_3) + nc_2 + nc_1 + nm + s + \frac{c_4}{2}(2c_4n + c_4 + 1) + nc_3 + nc_2 + nc_1 + nm + s + \frac{c_5}{4}(2c_5n - n + 1) + nc_4 + nc_3 + nc_2 + nc_1 + nm + s + \frac{c_6}{4}(2c_6n + n + 3) + nc_5 + nc_4 + nc_3 + nc_2 + nc_1 + nm + s + (s - 1)(nm + s + nc) + \frac{s(s - 1)}{2} + [2m_1^2 - m_1 - 2m_2^2 + m_2 + m_3 - m_4 + m_5^2 - m_6^2 + \frac{m_7}{2} - \frac{m_8}{2} + c_1 - c_2 + c_3^2 - c_4^2 + \frac{c_5}{2} - \frac{c_6}{2}]j \end{aligned}$$

$$W = a + dj.$$

Dengan mudah dapat dilihat bahwa bobot total terkecilnya adalah $a = m_1 - m_1^2 + 2m_2^2n - nm_2 + m_2^2 + (2m_1 - 1)n + \frac{m_3n}{2}(m_3 - 1) + (2m_2 - 1)n + (2m_1 - 1)n + \frac{m_4n}{2}(m_4 + 1) + m_4 + nm_3 + (2m_2 - 1)n + (2m_1 - 1)n + \frac{m_5}{2}(1 - m_5) + nm_4 + nm_3 + (2m_2 - 1)n + (2m_1 - 1)n + \frac{m_6}{2}(2m_6n + m_6 + 1) + nm_5 + nm_4 + nm_3 + (2m_2 - 1)n + (2m_1 - 1)n + \frac{m_7}{4}(2m_7n - n + 1) + nm_6 + nm_5 + nm_4 + nm_3 + (2m_2 - 1)n + (2m_1 - 1)n + \frac{m_8}{4}(2m_8n + n + 3) + nm_7 + nm_6 + nm_5 + nm_4 + nm_3 + (2m_2 - 1)n + (2m_1 - 1)n + \frac{nz_1}{2}[2(1 + z_1) + (n - 1)(2z_1 + 1)] + \frac{nz_2}{2}[2(1 + z_2) + (n - 1)(2z_2 + 1)] + 2(m_1 - 1)mn^2 + \frac{c_1n}{2}(c_1 - 1) +$

$nm + s + \frac{c_2 n}{2}(c_2 + 1) + c_2 + nc_1 + nm + s + \frac{c_3}{2}(1 - c_3) + nc_2 + nc_1 + nm + s + \frac{c_4}{2}(2c_4 n + n_4 + 1) + nc_3 + nc_2 + nc_1 + nm + s + \frac{c_5}{4}(2c_5 n - n + 1) + nc_4 + nc_3 + nc_2 + nc_1 + nm + s + \frac{c_6}{4}(2c_6 n + n + 3) + nc_5 + nc_4 + nc_3 + nc_2 + nc_1 + nm + s + (s - 1)(nm + s + nc) + \frac{s(s-1)}{2}$
 dan $d = 2m_1^2 - m_1 - 2m_2^2 + m_2 + m_3 - m_4 + m_5^2 - m_6^2 + \frac{m_7}{2} - \frac{m_8}{2} + c_1 - c_2 + c_3^2 - c_4^2 + \frac{c_5}{2} - \frac{c_6}{2}$
 terbukti. □

Sebagai ilustrasi akan diberikan beberapa contoh *joint* graf $nW_z + P_s$ beserta keterangan label titik, label sisi dan bobot total selimutnya sebagai berikut :

1. Gambar 4.1 dan tabel 4.1 merupakan contoh dari super $(4949, 128)$ - \mathcal{HATC} pada *joint* graf $3W_5 + P_6$
2. Gambar 4.2 dan tabel 4.2 merupakan contoh dari super $(4615, 462)$ - \mathcal{HATC} pada *joint* graf $3W_5 + P_6$
3. Gambar 4.3 dan tabel 4.3 merupakan contoh dari super $(5057, 20)$ - $\mathcal{HATC}1$ pada *joint* graf $3W_5 + P_6$

4.4 Aplikasi Antimaginess Super Total Selimut Joint Graf $G = nW_z + P_s$ dengan Menggunakan Ciphertext

Pada subbab sebelumnya telah disajikan sebuah teorema *joint* graf $nW_z + P_s$ beserta ilustrasi grafnya. Teorema tersebut digunakan untuk membangun *ciphertext* dengan menggunakan metode eliminasi. Metode eliminasi merupakan suatu metode yang digunakan untuk membangun *ciphertext* dengan menitik beratkan pada pengeliminasian sisi yang labelnya tidak memenuhi syarat. Disebut metode eliminasi karena terjadi proses eliminasi atau penghapusan sisi yang tidak memenuhi syarat. Adapun langkah-langkah metode eliminasi sebagai berikut:

- a. Menentukan karakter yang akan dibuat *ciphertext*.
Misalkan t adalah banyaknya karakter yang akan dibuat.
- b. Memilih graf yang memenuhi syarat $|E(G)| \geq t$.
Graf yang dipilih harus memenuhi $|E(G)| \geq t$ karena terdapat t karakter, setiap karakter diwakili oleh sebuah sisi. Tidak boleh ada satupun karakter

Tabel 4.1 Label Titik, Label Sisi dan Bobot Total Selimut dari Super $(4949, 128)$ - \mathcal{HATC} pada $Joint$ Graf $3W_5 + P_6$

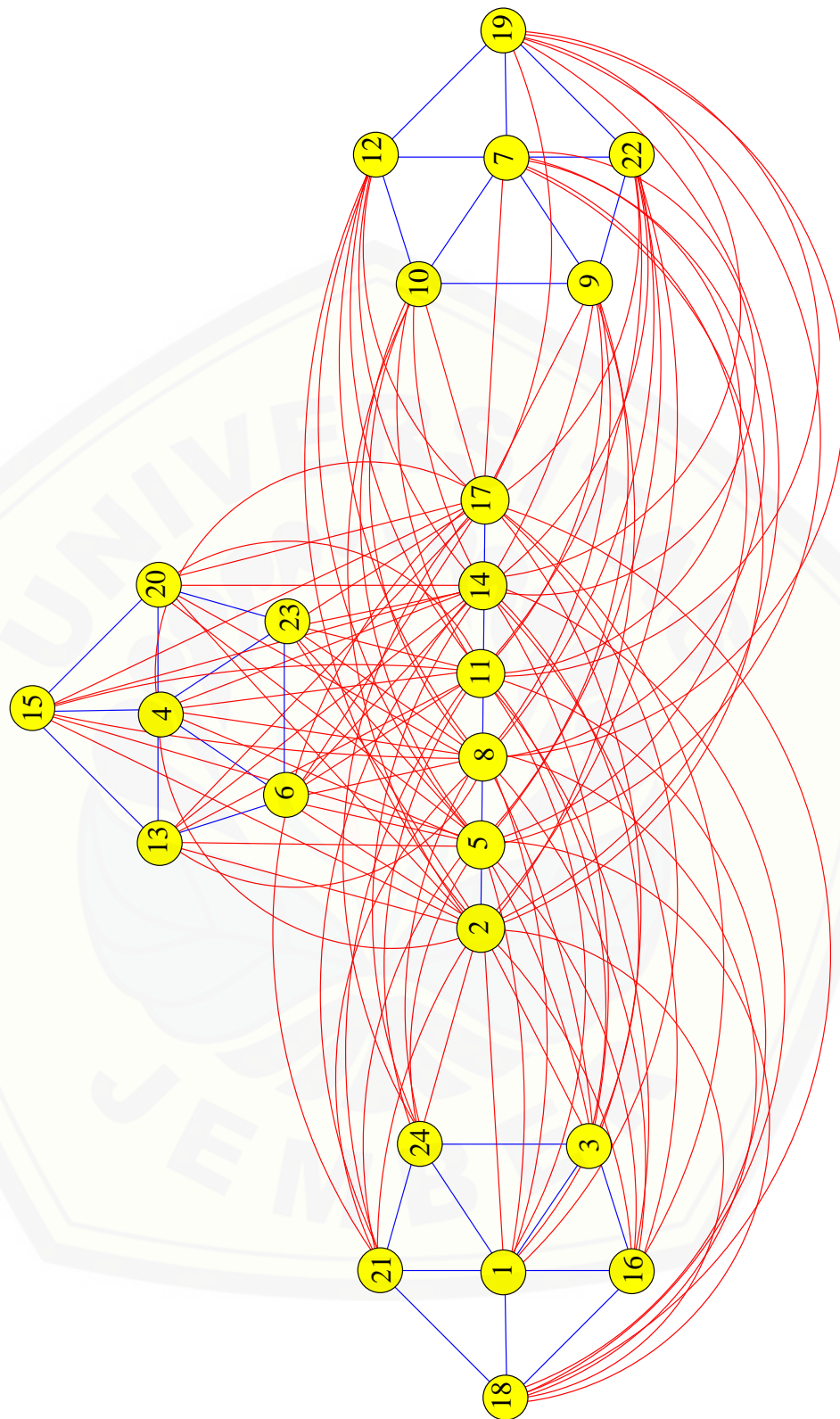
$i \setminus j$	1	2	3	$i \setminus j$	1	2	3	$i \setminus j$	1	2	3
1	1	4	7	22	52	53	54	43	117	116	115
2	3	6	9	23	55	56	57	44	120	119	118
3	2	2	2	24	58	59	60	45	123	122	121
4	5	5	5	25	61	62	63	46	126	125	124
5	8	8	8	26	64	65	66	47	129	128	127
6	16	13	10	27	67	68	69	48	132	131	130
7	18	15	12	28	70	82	94	49	133	135	134
8	11	11	11	29	71	83	95	50	137	136	138
9	14	14	14	30	72	84	96	51	139	141	140
10	17	17	17	31	73	85	97	52	143	142	144
11	21	20	19	32	74	86	98	53	146	147	145
12	24	23	22	33	75	87	99	54	150	148	149
13	33	29	25	34	76	88	100	55	152	153	151
14	34	30	26	35	77	89	101	56	156	154	155
15	35	31	27	36	78	90	102	57	157	157	157
16	36	32	28	37	79	91	103	58	158	158	158
17	37	38	39	38	80	92	104	59	159	159	159
18	40	41	42	39	81	93	105	60	160	160	160
19	43	44	45	40	108	107	106	61	161	161	161
20	46	47	48	41	111	110	109	62	162	162	162
21	49	50	51	42	114	113	112				+
									4949	5077	5205

