ANALISIS *RAINBOW VERTEX CONNECTION* PADA BEBERAPA GRAF KHUSUS DAN OPERASINYA

SKRIPSI

Oleh

Ida Ariska

NIM 121810101074

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS JEMBER

2016

ANALISIS *RAINBOW VERTEX CONNECTION* PADA BEBERAPA GRAF KHUSUS DAN OPERASINYA

SKRIPSI

diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan Program Studi Matematika (S1) dan mencapai gelar Sarjana Sains

Oleh

Ida Ariska

NIM 121810101074

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS JEMBER

2016

HALAMAN PERSEMBAHAN

Dengan menyebut nama Allah S.W.T Yang Maha Pengasih lagi Maha Penyayang, serta sholawat atas Nabi Muhammad S.A.W, kupersembahkan sebuah kebahagiaan dalam perjalanan hidupku teriring rasa terima kasihku yang terdalam kepada:

1. orang tuaku tercinta dan terkasih : Ayahanda Mujalis dan Ibunda Rosida, serta kedua Adikku Widya Retno W dan Nadya Tri Kusuma W, yang senantiasa mengalirkan kasih sayang, perhatian, dan doa yang tiada pernah putus yang selalu mengiringiku dalam meraih cita-cita;
2. Ibu Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si. dan Bapak Kusbudiono, S.Si., M.Si. yang dengan sabar dan tulus ikhlas membimbing sehingga penulisan skripsi ini dapat terselesaikan;
3. semua guru dan dosenku yang telah memberikan ilmu dan membimbing dengan penuh kesabaran;
4. sahabat-sahabat terbaikku dalam Keluarga Besar Matematika Angkatan 2012 (BATHICS 12) yang senantiasa membantuku dan menorehkan sebuah pengalaman hidup yang tak terlupakan;
5. teman-teman pejuang graf yang selalu berbagi suka maupun duka dan selalu memberikan dukungan untuk terus semangat;
6. Almamater tercinta Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

MOTTO

"Allah tidak membebani seseorang itu melainkan sesuai dengan kesanggupannya."
(terjemahan QS. Al-Baqarah: 286) *)

"Maka sesungguhnya besama kesulitan itu ada kemudahan. Sesungguhnya bersama kesulitan itu ada kemudahan"
(terjemahan QS. Al-Insyirah:5-6) *)

---

*) Departemen Agama Republik Indonesia. 2001. Al-*Qur'an* dan Terjemahannya. Jakata. Bumi Restu.

HALAMAN PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Ida Ariska

NIM : 121810101074

menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang berjudul: Analisis *Rainbow Vertex Connection* pada Beberapa Graf Khusus dan Operasinya adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali jika dalam pengutipan substansi disebutkan sumbernya, dan belum diajukan pada instansi manapun, serta bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa adanya tekanan dan paksaan dari pihak manapun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, Juni 2016

Yang menyatakan,

Ida Ariska

NIM. 121810101074

SKRIPSI

ANALISIS *RAINBOW VERTEX CONNECTION* PADA BEBERAPA GRAF KHUSUS DAN OPERASINYA

Oleh

Ida Ariska
NIM 121810101074

Dosen Pembimbing 1 : Ika Hesti Agustin, S.Si, M.Si
Dosen Pembimbing 2 : Kusbudiono, S.Si, M.Si

PENGESAHAN

Skripsi berjudul "Analisis *Rainbow Vertex Connection* pada Beberapa Graf Khusus dan Operasinya" telah diuji dan disahkan oleh Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam pada :

hari :

tanggal :

tempat : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Tim Penguji :

Ketua,	Sekretaris,
Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si.	Kusbudiono, S.Si., M.Si.
NIP. 19840801 200801 2 006	NIP. 19770430 200501 1 001
Anggota I,	Anggota II,
Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D.	Drs. Rusli Hidayat, M.Sc.
NIP. 19680802 199303 1 004	NIP. 19661012 199303 1 001

Mengesahkan
Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Jember,

Prof. Drs. Sujito, Ph.D.
NIP. 19610204 198711 1 001

RINGKASAN

Analisis *Rainbow Vertex Connection* pada beberapa Graf Khusus dan Operasinya; Ida Ariska, 121810101074; 2016: 78 halaman; Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Jember.

Salah satu teori yang dikembangkan dalam teori graf adalah *rainbow connection.* Teori *rainbow connection* dikembangkan menjadi 2 jenis yaitu *rainbow edge connection* yang biasa disebut *rainbow connection* dan *rainbow vertex connection.* *Rainbow connection* adalah pemberian warna pada sisi suatu graf G jika setiap titik pada graf G dihubungkan oleh lintasan yang memiliki sisi-sisi yang berbeda. Namun sisi yang masuk dalam *rainbow path* tidak boleh ada dua sisi atau lebih yang memiliki warna sama. Pewarnaan di sini disebut *rainbow coloring*, dan pewarnaan minimal dalam suatu graf G disebut *rainbow connection number* yang dilambangkan dengan $rc(G)$. Untuk pemberian *rainbow coloring* harus menggambarkan pola fungsi agar mudah dalam mencari fungsi dari pewarnaannya.

Sedangkan *rainbow vertex connection* adalah pemberian warna titik pada graf G jika setiap titik pada graf G dihubungkan oleh lintasan memiliki titik-titik interior dengan warna yang berbeda. Namun titik yang masuk dalam *rainbow vertex path* tidak boleh ada dua titik atau lebih yang memiliki warna sama. Pewarnaan di sini disebut *rainbow vertex coloring*, dan pewarnaan minimal dalam suatu graf G disebut *rainbow vetex connection number* yang dilambangkan dengan $rvc(G)$. Untuk pemberian *rainbow vertex coloring* harus menggambarkan pola fungsi agar mudah dalam mencari fungsi dari pewarnaannya.

Berdasarkan penelitian *rainbow vertex connection* yang diterapkan pada hasil operasi dari beberapa graf khusus ini, seperti hasil operasi dari graf lintasan (*path graph*), graf bintang (*star graph*), graf kincir angin (*windmill graph*), graf kipas (*fan graph*), graf siklus (*cycle graph*), dan graf buku segitiga (*triangular book graph*). Operasi graf merupakan operasi terhadap dua buah graf atau lebih sehingga menghasilkan graf baru. Adapun graf-graf hasil operasi yang digunakan dalam penelitian ini yaitu $amal(F_{1,m}$, v, $n)$, $amal(Bt_m, v, m)$, $F_{1,m}\Box P_n$, $Wd_{3,m}\Box P_n$, $P_m \odot F_{1,n}$, $P_m \odot Wd_{3,n}$, $Wd_{3,m} \odot C_n$, $P_m + F_{1,n}$, $F_{1,m} + C_n$, $Wd_{3,m} + C_n$, $shack(F_{1,m}, v, n)$, $shack(Bt_n, v, m)$, dan $shack((S_m + C_n), v, r)$. Berikut hasil penelitian *rainbow vertex connection* pada beberapa graf khusus dan operasinnya, dihasilkan 13 teorema baru, antara lain:

1. **Teorema 4.1.1** Misal G adalah *amalgamasi* dari graf kipas $F_{1,m}$. Untuk $m \geq 3$, nilai rainbow vertex connection dari graf amal$(F_{1,m}, v, n)$ adalah 1.

2. **Teorema 4.1.2** Misal G adalah *amalgamasi* dari graf buku segitiga Bt_m. Untuk $m \geq 3$, nilai rainbow vertex connection dari graf amal(Bt_m, v, n) adalah 1.

3. **Teorema 4.1.3** Misal G adalah *cartesian product* dari graf kipas $F_{1,m}$ dan graf lintasan P_n. Untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 2$, nilai rainbow vertex connection dari graf $F_{1,m}\Box P_n$ adalah n.

4. **Teorema 4.1.4** Misal G adalah *cartesian product* dari graf kincir angin Wd_m dan graf lintasan P_n. Untuk $m \geq 2$ dan $n \geq 2$, nilai rainbow vertex connection dari graf $G = Wd_{3,m}\Box P_n$ adalah n.

