



**ANALISA *ANTIMAGICNESS* SUPER DARI
SHACKLE GRAF PARASUT DAN APLIKASINYA
PADA *POLYALPHABETIC CIPHER***

SKRIPSI

Oleh

Riza Nurfadila

NIM 121810101018

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER**

2016



**ANALISA *ANTIMAGICNESS* SUPER DARI
SHACKLE GRAF PARASUT DAN APLIKASINYA
PADA *POLYALPHABETIC CIPHER***

SKRIPSI

diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi syarat untuk mencapai
gelar sarjana sains

Oleh

Riza Nurfadila

NIM 121810101018

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER**

2016

PERSEMBAHAN

Dengan menyebut nama Allah yang Maha Pengasih lagi Maha Penyayang, serta sholawat salam atas junjunganku Nabi Muhammad S.A.W, kupersembahkan suatu kebahagiaan dalam perjalanan hidupku teriring rasa terima kasih kepada:

1. Orang tuaku tercinta dan terkasih : Ayahanda Suryanto dan Ibunda Yunaini, serta kedua Adikku Putri dan Citra yang selalu mengalirkan rasa cinta dan kasih sayangnya serta doa yang tidak pernah putus yang mengiringku dalam meraih cita-cita;
2. Ibu Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si., dan Bapak Kusbudiono, S.Si., M.Si., selaku Dosen Pembimbing dan Prof. Drs. Dafik, M.Sc.,Ph.D., yang telah memberikan ilmu, meluangkan waktu, motivasi, dan perhatian dalam penulisan skripsi ini;
3. Ibu Dian Anggraeni, S.Si., M.Si., selaku Dosen Pembimbing Akademik yang selalu memberi motivasi;
4. Guru dan dosen-dosen yang telah memberikan ilmu dan membimbing dengan penuh kesabaran;
5. Sahabat-sahabat terbaikku dalam BATHICS 2012 yang senantiasa membantuku dan menorehkan sebuah pengalaman hidup yang tak terlupakan;
6. Teman-teman perjuangan graf yang selalu berbagi suka maupun duka dan selalu memberikan dukungan untuk terus semangat; pengalaman berharga.
7. Almamater tercinta Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

MOTTO

"Janganlah kamu bersikap lemah dan janganlah pula bersedih hati,
padahal kamu orang-orang yang paling tinggi derajatnya, jika
orang-orang yang beriman."

(Terjemahan QS. Ali-Imran:139)*)

*) Departemen Agama Republik Indonesia. 2004. *Al-Qur'an dan Terjemahannya*.
Bandung. CV Penerbit J-ART.

PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Riza Nurfadila

NIM : 121810101018

Menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang berjudul:

Analisa Antimagicness Super dari Shackle Graf Parasut dan Aplikasinya pada Polyalphabetic Cipher adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali jika dalam pengutipan substansi disebutkan sumbernya, dan belum diajukan pada instansi manapun, serta bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa adanya tekanan dan paksaan dari pihak manapun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, Juni 2016

Yang menyatakan,

Riza Nurfadila

NIM. 121810101018

SKRIPSI

**ANALISA *ANTIMAGICNESS* SUPER DARI
SHACKLE GRAF PARASUT DAN APLIKASINYA
PADA *POLYALPHABETIC CIPHER***

Oleh

RizaNurfadila
NIM 121810101018

Pembimbing

Dosen Pembimbing Utama : Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si

Dosen Pembimbing Anggota : Kusbudiono, S.Si., M.Si

PENGESAHAN

Skripsi berjudul *Analisa Antimagicness Super dari Shackle Graf Parasut dan Aplikasinya pada Polyalphabetic Cipher* telah diuji dan disahkan oleh Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam pada:

Hari / tanggal :

Tempat : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas
Jember

Tim Penguji :

Ketua,

Sekretaris,

Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si.

Kusbudiono, S.Si., M.Si.

NIP.19840801 200801 2 006

NIP.19770430 200501 1001

Anggota 1,

Anggota 2,

Prof. Drs. Dafik, M.Sc, Ph.D.

Kosala Dwidja Purnomo, S.Si., M.Si.

NIP.19680802 199303 1 004

NIP.196908281998021001

Mengesahkan,

Dekan

Drs. Sujito, Ph.D

NIP. 19610204 198711 1 001

RINGKASAN

ANALISA *ANTIMAGICNESS* SUPER DARI *SHACKLE* GRAF PARASUT DAN APLIKASINYA PADA *POLYALPHABETIC CIPHER*; Riza Nurfadila, 121810101018; 2016: 57 halaman; Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Jember.

Teori graf pertama kali diperkenalkan oleh L. Euler, matematikawan asal Swiss pada tahun 1736. Permasalahan yang cukup menarik dalam teori graf adalah pelabelan graf yang diperkenalkan oleh Rosa di tahun 1967. Pada Tahun 2012, Inayah dkk mengembangkan pelabelan super *antimagic* total selimut yang merupakan suatu fungsi bijektif sehingga terdapat bobot yang merupakan deret aritmatika $a, a + d, a + 2d, \dots, a + (t - 1)d$ dengan label selimut pada graf selalu berbeda dan berurutan.

Pada penelitian ini mengkaji mengenai Analisa *Antimagicness* Super dari *Shackle* Graf Parasut dan Aplikasinya pada *Polyalphabetic Cipher*. *Shackle* dari graf parasut ($shack(\mathcal{P}_{m,e,n})$) memiliki titik $V(G) = \{P\} \cup \{x_j, x_{j+1}; 1 \leq j \leq n\} \cup \{y_{kj}; 1 \leq k \leq 2m - 2, 1 \leq j \leq n\}$ dan $E(G) = \{u_j, u_{j+1}; 1 \leq j \leq n\} \cup \{e_{lj}; 1 \leq l \leq 3m - 2, 1 \leq j \leq n\}$. Dari himpunan titik dan sisi pada *shackle* graf parasut tersebut didapatkan $|V(G)| = p_G = 2nm - n + 2$, $|V(H)| = p_H = 2m + 1$, $|E(G)| = 3nm - n + 1$, dan $|E(H)| = 3m$.

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode deduktif. Langkah-langkah dalam metode deduktif yaitu: memilih graf, mencari kardinalitas dari elemen graf beserta batas atasnya, melabeli elemen graf sampai terbentuk pola sedemikian hingga menghasilkan bobot total yang membentuk barisan aritmatika. Langkah akhir dalam metode ini adalah menentukan fungsi bijektif yang akan menjadi teorema untuk pelabelan- (a, d) - \mathcal{P}_m -*antimagic* total selimut pada $shack(\mathcal{P}_{m,e,n})$. Pada penelitian ini, diperoleh batas atas $d \leq p_H^2 + q_H^2 - 2p_H - q_H$. Sehingga, teorema baru untuk pelabelan- (a, d) - \mathcal{H} *antimagic* total selimut yang dihasilkan adalah $W = [a + dj]_{j=1}^n$ dengan $a = 4nm - 2n + 9 + c_2 + r_2 + \frac{n}{2}(c_1^2 - c_1 + c_2^2 + c_2 + r_1^2 - r_1 + r_2^2 + r_2) + \frac{1}{2}(c_3 -$

$$c_3^2 + c_4(2c_4n + c_4 + 1) + r_3 - r_3^2 + r_4(2r_4n + r_4 + 1)) + \frac{1}{4}(c_5(2c_5n - n + 1) + c_6(2c_6n + n + 3) + c_7(c_7n + 2n - c_7 + 4) + c_8(3c_8n + c_8 - 2n) + r_5(2r_5n - n + 1) + r_6(2r_6n + n + 3) + r_7(r_7n + 2n - r_7 + 4) + r_8(3r_8n + r_8 - 2n)) + c_1(n + 2) + \sum_{s=2}^8 c_s(n \sum_{t=1}^{s-1} c_t + n + 2) + r_1(2mn - n + 3) + \sum_{s=2}^8 r_s(n \sum_{t=1}^{s-1} r_t + 2mn - n + 3)$$

dan $d = [(c_1 - c_2 + c_3^2 - c_4^2 + \frac{c_5}{2} - \frac{c_6}{2} + (\frac{c_7^2}{2} - c_7) - (\frac{c_8^2}{2} - c_8) + r_1 - r_2 + r_3^2 - r_4^2 + \frac{r_5}{2} - \frac{r_6}{2} + (\frac{r_7^2}{2} - r_7) - (\frac{r_8^2}{2} - r_8) + 4)j]_{j=1}^n$

Teorema tersebut dapat digunakan untuk membangun *ciphertext* alfabet dengan aturan Julius Caesar dan *ciphertext* simbol dengan aturan pengkodean tertentu. Namun, pada penelitian ini pelabelan untuk *shackle* graf parasut diskonektif belum ditemukan sehingga dalam penelitian ini diajukan open problem.

Masalah terbuka 0.0.1. *Super (a, d) - \mathcal{H} -antimagic total selimut pada shackle graf parasut diskonektif ($shack(\mathcal{P}_{m,e,n})$) untuk $n \geq 2$.*

KATA PENGANTAR

Puji syukur kehadirat Allah SWT atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul *Analisa Antimagicness Super dari Shackle Graf Parasut dan Aplikasinya pada Polyalphabetic Cipher*. Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat menyelesaikan pendidikan strata satu (S1) pada Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih atas bantuan, serta bimbingan dan dukungan dalam penyusunan skripsi ini, terutama kepada yang terhormat:

1. Drs. Sujito, Ph.D., selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
2. Kusbudiono, S.Si., M.Si., selaku Ketua Jurusan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
3. Dian Anggraeni, S.Si., M.Si., selaku Dosen Pembimbing Akademik yang selalu memberikan motivasi;
4. Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si., selaku Dosen Pembimbing Utama, Kusbudiono, S.Si., M.Si., selaku Dosen Pembimbing Anggota, Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D., selaku Dosen Penguji I dan Kosala Dwidja Purnomo, S.Si., M.Si., selaku Dosen Penguji II yang telah meluangkan waktu, pikiran, dan perhatian dalam penulisan skripsi ini;
5. Bathic's 12 dan teman - teman seperjuangan graf yang telah menjadi keluarga dan teman bagiku. Terima kasih telah mewarnai hidupku selama kurang lebih 4 tahun ini.

Semoga bantuan, bimbingan, dan dorongan beliau dicatat sebagai amal baik oleh Allah SWT dan mendapat balasan yang sesuai dari-Nya. Selain itu, penulis juga menerima segala kritik dan saran dari semua pihak demi

kesempurnaan skripsi ini. Akhirnya penulis berharap, semoga tulisan ini dapat bermanfaat.