Tabel 4.2 Label Titik, Label Sisi dan Bobot Total Selimut dari Super $(4615, 462)$ - \mathcal{HATC} pada $Joint$ Graf $3W_5 + P_6$

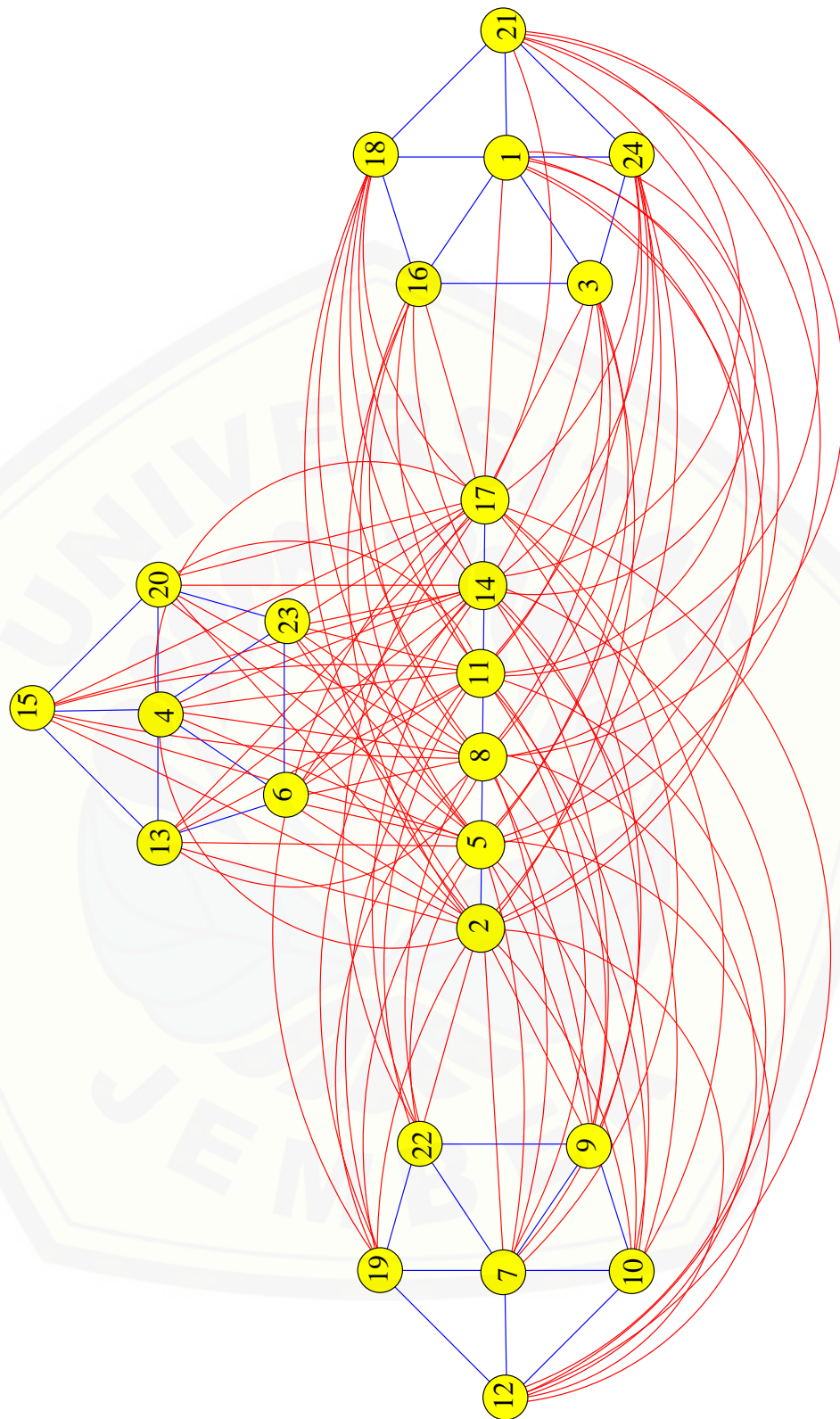
$i \setminus j$	1	2	3	$i \setminus j$	1	2	3	$i \setminus j$	1	2	3
1	7	4	1	22	44	67	90	43	127	119	111
2	9	6	3	23	45	68	91	44	128	120	112
3	2	2	2	24	46	69	92	45	129	121	113
4	5	5	5	25	47	70	93	46	130	122	114
5	8	8	8	26	48	71	94	47	131	123	115
6	10	13	16	27	49	72	95	48	132	124	116
7	12	15	18	28	50	73	96	49	133	135	134
8	11	11	11	29	51	74	97	50	137	136	138
9	14	14	14	30	52	75	98	51	139	141	140
10	17	17	17	31	53	76	99	52	143	142	144
11	19	20	21	32	54	77	100	53	146	147	145
12	22	23	24	33	55	78	101	54	150	148	149
13	27	26	25	34	56	79	102	55	152	153	151
14	30	29	28	35	57	80	103	56	156	154	155
15	33	32	31	36	58	81	104	57	157	157	157
16	36	35	34	37	59	82	105	58	158	158	158
17	39	38	37	38	60	83	106	59	159	159	159
18	40	63	86	39	61	84	107	60	160	160	160
19	41	64	87	40	62	85	108	61	161	161	161
20	42	65	88	41	125	117	109	62	162	162	162
21	43	66	89	42	126	118	110				+
									4615	5077	5539

Tabel 4.3 Label Titik, Label Sisi dan Bobot Total Selimut dari Super $(5057, 20)$ - $\mathcal{H}ATC$ pada $Joint$ Graf $3W_5 + P_6$