5. **Teorema 4.1.5** Misal G adalah *crown product* dari graf P_m dan $F_{1,n}$. Untuk $m \geq 2$ dan $n \geq 3$, nilai rainbow vertex connection dari graf $G = P_m \odot F_{1,n}$ adalah m.

6. **Teorema 4.1.6** Misal G adalah *crown product* dari graf P_m dan $Wd_{3,n}$. Untuk $m \geq 2$ dan $n \geq 2$, nilai rainbow vertex connection dari graf $G = P_m \odot Wd_{3,n}$ adalah m.

7. **Teorema 4.1.7** Misal G adalah *crown product* dari graf $Wd_{3,m}$. Untuk $m \geq 2$ dan $n \geq 3$, nilai rainbow vertex connection dari graf $G = Wd_{3,m} \odot C_n$ adalah 3.

8. **Teorema 4.1.8** Misal G adalah *joint* dari graf P_m dan $F_{1,n}$. Untuk $m \geq 2$ dan $n \geq 3$, rainbow vertex connection number dari graf $G = P_m + F_{1,n}$ adalah 1.

9. **Teorema 4.1.9** Misal G adalah *joint* dari graf $F_{1,m}$ dan C_n. Untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 3$, rainbow vertex connection number dari graf $G = F_{1,m} + C_n$ adalah 1.

10. **Teorema 4.1.10** Misal G adalah *joint* dari graf $Wd_{3,m}$ dan C_n. Untuk $m \geq 2$ dan $n \geq 3$, rainbow vertex connection number dari graf $G = Wd_{3,m} + C_n$ adalah 1.

11. **Teorema 4.1.11** Misal G adalah *shackle* dari graf $F_{1,m}$. Untuk $m \geq 3$, rainbow vertex connection number dari graf $shack(F_{1,m}, v, n)$ adalah $2r - 1$.

12. **Teorema 4.1.12** Misal G adalah *shackle* dari graf Bt_m. Untuk $m \geq 3$, rainbow vertex connection number dari graf $shack(Bt_m, v, n)$ adalah $2n - 1$.

13. **Teorema 4.1.13** Misal G adalah *shackle* dari graf S_m dan C_n. Untuk $m \geq 3$ $n \geq 3$, rainbow vertex connection number dari graf $shack((S_m + C_n), v, r)$ adalah $2r - 1$.

KATA PENGANTAR

Puji syukur kehadirat Allah SWT atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul Analisis *Rainbow Vertex Connection* pada Beberapa Graf Khusus dan Operasinya. Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan pendidikan strata satu (S1) pada Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih atas bantuan dan bimbingan dalam penyusunan skripsi ini, terutama kepada yang terhormat:

1. Drs. Sujito, Ph.D., selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
2. Kusbudiono S.Si., M.Si., selaku Ketua Jurusan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
3. Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si., selaku Dosen Pembimbing Utama, Kusbudiono S.Si., M.Si., selaku Dosen Pembimbing Anggota, Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D., S.Si., M.Si., selaku dosen Penguji I dan Drs. Rusli Hidayat, M.Sc., selaku dosen penguji II yang telah meluangkan waktu, pikiran, dan perhatian dalam penulisan skripsi ini;
4. dosen dan karyawan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
5. semua pihak yang telah membantu terselesaikannya skripsi ini.

Semoga bantuan, bimbingan, dan dorongan beliau dicatat sebagai amal baik oleh Allah SWT dan mendapat balasan yang sesuai dari-Nya. Selain itu, penulis juga menerima segala kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan skripsi ini. Akhirnya penulis berharap, semoga skripsi ini dapat bermanfaat.

Jember, Juni 2016
Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

,

BAB 1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika selalu berkembang sehingga sering digunakan untuk membantu berbagai macam permasalahan. Matematika terdiri dari berbagai cabang ilmu diantaranya Aljabar, Geometri, Statistika dan Probabilitas, Matematika Apli kasi, Matematika Komputasi, Matematika Ekonomi, serta Matematika Diskrit. Cabang matematika terkini terkait dengan sains komputer yang cukup terkenal adalah teori graf yang ada pada Matematika Diskrit. Teori graf merupakan salah satu cabang matematika yang penting dan banyak manfaatnya untuk meme cahkan masalah dalam kehidupan sehari-hari.

Salah satu yang dipelajari dalam teori graf adalah pewarnaan. Pewarnaan pada graf G adalah pemberian warna-warna ke titik atau sisi dari G sedemikian hingga titik atau sisi yang terhubung langsung mempunyai warna-warna yang berbeda. Dalam teori graf konsep pewarnaan terus berkembang, salah satunya adalah *rainbow connection*. Konsep *rainbow connection* pertama kali diperkenalkan pada tahun 2008 oleh Chartrand dkk. Kemudian pada tahun 2009, Krive levich dan Yuster mengembangkan konsep *rainbow connection* menjadi 2 jenis yaitu *rainbow edge-connection* yang didefinisikan sebagai pemberian warna pada sisi suatu graf G jika setiap titik pada graf G dihubungkan oleh lintasan yang memiliki sisi-sisi yang berbeda, dan *rainbow vertex-connection* yang didefinisikan sebagai pemberian warna pada titik suatu graf G jika setiap titik pada graf G dihubungkan oleh lintasan memiliki titik-titik interior dengan warna yang berbeda. *Rainbow connection number* pada graf disimbolkan $rc(G)$, sedangkan *rainbow vertex connection number* pada graf disimbolkan $rvc(G)$.

Sebelumnya, Histamedika (2012) telah melakukan penelitian yang mengkaji tentang *rainbow connection* pada beberapa graf. Wijaya (2013) melakukan penelitian bilangan *rainbow connection* pada graf komplemen. Alfarisi dan Dafik (2014) melakukan pengembangan *rainbow connection* pada sebarang graf khusus. Fajariyanto (2015) melakukan penelitian tentang penerapan *rainbow connection* pada graf-graf hasil operasi. Darmawan (2015) melakukan penelitian analisis *rainbow connection number* pada graf khusus dan hasi operasinya. Hasan (2015) melakukan penelitian analisa *rainbow connection* dan *strong rainbow connection* pada graf hasil operasi. Krivelevich dan Yuster pada artikel ilmiah yang telah dipublikasikan pada tahun 2009 penelitiannya *The rainbow connection of a graph is (at most) reciprocal to its minimum degree*, Li and Liu pada tahun 2011 pada artikel ilmiahnya yang berjudul *Rainbow vertex connection number of 2 connected graphs* mengatakan bahwa menjelaskan *rainbow vertex connection number* dari *cylce graph* C_n. Pada tahun 2015, Dian N.S Simamora dan A.N.M. Salman pada artikel ilmiahnya yang berjudul *The rainbow vertex connection number of Pencil graphs* menjelaskan *rainbow vertex connection number* dari graf pensil *rvc* (Pc_n).

Pada penelitian ini, penulis akan mengangkat masalah bagaimana menghasilkan graf hasil operasi dari beberapa graf khusus dan bagaimana menemukan *rainbow vertex connection* dari graf hasil operasi tersebut. Operasi yang digunakan dalam penelitian ini adalah *joint*, *cartesian product*, *crown product*, *shackle*, dan *amalgamation.* Sedangkan graf khusus yang digunakan dalam penelitian ini antara lain graf lintasan (*path graph*), graf bintang (*star graph*), graf kincir angin (*windmill graph*), graf kipas (*fan graph*), graf siklus (*cycle graph*), dan graf buku segitiga (*triangular book graph*). Berdasarkan pada hal itu, penulis tertarik untuk memilih judul "*Analisis Rainbow Vertex Connection pada beberapa Graf Khusus dan Operasinya*".