Jember, Juni 2016

Penulis



DAFTAR ISI

	Halaman
HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PERSEMBAHAN	ii
HALAMAN MOTTO	iii
HALAMAN PERNYATAAN	iv
HALAMAN PEMBIMBING	v
HALAMAN PENGESAHAN	vi
RINGKASAN	vii
KATA PENGANTAR	ix
DAFTAR ISI	xi
DAFTAR GAMBAR	xiii
DAFTAR TABEL	xiv
DAFTAR LAMBANG	xv
BAB 1 PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	2
1.3 Tujuan Penelitian	3
1.4 Manfaat Penelitian	3
BAB 2 TINJAUAN PUSTAKA	4
2.1 Konsep Dasar dan Terminologi Graf	4
2.2 Graf Khusus	8
2.3 Operasi Graf	10
2.4 Pelabelan Graf	11
2.5 Lemma Batas Atas d	12
2.6 Fungsi dan Barisan Aritmatika	13
2.7 Partisi dengan Menetapkan Nilai Beda (d)	15
2.8 Aplikasi Graf	18
2.9 Hasil Pelabelan Super $(a, d) - \mathcal{H}$ - <i>Antimagic</i> Total Selimut	20

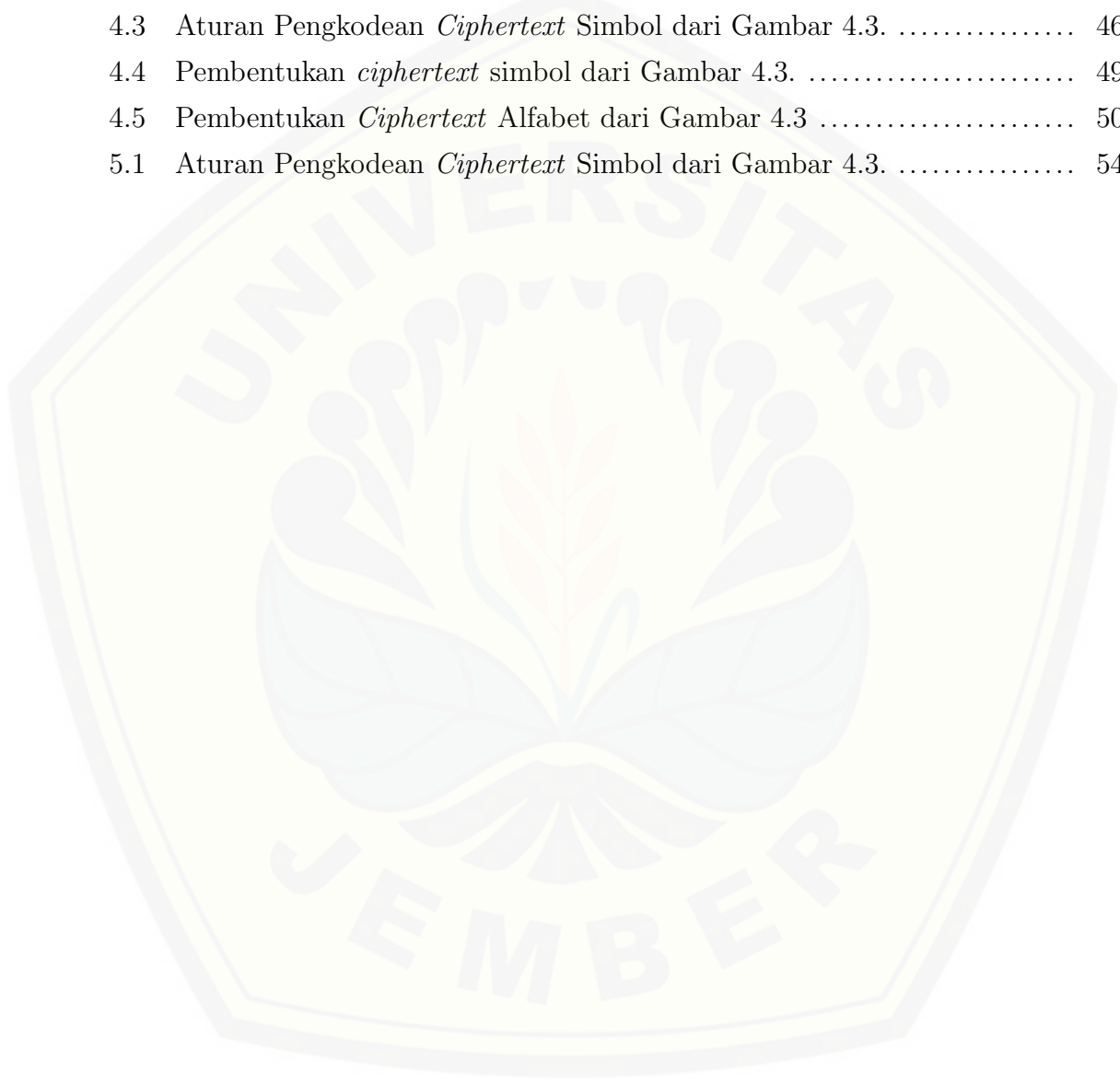
BAB 3	METODE PENELITIAN	21
3.1	Jenis Penelitian	21
3.2	Rancangan Penelitian	21
BAB 4	HASIL DAN PEMBAHASAN	25
4.1	Kardinalitas dan Batas Atas	25
4.2	Pengembangan Partisi dan Variasi Nilai Beda	27
4.3	Super (a,d) - \mathcal{P}_m - <i>Antimagic</i> Total Selimut pada <i>Shackle</i> Graf Parasut	29
4.4	Pembangunan <i>Ciphertext</i> dari Super (a,d) - \mathcal{P}_m - <i>Antimagic</i> Total Selimut pada <i>Shackle</i> Graf Parasut	39
4.4.1	Pembangunan <i>Ciphertext</i> Alfabet dari Super (a,d) - \mathcal{P}_m - <i>Antimagic</i> Total Selimut pada <i>Shackle</i> Graf Parasut	40
4.4.2	Pembangunan <i>Ciphertext</i> Simbol dari Super (a,d) - \mathcal{P}_m - <i>Antimagic</i> Total Selimut pada <i>Shackle</i> Graf Parasut	43
4.5	Hasil dan Pembahasan	46
BAB 5	KESIMPULAN DAN SARAN	53
5.1	Kesimpulan	53
5.2	Saran	54
	DAFTAR PUSTAKA	55

DAFTAR GAMBAR

	Halaman
2.1 Contoh Graf G	5
2.2 (a) Subgraf dari Graf G (b) <i>Spanning Subgraph</i> dari Graf G (c) Graf Isomorfik dari Graf G	6
2.3 Gabungan Graf Saling Lepas	8
2.4 Graf dan Matriks Ketetanggaan	8
2.5 Graf Siklus	9
2.6 Graf Lintasan	9
2.7 Graf Parasut	10
2.8 Contoh <i>Shackle</i> Graf Parasut	10
2.9 (a) Pelabelan Titik (b) Pelabelan Sisi (c) Pelabelan Total	11
2.10 (a) Fungsi Injektif (b) Fungsi Surjektif (c) Fungsi Bijektif	14
3.1 Penotasian <i>Shackle</i> Graf Parasut	22
3.2 Diagram Alir Penelitian	24
4.1 Pelabelan Super $(6208,24)-\mathcal{P}_m$ - <i>Antimagic</i> Total Selimut	34
4.2 Pelabelan Super $(6250,-18)-\mathcal{P}_m$ - <i>Antimagic</i> Total Selimut	36
4.3 Pelabelan Super $(6220,12)-\mathcal{P}_m$ - <i>Antimagic</i> Total Selimut	38
4.4 Diagram Pohon	41
4.5 Diagram Pohon	44

DAFTAR TABEL

	Halaman
2.1 Pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} -antimagic total selimut.....	20
4.1 Pembentukan <i>ciphertext</i> alfabet dari Gambar 4.3.	42
4.2 Pembentukan <i>ciphertext</i> simbol dari Gambar 4.3.	45
4.3 Aturan Pengkodean <i>Ciphertext</i> Simbol dari Gambar 4.3.	46
4.4 Pembentukan <i>ciphertext</i> simbol dari Gambar 4.3.	49
4.5 Pembentukan <i>Ciphertext</i> Alfabet dari Gambar 4.3	50
5.1 Aturan Pengkodean <i>Ciphertext</i> Simbol dari Gambar 4.3.	54



DAFTAR LAMBANG

G	=	Graf G
$G(V, E)$	=	Sebarang graf tak berarah dengan V adalah himpunan tak kosong dari semua titik dan E adalah himpunan sisi
v	=	Titik pada suatu graf
e	=	Sisi dari suatu graf
i	=	Indeks titik pada suatu graf
j	=	Indeks sisi dari suatu graf
$V(G)$	=	Himpunan titik dari graf G
$E(G)$	=	Himpunan sisi dari graf G
$ V(G) $	=	Himpunan titik dari graf G yang disebut <i>order</i>
$ E(G) $	=	Himpunan sisi dari graf G yang disebut ukuran (<i>size</i>)
$\mathcal{H}AVC$	=	\mathcal{H} <i>antimagic vertex covering</i> atau pelabelan titik \mathcal{H} antiajaib selimut
\mathcal{SHATC}	=	<i>Super \mathcal{H} antimagic total covering</i> atau super (a, d) - \mathcal{H} antiajaib total selimut
d	=	Nilai beda
a	=	Bobot total selimut terkecil yang merupakan suku pertama barisan
M	=	Banyaknya gabungan graf
a_{ij}	=	Matriks ketetanggaan
$shack(P_m, e, n)$	=	Shackle graf parasut
m	=	Banyaknya titik yang di- <i>expand</i> pada graf
n	=	Banyak graf yang dishackle
e	=	Sisi penghubung pada <i>shackle</i> graf parasut
$\mathcal{P}_{c,d}^n(i, j)$	=	Partisi dengan c baris dan n kolom
c	=	Banyaknya baris pada partisi
W_λ	=	Bobot total selimut

BAB 1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Graf merupakan bagian dari kajian matematika diskrit. Graf dibangun oleh elemen titik dan elemen sisi berhingga yang disimbolkan dengan $G(V,E)$. Teori graf dapat diterapkan dalam kehidupan sehari-hari. Salah satu pengaplikasian graf yaitu dalam pengembangan *ciphertext* atau pesan rahasia. *Ciphertext* berguna agar pesan yang dikirim tidak dapat dibaca orang lain selain pengirim dan penerima pesan yang dituju. Proses untuk mengembangkan *ciphertext* erat hubungannya dengan kriptografi. Kriptografi terdiri dari proses enkripsi dan dekripsi. Dalam proses ini, dibutuhkan sebuah kunci rahasia untuk mengatur proses enkripsi maupun dekripsi. Teori yang dikembangkan dalam *ciphertext* tersebut adalah pelabelan. Pelabelan yang terbentuk digunakan sebagai kunci rahasia untuk mengatur proses enkripsi dan dekripsi sehingga *ciphertext* dapat dibangun untuk menjamin tingkat keamanan dalam sebuah pengkodean.