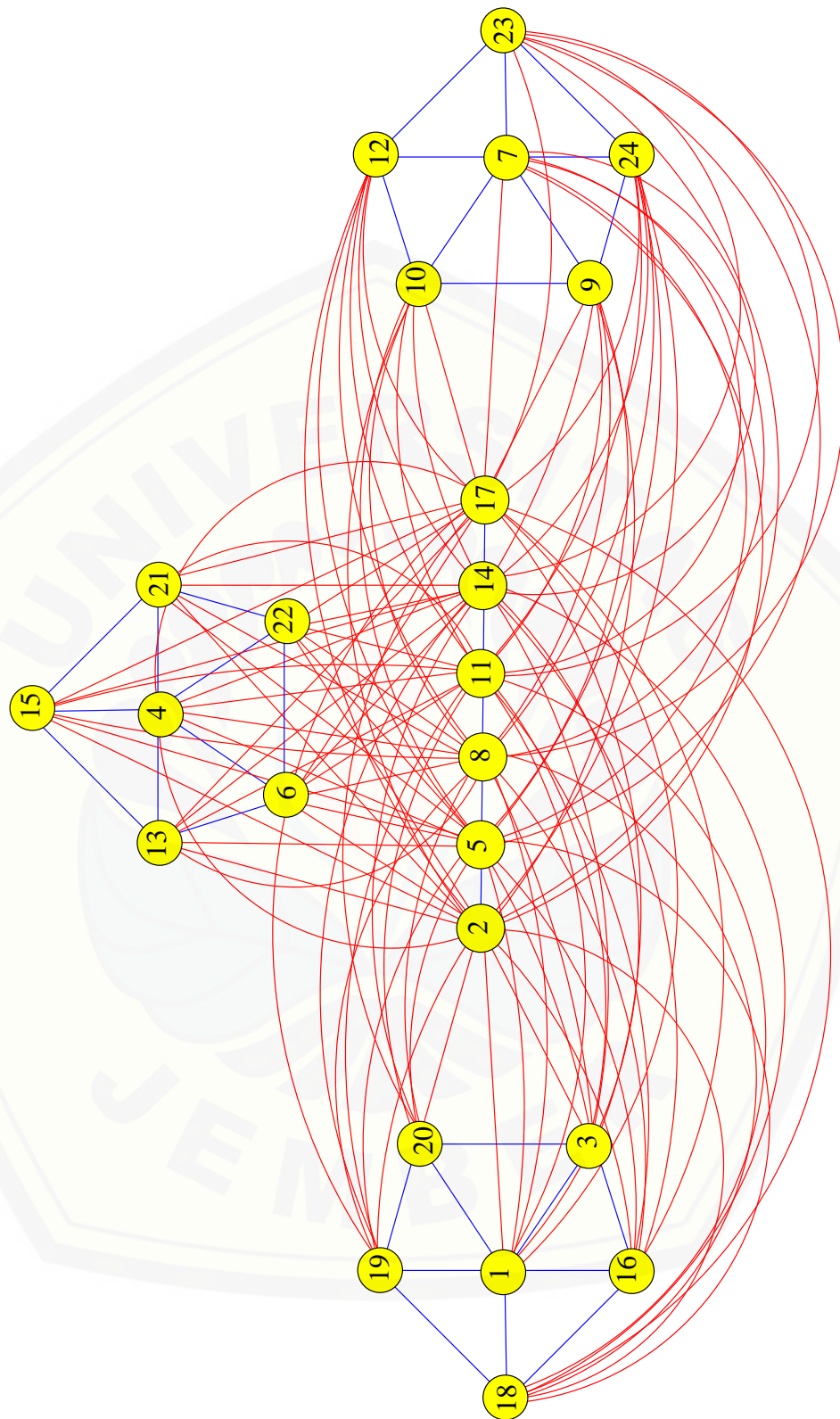
$i \setminus j$	1	2	3	$i \setminus j$	1	2	3	$i \setminus j$	1	2	3
1	1	4	7	22	52	53	54	43	117	116	115
2	3	6	9	23	55	56	57	44	120	119	118
3	2	2	2	24	58	59	60	45	123	122	121
4	5	5	5	25	61	62	63	46	126	125	124
5	8	8	8	26	64	65	66	47	129	128	127
6	16	13	10	27	67	68	69	48	132	131	130
7	18	15	12	28	70	71	72	49	133	135	134
8	11	11	11	29	73	74	75	50	137	136	138
9	14	14	14	30	76	77	78	51	139	141	140
10	17	17	17	31	79	80	81	52	143	142	144
11	19	21	23	32	82	83	84	53	146	147	145
12	20	22	24	33	85	86	87	54	150	148	149
13	25	29	33	34	88	89	90	55	152	153	151
14	26	30	34	35	91	92	93	56	156	154	155
15	27	31	35	36	94	95	96	57	157	157	157
16	28	32	36	37	97	98	99	58	158	158	158
17	45	41	37	38	100	101	102	59	159	159	159
18	46	42	38	39	103	104	105	60	160	160	160
19	47	43	39	40	106	107	108	61	161	161	161
20	48	44	40	41	109	110	111	62	162	162	162
21	49	50	51	42	112	113	114				+
									5057	5077	5097



Gambar 4.1 Super $(4949, 128)$ - \mathcal{HATC} pada *Joint Graf* $3W_5 + P_6$



Gambar 4.2 Super $(4615, 462)$ - \mathcal{HATC} pada *Joint Graf* $3W_5 + P_6$



Gambar 4.3 Super $(5057, 20)$ - \mathcal{HATC} pada *Joint Graf* $3W_5 + P_6$

yang tidak dikorespondensikan terhadap sisi. Karakter yang dikorespondensi satu-satu dengan sisi secara eksplisit menyatakan bahwa karakter tersebut dikorespondensi satu-satu terhadap label sisi yang akan menjadi *ciphertext*.

- c. Membentuk *antimagicness* super total selimut pada *joint* graf $G = nW_z + P_s$.
Graf yang sudah dipilih dilabeli berdasarkan ilustrasi graf yang sudah ditemukan sebelumnya. Label titik dan label sisi sangat berperan dalam pembangunan *ciphertext*.
- d. Mengeliminasi sisi yang memiliki label $f_e > |V(G)| + t$.
Karakter yang digunakan sebanyak t sehingga *ciphertext* yang dibutuhkan adalah sebanyak t . Kode awal yang didapat berupa angka sehingga perlu dibuat aturan untuk mentransformasikan angka ke *ciphertext* sehingga menggunakan bilangan modulo ($mod t$). Salah satu aturan yang sudah ada adalah aturan Julius Caesar dimana setiap alfabet dikorespondensikan secara berurutan dengan bilangan ($mod 26$). Sisi yang memiliki label $f_e > |V(G)| + t$ dieliminasi. Pengeliminasian ini dilakukan agar tidak terjadi kesamaan atau pengulangan bilangan ($mod t$) dengan demikian tidak terjadi kesamaan *ciphertext*. Bila sisi sudah dieliminasi maka sisi tidak digunakan untuk diagram pohon.
- e. Membangun diagram pohon berdasarkan *antimagicness* super total selimut pada *joint* graf $G = nW_z + P_s$.
Pembangunan diagram pohon adalah hal yang paling penting karena dari tahap ini proses eliminasi dan korespondensi bermula. Diagram pohon dibentuk dari label titik, akar utama dari diagram pohon harus ditentukan dan dicantumkan pada pesan yang dikirim nantinya. Akar utama yang digunakan pada penelitian ini adalah 1. Dilanjutkan dengan membuat cabang-cabang diagram berdasarkan graf dan sisi yang tidak tereliminasi, setiap sisi hanya digunakan satu kali dan mendahulukan label titik yang lebih kecil. Setiap sisi pada diagram pohon diberi karakter dari A sampai Z kemudian angka dari 0,1,2 sampai 9, dan dilanjutkan tanda baca secara berurutan menyelesaikan layer teratas terlebih dahulu untuk mempermudah cantumkan pula label sisi pada tiap batang diagram pohon.
- f. Membentuk tabel *ciphertext*.

Tabel terdiri dari *plaintext*, dilanjutkan label sisi yang bersesuaian dengan setiap karakter, kemudian (*modt*) dari label sisi, dan terakhir adalah *ciphertext* yang dibangun berdasarkan aturan pengkodean. Dengan demikian terbentuklah *ciphertext* dari setiap abjad sehingga ketika sebuah kalimat *plaintext* akan di ubah dalam *ciphertext* pengguna dapat memanfaatkan tabel yang dihasilkan dari pembangunan *ciphertext*.

Metode ini menghasilkan *ciphertext* yang berkorespondensi satu-satu sehingga tidak akan terjadi perubahan makna *plaintext* yang didapat dari proses *decryption* dengan *plaintext* awal. Artinya metode ini sangat relevan sebagai suatu *cryptosystem*.