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka dapat dirumuskan masalah dalam penelitian ini yaitu:

a. bagaimana menentukan kardinalitas titik dan sisi pada graf-graf hasil operasi yaitu $amal(F_{1,m}$, v, $n)$, $amal(Bt_m, v, m)$, $F_{1,m}\square P_n$, $Wd_{3,m}\square P_n$, $P_m \odot F_{1,n}$, $P_m \odot Wd_{3,n}$, $Wd_{3,m} \odot C_n$, $P_m + F_{1,n}$, $F_{1,m} + C_n$, $Wd_{3,m} + C_n$, $shack(F_{1,m}, v, n)$, $shack(Bt_n, v, m)$, dan $shack((S_m + C_n), v, r)$?

b. bagaimana *rainbow vertex connection number* pada graf-graf hasil operasi

$amal(F_{1,m},\ \text{v},\ n)$, $amal(Bt_m,\ v,\ m)$, $F_{1,m}\Box P_n$, $Wd_{3,m}\Box P_n$, $P_m \odot F_{1,n}$, $P_m \odot Wd_{3,n}$, $Wd_{3,m} \odot C_n$, $P_m + F_{1,n}$, $F_{1,m} + C_n$, $Wd_{3,m} + C_n$, $shack(F_{1,m}$, $v,\ n)$, $shack(Bt_n,\ v,\ m)$, dan $shack((S_m + C_n),\ v,\ r)$?

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini meliputi:

a. menentukan kardinalitas titik dan sisi pada graf-graf hasil operasi yaitu $amal(F_{1,m},\ \text{v},\ n)$, $amal(Bt_m,\ v,\ m)$, $F_{1,m}\Box P_n$, $Wd_{3,m}\Box P_n$, $P_m \odot F_{1,n}$, $P_m \odot Wd_{3,n}$, $Wd_{3,m} \odot C_n$, $P_m + F_{1,n}$, $F_{1,m} + C_n$, $Wd_{3,m} + C_n$, $shack(F_{1,m}$, $v,\ n)$, $shack(Bt_n,\ v,\ m)$, dan $shack((S_m + C_n),\ v,\ r)$?

b. menentukan *rainbow vertex connection number* pada graf-graf hasil operasi yaitu $amal(F_{1,m},\ \text{v},\ n)$, $amal(Bt_m,\ v,\ m)$, $F_{1,m}\Box P_n$, $Wd_{3,m}\Box P_n$, $P_m \odot F_{1,n}$, $P_m \odot Wd_{3,n}$, $Wd_{3,m} \odot C_n$, $P_m + F_{1,n}$, $F_{1,m} + C_n$, $Wd_{3,m} + C_n$, $shack(F_{1,m},\ v,\ n)$, $shack(Bt_n,\ v,\ m)$, dan $shack((S_m + C_n),\ v,\ r)$?

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari hasil penelitian ini, yaitu:

a. menambah wawasan baru dalam bidang teori graf, khususnya mengenai *rainbow vertex connection*;

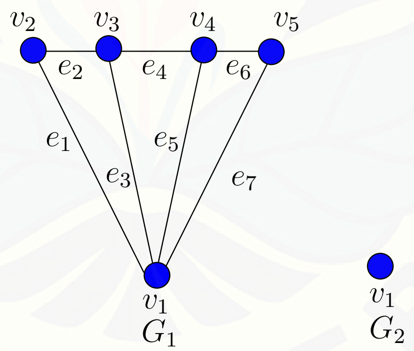
b. memberikan motivasi pada peneliti lain untuk meneliti lebih luas tentang pencarian *rainbow vertex connection* pada graf-graf hasil operasi yang lain.

BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Definisi dan Terminologi Graf

Secara matematis, graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan ($V(G)$, $E(G)$), dimana $V(G)$ adalah himpunan berhingga tak kosong dari elemen yang disebut titik, dan $E(G)$ adalah sebuah himpunan (mungkin kosong) dari pasangan tak terurut u, v $\in V(G)$ yang disebut sisi. Dari definisi graf G dapat dinyatakan bahwa V tidak boleh kosong, tetapi E boleh kosong. Jadi, apabila terdapat sebuah graf yang tidak memiliki sisi tetapi memiliki sebuah titik saja, maka graf tersebut disebut graf trivial (Munir, 2009).

Berikut merupakan contoh dari graf G dan graf trivial sebagaimana Gambar di bawah ini. Gambar 2.1 G_1 adalah graf dengan $V(G_1) = v_1, v_2, v_3, v_4, v_5$ dan $E(G_1) = e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7$ dengan $e_1 = v_1v_2$, $e_2 = v_2v_3$, $e_3 = v_1v_3$, $e_4 = v_3v_4$, $e_5 = v_1v_4$, $e_6 = v_4v_5$, $e_7 = v_1v_5$. Sedangkan G_2 adalah graf trivial, karena $E(G_2) = \emptyset$.



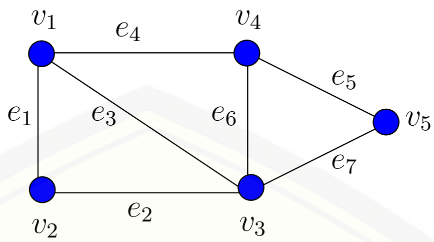
Gambar 2.1 Graf G_1 dan Graf G_2

Untuk sebuah graf G akan dinotasikan $|V(G)|$ dan $|E(G)|$ dimana masing-masing adalah banyaknya anggota dari himpunan titik yang biasa disebut *order* dan banyaknya anggota dari himpunan sisi yang biasa disebut *size* dari graf G. Sebuah graf direpresentasikan dengan gambar berupa titik yang dihubungkan garis diantara pasangan titik u, $v \epsilon G$. Gambar 2.1 representasi graf dengan $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan $E(G) = \{v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_1v_5, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5\}$.

Sebuah titik u pada graf G diikatakan bertetangga (*adjacent*) pada v jika terdapat sisi e yang menghubungkan pasangan titik (u,v). Dengan kata lain u dan v bersisian (*incident*) dengan sisi e. Pada gambar 2.1 diatas khususnya pada graf G_1 titik v_1 bertetangga dengan titik v_2, v_3, v_4, v_5, titik v_2 bertetangga dengan titik v_1, v_3, titik v_3 bertetangga dengan titik v_1, v_4, titik v_4 bertetangga dengan titik v_1, v_5, dan terakhir titik v_5 bertetangga dengan titik v_1, v_4.

Derajat (*degree*) dari sebuah titik v adalah banyaknya titik yang bersisian atau *incident* dengan v. Derajat dari titik pada graf dinotasikan dengan d_i dimana i menunjukkan titik ke-i pada graf. Sebagai contoh dapat dilihat pada Gambar 2.1, derajat dari titik v_2 adalah 2 (dua). Jika setiap titik dari graf tersebut mempunyai derajat yang sama maka graf G dikatakan *regular*, jika sebaliknya maka dikatakan *non-reguler.* Titik yang mempunyai derajat satu disebut titik akhir (*end vertex*) atau daun (*leaf*). Sedangkan sebuah titik yang mempunyai derajat 0 (nol) atau tidak bertetangga dengan titik lain disebut titik terisolasi (*isolated vertex*). Banyaknya sisi minimal yang bersisian pada suatu titik v di graf G diantara titik-titik lainnya di graf G disebut derajat terkecil dinotasikan dengan $\delta(G)$. Sedangkan banyaknya maksimal sisi yang bersisian pada suatu titik di graf G disebut derajat terbesar, dinotasikan dengan $\Delta(G)$ (Hartsfield dan Ringel, 1990). Sebagai contoh dapat diihat pada Gambar 2.1, khususnya pada graf G_1. Graf G_1 memiliki derajat terbesar sama dengan 4 (empat) dan derajat terkecil sama dengan 2 (dua).

Jalan *(walk)* didefinisikan sebagai barisan berhingga yang bergantian antara titik dan sisi yang diawali dan diakhiri dengan titik sedemikian hingga dengan ketentuan setiap sisi bersisian(*incident*), sedangkan titik dan sisinya boleh berulang. Pada gambar 2.2 dapat dipilih sebuah *walk* dari titik v_1 ke titik v_5 yaitu v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, v_1, e_4, v_4, e_5, dan v_5. Sedangkan jalan yang tidak memiliki titik-titik dan sisi-sisi yang berulang atau tidak terdapat titik-titik dan sisi-sisi yang muncul lebih dari sekali disebut dengan lintasan (*path*). Pada gambar 2.2 dapat diambil sebuah *path* dari titik v_1 ke titik v_5 yaitu v_1, e_4, v_4, e_5, v_5. Suatu lintasan dinamakan *cycle* apabila lintasan tersebut membentuk lintasan tertutup misalkan v_1, v_2, v_3, v_4, v_1.