Abad ke-20 Sedlacek, Stewart, Kotzig, dan Rosa melakukan penelitian untuk yang pertama kali mengenai pelabelan graf. Objek kajiannya berupa graf secara umum yang direpresentasikan oleh titik dan sisi serta himpunan bagian dari bilangan asli yang disebut label (Enomoto dkk. 1998). Berdasarkan elemen-elemen yang dilabeli maka pelabelan dibagi kedalam tiga jenis: pelabelan titik (*vertex labeling*), pelabelan sisi (*edge labeling*), dan pelabelan total (*total labeling*) (Dafik dkk. 2009). Seiring berjalannya waktu, pelabelan berkembang menjadi pelabelan *graceful*, pelabelan ajaib (*magic*), pelabelan antiajaib (*antimagic*), dan lain-lain. Pelabelan yang banyak diteliti adalah pelabelan *magic* dan pelabelan *antimagic*. Setiap pelabelan graf memiliki batas atas dari nilai beda (d) yang berbeda (Dafik, 2009). Batas atas yang digunakan dalam penelitian ini adalah batas atas terkecil, yaitu nilai terbesar dari d yang mungkin diperoleh. Misalkan batas atas $d \leq S$ maka S adalah nilai d terbesar. Jika \mathcal{H} adalah subgraf dari graf G maka pelabelan super (a,d) - \mathcal{H} -*antimagic*

total selimut merupakan suatu pelabelan graf $G = (V, E)$ dengan subgraf \mathcal{H} merupakan selimutnya. Inayah dkk (2009) mengembangkan suatu pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} -*antimagic* total selimut merupakan suatu pelabelan selimut (a, d) - \mathcal{H} -*antimagic* pada graf G dengan fungsi berkorespondensi satu-satu atau fungsi bijektif yang membentuk barisan aritmatika $a, a + d, a + 2d, \dots, a + (t - 1)d$.

Hasil penelitian tentang pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} -*antimagic* total yang sudah ditemukan diantaranya Pelabelan Super (a, d) - \mathcal{H} -*Antimagic* Total Selimut pada *Shackle* Graf *Triangular Book* oleh Pudyaningrum (2014), Pelabelan Total Super (a, d) - \mathcal{H} -*Antimagic* Total *Covering* pada Graf Semi Parasut oleh Aprilia (2014), Pelabelan Super (a, d) - \mathcal{H} -*Antimagic* Total Selimut Pada Graf Semi Jahangir oleh Diana (2015), dan Super (a, d) - A_O^P -Anti Ajaib Total Dekomposisi Graf *Shackle* Generalisasi Antiprisma untuk Pengembangan *Ciphertext* dan Keterampilan Berpikir Tingkat Tinggi oleh Yuli (2016).

Berdasarkan latar belakang tersebut, peneliti ingin mengembangkan penelitian yang berjudul "Analisa *Antimagicness* Super dari *Shackle* Graf Parasut dan Aplikasinya Pada *Polyalphabetic Cipher*", dengan menentukan batas atas d . Penelitian ini terinspirasi pada penelitian terdahulu mengenai Pelabelan Super (a, d) - \mathcal{H} -*Antimagic* Total Selimut Pada Graf Semi Jahangir dan Super (a, d) - A_O^P -Anti Ajaib Total Dekomposisi Graf *Shackle* Generalisasi Antiprisma untuk Pengembangan *Ciphertext* dan Keterampilan Berpikir Tingkat Tinggi. Sehingga penulis ingin meneliti *antimagicness* super dari graf parasut yang dioperasikan dengan operasi *shackle* yang kemudian akan digunakan sebagai kunci rahasia untuk membangun *ciphertext*. Graf parasut dinotasikan dengan \mathcal{P}_m . Sedangkan *shackle* graf parasut yang dihubungkan dengan sisi e dinotasikan dengan *shack* (\mathcal{P}_m, e, n) dengan \mathcal{P}_m adalah graf parasut dan n adalah banyaknya graf parasut.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, dapat dirumuskan masalah dalam penelitian ini:

- a. Bagaimana menentukan kardinalitas titik dan kardinalitas sisi pada *shackle*

graf parasut?

- b. Bagaimana menentukan batas atas nilai beda (d) dari *antimagicness* super pada *shackle* graf parasut?
- c. Bagaimana nilai beda (d) yang didapatkan dari *antimagicness* super pada *shackle* graf parasut?
- d. Bagaimana pengembangan *ciphertext* dengan menggunakan *antimagicness* super dari *shackle* graf parasut?

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini meliputi:

- a. Menentukan kardinalitas titik dan kardinalitas sisi pada *shackle* graf parasut.
- b. Menentukan batas atas nilai beda (d) dari *antimagicness* super pada *shackle* graf parasut.
- c. Menentukan nilai beda (d) dari *antimagicness* super pada *shackle* graf parasut.
- d. Membangun *ciphertext* dengan menggunakan *antimagicness* super dari *shackle* graf parasut.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari hasil penelitian ini:

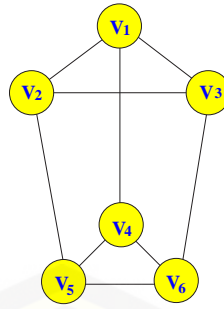
- a. Menambahkan pengetahuan baru dalam bidang teori graf mengenai *antimagicness* super pada *shackle* graf parasut.
- b. Memotivasi peneliti lainnya untuk meneliti dari *antimagicness* super pada graf yang lainnya.
- c. Menambah pengetahuan baru tentang *ciphertext* dan mengubah *plaintext* menjadi *ciphertext*.
- d. Menjadi pedoman untuk pengembangan atau perluasan masalah dari *antimagicness* super pada graf lainnya.

BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Konsep Dasar dan Terminologi Graf

Graf didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E) dimana V merupakan himpunan titik (*vertex*) dan E merupakan himpunan sisi (*edge*) pada graf. Sisi adalah elemen dari graf yang menghubungkan suatu titik dengan titik yang lain. $V(G)$ adalah himpunan titik pada graf G dan $E(G)$ adalah himpunan sisi pada graf G . Graf G yang mempunyai p buah titik dan q buah sisi dapat dituliskan dengan $G(p, q)$. Secara umum, komponen titik dan komponen sisi pada graf dapat dinotasikan dengan v_i dan e_j dengan $i = \{1, 2, 3, \dots, p\}$ dan $j = \{1, 2, 3, \dots, q\}$. Suatu graf dapat dinotasikan dengan huruf ataupun angka (bilangan asli). Banyaknya titik yang dimiliki graf G dikatakan sebagai order G dan disimbolkan dengan $|V(G)|$. Banyaknya sisi yang dimiliki graf G dapat disebut dengan size G dan disimbolkan dengan $|E(G)|$. $E(G)$ pada suatu graf boleh kosong sedangkan $V(G)$ tidak boleh kosong. Ini berarti bahwa sebuah graf dimungkinkan tidak mempunyai sisi satu buah pun, tetapi harus terdapat minimal satu buah titik (Slamin, 2009). Jika suatu graf tidak memiliki sisi maka graf tersebut dinamakan graf kosong. Sedangkan graf yang hanya mempunyai satu buah titik tanpa sebuah sisi disebut graf trivial (Munir, 2001). Gambar 2.1 merupakan graf G yang memiliki 6 titik dan 9 sisi dengan $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ dan $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9\}$ sehingga didapatkan graf yang memiliki order = 6 dan size = 9.

Dua titik pada suatu graf dikatakan bertetangga (*adjacent*) bila terdapat sebuah sisi yang menghubungkan keduanya. Sedangkan, jika ada titik yang bersisian (*incident*) dengan sisi pada suatu graf maka titik tersebut merupakan titik ujung dari sisi tersebut. Sebuah titik v dapat dikatakan bersisian dengan sisi e jika titik v merupakan titik ujung dari sisi e dan sisi e dikatakan bersisian dengan titik v ketika titik v merupakan titik ujung dari sisi e (Hartsfield dan Ringel, 1994). Sisi ganda (*parallel*) adalah dua atau lebih sisi yang mempunyai



Gambar 2.1 Contoh Graf G

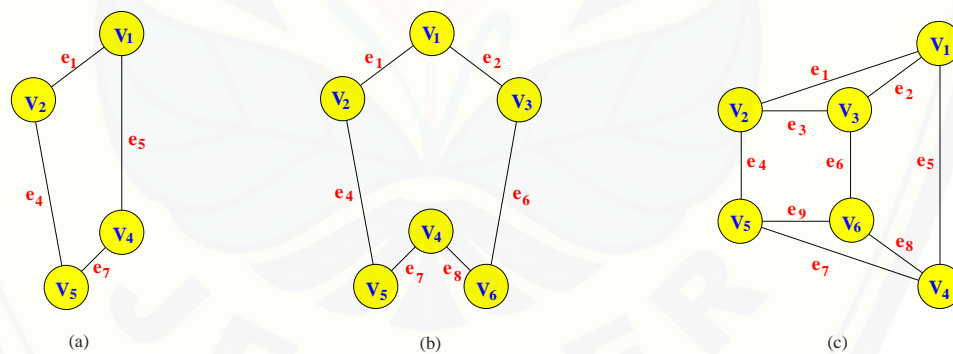
titik ujung yang sama. *Loop* adalah sebuah sisi yang berawal dan berakhir pada titik yang sama. Pada gambar 2.1, karena ada sisi e_1 yang menghubungkan titik v_1 dan titik v_2 maka titik v_1 dan titik v_2 dikatakan bertetangga. Dan karena titik v_1 merupakan titik ujung dari sisi e_1 maka titik v_1 bersisian dengan sisi e_1 .

Banyaknya sisi yang bersisian dengan suatu titik disebut derajat (*degree*) dari titik tersebut. Derajat disimbolkan oleh $d(i)$ (index i menunjukkan titik ke- i pada graf dengan $i = \{1, 2, 3, \dots, p\}$). Seperti pada gambar 2.1, titik v_1 pada graf tersebut memiliki derajat = 3 karena v_1 bersisian dengan sisi e_1 , e_2 , dan e_5 . Derajat maksimum pada suatu graf adalah banyaknya sisi maksimal yang bersisian dengan suatu titik v_i diantara titik-titik yang lain pada graf tersebut. Derajat minimum adalah kebalikan dari derajat maksimum, yaitu banyaknya sisi minimal yang bersisian dengan titik v_i diantara titik yang lain pada graf tersebut. Graf pada gambar 2.1 merupakan graf yang mempunyai derajat maksimum = 3 dan derajat minimum = 3. Derajat maksimum dan derajat minimum titik pada suatu graf berturut-turut dinyatakan dengan $\delta(G)$ dan $\Delta(G)$ (Hartsfield dan Ringel, 1994). Graf pada gambar 2.1 merupakan contoh graf reguler. Dikatakan graf reguler karena setiap titik pada graf tersebut memiliki derajat yang sama. Sebuah titik yang berderajat 0 (nol) disebut titik terisolasi (*isolated vertex*). Titik terisolasi adalah titik yang tidak mempunyai tetangga.

Jalan (*walk*) pada sebuah graf adalah barisan berhingga yang diawali dan diakhiri titik. Jalan dari suatu graf dinotasikan dengan $A_1e_1A_2e_2A_3e_3 \dots A_{n-1}e_{n-1}A_n$, yang berarti barisan titik dan sisi berhingga dan bergantian dari titik-titik dan sisi-sisi dalam suatu graf dengan ketentuan setiap sisi e_i

menempel pada A_i dan A_j dimana $A_i \neq A_j$ dan e_i bukan merupakan sebuah *loop* (Hartsfield dan Ringel, 1994). Jalan yang diawali dan diakhiri oleh titik yang sama dinamakan jalan tertutup. Sebuah jalan yang semua titiknya berbeda disebut lintasan (*path*), sedangkan jalan yang semua sisinya berbeda disebut jejak (*trail*). Dengan kata lain, lintasan merupakan jejak yang tidak mempunyai titik yang berulang. Lintasan yang tertutup disebut sikel (*cycle*). Jalan mempunyai panjang yang dapat dihitung dari banyaknya sisi yang dilintasi oleh jalan tersebut. Jarak (*distance*) dari titik v_1 ke titik v_2 adalah panjang lintasan terpendek dari titik v_1 ke titik v_2 , yang disimbolkan dengan $\delta(v_1, v_2)$.