4.4.1 Pembangunan *Ciphertext* Alfabet pada Joint Graf $3W_5 + P_6$ dengan $d = 128$

Cara penulisan alfabet dibagi menjadi dua yaitu huruf kapital dan huruf kecil. Penyajian *plaintext* maupun *ciphertext* pada penelitian ini menggunakan huruf kapital. Apabila *plaintext* dan *ciphertext* berupa alfabet maka berlaku bila *plaintext* berupa huruf kapital maka *ciphertext* juga kapital. Demikian sebaliknya jika *plaintext* berupa huruf kecil maka *ciphertext* juga huruf kecil tanpa mengubah pasangan *plaintext* dan *ciphertext*. Namun, untuk keadaan dimana *plaintext* berupa alfabet, angka, dan tanda baca sedangkan *ciphertext* berupa simbol maka alfabet berupa huruf kecil memiliki *ciphertext* sama dengan huruf kapitalnya tanpa mengubah ukuran simbol. Selain itu karena pentingnya tanda spasi maka untuk pengkodean dari alfabet ke alfabet tanda spasi selalu dikodekan dengan "@"". Akan diterapkan pembentukan *ciphertext* alfabet dari tabel 2.1 yang merujuk aturan Julius Caesar dapat di bentuk *ciphertext*. Misalkan seorang ibu meninggalkan pesan kepada anaknya, namun ia tidak mau orang lain tahu tentang pesannya, sehingga ibu tersebut menggunakan *ciphertext*. Pesan tersebut dengan *plaintext* sebagai berikut **UANGNYA IBU TARUH DI LACI KAMAR DAN KUNCINYA ADA DI DALAM BUKU MATEMATIKA DI ATAS MEJA**. Maka kiterapkan langkah-langkah pembentukan *ciphertext* sebagai berikut :

- a. Menentukan karakter yang akan dibuat *ciphertext* yaitu dengan *plaintext* sebagai berikut **UANGNYA IBU TARUH DI LACI KAMAR DAN KUNCINYA ADA DI DALAM BUKU MATEMATIKA DI ATAS MEJA**.
- b. Memilih graf yang memenuhi syarat $|E(G)| \geq t \leftrightarrow 138 \geq 26$.

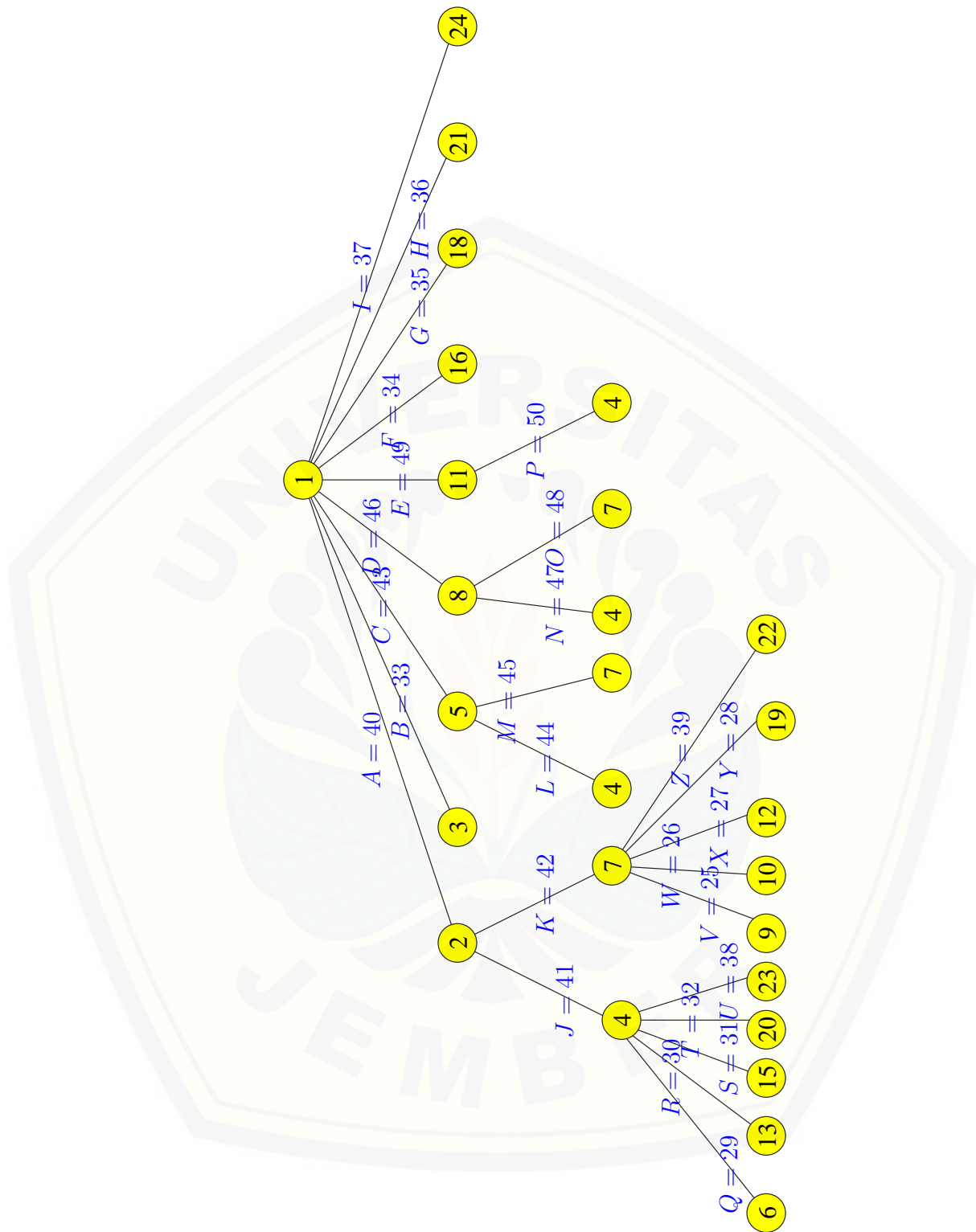
- c. Membentuk *antimagicness* super total selimut pada *joint* graf $G = nW_z + P_s$ yaitu melabeli titik dan sisi sehingga membentuk super $(4949, 128)$ - \mathcal{HATC} pada *joint* graf $3W_5 + P_6$ pada Gambar 4.1.
- d. Mengeliminasi sisi yang memiliki label $f_e > |V(G)| + t \leftrightarrow f_e > 24 + 26 \leftrightarrow f_e > 50$.
- e. Membangun diagram pohon berdasarkan *antimagicness* super $(4949, 128)$ - \mathcal{HATC} pada *joint* graf $3W_5 + P_6$.
- f. Membentuk tabel *ciphertext*.

Tabel 4.4 Pembentukan *Chipertext* Alfabet dari Gambar 4.4

<i>Plaintext</i>	Label sisi	$(\text{mod}26)$	<i>Chipertext</i>	<i>Plaintext</i>	Label sisi	$(\text{mod}26)$	<i>Ciphertext</i>
A	40	14	O	O	48	22	W
B	33	7	H	P	50	24	Y
C	43	17	R	Q	29	3	D
D	46	20	U	R	30	4	E
E	49	23	X	S	31	5	F
F	34	8	I	T	32	6	G
G	35	9	J	U	38	12	M
H	36	10	K	V	25	25	Z
I	37	11	L	W	26	0	A
J	41	15	P	X	27	1	B
K	42	16	Q	Y	28	2	C
L	44	18	S	Z	39	13	N
M	45	19	T	<i>sp.</i>			@
N	47	21	V				

Sehingga *plaintext* di atas apabila di tulis dalam bentuk *ciphertext* alfabet adalah sebagai berikut

**MOVJVCO@LHM@GOEMK@UL@SORL@QOTOE@UOV@Q
 MVRLVCO@OUO@UL@UOSOT@HMQM@TOGLQO@UL@OGOF@
 TXPO**



Gambar 4.4 Diagram Pohon Super $(4949, 128)$ - \mathcal{HATC} pada $Joint$ Graf $3W_5 + P_6$

4.4.2 Pembangunan *Ciphertext* Simbol Alfabet pada *Joint* Graf $3W_5 + P_6$ dengan $d = 20$

Karakter yang digunakan dalam pembangunan *ciphertext* sebanyak 46 yang terdiri dari huruf alfabet A sampai Z, angka dari 0 sampai 9, tanda baca berupa spasi (sp.), tanda baca titik (.), tanda baca koma (,), tanda tanya (?), tanda seru(!), tanda baca (#), tanda baca (%), tanda baca(*), tanda baca (&), tanda baca (@). Sehingga tercipta aturan pengkodean untuk bilangan (mod 46) dengan simbol sebagai berikut :

Tabel 4.5 Pengkodean untuk bilangan (mod 46)