Gambar 2.2 Contoh *walk* dari Graf(G)

Jarak atau *distance* dinotasikan $d(v_i, v_j)$ yang merupakan jarak antara dua titik v_i dan v_j. Jarak pada graf G adalah panjang lintasan terpendek dari titik v_i ke titik v_j. Jika tidak ada lintasan dari titik v_i ke v_j, maka didefinisikan jarak $d(v_i, v_j) = \infty$. Sebagai contoh, dapat dilihat pada Gambar 2.2 $d(v_1, v_5) = 2$. Diameter dari graf G adalah maksimum jarak antara dua vertex v_i dan v_j dalam graf G. Diameter dari graf G dinotasikan dengan $diam(G)$, berarti $diam(G) = maks\{d(v_i, v_j): v_i, v_j \in G\}$. Sebagai contoh, perhatikan pada gambar 2.2 memiliki diameter sama dengan 2.

Suatu graf disebut graf terhubung (*connected graph*), jika untuk setiap pasangan titik $(v_i,v_j) \in V$ terdapat lintasan (*path*) dari u_i ke v_j, jika tidak maka G disebut graf tak terhubung (*disconnected graph*). Graf pada Gambar 2.2 merupakan salah satu contoh graf terhubung.

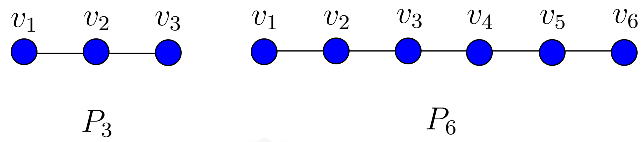
2.2 Graf Khusus dan Operasi Graf

2.2.1 Graf Khusus

Terdapat beberapa jenis graf khusus, berikut definisi dari beberapa graf khusus tersebut:

a. Graf Lintasan (*Path Graph*)

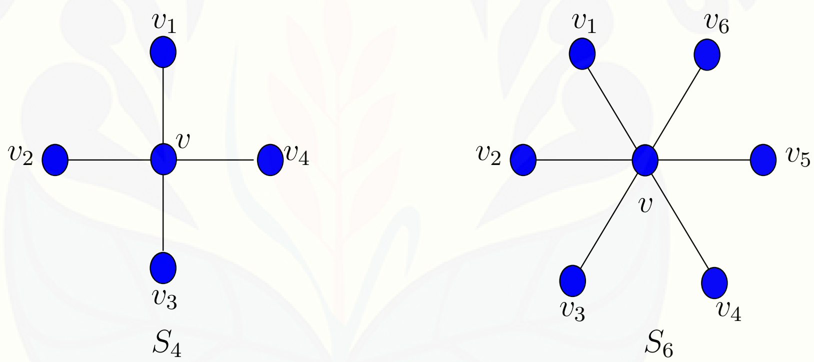
Graf lintasan adalah graf yang hanya terdiri dari satu lintasan dengan n titik. Graf lintasan dinotasikan dengan P_n, dimana $n \geq 2$ yang terdiri dari n titik dan $n-1$ sisi. Contoh graf lintasan dapat dilihat pada Gambar 2.3.



Gambar 2.3 Graf Lintasan P_3 dan P_6

b. Graf Bintang (*Star Graph*)

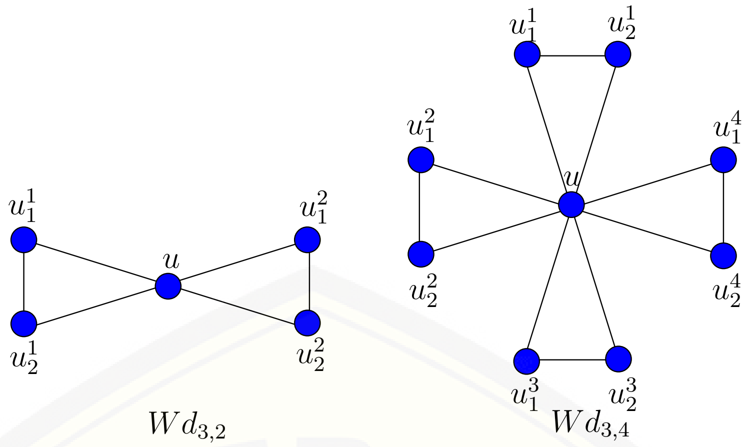
Graf bintang adalah graf pohon yang terdiri dari satu titik pusat yang berderajat n dan n titik yang berderajat 1. Jadi, graf bintang S_n terdiri dari $n+1$ titik dan n sisi dengan $n \geq 2$ (Damayanti, 2011). Contoh dari graf bintang bisa dilihat pada Gambar 2.4.



Gambar 2.4 Graf Bintang S_4 dan S_6

c. Graf Kincir Angin (*Windmill graph*)

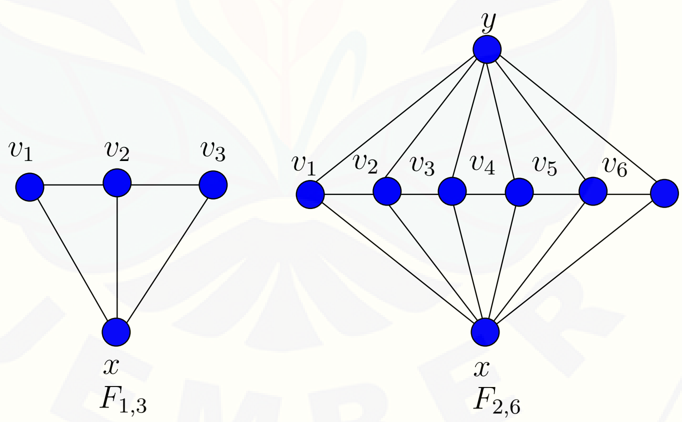
Graf kincir angin *windmill graph* dinotasikan $Wd_{(m,n)}$, merupakan graf yang memiliki $V(Wd_{(m,n)}) = \{u\} \cup \{u_i^k; 1 \leq i \leq 2, 1 \leq k \leq n\}$ dan $E(Wd_{(m,n)}) = \{uu_1^k; 1 \leq i \leq 2, 1 \leq k \leq n\} \cup \{u_1^k u_2^k; 1 \leq k \leq n\}$. Contoh graf *windmill* dapat dilihat pada Gambar 2.5



Gambar 2.5 Graf Kincir Angin $Wd_{(3,2)}$ dan $Wd_{(3,4)}$

d. Graf Kipas (*Fan Graph*)

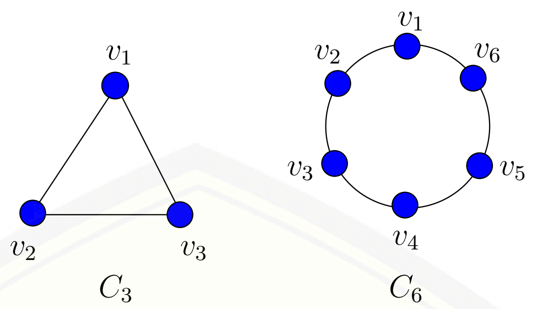
Graf kipas atau *fan graph* dinotasikan dengan $F_{(n,m)}$, merupakan graf yang terbentuk dengan menghubungkan semua titik m yang berupa graf lintasan P_m pada sebanyak n titik pusat. Sehingga graf kipas terdiri dari $n + m$ titik dan $mn + m - 1$ sisi, dimana $n \geq 1$ dan $m \geq 2$. Contoh graf kipas dapat dilihat pada Gambar 2.6.