Graf H merupakan subgraf dari graf G jika semua titik pada graf H adalah titik pada graf G dan semua sisi pada graf H adalah sisi pada graf G . Jika graf H memuat semua titik pada graf G maka graf H merupakan *spanning subgraph* dari graf G . Graf G dan graf H dikatakan isomorfik jika terdapat korespondensi satu-satu antara titik-titik dan sisi-sisi pada kedua graf tersebut sedemikian sehingga jika sisi e bersisian dengan titik v_1 dan v_2 di G , maka sisi e' yang berkorespondensi di H juga harus bersisian dengan titik v_1' dan v_2' di H . Dengan kata lain, dua graf isomorfik jika dua graf tersebut adalah sama tetapi tampilan secara geometriknya berbeda.

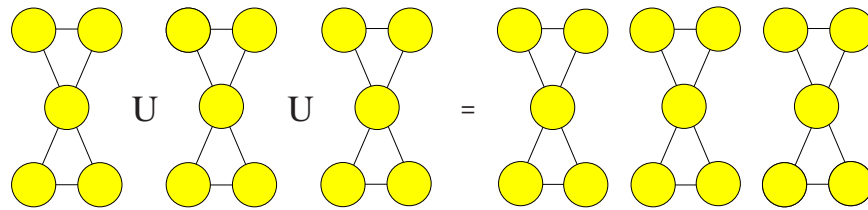


Gambar 2.2 (a) Subgraf dari Graf G (b) *Spanning Subgraph* dari Graf G (c) Graf Isomorfik dari Graf G

Graf terbagi menjadi beberapa jenis diantaranya graf terhubung dan graf tak terhubung, graf sederhana dan graf tak sederhana, graf berarah dan graf tak berarah, graf lengkap dan graf tidak lengkap, graf berbobot, dan graf berlabel. Berdasarkan elemen antar titiknya, graf dibagi menjadi graf terhubung

(*connected graph*) dan graf tidak terhubung (*disconnected graph*). Graf terhubung adalah graf yang mengandung sebuah lintasan pada setiap sebarang dua titiknya sedangkan graf tidak terhubung adalah kebalikannya. Berdasarkan ada tidaknya gelang atau sisi ganda pada suatu graf, maka graf digolongkan menjadi dua jenis yaitu graf sederhana (*simple graph*) dan graf tak sederhana (*un-simple graph*). Graf sederhana adalah graf yang tidak mengandung loop sedangkan graf tak sederhana adalah graf yang mengandung loop. Berdasarkan orientasi arah pada sisi, maka secara umum graf dibagi menjadi dua jenis yaitu graf berarah (*directed graph*) dan graf tak berarah (*undirected graph*). Graf berarah adalah graf yang setiap sisinya memiliki orientasi arah sedangkan graf tak berarah adalah graf yang setiap sisinya tidak mempunyai orientasi arah. Graf lengkap adalah graf sederhana yang setiap titiknya mempunyai sisi ke semua titik lainnya sedangkan graf tidak lengkap adalah graf sederhana yang mana setiap titiknya tidak mempunyai sisi ke semua titik lainnya. Graf berbobot adalah graf yang setiap sisinya diberi sebuah nilai (bobot). Bobot ini menyatakan hubungan antara 2 buah titik, misalkan jarak, biaya perjalanan, waktu tempuh, dan sebagainya (Munir, 2001). Suatu graf disebut dengan graf berlabel jika setiap elemen dari graf tersebut dihubungkan dengan suatu bilangan bulat positif.

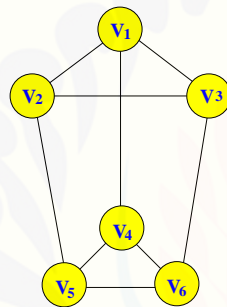
Graf gabungan saling lepas adalah dua atau lebih graf yang tidak memiliki lintasan yang menghubungkan masing-masing anggota graf sehingga $kG = G_1 \cup G_2 \cup G_3 \dots \cup G_k$ dengan k adalah banyaknya graf G (Adawiyah, 2014). Dapat disimpulkan bahwa $G_1 = G_2 = G_3 = \dots = G_k = G$ sehingga misalkan graf G mempunyai p titik dan q sisi, maka graf kG mempunyai kp titik dan kq sisi. Gambar 2.3 merupakan graf $3G$ yaitu graf yang terdiri dari gabungan saling lepas dari 3 komponen graf G .



Gambar 2.3 Gabungan Graf Saling Lepas

Matriks ketetanggaan adalah matriks yang mempunyai ordo $n \times n$ yang disimbolkan dengan $A(G) = [a_{ij}]$ dari graf G dimana:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{Jika } (v_i, v_j) \in E(G) \\ 0, & \text{lainnya.} \end{cases}$$



(a)

0	1	1	1	0	0
1	0	1	0	1	0
1	1	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1
0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	0

(b)

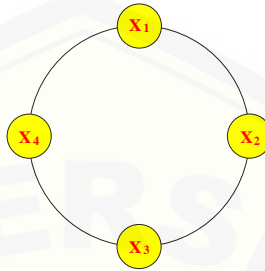
Gambar 2.4 Graf dan Matriks Ketetanggaan

2.2 Graf Khusus

Graf khusus adalah graf yang memiliki bentuk khusus dan keunikan. Graf khusus dapat dihasilkan dari pengoperasian beberapa graf. Keunikan dari graf khusus adalah tidak isomorfis dengan graf lainnya. Karakteristik bentuknya, yaitu dapat diperbanyak sampai order n . Dari definisi graf secara umum, terdapat beberapa graf khusus salah satunya adalah graf parasut \mathcal{P}_m . Sebelum membahas graf parasut \mathcal{P}_m , akan dibahas definisi beberapa graf khusus yang digunakan dalam penelitian ini.

a. Graf Siklus

Graf siklus C_m adalah graf yang setiap titiknya bersisian dengan dua sisi atau berderajat dua (Munir, 2001). Pada graf siklus jumlah titik dan sisinya sama. Graf siklus C_m dapat dibentuk jika $m \geq 3$, dengan m adalah jumlah titiknya. Contoh dari graf siklus seperti gambar berikut ini:



Gambar 2.5 Graf Siklus

b. Graf Lintasan

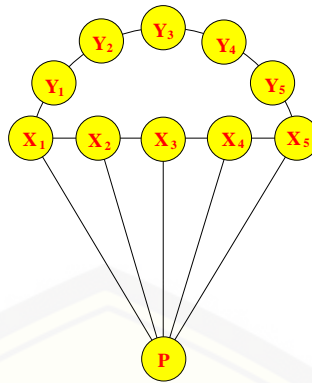
Graf lintasan dinotasikan dengan P_m adalah graf yang memiliki sisi sebanyak $m - 1$, dengan m adalah jumlah titiknya (Purwanto, 2006). Contoh dari graf lintasan seperti gambar berikut ini:



Gambar 2.6 Graf Lintasan

c. Graf Parasut

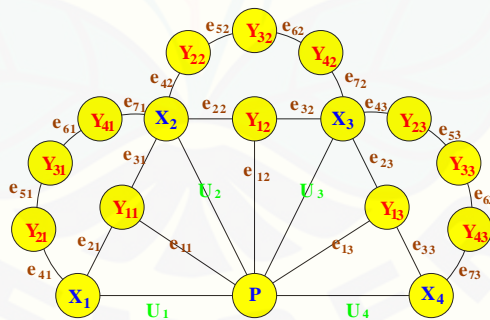
Graf parasut adalah salah satu famili dari graf kipas yang dinotasikan dengan \mathcal{P}_m . Graf parasut memiliki $V(\mathcal{P}_m) = \{P, x_i, y_i; 1 \leq i \leq m\}$ dan $E(\mathcal{P}_m) = \{Px_i, x_1y_1, x_my_m; 1 \leq i \leq m\} \cup \{x_ix_{i+1}, y_iy_{i+1}; 1 \leq i \leq m - 1\}$ (Aprilia, 2014). Contoh dari graf parasut seperti gambar berikut ini:



Gambar 2.7 Graf Parasut

d. *Shackle* Graf Parasut

Shackle graf parasut merupakan graf hasil pengembangan dari graf parasut dengan graf parasut sebagai subgrafnya. *Shackle* graf parasut merupakan graf dengan operasi *shackle* dengan penghubung berupa sisi. *Shackle* graf parasut ($shack(\mathcal{P}_m, e, n)$) dengan e merupakan elemen penghubungnya. *Shackle* graf parasut memiliki $V(G) = \{P\} \cup \{x_j, x_{j+1}; 1 \leq j \leq n\} \cup \{y_{kj}; 1 \leq k \leq 2m-2, 1 \leq j \leq n\}$ dan $E(G) = \{u_j, u_{j+1}; 1 \leq j \leq n\} \cup \{e_{lj}; 1 \leq l \leq 3m-2, 1 \leq j \leq n\}$. Berikut contoh *shackle* graf parasut:



Gambar 2.8 Contoh *Shackle* Graf Parasut

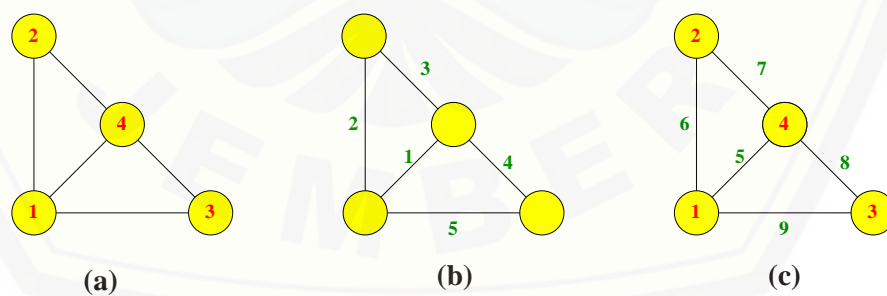
2.3 Operasi Graf

Pengoperasi beberapa graf dapat digunakan untuk menciptakan sebuah graf baru. Dalam penelitian ini, digunakan operasi *shackle*. *Shackle* dinotasikan

dengan $shack(G_1, G_2, \dots, G_n)$ yang artinya sebuah graf yang dibentuk dari n graf terhubung tak trivial G_1, G_2, \dots, G_n sehingga untuk setiap $s, t \in [1, n]$ dengan $|s - t| \geq 2$ berlaku G_s dan G_t tidak mempunyai titik yang sama dan untuk setiap $t \in [1, n - 1]$ berlaku G_t dan G_{t+1} mempunyai tepat satu titik sama yang disebut titik penghubung dan $n - 1$ titik penghubung tersebut semuanya berbeda (Maryati dkk, 2010). Jika untuk setiap $i \in [1, n]$ sehingga G_i isomorfis dengan graf H maka $shack(G_1, G_2, \dots, G_n)$ dinamakan *shackle* dari graf H yang dinotasikan $shack(H, n)$. *Shackle* memiliki penghubung berupa titik ataupun sisi. Jika penghubungnya berupa titik maka disebut sebagai *shackle* titik yang dinotasikan dengan $shack(H, v, n)$ dan jika penghubungnya berupa sisi disebut *shackle* sisi yang dinotasikan dengan $shack(H, e, n)$.