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
ℵ	ħ	ι	Ƶ	ℓ	ϕ	ℜ	ℑ	/	∅	∠	∞	∂	∇	△	∨
Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	0	1	2	3	4	5
∃	¬	√	⊥	⊥	\	b	‡	#		♣	◇	♥	♠	†	‡
6	7	8	9	sp.	.	,	?	!	#	%	*	&	@		
§	¶	©	£	✓	✕	®	¥	∪	F	☞	☛	⌋	⌈	≡	

Akan diterapkan untuk membentuk *ciphertext* simbol alfabet dari tabel 4.5. Misalkan seorang bos yang memberikan perintah kepada sekretarisnya namun secara rahasia yaitu **KIRIMKAN DATA MELALUI EMAIL BIGBOSS1@YMAIL.COM**. Maka diterapkan langkah-langkah pembentukan *ciphertext* sebagai berikut :

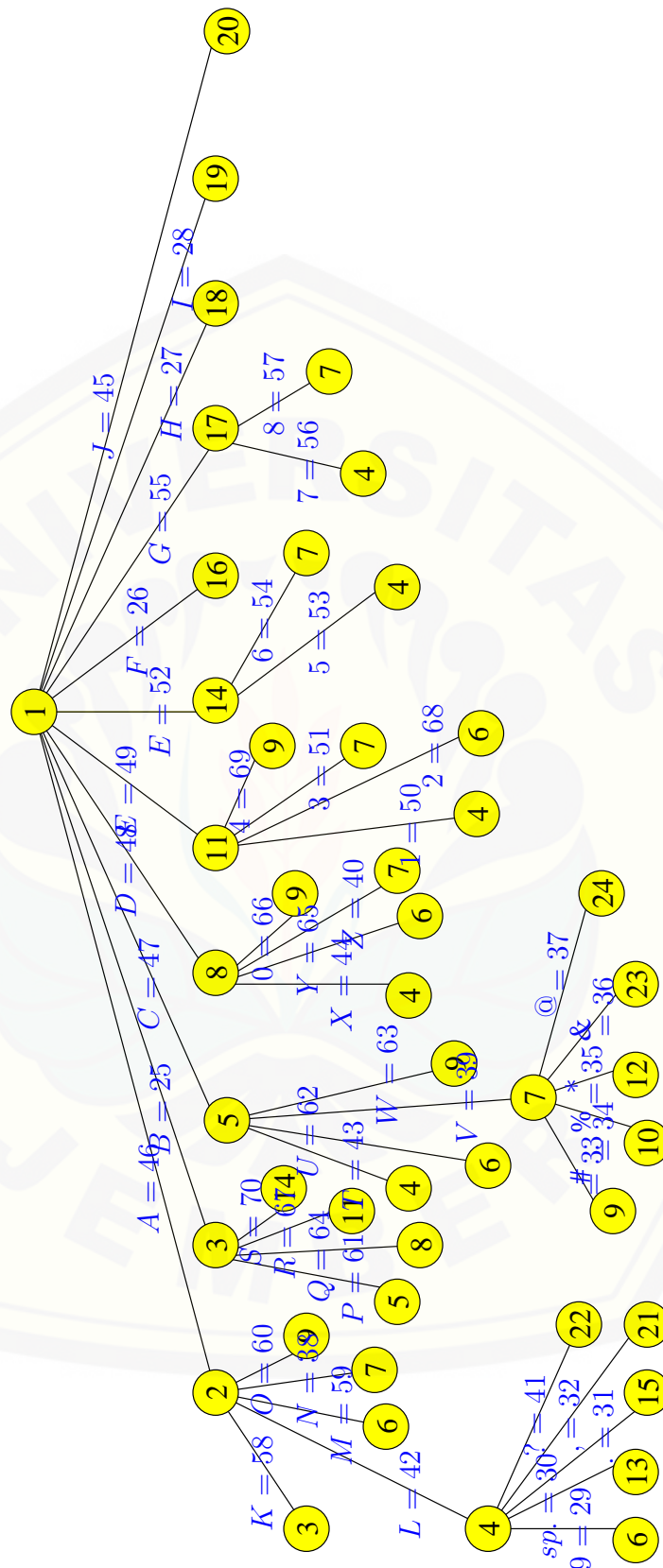
- Menentukan karakter yang akan dibuat *ciphertext* yaitu dengan *palintext* **KIRIMKAN DATA MELALUI EMAIL BIGBOSS1@YMAIL.COM**.
- Memilih graf yang memenuhi syarat $|E(G)| \geq t \leftrightarrow 138 \geq 46$.
- Membentuk *antimagicness* super total selimut pada *joint* graf $G = nW_z + P_s$ yaitu melabeli titik dan sisi sehingga membentuk super (5057, 20)-*HATC* pada *joint* graf $3W_5 + P_6$.
- Mengeliminasi sisi yang memiliki label $f_e > |V(G)| + t \leftrightarrow f_e > 24 + 46 \leftrightarrow f_e > 70$.

- e. Membangun diagram pohon berdasarkan *antimaginess* super $(5057, 20)\text{-HATC}$ pada *joint* graf $3W_5 + P_6$ pada Gambar 4.3.
- f. Membentuk tabel *ciphertext*.

Tabel 4.6 Pembentukan *Chipertext* Simbol Alfabet dari Gambar 4.5

<i>Plaintext</i>	Label sisi	$(mod46)$	<i>Chipertext</i>	<i>Plaintext</i>	Label sisi	$(mod46)$	<i>Ciphertext</i>
A	46	0	∞	N	59	13	∇
B	25	25		O	38	38	®
C	47	1	ħ	P	60	14	△
D	48	2	ι	Q	61	15	∇
E	49	3	Ƶ	R	64	18	√
F	52	6	℔	S	67	21	\
G	26	26	♣	T	70	24	#
H	55	9	∅	U	43	43	⌋
I	27	27	◇	V	62	16	∃
J	28	28	♡	W	39	39	¥
K	45	45	Ξ	X	63	17	¬
L	58	12	∂	Y	44	44	⌋
M	42	42	⌋	Z	65	19	⌋
<i>Plaintext</i>	Label sisi	$(mod46)$	<i>Chipertext</i>	<i>Plaintext</i>	Label sisi	$(mod46)$	<i>Chipertext</i>
0	40	40	∪	sp.	29	29	♠
1	66	20	⊥	.	30	30	†
2	50	4	ℓ	,	31	31	‡
3	68	22	ℓ	?	32	32	§
4	51	5	∅	!	41	41	ƒ
5	69	23	⌋	#	33	33	¶
6	53	7	∫	%	34	34	©
7	54	8	/	*	35	35	ℒ
8	56	10	∠	&	36	36	√
9	57	11	∞	@	37	37	⌋

Sehingga *plaintext* di atas apabila di tulis dalam bentuk *ciphertext* simbol alfabet adalah sebagai berikut $\Xi \diamond \sqrt{\diamond} \beth \in \nabla \spadesuit \aleph \# \spadesuit \beth \partial \aleph \partial \beth \diamond \spadesuit \beth \aleph \diamond \partial$
 $\spadesuit \|\diamond \clubsuit \|\text{®} \backslash \perp \text{⌋} \beth \aleph \diamond \partial \dagger \hbar \text{®} \beth$



Gambar 4.5 Diagram Pohon Super (5057, 20)- \mathcal{HATC} pada Joint Graf $3W_5 + P_6$

4.5 Hasil dan Pembahasan

Menurut hasil penelitian tersebut, dapat diketahui bahwa jika diketahui nilai batas atas d yang berlainan maka nilai awal a juga akan berlainan. Label titik yang digunakan adalah dari 1 hingga p_G dimana p_G adalah jumlah titik pada graf sedangkan label untuk sisi yang digunakan adalah dimulai dari $p_G + 1$ hingga $p_G + q_G$ dimana q_G merupakan jumlah sisi, sehingga $p_G + q_G$ merupakan jumlah titik dan sisi pada graf. Jika kedua label tersebut digunakan untuk melabeli sebuah graf dengan aturan yang diberikan diatas maka pelabelan tersebut disebut sebagai pelabelan total. Pelabelan total pada penelitian ini terfokuskan untuk *antimagicness* super total selimut pada *joint* graf. *Joint* graf yang dinotasikan dengan $G = nW_z + P_s$ definisi nW sebagai gabungan saling lepas dari n buah kopi graf W dan dapat juga dikatakan sebagai graf dengan n komponen, dimana setiap komponennya adalah graf W . Cara menemukan pengembangan partisi dan variasi nilai beda. Cara menemukan partisi yang tepat untuk *Joint* graf $G = nW_z + P_s$.