Gambar 2.6 Graf Kipas $F_{1,3}$ dan $F_{2,6}$

e. Graf Siklus (*Cycle Graph*)

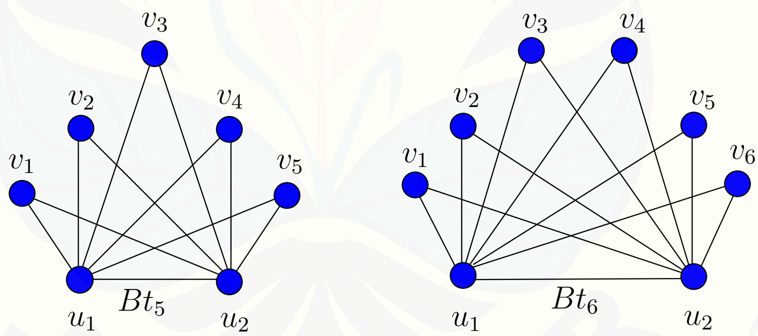
Graf siklus dinotasikan dengan C_n adalah graf yang setiap titiknya berderajat sama yaitu berderajat dua dan memiliki jumlah titik dan jumlah sisi yang sama. Graf siklus C_n hanya dapat dibentuk dengan $n \geq 3$ (Purwanto dkk, 2006). Contoh graf siklus dapat dilihat pada Gambar 2.7.



Gambar 2.7 Graf *Cycle* C_3 dan C_6

f. Graf buku segitiga (*Triangular Book Graph*)

Graf buku segitiga merupakan dinotasikan dengan Bt_n yaitu graf yang terdiri dari sejumlah n buah segitiga ($n \geq 3$) dengan setiap segitiga memiliki sebuah sisi yang dipakai bersama atau dengan kata lain setiap segitiga memiliki 2 titik yang sama. Contoh graf buku segitiga dapat diihat pada Gambar 2.8.

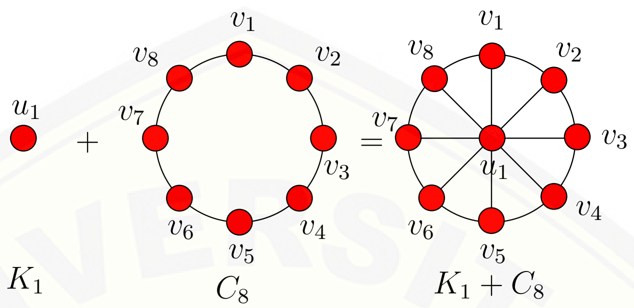


Gambar 2.8 Graf buku segitiga Bt_5 dan Bt_6

2.2.2 Operasi Graf

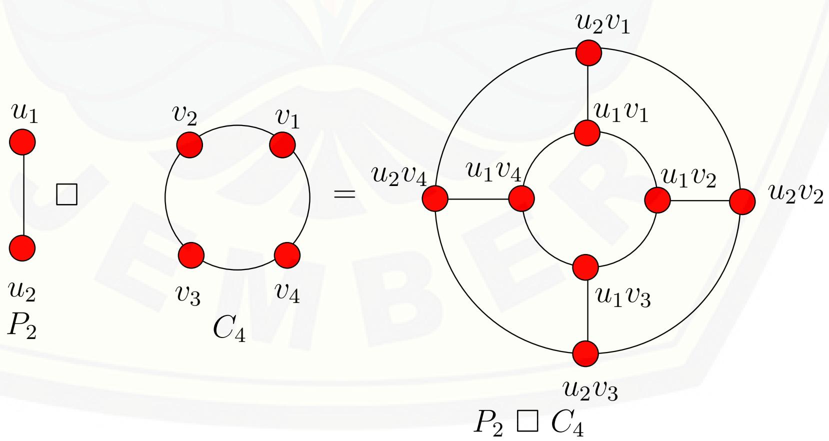
Dalam teori graf, ada yang dinamakan operasi graf, yaitu pengoperasian beberapa graf sehingga menjadi graf baru dengan menggunakan beberapa operasi graf seperti berikut:

Definisi 2.2.1. *Joint dari graf* $G_1(V_1, E_1)$ *dan* $G_2(V_2, E_2)$ *adalah graf* G *dimana* $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ *dan* $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{uv \mid u \in V(G_1), v \in V(G_2)\}$, *dan dinotasikan dengan* $G = G_1 + G_2$ (Harary, 2007). Contoh operasi *joint* dapat dilihat pada Gambar 2.9.



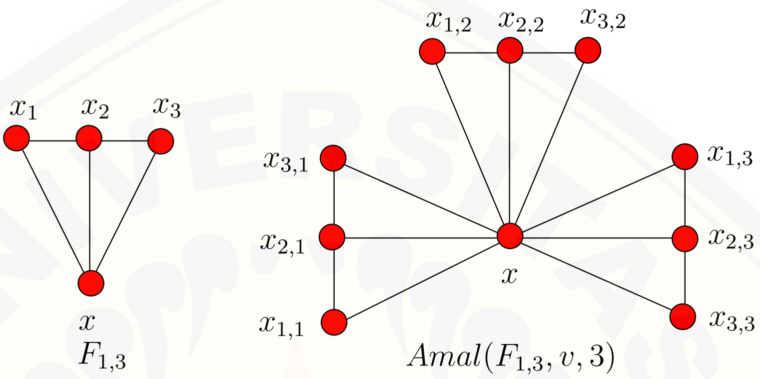
Gambar 2.9 Graf Hasil Operasi *Joint* dari K_1 dan C_8

Definisi 2.2.2. *Cartesian product dari graf* $G_1(V_1, E_1)$ *dan* $G_2(V_2, E_2)$ *dinotasikan dengan* $G = G_1 \square G_2$, *yaitu graf dengan himpunan titik* $V(G_1) \times V(G_2)$, *dua titik* (u_1, u_2) *dan* (v_1, v_2) *di* G *adjacent jika dan hanya jika salah satu dari dua hal berikut berlaku:* ($u_1 = v_1$ *dan* $u_2v_2 \in E_2$) *atau* ($u_2 = v_2$ *dan* $u_1v_1 \in E_1$) (Harary, 2007). Contoh operasi *cartesian product* dapat dilihat pada Gambar 2.10.



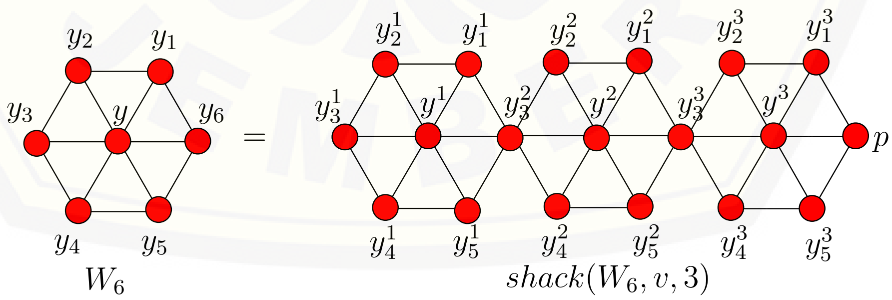
Gambar 2.10 Contoh Operasi *Cartesian Product* dari P_2 dan C_4

Definisi 2.2.3. *Amalgamation dinotasikan dengan* $Amal(H_i, v, r)$. *Misalkan* $\{H_i\}$ *adalah suatu keluarga graf berhingga dan setiap* H_i *mempunyai suatu titik* v *yang disebut titik terminal, dan* r *menyatakan banyaknya graf* H_i *yang akan diamalgamation, sehingga semua* H_i *dengan seluruh terminalnya direkatkan menjadi satu titik* (Ardiyansah, 2013). Contoh operasi *amalgamation* dapat dilihat pada Gambar 2.11.