2.4 Pelabelan Graf

Pelabelan pada suatu graf adalah sebarang pemetaan yang memasangkan unsur-unsur graf, yaitu titik dan sisi ke himpunan bilangan asli berurutan yang dimulai dari 1 sampai sejumlah titik dan sisi pada graf. Berdasarkan daerah asal atau domainnya, pelabelan terbagi menjadi 3 golongan, yaitu pelabelan titik, pelabelan sisi, dan pelabelan total. Pelabelan titik (*vertex labeling*) adalah pelabelan graf yang domainnya merupakan titik. Pelabelan sisi (*edge labeling*) adalah pelabelan graf yang domainnya merupakan sisi. Sedangkan pelabelan total (*total labeling*) adalah pelabelan graf yang domainnya merupakan titik dan sisi. Berikut contoh pelabelan:



Gambar 2.9 (a) Pelabelan Titik (b) Pelabelan Sisi (c) Pelabelan Total

Dalam pelabelan graf juga dikenalkan pelabelan ajaib (*magic*) dan

pelabelan antiajaib (*antimagic*). Pelabelan *magic* pada graf G adalah pemetaan bijektif f dari elemen graf ke himpunan bilangan bulat positif yang berbeda sehingga menghasilkan bobot total yang sama. Sedangkan jika semua jumlah label menghasilkan bobot total yang berbeda dan membentuk barisan aritmatika dengan a sebagai suku pertamanya dan d sebagai nilai bedanya maka pelabelan ini disebut pelabelan *antimagic*. Pelabelan super adalah pelabelan elemen pada suatu graf yang dimulai dengan melabeli semua titik terlebih dahulu kemudian dilanjutkan dengan melabeli semua sisi pada graf tersebut. Pada gambar 2.9 c merupakan contoh dari pelabelan super.

2.5 Lemma Batas Atas d

Batas atas adalah nilai beda (d) tertinggi dalam suatu pelabelan. Lemma untuk menghitung batas atas d dalam suatu pelabelan graf adalah sebagai berikut:

Lemma 2.5.1. *Jika sebuah graf $G(V, E)$ adalah pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} -antimagic total selimut maka*

$$d \leq \frac{(p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H}{n - 1}$$

untuk $n = |H_i|$, $p_G = |V|$, $q_G = |E|$, $p_H = |V'|$, $q_H = |E'|$

Bukti. $f(V) = \{1, 2, 3, \dots, p_G\}$ dan $f(E) = \{p_G + 1, p_G + 2, p_G + 2, \dots, p_G + q_G\}$. Misalkan graf (p_G, q_G) mempunyai pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} -antimagic total selimut dengan fungsi total $f_{total} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots, p_G + q_G\}$ maka himpunan bobot total selimut sebuah graf adalah $\{a, a + d, a + 2d, \dots, a(n - 1)d\}$ dimana a merupakan bobot total selimut terkecil maka berlaku:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + p_H + (p_G + 1) + (p_G + 2) + \dots + (p_G + q_H) &\leq a \\ \frac{p_H}{2}(1 + p_H) + q_H p_G + \frac{q_H}{2}(1 + q_H) &\leq a \\ \frac{p_H}{2} + \frac{p_H^2}{2} + q_H p_G + \frac{q_H}{2} + \frac{q_H^2}{2} &\leq a \end{aligned}$$

Sedangkan untuk nilai terbesar berlaku:

$$\begin{aligned}
 a + (n-1)d &\leq p_G + p_G - 1 + p_G - 2 + \dots + (p_G - (p_H - 1)) + (p_G + q_G) \\
 &\quad + (p_G + q_G - 1) + (p_G + q_G - 2) + \dots + (p_G + q_G - (q_H - 1)) \\
 &= p_{HPG} - \frac{p_H - 1}{2}(1 + (p_H - 1)) + q_{HPG} + q_{HPG} \\
 &\quad - \frac{q_H - 1}{2}(1 + (q_H - 1)) \\
 &= p_{HPG} - \frac{p_H - 1}{2}(p_H) + q_{HPG} + q_{HPG} - \frac{q_H - 1}{2}(q_H)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (n-1)d &\leq p_{HPG} - \frac{p_H - 1}{2}(p_H) + q_{HPG} + q_{HPG} - \frac{q_H - 1}{2}(q_H) - a \\
 &\leq p_{HPG} - \frac{p_H - 1}{2}(p_H) + q_{HPG} + q_{HPG} - \frac{q_H - 1}{2}(q_H) - \\
 &\quad \left(\frac{p_H}{2} + \frac{p_H^2}{2} + q_{HPG} + \frac{q_H}{2} + \frac{q_H^2}{2}\right) \\
 &= p_{HPG} - \frac{p_H^2}{2} + \frac{p_H}{2} + q_{HPG} - \frac{q_H^2}{2} + \frac{q_H}{2} - \left(\frac{p_H}{2} + \frac{p_H^2}{2} + \frac{q_H}{2} + \frac{q_H^2}{2}\right) \\
 &= p_{HPG} + q_H q_G - p_H^2 - q_H^2 \\
 &= p_{HPG} - p_H^2 + q_H q_G - q_H^2 \\
 &= (p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H \\
 d &\leq \frac{(p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H}{(n-1)}
 \end{aligned}$$

Terbukti bahwa batas atas $d \leq \frac{(p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H}{n-1}$ jika graf G memiliki pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} -antimagic total selimut dari berbagai famili graf (Dafik, 2007). \square

2.6 Fungsi dan Barisan Aritmatika

Misalkan A dan B adalah dua himpunan yang tidak kosong. Pemetaan dari himpunan A ke himpunan B adalah aturan yang memasangkan setiap $a \in A$ ke $b \in B$ dengan tepat satu. Pemetaan dari himpunan A ke himpunan B dapat dinotasikan dengan sebagai berikut:

$$f : A \rightarrow B \text{ jika dan hanya jika } \forall a \in A \text{ dan } \exists b \in B \text{ maka } f(a)=b$$

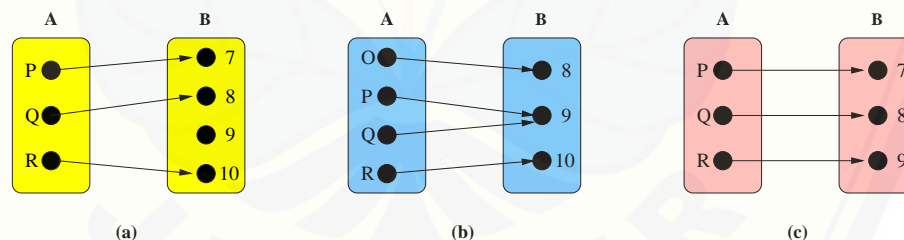
Himpunan A disebut daerah asal (domain) dan himpunan B disebut daerah kawan (kodomain). Pemetaan dibagi menjadi 3 golongan: pemetaan satu-satu (injektif), pemetaan pada (surjektif), dan pemetaan korespondensi satu-satu (bijektif). Pemetaan injektif adalah pemetaan dimana setiap elemen di daerah kodomain yang berpasangan mempunyai pasangan elemen tepat satu di daerah domain. Misalkan f suatu fungsi dari A ke B maka pemetaan injektif dapat dituliskan dengan:

$f : A \rightarrow B$ disebut injektif jika $\forall x, y \in A$ dan $f(x) = f(y)$ maka $x = y$ atau $\forall x, y \in A$ dan $f(x) \neq f(y)$ maka $x \neq y$.

Pemetaan surjektif adalah pemetaan yang semua elemen di daerah kodomain mempunyai pasangan elemen di daerah domain. Misalkan f suatu fungsi dari A ke B maka pemetaan pada dapat dituliskan dengan:

$f : A \rightarrow B$ disebut surjektif jika $\forall a \in A$ maka $\exists b \in B$ sehingga $f(a) = b$.

Pemetaan bijektif adalah pemetaan yang memenuhi pemetaan injektif dan pemetaan surjektif. Setiap elemen domain akan berkorespondensi satu-satu ke elemen kodomain atau sebaliknya. Gambar 2.10 menunjukkan fungsi injektif, surjektif, dan bijektif.



Gambar 2.10 (a) Fungsi Injektif (b) Fungsi Surjektif (c) Fungsi Bijektif

Barisan aritmatika merupakan barisan bilangan yang setiap sukunya diperoleh dari suku sebelumnya dengan menambah atau mengurangi dengan suatu bilangan tetap yang dinamakan pembeda (biasanya disimbolkan dengan b). Dengan kata lain, pembeda merupakan selisih antara dua suku yang berurutan dan dapat dituliskan dengan $U_2 - U_1 = U_3 - U_2 = \dots = U_n - U_{n-1} =$

b. Misalkan suku pertama suatu barisan aritmetika adalah a dengan pembeda b maka barisan aritmatika tersebut dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\{a, a + b, a + 2b, a + 3b, \dots\}$$

Jadi, rumus suku ke- n dari barisan aritmatika adalah:

$$U_n = a + (n - 1)b$$

atau

$$U_n = U_1 + (n - 1)b$$

Keterangan :

U_n = suku ke- n

U_1 = suku pertama

a = suku pertama

b = pembeda

2.7 Partisi dengan Menetapkan Nilai Beda (d)

Secara umum, partisi adalah pengelompokan. Partisi dari suatu himpunan S adalah dekomposisi dari S ke dalam subset-subset tak kosong sehingga setiap elemen dari S menjadi anggota dari satu dan hanya satu subset (Wijaya,2010). Himpunan $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ dapat dikelompokkan ke dalam kelompok genap dan ganjil dengan anggota ganjil = $\{1, 3, 5\}$ dan anggota genap = $\{2, 4, 6\}$. Dalam pelabelan juga dikenal istilah partisi, yaitu sebuah metode yang digunakan untuk mengelompokkan label-label pada graf berdasarkan polanya. Partisi dapat dinyatakan dalam sebuah matriks yang dinotasikan dengan $\mathcal{P}_{c,d}^n(i,j)$, dimana n menyatakan jumlah kolom, c menyatakan jumlah baris, d menyatakan nilai beda, i menyatakan indeks baris, dan j menyatakan indeks kolom dengan $1 \leq i \leq c$ dan $1 \leq j \leq n$.

Misalkan $\mathcal{P}_{c,d}^n(i,j)$ dari himpunan $\{1, 2, 3, \dots, cn\}$ dengan $n \geq 2$, sedemikian hingga beda antara jumlah label pada c -tuple dalam kolom ke- j adalah konstan. $\sum \mathcal{P}_{c,d}^n(i,j)$ adalah jumlah semua label pada $\mathcal{P}_{c,d}^n(i,j)$. Jika terdapat partisi dengan

beda d maka pasti ada partisi dengan beda $-d$. Untuk setiap bilangan $\mathcal{P}_{c,d}^n(i,j)$ yang ditambahkan dengan b dinotasikan dengan $\mathcal{P}_{c,d}^n(i,j) \oplus b$ (Baca dkk, 2013).