Tujuan dari penelitian ini adalah menentukan kardinalitas titik dan sisi *joint* graf $nW_z + P_s$ pada graf konektif, menentukan batas atas *antimagicness* super total selimut *joint* graf $nW_z + P_s$ pada graf konektif, menentukan nilai-nilai d *antimagicness* super total selimut *joint* graf $nW_z + P_s$ pada graf konektif, serta menentukan aplikasi *antimagicness* super total selimut *joint* graf dengan menggunakan *ciphertext* pada graf konektif. Untuk mencapai tujuan tersebut, langkah pertama yang dilakukan adalah menentukan kardinalitas dan batas atas dari *joint* graf $nW_z + P_s$. Setelah itu, pengembangan partisi dan variasi nilai beda dengan menemukan beberapa Lemma. Kemudian didapat sebuah teorema dan ilustrasi grafnya. Dari ilustrasi gambar tersebut akan digunakan untuk membangun *ciphertext*.

Berdasarkan hasil perhitungan didapat kardinalitas dengan himpunan titik $|V_1| = \{v_{ij}; 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n\}$ dan $|V_2| = \{x_k; 1 \leq k \leq s\}$ dan sisi $|E_1| = \{e_{lj}; 1 \leq l \leq c; 1 \leq j \leq n\}$ dan $|E_2| = \{x_k x_{k+1}; 1 \leq k \leq s-1\}$. Sedangkan jumlah titik $|V_1| = nm$ dan $|V_2| = s$ maka $p_G = |V_1| + |V_2| = nm + s$ dan jumlah sisi $|E_1| = nc$ dan $|E_2| = s - 1$ maka $q_G = |E_1| + |E_2| = nc + s - 1$ sedangkan p_H dan q_H merupakan selimut $p_H = m + s$ dan $q_H = c + s - 1$. Batas atas untuk *joint* graf pelabelan selimut super (a, d) - \mathcal{H} *antimagic* untuk graf konektif dengan $n \geq 2$ maka

$d \leq p_H^2 - sp_H + q_H^2 - sq_H + q_H$. Setelah batas atas diperoleh, peneliti mendapatkan 5 Lemma pada pengembangan partisi *joint* graf serta variasi nilai beda. Berikut adalah beberapa Partisi yang ditemukan:

1. $\mathcal{P}_{m,d_1}^n(i, j) = \{(i-1)n + j, 1 \leq i \leq m\}$ dengan beda $d_1 = m$
 $\sum_{i=1}^m \mathcal{P}_{m,d_1}^n(i, j) = \frac{m^2 n - nm}{2} + mj$

2. $\mathcal{P}_{m,d_2}^n(i, j) = \{(j-1)m + i, 1 \leq i \leq m\}$ dengan beda $d_2 = m^2$
 $\sum_{i=1}^m \mathcal{P}_{m,d_2}^n(i, j) = \frac{(m-m^2)}{2} + m^2 j$

- 3.

$$\mathcal{P}_{m,d_3}^n(i, j) = \begin{cases} \{(i-1)n + \frac{j+1}{2}; 1 \leq i \leq m, i \equiv 1 \pmod{2}\} \cup \\ \{\frac{j-n}{2} + in; 1 \leq i \leq m, i \equiv 0 \pmod{2}\}, j \equiv 1 \pmod{2} \\ \{\frac{j+1-n}{2} + in; 1 \leq i \leq m, i \equiv 1 \pmod{2}\} \cup \\ \{(i-1)n + \frac{j}{2}; 1 \leq i \leq m, i \equiv 0 \pmod{2}\}, j \equiv 0 \pmod{2} \end{cases}$$

dengan beda $d_3 = \frac{m}{2}$.

$$\sum \mathcal{P}_{m,d_3}^n(j) = \left\{ \frac{\binom{m}{4}}{4} + (2mn - n + 1) + \frac{m}{2} j \right\}$$

4. $\mathcal{P}_{m,d_4}^n(i, j) = \{1 + ni - j; 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n\}$ dengan beda $d_4 = -m$
 $\sum_{i=1}^m \mathcal{P}_{m,d_4}^n(i, j) = \mathcal{P}_{m,d_4}^n(j) = \left\{ \frac{n}{2}(m^2 + m) + m - mj \right\}$.

5. $\mathcal{P}_{m,d_5}^n(i, j) = \{mn + i - mj; 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n\}$ dengan beda $d_5 = -m^2$
 $\sum_{i=1}^m \mathcal{P}_{m,d_5}^n(i, j) = \mathcal{P}_{m,d_5}^n(j) = \left\{ \frac{m}{2}(2mn + m + 1) - m^2 j \right\}$.

- 6.

$$\mathcal{P}_{m,d_6}^n(i, j) = \begin{cases} \{ni - \frac{n}{2} - \frac{j}{2} + 1; 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n; i \text{ ganjil}; j \text{ ganjil}\} \\ \{ni - \frac{j}{2} + \frac{1}{2}; 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n; i \text{ genap}; j \text{ ganjil}\} \\ \{ni + \frac{j}{2} + 1; 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n; i \text{ ganjil}; j \text{ genap}\} \\ \{ni - \frac{j}{2} - \frac{n}{2} + \frac{1}{2}; 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n; i \text{ genap}; j \text{ genap}\} \end{cases}$$

dengan beda $d_6 = \frac{-m}{2}$

$$\sum_{i=1}^m \mathcal{P}_{m,d_6}^n(i, j) = \mathcal{P}_{m,d_6}^n(j) = \left\{ \frac{m}{4}(2mn - n + 3) - \frac{m}{2} j \right\}$$

$$7. \mathcal{P}_{m,d_7}^n(i, j) = 2i + 2jm - j - 2m; 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n \text{ dengan beda } d_7 = 2m^2 - m$$

$$\sum_{i=1}^m \mathcal{P}_{m,d_7}^n(i, j) = \mathcal{P}_{m,d_7}^n(j) = \mathcal{P}_{m,d_7}^n(j) = \{(1 + 2jm - j - m)m\}.$$

$$8. \mathcal{P}_{m,d_8}^n(i, j) = 2mn - n - 2jm + j + 2i - 1; 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n \text{ dengan beda } d_8 = -(2m^2 - m)$$

$$\sum_{i=1}^m \mathcal{P}_{m,d_8}^n(i, j) = \mathcal{P}_{m,d_8}^n(j) = \{(2mn - n - 2jm + j + m)m\}.$$

dari lemma yang ada didapat sebuah teorema baru dari *joint* graf yang dinotasikan dengan $G = nW_z + P_s$, memiliki super $(a, d) - \mathcal{H} - antimagic$ total covering dengan $a = m_1 - m_1^2 + 2m_2^2n - nm_2 + m_2^2 + (2m_1 - 1)n + \frac{m_3n}{2}(m_3 - 1) + (2m_2 - 1)n + (2m_1 - 1)n + \frac{m_4n}{2}(m_4 + 1) + m_4 + nm_3 + (2m_2 - 1)n + (2m_1 - 1)n + \frac{m_5}{2}(1 - m_5) + nm_4 + nm_3 + (2m_2 - 1)n + (2m_1 - 1)n + \frac{m_6}{2}(2m_6n + m_6 + 1) + nm_5 + nm_4 + nm_3 + (2m_2 - 1)n + (2m_1 - 1)n + \frac{m_7}{4}(2m_7n - n + 1) + nm_6 + nm_5 + nm_4 + nm_3 + (2m_2 - 1)n + (2m_1 - 1)n + \frac{m_8}{4}(2m_8n + n + 3) + nm_7 + nm_6 + nm_5 + nm_4 + nm_3 + (2m_2 - 1)n + (2m_1 - 1)n + \frac{nz_1}{2}[2(1 + z_1) + (n - 1)(2z_1 + 1)] + \frac{nz_2}{2}[2(1 + z_2) + (n - 1)(2z_2 + 1)] + 2(m_1 - 1)mn^2 + \frac{c_1n}{2}(c_1 - 1) + nm + s + \frac{c_2n}{2}(c_2 + 1) + c_2 + nc_1 + nm + s + \frac{c_3}{2}(1 - c_3) + nc_2 + nc_1 + nm + s + \frac{c_4}{2}(2c_4n + n_4 + 1) + nc_3 + nc_2 + nc_1 + nm + s + \frac{c_5}{4}(2c_5n - n + 1) + nc_4 + nc_3 + nc_2 + nc_1 + nm + s + \frac{c_6}{4}(2c_6n + n + 3) + nc_5 + nc_4 + nc_3 + nc_2 + nc_1 + nm + s + (s - 1)(nm + s + nc) + \frac{s(s-1)}{2}$ dan $d = 2m_1^2 - m_1 - 2m_2^2 + m_2 + m_3 - m_4 + m_5^2 - m_6^2 + \frac{m_7}{2} - \frac{m_8}{2} + c_1 - c_2 + c_3^2 - c_4^2 + \frac{c_5}{2} - \frac{c_6}{2}$.