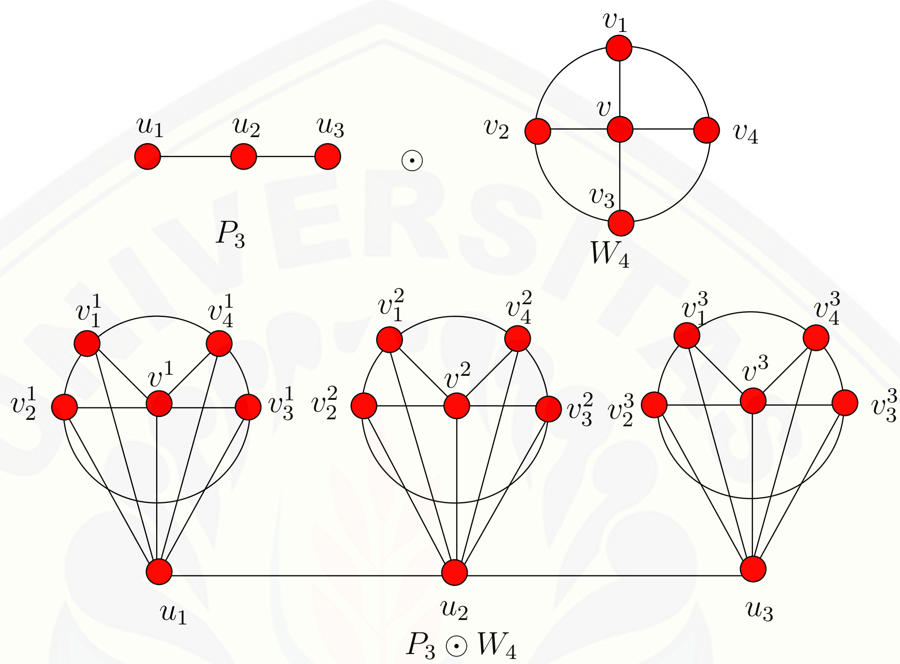
Gambar 2.11 Graf Hasil Operasi *Amalgamation* dari $F_{1,3}$

Definisi 2.2.4. *Shackle dinotasikan dengan Shack* (G_i,v,r). *Misalkan* $\{ G_i \}$ *merupakan graf yang dibangun dari graf terhubung nontrivial dan order graf* $(G_1, G_2, \ldots, G_k)$ *sedemikian hingga untuk setiap* $1 \leq i, j \leq k$ *dengan* $\mid i - j \mid \geq 2$, G_i *dan* G_j *tidak memiliki titik umum, dan untuk setiap* $1 \leq i \geq k-1$, G_i *dan* $G_i + 1$ *tepat satu titik yang sama, disebut vertex linkage dimana k -1 linkage titik semua berbeda* (Maryati, 2010). Contoh operasi *shackle* dapat dilihat pada Gambar 2.12.



Gambar 2.12 Graf Hasil Operasi *Shackle* dari W_6

Definisi 2.2.5. *Crown Product dinotasikan* $G \bigodot H$*, didefinisikan sebagai graf yang diperoleh dengan mengambil sebuah duplikat dari graf* G *dan* $|V(G)|$ *duplikat* H_1*,* H_2*, ...,* $H_{|V(G)|}$ *dari H, kemudian menghubungkan titik ke-i dari G ke setiap titik di* H_i*,* i = *1,2,3,... ,* $|V(G)|$ *(Figueroa, 2002). Contoh operasi* crown product *dapat dilihat pada Gambar 2.12*



Gambar 2.13 Graf Hasil Operasi *Crown Product* dari P_3 dan W_4

2.3 *Rainbow Vertex Connection*

Rainbow connection pertama kali diperkenalkan pada tahun 2008 oleh Chartrand dkk. Kemudian pada tahun 2009, Krivelevich dan Yuster mengembangkan konsep *rainbow connection* menjadi 2 jenis yaitu *rainbow edge-connection* atau sering disebut *rainbow connecteion* yang didefinisikan sebagai pemberian warna pada sisi suatu graf G jika setiap titik pada graf G dihubungkan oleh lintasan yang memiliki sisi-sisi yang berbeda, dan *rainbow vertex connection* yang didefinisikan sebagai pemberian warna titik pada graf G jika setiap titik pada graf G dihubungkan oleh lintasan memiiki titik-titik interior dengan warna yang berbeda.

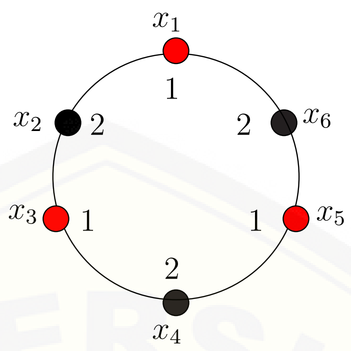
Definisi *Rainbow connection* adalah misalkan pada graf $G = (V(G), E(G))$ merupakan graf terhubung yang tak trivial didefinisikan suatu pewarnaan $c = E(G) \rightarrow \{1, 2, ..., k\}$, dengan sisi yang bertetangga (*adjacent*) boleh memiliki warna yang sama. Suatu *path* adalah jalan (*walk*) yang semua titiknya dilalui berbeda. Lintasan u - v *path* di G dapat dikatakan *rainbow path* jika tidak ada dua sisi pada lintasan di G memiliki warna yang sama. Pewarnaan sisi G disebut *rainbow connected* apabila dua titik yang berbeda yang dihubungkan oleh *rainbow path.* Pewarnaan sisi pada G yang merupakan *rainbow connected* dikatakan sebagai *rainbow coloring* di G. Dalam hal ini, pewarnaan c dikatakan *rainbow coloring* di G. Jika terdapat k warna di G maka c dikatakan *rainbow k-coloring.* Minimum k sehingga terdapat *rainbow k-coloring* di G disebut *rainbow connection number*, dinotasikan dengan $rc(G)$ (Li and Sun, 2011).

Definisi *Rainbow vertex connection* adalah misalkan pada graf $G = (V(G), E(G))$ merupakan graf terhubung yang tak trivial didefinisikan suatu pewarnaan $c' : V(G) \rightarrow \{1, 2, ..., k\}$ dengan titik-titik interior yang berbeda. Lintasan u - v *path* di G dapat dikatakan *rainbow vertex path* jika semua titik internal pada lintasan di G mempunyai warna berbeda. Graf G disebut *rainbow vertex connected* apabila dua titik yang berbeda yang dihubungkan oleh *rainbow vertex path.* Pewarnaan titik pada G yang merupakan *rainbow vertex connected* dikatakan sebagai *rainbow vertex coloring* di G. Dalam hal ini, pewarnaan c' dikatakan *rainbow vertex coloring* di G. *Rainbow vertex connection number* pada graf terhubung dinotasikan $rvc(G)$ yaitu bilangan terkecil dari warna yang dibutuhkan untuk membuat graf$G$ menjadi *rainbow vertex connected* (Krivelevich dan Yuster, 2009).

Menurut Krivelevich dan Yuster dalam jurnal *The rainbow (vertex) connection number of pencil graphs* memberikan teorema batas bawah dari *rainbow vertex connection* pada graf G adalah sebagai berikut:

$\lozenge$ **Teorema 2.3.1.** *Misalkan G adalah graf terhubung dengan diam(G), maka* $rvc(G) \geq diam(G) - 1$.

Berikut gambar 2.14 diperlihatkan contoh *rainbow vertex connection* dari graf *Cycle*. Pada gambar 2.14 menyatakan $rvc(C_6) = 2$