Berikut adalah bentuk umum partisi $\mathcal{P}_{c,d}^n(i,j)$ yang telah ditemukan pada penelitian sebelumnya:

1. $\mathcal{P}_{c,c}^n(i,j)$
2. $\mathcal{P}_{c,c^2}^n(i,j)$
3. $\mathcal{P}_{c,\frac{c}{2}}^n(i,j)$
4. $\mathcal{P}_{c,-c}^n(i,j)$
5. $\mathcal{P}_{c,-c^2}^n(i,j)$
6. $\mathcal{P}_{c,-\frac{c}{2}}^n(i,j)$

Berdasarkan pada partisi-partisi yang ditemukan dari penelitian tersebut dihasilkan Lemma sebagai berikut:

Lemma 2.7.1. *Diberikan n dan c adalah bilangan bulat positif, untuk $j=\{1,2,\dots,n\}$ jumlah dari $\mathcal{P}_{c,d_1}^n(i,j) = \{(i-1)n + j, 1 \leq i \leq c\}$ membentuk barisan aritmatika dengan beda $d_1 = c$.*

Bukti. Dengan perhitungan sederhana untuk $j=\{1,2,3,\dots,n\}$ maka $\sum_{i=1}^c \mathcal{P}_{c,d_1}^n(i,j) = \mathcal{P}_{c,d_1}^n(j) \iff \mathcal{P}_{c,d_1}^n(j) = \{\frac{c^2n-nc}{2} + cj\} \iff \mathcal{P}_{c,d_1}^n(j) = \{\frac{c^2n-nc}{2} + c, \frac{c^2n-nc}{2} + 2c, \frac{c^2n-nc}{2} + 3c, \dots, \frac{c^2n-cn}{2} + nc\}$. Dengan mudah dapat dilihat dari barisan tersebut bahwa $d_1 = c$ (Azizah, 2016). \square

Lemma 2.7.2. *Diberikan n dan c adalah bilangan bulat positif, untuk $j=\{1,2,\dots,n\}$ jumlah dari $\mathcal{P}_{c,d_2}^n(i,j) = \{(j-1)c + i, 1 \leq i \leq c\}$ membentuk barisan aritmatika dengan beda $d_2 = c^2$.*

Bukti. Dengan perhitungan sederhana untuk $j=\{1,2,3,\dots,n\}$ maka $\sum_{i=1}^c \mathcal{P}_{c,d_2}^n(i,j) = \mathcal{P}_{c,d_2}^n(j) \iff \mathcal{P}_{c,d_2}^n(j) = \{\frac{c-c^2}{2} + c^2j\} \iff \mathcal{P}_{c,d_2}^n(j) = \{\frac{c-c^2}{2} + c^2, \frac{c-c^2}{2} + 2c^2, \frac{c-c^2}{2} + 3c^2, \dots, \frac{c-c^2}{2} + nc^2\}$. Dengan mudah dapat dilihat dari barisan tersebut bahwa $d_2 = c^2$ (Azizah, 2016). \square

Lemma 2.7.3. Diberikan n dan c adalah bilangan bulat positif, untuk $j=\{1,2,\dots,n\}$ jumlah dari

$$\mathcal{P}_{c,d_3}^n(j) = \begin{cases} \{(i-1)n + \frac{j+1}{2}; 1 \leq i \leq c, i \equiv 1 \pmod{2}\} \cup \\ \{\frac{j-n}{2} + in; 1 \leq i \leq c, i \equiv 0 \pmod{2}\}, j \equiv 1 \pmod{2} \\ \{\frac{j+1-n}{2} + in; 1 \leq i \leq c, i \equiv 1 \pmod{2}\} \cup \\ \{(i-1)n + \frac{j}{2}; 1 \leq i \leq c, i \equiv 0 \pmod{2}\}, j \equiv 0 \pmod{2} \end{cases}$$

membentuk barisan aritmatika dengan beda $d_3 = \frac{c}{2}$.

Bukti. Dengan perhitungan sederhana untuk $j=\{1,2,3,\dots,n\}$ maka $\sum_{i=1}^c \mathcal{P}_{c,d_3}^n(i,j) = \mathcal{P}_{c,d_3}^n(j) \longleftrightarrow \mathcal{P}_{c,d_3}^n(j) = \{\frac{c}{4}(2cn - n + 1) + \frac{c}{2}j\} \longleftrightarrow \mathcal{P}_{c,d_3}^n(j) = \{\frac{c}{4}(2cn - n + 1) + \frac{c}{2}, \frac{c}{4}(2cn - n + 1) + c, \frac{c}{4}(2cn - n + 1) + \frac{3c}{2}, \dots, \frac{c}{4}(2cn - n + 1) + \frac{cn}{2}\}$. Dengan mudah dapat dilihat dari barisan tersebut bahwa $d_3 = \frac{c}{2}$ (Azizah, 2016). \square

Lemma 2.7.4. Diberikan n dan c adalah bilangan bulat positif, untuk $j=\{1,2,\dots,n\}$ jumlah dari $\mathcal{P}_{c,d_4}^n(i,j) = \{1 + ni - j; 1 \leq i \leq c\}$ membentuk barisan aritmatika dengan beda $d_4 = -c$.

Bukti. Dengan perhitungan sederhana, untuk $j=\{1,2,3,\dots,n\}$ maka $\sum_{i=1}^c \mathcal{P}_{c,d_4}^n(i,j) = \mathcal{P}_{c,d_4}^n(j) \longleftrightarrow \mathcal{P}_{c,d_4}^n(j) = \{\frac{n}{2}(c^2 + c) + c - cj\} \longleftrightarrow \mathcal{P}_{c,d_4}^n(j) = \{\frac{n}{2}(c^2 + c), \frac{n}{2}(c^2 + c) - c, \frac{n}{2}(c^2 + c) - 2c, \dots, \frac{n}{2}(c^2 + c) + c - nc\}$. Dengan mudah dapat dilihat dari barisan tersebut bahwa $d_4 = -c$ (Agustin, 2016). \square

Lemma 2.7.5. Diberikan n dan c adalah bilangan bulat positif, untuk $j=\{1,2,\dots,n\}$ jumlah dari $\mathcal{P}_{c,d_5}^n(i,j) = \{cn + i - cj; 1 \leq i \leq c\}$ membentuk barisan aritmatika dengan beda $d_5 = -c^2$.

Bukti. Dengan perhitungan sederhana, untuk $j=\{1,2,3,\dots,n\}$ maka $\sum_{i=1}^c \mathcal{P}_{c,d_5}^n(i,j) = \mathcal{P}_{c,d_5}^n(j) \longleftrightarrow \mathcal{P}_{c,d_5}^n(j) = \{\frac{c}{2}(2cn + c + 1) - c^2j\} \longleftrightarrow \mathcal{P}_{c,d_5}^n(j) = \{\frac{c}{2}(2cn + c + 1) - c^2, \frac{c}{2}(2cn + c + 1) - 2c^2, \dots, \frac{c}{2}(2cn + c + 1) - nc^2\}$. Dengan mudah dapat dilihat dari barisan tersebut bahwa $d_5 = -c^2$ (Agustin, 2016). \square

Lemma 2.7.6. Diberikan n dan c adalah bilangan bulat positif, untuk $j=\{1,2,\dots,n\}$ jumlah dari

$$\mathcal{P}_{c,d_6}^n(i,j) = \begin{cases} \{ni - \frac{j}{2} + \frac{1}{2}; 1 \leq i \leq c; 1 \leq j \leq n; i \text{ ganjil}; j \text{ ganjil}\} \\ \{ni - \frac{n}{2} - \frac{j}{2} + 1; 1 \leq i \leq c; 1 \leq j \leq n; i \text{ genap}; j \text{ ganjil}\} \\ \{ni - \frac{j}{2} - \frac{n}{2} + \frac{1}{2}; 1 \leq i \leq c; 1 \leq j \leq n; i \text{ ganjil}; j \text{ genap}\} \\ \{ni - \frac{j}{2} + 1; 1 \leq i \leq c; 1 \leq j \leq n; i \text{ genap}; j \text{ genap}\} \end{cases}$$

membentuk barisan aritmatika dengan beda $d_6 = \frac{-c}{2}$.

Bukti. Dengan perhitungan sederhana, untuk $j=\{1,2,3,\dots,n\}$ maka $\sum_{i=1}^c \mathcal{P}_{c,d_6}^n(i,j) = \mathcal{P}_{c,d_6}^n(j) \longleftrightarrow \mathcal{P}_{c,d_6}^n(j) = \{\frac{c}{4}(2cn + n + 3) - \frac{c}{2}j\} \longleftrightarrow \mathcal{P}_{c,d_6}^n(j) = \{\frac{c}{4}(2cn + n + 3) - \frac{c}{2}, \frac{c}{4}(2cn + n + 3) - c, \dots, \frac{c}{4}(2cn + n + 3) - \frac{nc}{2}\}$. Dengan mudah dapat dilihat dari barisan tersebut bahwa $d_6 = \frac{-c}{2}$ (Agustin, 2016). \square

Suatu partisi yang didefinisikan dengan $\mathcal{P}_{c,d}^n(i,j)$ dapat dibentuk dengan mengkombinasikan partisi lain sehingga diperoleh beda d yang bervariasi. Konstruksi partisi tersebut mengikuti fakta di bawah ini:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{c,d}^n(i,j) &= \mathcal{P}_{c_1,d_1}^n(i,j) \cup (\mathcal{P}_{c_2,d_2}^n(i,j) \oplus nc_1); \text{ untuk } 1 \leq i \leq c, 1 \leq j \leq n \\ \sum_{i=1}^c \mathcal{P}_{c,d}^n(j) &= \sum_{i=1}^c \mathcal{P}_{c_1,d_1}^n(j) + \sum_{i=1}^c (\mathcal{P}_{c_2,d_2}^n(j) \oplus nc_1c_2); \text{ untuk } 1 \leq j \leq n \end{aligned}$$

dimana $c = c_1 + c_2$ dan $d = d_1 + d_2$ (Bača, dkk. 2013)

2.8 Aplikasi Graf

Graf bermanfaat bagi kehidupan manusia karena graf dapat diaplikasikan dalam berbagai kebutuhan manusia. Salah satu aplikasi yang dikembangkan dari pelabelan adalah *ciphertext*. Proses pengembangan *ciphertext* erat hubungannya dengan kriptografi. Kriptografi adalah pengkodean sebuah pesan yang bersifat rahasia agar keamanannya lebih terjamin yang terdiri dari enkripsi dan dekripsi. Enkripsi adalah proses pengubahan *plaintext* (pesan yang dikirim) menjadi *ciphertext* (pesan rahasia). Dekripsi adalah proses untuk memperoleh kembali pesan yang dikirim dari *ciphertext*. Dalam proses ini, dibutuhkan sebuah kunci rahasia untuk mengatur proses enkripsi maupun dekripsi. Metode yang

digunakan dalam penelitian ini merupakan aplikasi pelabelan total yang merujuk pada aturan Julius Caesar yaitu menggunakan sistem (mod 26). Aturan Julius Caesar mengamankan isi pesan yang ada disandikan dengan cara mengganti posisi setiap huruf yang ada pada pesan dengan huruf lain yang memiliki posisi selisih huruf yang lain dari urutan alfabet (Bishop, 2003). Aturan Julius Caesar adalah sebagai berikut:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