Teorema tersebut digunakan untuk membangun *ciphertext* dengan menggunakan metode eliminasi. Adapun langkah-langkah metode eliminasi sebagai berikut:

- Menentukan karakter yang akan dibuat *ciphertext*.
- Memilih graf yang memenuhi syarat $|E(G)| \geq t$.
- Membentuk *antimagicness* super total selimut pada *joint* graf $G = nW_z + P_s$.
- Mengeliminasi sisi yang memiliki label $f_e > |V(G)| + t$.
- Membangun diagram pohon berdasarkan *antimagicness* super total selimut pada *joint* graf $G = nW_z + P_s$.
- Membentuk tabel *ciphertext*.

Sehingga di dapat *ciphertext* alfabet dan *ciphertext* simbol *ciphertext* berdasarkan *antimagicness* super total selimut pada *joint* graf $G = nW_z + P_s$ dengan m, n, z dan s yang disajikan dalam tabel berikut:

Tabel 4.7 *Ciphertext* Alfabet *Antimagicness* Super (4949, 128)-*HATC* pada *Joint* Graf $3W_5 + P_6$

<i>Plaintext</i>	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
<i>Chipertext</i>	O	H	R	U	X	I	J	K	L	P	Q	S	T	V
<i>Plaintext</i>	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	<i>sp.</i>	
<i>Chipertext</i>	W	Y	D	E	F	G	M	Z	A	B	C	N	@	

Tabel 4.8 *Ciphertext* Simbol Alfabet *Antimagicness* Super (5057, 20)-*HATC* pada *Joint* Graf $3W_5 + P_6$

<i>Plaintext</i>	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	
<i>Chipertext</i>	ℵ	∥	ħ	ι	Ƶ	ℜ	♣	∅	◇	♥	Ξ	∂	⊔	∇	®	
<i>Plaintext</i>	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	0	1	2	3	
<i>Chipertext</i>	△	∇	√	\	‡	⊃	¥	¬	⌈	⌋	∩	⊥	ℓ	ℓ	ℓ	
<i>Plaintext</i>	4	5	6	7	8	9	<i>sp.</i>	.	,	?	!	#	%	*	&	@
<i>Chipertext</i>	∅	‡	ℜ	′	∠	∞	♠	†	‡	§	F	¶	©	£	√	✠

Fokus penelitian pertama kali tertuju pada partisi. Pelabelan untuk setiap partisi dimulai dari label 1 (satu) sehingga jika label yang dibutuhkan dimulai dari b maka setiap anggota partisi ditambahkan b atau disebut sebagai $\oplus b$. Hasil diatas, ditunjukkan 5 Lemma partisi. Lima macam Lemma partisi yang telah ditemukan serta 3 macam Lemma partisi yang sudah ada selanjutnya dikombinasikan sehingga terbentuklah sebuah teorema. Dari teorema tersebut di dapat nilai awal a dan beda d dalam bobot total selimut yaitu $W = a + dj$ untuk $\{j = 1, 2, \dots, n\}$.

Selanjutnya adalah pengembangan *ciphertext*. *ciphertext* yang sudah ada dikembangkan kode tidak selalu berbentuk alfabet. Bentuk kode yang lain seperti simbol bisa juga digunakan. *Plaintext* dikorespondensi satu-satu dengan label sisi, agar *plaintext* dapat dikorespondensi satu-satu dengan *ciphertext* maka *ciphertext* harus dikorespondensi satu-satu dengan label sisi. Label sisi merupakan kunci yang menghubungkan *plaintext* dan *ciphertext*. Graf yang dipilih sedikitnya memiliki sisi sebanyak karakter yang digunakan. Hal ini mengakibatkan ada sisi yang tidak digunakan. Apabila peletakan karakter dilakukan secara acak tanpa ada keterkaitan dengan *ciphertext* akan menimbulkan teknik yang rancu. Oleh sebab itu, perlu ditetapkan suatu aturan yang menghubungkan label sisi dengan *ciphertext*. Mengacu pada aturan Julius Caesar yang menghubungkan alfabet dengan (mod 26), dibuat aturan yang menghubungkan simbol dengan bilangan modulo. Penentuan bilangan modulo disesuaikan dengan banyaknya karakter simbol, sedangkan karakter simbol dibuat sebanyak karakter *plaintext*. Misalkan karakter *plaintext* sebanyak t maka bilangan modulo yang digunakan adalah (mod t). Peneliti menggunakan karakter yang digunakan dalam pembangunan *ciphertext* sebanyak 46 yang terdiri dari huruf alfabet A sampai Z, angka dari 0 sampai 9, tanda baca berupa spasi (sp.), tanda baca titik (.), tanda baca koma (,), tanda tanya (?), tanda seru(!), tanda baca (#), tanda baca (%), tanda baca(*), tanda baca (&), tanda baca (@). Sehingga tercipta aturan pengkodean untuk bilangan (mod 46) dalam *antimagicness* super (a, d) - \mathcal{H} *antimagic total covering* pada *joint* graf $nW_z + P_s$

Berdasarkan hasil penelitian dan perhitungan yang telah dilakukan sebelumnya, terdapat beberapa pelabelan super $(a, d) - \mathcal{H} - \textit{antimagic total covering}$ pada *joint* graf. Berdasarkan ilustrasi contoh pelabelan hasil penelitian yang telah ditemukan,

diharapkan dapat membantu peneliti lain yang akan melakukan penelitian sejenis. Beberapa pelabelan yang belum ditemukan oleh penulis disajikan pada masalah terbuka berikut:

Masalah terbuka 4.5.1. *Pelabelan super $(a, d) - \mathcal{H}$ - antimagic total covering pada joint pada graf diskonektif.*



BAB 5. PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dari pembahasan pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa:

1. Kardinalitas titik dan sisi *joint* graf $nW_z + P_s$ pada graf konektif memiliki himpunan titik $|V_1| = \{v_{ij}; 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n\}$ dan $|V_2| = \{x_k; 1 \leq k \leq s\}$ dan sisi $|E_1| = \{e_{lj}; 1 \leq l \leq c; 1 \leq j \leq n\}$ dan $|E_2| = \{x_k x_{k+1}; 1 \leq k \leq s-1\}$. Sedangkan jumlah titik $|V_1| = nm$ dan $|V_2| = s$ maka $p_G = |V_1| + |V_2| = nm + s$ dan jumlah sisi $|E_1| = nc$ dan $|E_2| = s - 1$ maka $q_G = |E_1| + |E_2| = nc + s - 1$ sedangkan p_H dan q_H merupakan selimut $p_H = m + s$ dan $q_H = c + s - 1$.
2. Batas atas *antimagicness* super total selimut *joint* graf $nW_z + P_s$ dengan $n \geq 2$ maka $d \leq p_H^2 - sp_H + q_H^2 - sq_H + q_H$.
3. Partisi dan variasi nilai beda yang di temukan adalah
 - a. $\mathcal{P}_{m,d_7}^n(i, j) = 2i + 2jm - j - 2m; 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ dengan beda $d_7 = 2m^2 - m$
 $\sum_{i=1}^m \mathcal{P}_{m,d_7}^n(i, j) = \mathcal{P}_{m,d_7}^n(j) = \mathcal{P}_{m,d_7}^n(j) = \{(1 + 2jm - j - m)m\}$.
 - b. $\mathcal{P}_{m,d_8}^n(i, j) = 2mn - n - 2jm + j + 2i - 1; 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ dengan beda $d_8 = -(2m^2 - m)$
 $\sum_{i=1}^m \mathcal{P}_{m,d_8}^n(i, j) = \mathcal{P}_{m,d_8}^n(j) = \{(2mn - n - 2jm + j + m)m\}$.