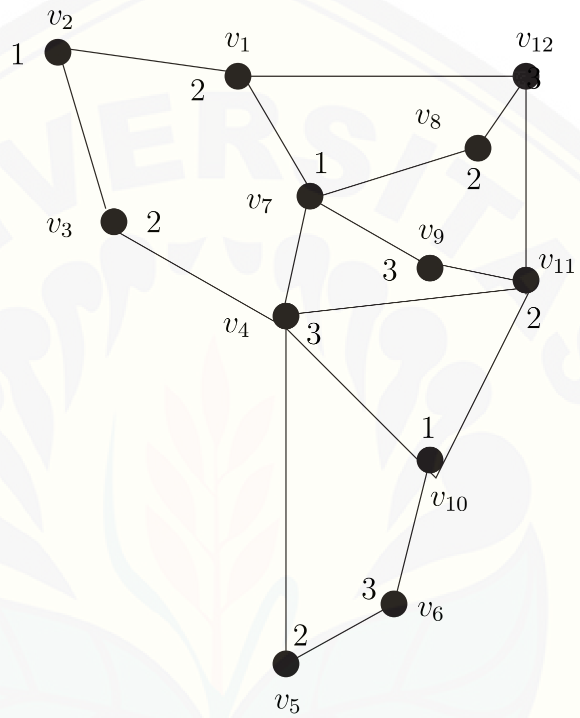


Gambar 2.14 Contoh *rvc* Graf *Cycle* C_6

2.4 Aplikasi *Rainbow Vertex Connection*

Konsep *rainbow vertex connection* dapat diaplikasikan pada proses pengiriman, misalnya digunakan dalam distribusi soal Seleksi Bersama Masuk Perguruan Tinggi Negeri (SBMPTN) ke lokasi ujian SBMPTN. Pengiriman perlu pengawalan dan pengawasan yang ketat karena merupakan dokumen negara yang rahasia dan agar tidak terjadi masalah yang tidak diinginkan. Pendistribusian soal SBMPTN sampai ke tempat diselanggarakan seleksi ditakutkan terjadi penyelewangan soal oleh salah satu pihak apabila tidak diantarkan oleh pihak yang berwenang, yaitu dari Dinas Pendidikan sebagai pengawas pertama, Polres sebagai pengawas kedua dan panitia pelaksana sebagai pengawas ketiga. Sehingga hal-hal buruk seperti kebocoran soal dapat dihindari. Jadi apabila terjadi kecurangan dari tim pengawas yang menjaga diwilayah pertama, tim pengawas berikutnya dengan tim pengawas yang berbeda akan mengetahui kecurangan tersebut. Karena apabila dalam satu jalur pengiriman dengan tim pengawas yang sama, ditakutkan ada kerja sama dalam melakukan kecurangan seperti kebocoran soal. Serta harus ditentukan jumlah minimal tim pengawas yang dibutuhkan dalam mengawasi pendistribusian kertas soal (Hasan,2015). Situasi inilah yang dapat dimodelkan dalam bilangan *rainbow vertex connection.*

Dengan demikian, dapat dipilih pengawas yang berbeda untuk mengecek jumlah soal SBMPTN. Sehingga harus ditentukan jumlah minimal tim pengawas yang dibutuhkan. Situasi inilah yang dapat dimodelkan dalam bilangan *rainbow vertex connection.*



Gambar 2.15 Contoh Aplikasi $rvc(G)$

Pada Gambar 2.15 memiliki *rainbow vertex coloring* = 3, yang menurut Krivelevich dan Yuster, batas bawah dari *rainbow vertex connection* pada graf G yakni $rvc(G) \geq diam(G)$ - 1. Jadi yang harus dibentuk adalah 3 tim pengawas dan disebar menurut rainbow coloring dari $rvc(G)$ seperti pada Gambar 2.14. Pada Gambar 2.15 dimisalkan pengiriman soal berpusat di v_1. Untuk menuju v_6 harus melewati v_7 untuk diperiksa tim 1, kemudian melewati v_4 untuk diperiksa tim 3, kemudian melewati v_5 untuk diperiksa tim 2, dan berhenti ke v_6. Dengan syarat v_1 sebagai pengirim dan v_6 sebagai penerima dan tidak dihiraukan.

2.5 Hasil-hasil *Rainbow Vertex Connection*

Pada bagian ini disajikan beberapa rangkuman hasil *rainbow vertex connection* yang dapat digunakan sebagai rujukan penelitian ini.

Tabel 2.1 Hasil Penelitian Terdahulu $rvc(G)$

Graf	**Hasil**	**Keterangan**
K_n (*Complete Graph*);	$rvc(K_n) = 1.$	Krivelevich and Yuster, 2009
S_n (*Star Graph*);	$rvc(S_n) = 1.$	Krivelevich and Yuster,2009
C_n (*Cycle Graph*);	$rvc(C_n) = 1; n = 4$ and 5. $rvc(C_n) = 3; n = 9.$ $rvc(C_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil - 1; n = 6, 7,$ $8, 10, 11, 12, 13, 15.$ $rvc(C_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil; n \geq 16, 14.$	Li and Liu, 2011
Pc_n (*Pencil Graph*);	$rvc(Pc_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil; n \leq 7.$ $rvc(C_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1; otherwise.$	Dian N.S and A.N.M. Salman, 2015.

BAB 3. METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Penelitian ini dikategorikan kedalam penelitian eksploratif dan penelitian terapan *(applied research)*, yaitu:

a. Penelitian eksploratif adalah jenis penelitian yang bertujuan menggali hal-hal yang ingin diketahui oleh peneliti dan hasil penelitian dapat digunakan sebagai dasar penelitian selanjutnya.

b. Penelitian terapan *(applied research)* merupakan penyelidikan yang hati-hati, sistematik dan terus-menerus terhadap suatu masalah dengan tujuan untuk digunakan dengan segera untuk keperluan tertentu.

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode deduktif aksiomatik. Metode deduktif aksiomatik adalah metode peneitian yang menggunakan prinsip - prinsip pembuktian deduktif yang berlaku dalam logika matematika dengan menggunakan aksioma atau teorema yang sudah ada untuk menyelesaikan masalah.

3.2 Data

Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data sekunder yaitu berupa graf-graf khusus antara lain graf lintasan (*path graph*), graf bintang (*star graph*), graf kincir angin(*windmill graph*), graf kipas (*fan graph*), graf siklus (*cycle graph*), dan graf buku segitiga (*triangular book*).

3.3 Rancangan Penelitian

Rancangan penelitian pada tugas akhir ini untuk *rainbow vertex connection number* dilakukan pada beberapa pengoperasian graf. Adapun rancangan penelitian pada tugas akhir ini adalah sebagai berikut:

a. Menenetapkan graf-graf khusus yang akan digunakan untuk dianalisis *rvc.*

b. Menerapkan operasi graf pada graf-graf khusus yang telah ditentukan.

c. Menentukan kardinalitas graf-graf khusus yang telah dioperasikan.

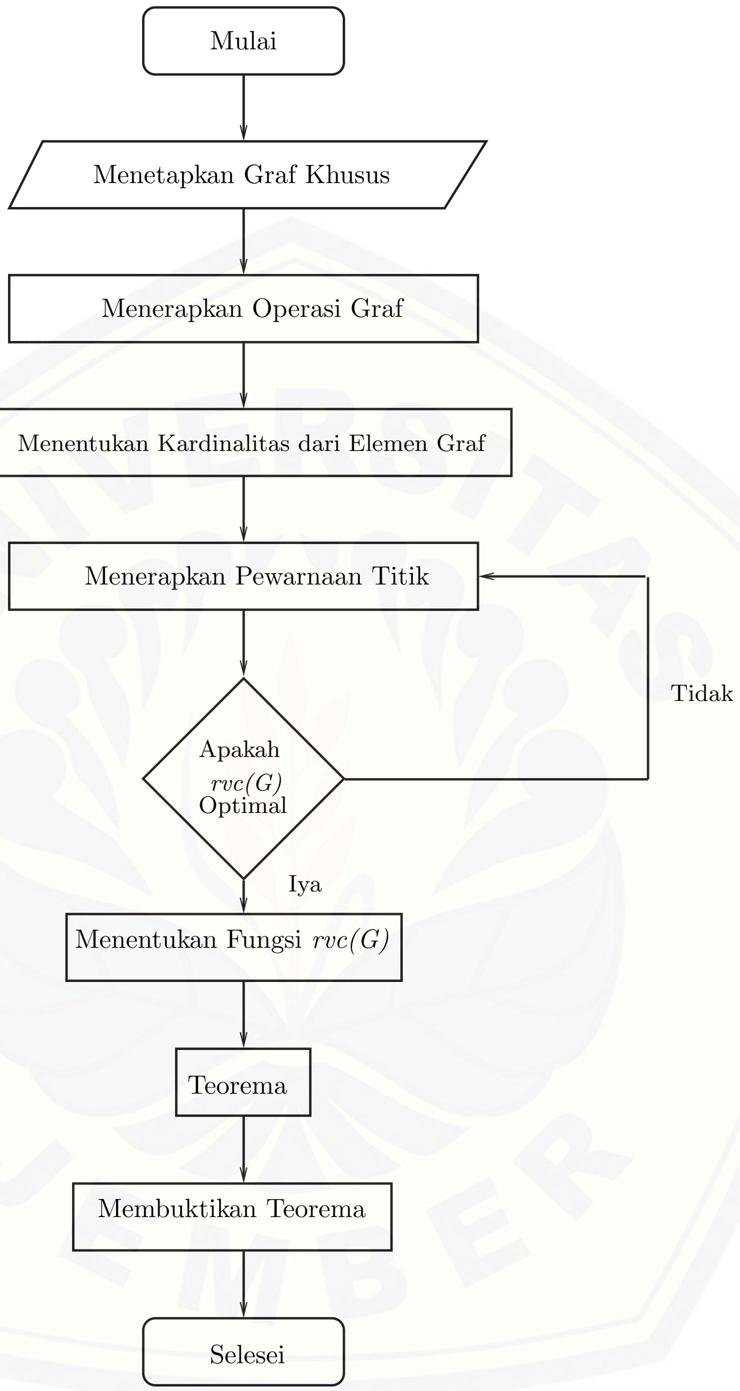
d. Menerapkan pewarnaan titik pada graf-graf khusus yang telah dioperasikan menggunakan *rainbow vertex connection*.

e. Memeriksa keoptimalan $rvc(G)$ dengan batas bawah, apabila sudah optimal, maka dilanjutkan dengan menentukan fungsi, apabila belum optimal, maka kembali ke tahap sebelumnya yaitu menerapkan pewarnaan titik pada graf.

f. Menentukan fungsi pewarnaan berdasarkan keteraturan dari $rvc(G)$ sehingga didapatkan teorema.

g. Membuktikan teorema yang telah didapatkan.