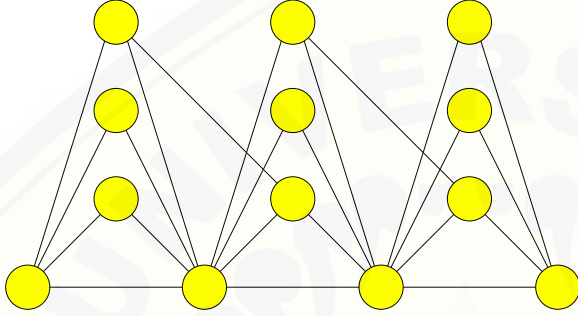
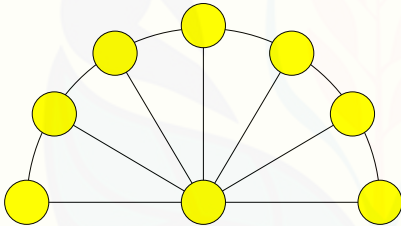
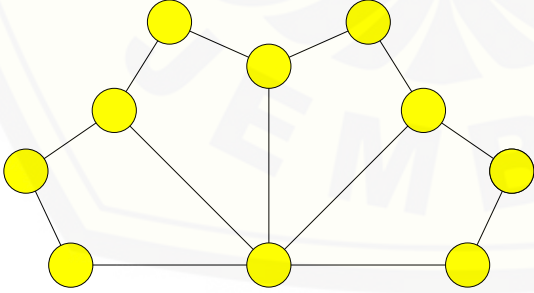
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Teknik pelabelan super (a,d) - \mathcal{H} -*antimagic* total selimut digunakan untuk mengkonversi pesan rahasia. Langkah-langkah pengembangan *ciphertext* dalam pelabelan adalah berikut. Sebagai langkah awal, tentukan graf terlebih dahulu dan pilihlah graf yang memiliki sisi lebih dari banyaknya karakter *plaintext* misalkan 26. Melabeli titik dan sisi menggunakan super (a,d) - \mathcal{P}_m -*antimagic* total dan mengeliminasi sisi yang memiliki label $> |V| + 26$. Kemudian didata terlebih dahulu huruf yang akan digunakan dalam pesan rahasia tersebut (spasi dan karakter lainnya diabaikan). Langkah selanjutnya, bangunlah diagram pohon dari pelabelan super (a,d) - \mathcal{P}_m -*antimagic* total pada *shackle* graf parasut dengan nilai beda d tertentu. Diagram pohon tersebut berakar di label 1 dan akar selanjutnya mengikuti pola graf. Setelah itu, mencantumkan label sisi pada graf pohon sesuai pelabelan pada graf yang digunakan dan mengubah bilangan tersebut menjadi mod 26. Sisi yang sudah dieliminasi tidak perlu digunakan. Memasangkan setiap karakter *plaintext* dengan sisi pada graf pohon dengan cara diurutkan dari kiri mulai dari layer teratas. Membuat aturan untuk mentransformasi bilangan modulo 26 ke karakter yang digunakan sebagai *ciphertext* dengan aturan Julius Caesar. Membuat tabel yang terdiri dari *plaintext*, label sisi (mod 26) yang bersesuaian dengan *plaintext*, dan *ciphertext* yang bersesuaian dengan aturan Julius Caesar. Sehingga dari tabel tersebut akan didapatkan *ciphertext* untuk pengkodean demi tercapainya tingkat keamanan yang tingkat.

2.9 Hasil Pelabelan Super $(a, d) - \mathcal{H}$ - Antimagic Total Selimut

Pada bagian ini merupakan pelabelan selimut $(a, d) - \mathcal{H}$ - antimagic yang digunakan sebagai rujukan dalam penelitian ini.

Tabel 2.1: Pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} -antimagic total selimut.

Graf	a	d	Hasil
SBT_n (<i>Shackle Graf Triangular Book</i>)  (Putri R., 2014)	$36n + 84$	$d = 96$	$\mathcal{H} = Bt_3 + 2e$
SF_4^n (<i>Shackle Graf Kipas</i>)  (Fia C., 2015)	$63n + 15$	$d = 0$	$\mathcal{H} = F_4$
SJ_n (<i>Graf Semi Jahangir</i>)  (Diana H., 2012)	$15n + 21$	$d = 1$	$\mathcal{H} = C_4$

BAB 3. METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

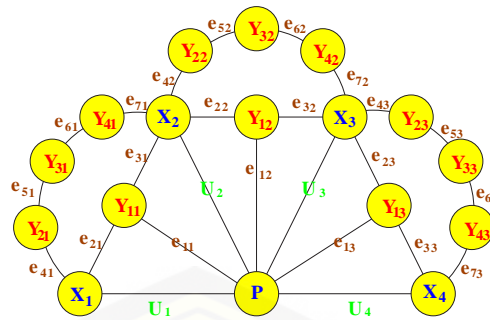
Metode yang akan digunakan dalam penelitian ini adalah metode deduktif. Metode deduktif adalah cara menganalisis kesimpulan umum yang diuraikan menjadi contoh-contoh kongkrit atau fakta-fakta untuk menjelaskan kesimpulan tersebut. Metode deduktif ini digunakan pada penelitian Analisa *Antimagicness* Super dari *Shackle* Graf Parasut dan Aplikasinya pada *Polyalphabetic Cipher*. Langkah-langkah awal metode deduktif dalam penelitian ini, yaitu menentukan graf, mencari kardinalitas titik dan kardinalitas sisi dari graf beserta batas atasnya. Setelah itu, memberi label pada elemen graf sampai membentuk suatu pola sedemikian hingga dihasilkan bobot total selimut yang membentuk barisan aritmatika. Akhir dari metode deduktif ini yaitu mendapatkan partisi untuk pelabelan super pada graf.

3.2 Rancangan Penelitian

Rancangan dari penelitian ini digunakan untuk memberikan gambaran mengenai penelitian yang akan dilakukan. Adapun rancangan penelitian adalah sebagai berikut:

a. Penotasian Elemen Graf

Shackle graf parasut disimbolkan $shack(\mathcal{P}_{m,e,n})$ dengan m adalah titik pada graf parasut, e merupakan elemen penghubung antar graf parasut, dan n merupakan jumlah graf parasut. *Shackle* graf parasut memiliki $2nm - n + 2$ titik dan $3nm - n + 1$ sisi. *Shackle* graf parasut memiliki $V(G) = \{P\} \cup \{x_j, x_{j+1}; 1 \leq j \leq n\} \cup \{y_{kj}; 1 \leq k \leq 2m - 2, 1 \leq j \leq n\}$ dan $E(G) = \{u_j, u_{j+1}; 1 \leq j \leq n\} \cup \{e_{lj}; 1 \leq l \leq 3m - 2, 1 \leq j \leq n\}$.

Gambar 3.1 Penotasian *Shackle* Graf Parasut

b. Indikator Pelabelan Graf

Indikator pelabelan super pada *shackle* graf parasut dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1) Label titik

Label titik untuk pelabelan super pada *shackle* graf parasut merupakan fungsi bijektif yang memetakan himpunan titik pada *shackle* graf parasut ke bilangan bulat positif dari 1 sampai p , dimana p adalah jumlah titik pada graf.

2) Label sisi

Label sisi untuk pelabelan super pada *shackle* graf parasut merupakan fungsi bijektif yang memetakan himpunan sisi pada *shackle* graf parasut ke bilangan bulat positif dari $p+1$ sampai $p+q$, dimana p adalah jumlah titik pada graf dan q adalah jumlah sisi pada graf.

3) Bobot titik

Bobot titik adalah jumlah label titik pada setiap selimut. Dalam penelitian ini, bobot titik adalah jumlah label titik pada setiap selimut. Bobot titik harus membentuk barisan aritmatika.

4) Bobot total selimut

Bobot total selimut adalah jumlah label titik dan label sisi pada setiap selimut. Dalam penelitian ini, bobot total selimut adalah jumlah label titik dan label sisi pada setiap selimut yang merupakan graf parasut. Bobot total selimut harus membentuk barisan aritmatika.

c. Penentuan Partisi

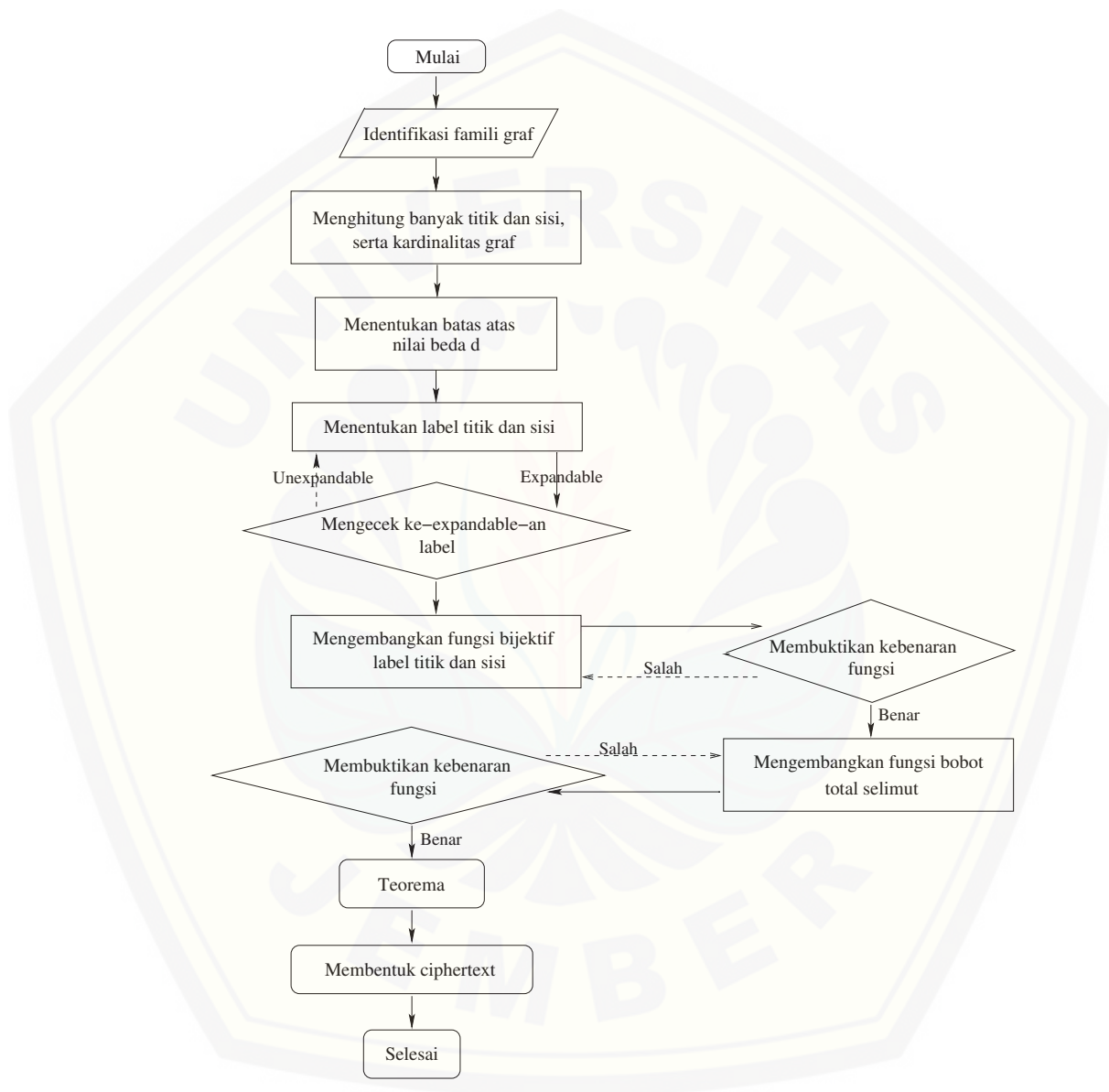
Menentukan partisi pada pelabelan super pada *shackle* graf parasut $shack-(\mathcal{P}_m, e, n)$. Partisi dapat dinyatakan dalam sebuah matriks dengan n kolom dan c baris yang berisi label graf yang mempunyai pola, dimana jumlah pada masing-masing kolom membentuk barisan aritmatika dengan nilai beda d . Sehingga pada setiap partisi dapat ditemukan fungsi partisinya.