dari partisi yang ditemukan dan di kombinasikan dengan partisi yang ada maka di dapat sebuah teorema yang berbunyi: Misal m, n, z, s dan c adalah bilangan bulat positif dengan $n \geq 2$ maka *joint* graf yang dinotasikan dengan $G = nW_z + P_s$, memiliki super $(a, d) - \mathcal{H} - antimagic$ total covering dengan $a = m_1 - m_1^2 + 2m_2^2n - nm_2 + m_2^2 + (2m_1 - 1)n + \frac{m_3n}{2}(m_3 - 1) + (2m_2 - 1)n + (2m_1 - 1)n + \frac{m_4n}{2}(m_4 + 1) + m_4 + nm_3 + (2m_2 - 1)n + (2m_1 - 1)n + \frac{m_5}{2}(1 - m_5) + nm_4 +$

$$nm_3 + (2m_2 - 1)n + (2m_1 - 1)n + \frac{m_6}{2}(2m_6n + m_6 + 1) + nm_5 + nm_4 + nm_3 + (2m_2 - 1)n + (2m_1 - 1)n + \frac{m_7}{4}(2m_7n - n + 1) + nm_6 + nm_5 + nm_4 + nm_3 + (2m_2 - 1)n + (2m_1 - 1)n + \frac{m_8}{4}(2m_8n + n + 3) + nm_7 + nm_6 + nm_5 + nm_4 + nm_3 + (2m_2 - 1)n + (2m_1 - 1)n + \frac{nz_1}{2}[2(1 + z_1) + (n - 1)(2z_1 + 1)] + \frac{nz_2}{2}[2(1 + z_2) + (n - 1)(2z_2 + 1)] + 2(m_1 - 1)mn^2 + \frac{c_1n}{2}(c_1 - 1) + nm + s + \frac{c_2n}{2}(c_2 + 1) + c_2 + nc_1 + nm + s + \frac{c_3}{2}(1 - c_3) + nc_2 + nc_1 + nm + s + \frac{c_4}{2}(2c_4n + n_4 + 1) + nc_3 + nc_2 + nc_1 + nm + s + \frac{c_5}{4}(2c_5n - n + 1) + nc_4 + nc_3 + nc_2 + nc_1 + nm + s + \frac{c_6}{4}(2c_6n + n + 3) + nc_5 + nc_4 + nc_3 + nc_2 + nc_1 + nm + s + (s - 1)(nm + s + nc) + \frac{s(s-1)}{2}$$

dan $d = 2m_1^2 - m_1 - 2m_2^2 + m_2 + m_3 - m_4 + m_5^2 - m_6^2 + \frac{m_7}{2} - \frac{m_8}{2} + c_1 - c_2 + c_3^2 - c_4^2 + \frac{c_5}{2} - \frac{c_6}{2}$.

4. Aplikasi *antimagicness* super total selimut *joint* graf dengan menggunakan *chipertext* yaitu *chipertext* alfabet dan *chipertext* simbol. Berdasarkan *antimagicness* super total selimut pada *joint* graf $G = nW_z + P_s$ dengan m, n, z dan s yang disajikan dalam tabel berikut:

Tabel 5.1 *Ciphertext* Alfabet *Antimagicness* Super (4949, 128)-*HATC* pada *Joint* Graf $3W_5 + P_6$

<i>Plaintext</i>	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
<i>Chipertext</i>	O	H	R	U	X	I	J	K	L	P	Q	S	T	V
<i>Plaintext</i>	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	<i>sp.</i>	
<i>Chipertext</i>	W	Y	D	E	F	G	M	Z	A	B	C	N	@	

Tabel 5.2 *Ciphertext* Simbol Alfabet *Antimagicness* Super (5057, 20)-*HATC* pada *Joint* Graf $3W_5 + P_6$

<i>Plaintext</i>	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	
<i>Chipertext</i>	ℵ		ħ	ι	∫	ℜ	♣	∅	◇	♥	Ξ	∂	⊔	∇	®	
<i>Plaintext</i>	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	0	1	2	3	
<i>Chipertext</i>	△	∇	√	\	‡	⊔	∃	¥	¬	⌈	⌋	∩	⊥	ℓ	♭	
<i>Plaintext</i>	4	5	6	7	8	9	<i>sp.</i>	.	,	?	!	#	%	*	&	@
<i>Chipertext</i>	∅	‡	ℑ	′	∠	∞	♠	†	‡	§	F	¶	©	£	√	⊠

5.2 Saran

Berdasarkan hasil penelitian mengenai *antimagicness* super total selimut pada *joint* graf pada penelitian ini yang ditemukan hanya pada graf konektif, serta mengacu pada Masalah Terbuka dari hasil penelitian yang telah ditemukan, maka peneliti memberikan saran kepada pembaca agar dapat melakukan penelitian *antimagicness* super total selimut *joint* graf pada graf diskonektif.



DAFTAR PUSTAKA

- Agustin, I. H., Dafik, dan Milasari, M.D. 2016. *Super Complete-Antimagicness Of Amalgamation Total Of Complete Graph*. Working Paper. Jember:CGANT UNEJ.
- Azizah, Y.N. 2016. *Super (a, d) - A_O^P Anti Ajaib Total Dekomposisi Graf Shackle Generalisasi Antiprisma untuk Pengembangan Ciphertext dan Keterampilan Berpikir Tingkat Tinggi*. Program Studi Pendidikan Matematika FKIP Universitas Jember.
- Bača, Bronkovic, L., Lascsakova, M., Phanalasy, and Fenovcikova, A. S. 2013. On d -antimagic labelings of plane graphs. *Electonica Journal of Graph Theory and Application*, **1**. 28-39.
- Bača dkk. 2007. Edge Antimagic Graphs. *Discrete Mathematics*, 307 (2007) 12321244
- Carlson, K. (2006). Generalized book and cm snakes and prime graphs. *Ars Combinatoria*, **80**:215-221.
- Dafik. 2007. *Structural Properties and Labeling of Graphs*. Australia : Tidak dipublikasikan (Tesis).
- Dafik, M.Miller, J.Ryan and M.Bača. 2009. On Super (a,d) -Edge Antimagic Total Labeling of Disconnected graphs. *Discrete Math*.
- Dafik, Moh. Hasan, Y.N. Azizah, Ika Hesti Agustin, A Generalized Shackle of Any Graph H Admits a Super H -Antimagic Total Labeling, *Mathematics in Computer Science Journal*, (2016). Submitted.
- Guitierrez, A. dan Liado,A.2005. Magic Coverings. *Of Combin Math and Combin Comput*. Vol. **55**: 451-461.
- Harsya, A.Y. 2014. *Bilangan Kromatik pada Pengoperasian Graf Lintasan dengan Graf Lingkaran*. Jurusan Matematika FMIPA Universitas Jember.
- Hartsfield, N. and Ringel, G. 1994. *Pearls in Graph Theory*. Boston-San Diego-NewYork-London: Academic Press.

- Inayah, N. 2013. *Pelabelan $(a, d) - H$ - Anti Ajaib pada Beberapa Kelas Graf*. Bandung: Institut Teknologi Bandung.
- Inayah, N., Salman, A.N.M. and Simanjuntak, R. 2009. On (a, d) -H-Antimagic Covering of Graph. *The Journal of Combinatorial Mathematics dan Combinatorial Computing*, **71**, 273-281.
- Inayah, N., Salman, A.N.M. and Simanjuntak, R. 2013. On (a, d) -H-Antimagic Total Labelings For Shackles of A Connected Graph H. *Australasian Journal of*, **57**, 127-138.
- Karyanti. 2012. *Pelabelan Selimut (a, d) -H-Anti Ajaib Super pada Graf Fan, Sun, Generalized Petersen*. Tidak dipublikasikan (Skripsi). Surakarta: Universitas Sebelas Maret.
- Lipschutz, S dan Lipson, M.L. 2002. *Matematika Diskret*. Jakarta: Erlangga.
- Prihandoko, A. C. 2003. *Pengantar pada Teori Grup*. Jember: FKIP Universitas Jember.
- Pudyaningrum, P.R.H., Agustin, I.H., and Dafik 2014. Pengembangan Total Selimut Super pada Graf Shackle Triangular Book. *Prosiding Semnas Pendidikan Matematika Ahmad Dahlan*.
- Roosen, Kenneth H. 2003. *Discrete Mathematics and Its Application*. New York: The McGraw-Hill Companies.
- Simanjuntak, R., Salman, A. 2010. Super $(a, d) - \mathcal{H}$ Antimagic Total Labelings For Shackles of A Connected Graph H. *Australian Journal of Combinatorics*.
- Slamin. 2009. *Pendekatan Teori Graf*. Jember : Universitas Jember.
- Wuni, S.C., Agustin, I.H., and Dafik 2014. Super $(a, d) - \mathcal{H}$ Antimagic Total Covering pada Gabungan Saling Lepas Graf Semi Windmill. *Prosiding Semnas Pendidikan Matematika Ahmad Dahlan*.