Rancangan penelitian di atas dapat di sajikan dalam skema 3.1



Gambar 3.1 Skema Penelitian

BAB 5. PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dari pembahasan pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa:

1. Kardinalitas titik dan sisi pada graf hasil operasi, antara lain:

a. $|V(Amal(F_{1,m}, v, n))| = mn + 1$, dan $|E(amal(F_{1,m}, v, n))| = 2mn - n$.

b. $|V(Amal(Bt_m, v, n))| = mn + n + 1$, dan $|E(amal(Bt_m, v, n))| = 2mn + n$.

c. $|V(F_{1,m} \square P_n)| = mn + n$, dan $|E(F_{1,m} \square P_n)| = 3mn - m - 1$.

d. $|V(Wd_{3,m} \square P_n)| = 2mn + n$, dan $|E(Wd_{3,m} \square P_n)| = 5mn - 2m + n - 1$.

e. $|V(P_m \odot F_{1,n})| = mn + 2m$, dan $|E(P_m \odot F_{1,m})| = 3mn + m - 1$.

f. $|V(P_m \odot Wd_{3,n})| = 2mn + 2m$, dan $|E(P_m \odot Wd_{3,m})| = 5mn + 2m - 1$.

g. $|V(Wd_{3,m} \odot C_n)| = 2mn + 2m + n + 1$, dan $|E(Wd_{3,m} \odot C_n)| = 4mn + 2m + 2n$.

h. $|V(P_m + F_{1,n})| = m + n + 1$, dan $|E(P_m + F_{1,n})| = mn + 2m + 2n - 2$.

i. $|V(F_{1,m} + C_n)| = m + n + 1$, dan $|E(F_{1,m} + C_n)| = mn + 2m + 2n - 1$.

j. $|V(Wd_{3,m} + P_n)| = 2m + n + 1$, dan $|E(Wd_{3,m} + Pn)| = 2mn + 3m + 2n$.

k. $|V(Shack(F_{1,m}, v, n))| = mn+1$, dan $|E(shack(F_{1,m}, v, n))| = 2mn-m+1$.

l. $|V(Shack(Bt_m, v, n))| = mn+n+1$, dan $|E(shack(Bt_m,v, n))| = 2mn+n$.

m. $|V(Shack((S_m + C_n),\ v,\ r))| = mr + nr + 1$, dan $|E(shack((S_m + C_n),v, r))|mnr + mr + nr + 1$.

2. *Rainbow vertex connection number* pada graf hasil operasi didapatkan diantaranya sebagai berikut:

a. $rvc(Amal(F_{1,m}, v, n) = 1$.

b. $rvc(Amal(Bt_{m)}, v, n) = 1$.

c. $rvc(F_{1,m} \square P_n)= n$.

d. $rvc(Wd_{3,m} \square P_n)= n$.

e. $rvc(P_m \odot F_{1,n})= m$.

f. $rvc(P_m \odot Wd_{3,n})= m$.

g. $rvc(Wd_{3,m} \odot C_n)= 3$.

h. $rvc(P_m + F_{1,n})= 1$.

i. $rvc(F_{1,m} + C_n)= 1$.

j. $rvc(Wd_{3,m} + C_n)= 1$.

k. $rvc(Shack(F_{1,m}, v, n))= 2n - 1$.

l. $rvc(Shack(Bt_m, v, n))= 2n - 1$.

m. $rvc(Shack((S_m + C_n), v,r))= 2r - 1$.

5.2 Saran

Berdasarkan hasil penelitian mengenai *rainbow vertex connection* pada beberapa graf khusus dan operasinya yaitu $amal(F_{1,m}, v, r)$, $amal(Bt_m, v, n)$, $F_{1,m} \square P_n$, $Wd_{3,m} \square P_n$, $P_m \odot F_{1,n}$, $P_m \odot Wd_{3,n}$, $Wd_{3,m} \odot C_n$, $P_m + F_{1,n}$, $F_{1,m} + C_n$, $Wd_{3,m} + P_n$, $shack(F_{1,m}, v = y_1^{i+1}, n)$, $shack(Bt_m, v = y_1^k, n)$, dan $shack((S_m + C_n), v = x_2^k, r)$ maka peneliti memberikan saran kepada pembaca agar dapat mengembangkan analisa *rainbow vertex connection* pada beberapa graf khusus lainnya dengan operasi graf yang sama, serta aplikasi *rainbow vertex connection* terhadap permasalahan di lingkungan sekitar.

DAFTAR PUSTAKA

Alfarisi, R. dan Dafik. 2014. The Rainbow Connection Number of Special graphs. *Prosiding Seminar Matematika dan Pendidikan Matematika FMIPA UNEJ*,1 No.1:457-461.

Ardiyansah, R. dan Darmaji. 2013. Bilangan Kromatik Graf Hasil Amalgamasi Dua Buah Graf. *Jurnal Sains dan Seni Pomits*, 2 (1).

Damayanti, R. T. 2011. Automorfisme graf bintang dan graf lintasan*Pascasarjana Jurusan Matematika Universitas Brawijaya, pages 1-97*.

Dian N.S. Simamora, A.N.M. Salman. 2015. The Rainbow (Vertex) Connection Number of Pencil Graphs.*International Conference on Graph Theory and Information Security*.**74**:138-142.

Darmawan, R. N. 2015. *Analisis Rainbow Connection Number pada Graf Khusus dan Hasil Operasinya*. Tidak dipublikasikan (Tesis). Jember: Universitas Jember.

Figueroa-Centeno, R., Ichishima, R., and Muntaner-Batle, F. (2002). On super edge-magic graph. Ars Combin., **64**:8195.

Harary, F. 2007. *Graph Theory*. New London: Wesley.

Hartsfield, N. dan Ringel, G. 1990. *Pearls in Graph Theory*. Boston San Diego New York London: Academic Press.

Hasan, M.S 2015. *Analisis Rainbow Connection dan Strong Rainbow Connection pada Graf Hasil Operasi*. Tidak dipublikasikan (Skripsi). Jember: Universitas Jember.

Histamedika, G. 2012. Rainbow Connection pada Beberapa Graf. *Matematika UNAND*, 2:17-25.

Krivelevich, M. and Yuster, R. 2009. The Rainbow connection of a graph is (at most) reciprocal to its minimum degree, School of Mathematics, Tel Aviv

University.

Li, X. dan Liu, S. 2011. *Rainbow Connection of Graphs- A survey.* ArXiv: 1101.5747v2[math.CO].

Maryati, T. K., Salman, A. N. M., Baskoro, E. T., Ryan, J., dan Miller, M. 2010. *On H-supermagic Labelings for Certain Shackles and Amalgamation of a Connected Graph.* Jurnal: Utilitas Mathematica. **83**:333-342.

Munir, R. 2009. *Matematika Diskrit Edisi 3.* Bandung: Informatika Bandung.

Purwanto, H., Indriani, G., dan Dayanti, E. 2006. *Matematika Diskrit.* Jakarta: PT. Ercontara Rajawali.