d. Menciptakan *Ciphertext*

Pola pelabelan super pada *shackle* graf parasut yang ditemukan dijadikan dasar untuk menciptakan *ciphertext*. Pola pelabelan super ini merupakan kunci rahasia dalam sebuah proses pengkodean. Adapun langkah-langkah pembentukan *ciphertext* sebagai berikut :

- 1) Menentukan graf yang memiliki sisi lebih dari banyaknya karakter *plaintext* yang akan diubah menjadi *ciphertext*, misalkan α .
- 2) Melabeli titik dan sisi sehingga membentuk super (a, d) - \mathcal{P}_m -*antimagic* total.
- 3) Mengeliminasi sisi yang memiliki label $> |V| + \alpha$.
- 4) Membuat diagram pohon dengan akar 1, sedangkan akar selanjutnya mengikuti pola graf. Sisi yang sudah dieliminasi tidak perlu digunakan.
- 5) Mencantumkan label sisi pada diagram pohon sesuai pelabelan pada *shackle* graf parasut.
- 6) Memasang setiap karakter *plaintext* pada sisi dari diagram pohon. Pemasangan karakter diurutkan dari kiri ke kanan dan dimulai dari layer teratas.
- 7) Membuat aturan untuk mentransformasi bilangan modulo 26 ke *ciphertext*. Aturan yang digunakan pada penelitian ini adalah aturan Julius Caesar.
- 8) Membuat tabel yang terdiri dari *plaintext*, label sisi (mod 26) yang bersesuaian dengan *plaintext*, dan *ciphertext* yang bersesuaian dengan aturan Julius Caesar.

Pada penelitian ini akan ditemukan pola pelabelan super pada *shackle* graf parasut dengan nilai awal (a) serta nilai beda (d). Teknik penelitian diatas diterapkan pada *shackle* graf parasut. Dalam penelitian selanjutnya, *shackle* graf parasut akan di-*expand* untuk order m dan n . Langkah-langkah yang akan dilakukan dalam penelitian diatas disajikan pada Gambar 3.2.



Gambar 3.2 Diagram Alir Penelitian

BAB 5. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dari pembahasan pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa:

1. *Shackle* graf parasut ($shack(\mathcal{P}_m, e, n)$) memiliki $V(G) = \{P\} \cup \{x_j, x_{j+1}; 1 \leq j \leq n\} \cup \{y_{kj}; 1 \leq k \leq 2m-2, 1 \leq j \leq n\}$ dan $E(G) = \{u_j, u_{j+1}; 1 \leq j \leq n\} \cup \{e_{lj}; 1 \leq l \leq 3m-2, 1 \leq j \leq n\}$. Dari himpunan titik dan sisi pada *shackle* graf parasut tersebut didapatkan $|V(G)| = p_G = 2nm - n + 2$, $|V(H)| = p_H = 2m + 1$, $|E(G)| = 3nm - n + 1$, dan $|E(H)| = 3m$.
2. Batas atas pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} -antimagic total selimut pada *shackle* graf parasut ($shack(\mathcal{P}_m, e, n)$) memiliki batas atas $d \leq p_H^2 + q_H^2 - 2p_H - q_H$.
3. Misalkan m dan n adalah bilangan bulat dengan $m, n \geq 3$ maka *shackle* graf parasut yang dinotasikan $shack(\mathcal{P}_m, e, n)$ memiliki super (a, d) - \mathcal{H} -antimagic total selimut dengan $a = 4nm - 2n + 9 + c_2 + r_2 + \frac{n}{2}(c_1^2 - c_1 + c_2^2 + c_2 + r_1^2 - r_1 + r_2^2 + r_2) + \frac{1}{2}(c_3 - c_3^2 + c_4(2c_4n + c_4 + 1) + r_3 - r_3^2 + r_4(2r_4n + r_4 + 1)) + \frac{1}{4}(c_5(2c_5n - n + 1) + c_6(2c_6n + n + 3) + c_7(c_7n + 2n - c_7 + 4) + c_8(3c_8n + c_8 - 2n) + r_5(2r_5n - n + 1) + r_6(2r_6n + n + 3) + r_7(r_7n + 2n - r_7 + 4) + r_8(3r_8n + r_8 - 2n)) + c_1(n + 2) + \sum_{s=2}^8 c_s(n \sum_{t=1}^{s-1} c_t + n + 2) + r_1(2mn - n + 3) + \sum_{s=2}^8 r_s(n \sum_{t=1}^{s-1} r_t + 2mn - n + 3)$ dan $d = c_1 - c_2 + c_3^2 - c_4^2 + \frac{c_5}{2} - \frac{c_6}{2} + (\frac{c_7^2}{2} - c_7) - (\frac{c_8^2}{2} - c_8) + r_1 - r_2 + r_3^2 - r_4^2 + \frac{r_5}{2} - \frac{r_6}{2} + (\frac{r_7^2}{2} - r_7) - (\frac{r_8^2}{2} - r_8) + 4$.
4. Dari pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} -antimagic total selimut pada *shackle* graf parasut ($shack(\mathcal{P}_m, e, n)$) dapat dibangun *ciphertext* simbol dengan aturan pengkodean sebagai berikut.

Tabel 5.1 Aturan Pengkodean *Ciphertext* Simbol dari Gambar 4.3.

<i>Mod(50)</i>	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
<i>Ciphertext</i>	ℵ	ħ	ι	ƶ	ℓ	ø	ℜ	ℑ	∕	∅
<i>Mod(50)</i>	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
<i>Ciphertext</i>	∠	∞	∂	∇	△	∇	∃	¬	√	⊤
<i>Mod(50)</i>	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
<i>Ciphertext</i>	⊥	\	ƚ	ƚ	#		♣	◇	♥	♠
<i>Mod(50)</i>	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
<i>Ciphertext</i>	†	‡	§	¶	©	£	✓	✠	®	¥
<i>Mod(50)</i>	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
<i>Ciphertext</i>	α	β	γ	δ	ε	ε	ζ	η	θ	ϑ

5.2 Saran

Berdasarkan hasil penelitian mengenai pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} -antimagic total selimut pada *shackle* graf parasut, d yang ditemukan hanya pada *shackle* graf parasut konektif saja. Mengacu pada *open problem* dari hasil penelitian yang telah ditemukan, maka peneliti memberikan saran kepada pembaca agar dapat melakukan penelitian pada pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} -antimagic total selimut pada *shackle* graf parasut diskonektif.

DAFTAR PUSTAKA

- Adawiyah, R. 2014. *Pelabelan Total Super (a, d) - \mathcal{H} -Antimagic pada Graf Lampion*. e-UNEJ Repository.
- Agustin, I.H., Dafik, dan Milasari, M.D. 2016. *Super Complete-Antimagicness Of Amalgamation Total Of Complete Graph*. Working Paper. Jember : CGANT UNEJ.
- Aprilia, K.R. 2014. *Pelabelan Total Super (a, d) - \mathcal{H} -Antimagic Total Covering pada Graf Semi Parasut SP_{2n-1}* . Working Paper. Jurusan Pendidikan FKIP Universtas Jember.
- Azizah, Y.N. 2016. *Super (a, d) - A_O^P -Antimagic Total Dekomposisi Graf Shackle Generalisasi Antiprisma Untuk Pengembangan Ciphertext dan Keterampilan Berpikir Tingkat Tinggi*. Jurusan Pendidikan FKIP Universtas Jember.
- Bača, Bronkovic, Lascsakova, Phanalasy, and Fenovcikova. 2013. On d -antimagic labelings of plane graphs. *Electonica Journal of Graph Theory and Application*. **1**(1): 28-39.
- Bishop, David. 2003. *Introduction to Cryptography with Java Applets*. Grinnell College.
- Cholidah, F. 2016. *Pelabelan Super (a, d) - \mathcal{H} -Antimagic Total Dekomposisi pada Shaket dari Graf Kipas*. Jurusan Matematika FMIPA Universtas Jember.
- Dafik. 2007. *Structural Properties and Labeling of Graphs*. Tidak Dipublikasikan. Tesis. Australia: School of Information Technology and

Mathematical Sciences University of Ballarat.

Dafik, Mirka, Ryan, and Bača. 2009. On Super (a,d) -Edge-Antimagic Total Labeling of Disconnected Graphs. *Journal of Discrete Mathematics*. **309**(15): 4909-4915.

Hardiyantik D. 2015. *Super (a,d) - \mathcal{H} -Antimagic Total Selimut Pada Graf Semi Jahangir*. Jurusan MAtematika FMIPA Universitas Jember.

H.Enomoto, A.S Llado, T.Nakamamigawa and G.Ringel. 1998. Super Edge-Magic Graphs. *SUT J. MATH*. **34**:105-109.

Hartsfield, N. and Ringel, G. 1994. *Pearls in Graph Theory*. London: Academic Press Limited.

Inayah, N., Simanjuntak, R., dan Salman, A. 2009. Super (a,d) - H -Antimagic Total Labelings For Shackles of A Connected Graph H . *Australasian Journal of Combinatorics*. **57**: 127 - 138.

Maryati, T.K., Salman, A.N.M., Baskoro, E.T., Ryan, J., dan Miller, M. 2010. *On H -supermagic Labelings for Certain Shackles and Amalgamation of a Connected Graph*. Jurnal: Utilitas Mathematic. **83**:333-342.

Munir, R. 2001. *Buku Teks Ilmu Komputer: Matematika Diskrit*. Bandung: Penerbit Informatika.

Pudyaningrum, P.R. 2014. *Super (a,d) - \mathcal{H} -Antimagic Covering Pada Shackle Graf Triangular Book*. Jurusan Matematika FMIPA Universitas Jember.

Purwanto, H., Indriani, G., and Dayanti, E. 2006. *Matematika Diskrit*. Jakarta: PT. ERCONTARA RAJAWALI.

Slamin. 2009. *Desain Jaringan: Pendekatan Teori Graf*. Jember: Universitas Jember.

Wijaya, K. 2010 *Struktur Aljabar Ring*. Jember: Universitas Jember.

