



**ANALISA KONEKSI PELANGI DAN KONEKSI
PELANGI KUAT PADA TOPOLOGI GRAF HASIL
OPERASI**

SKRIPSI

Oleh

Vivie Aisyafi Fatimah

NIM 121810101050

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER**

2016



**ANALISA KONEKSI PELANGI DAN KONEKSI
PELANGI KUAT PADA TOPOLOGI GRAF HASIL
OPERASI**

SKRIPSI

diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan Program Studi Matematika (S1) dan mencapai gelar Sarjana Sains

Oleh

Vivie Aisyafi Fatimah

NIM 121810101050

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER**

2016

HALAMAN PERSEMBAHAN

Dengan menyebut nama Allah S.W.T Yang Maha Pengasih lagi Maha Penyayang, serta sholawat atas Nabi Muhammad S.A.W, kupersembahkan sebuah kebahagiaan dalam perjalanan hidupku teriring rasa terima kasihku yang terdalam kepada:

1. orang tuaku tercinta dan terkasih : Ayahanda Budiyanto dan Ibunda Puji Astutik, serta kedua Adikku Azizah Vinda Sari dan Fenti Nur Azzahro, yang senantiasa mengalirkan kasih sayang, perhatian, dan doa yang tiada pernah putus yang selalu mengiringiku dalam meraih cita-cita;
2. Bapak Kosala Dwidja Purnomo, S.Si, M.Si. dan Bapak Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D. yang dengan sabar dan tulus ikhlas membimbing sehingga penulisan skripsi ini dapat terselesaikan;
3. semua guru dan dosenku yang telah memberikan ilmu dan membimbing dengan penuh kesabaran;
4. sahabat-sahabat terbaikku dan Keluarga Besar Matematika Angkatan 2012 (BATHICS'12) yang senantiasa membantuku dan menorehkan sebuah pengalaman hidup yang tak terlupakan;
5. teman-teman pejuang graf yang selalu berbagi suka maupun duka dan selalu memberikan dukungan untuk terus semangat;
6. Almater tercinta Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

MOTTO

"Allah meninggikan orang-orang yang beriman diantara kamu dan orang-orang yang diberi ilmu pengetahuan beberapa derajat."

(QS. Al-Mujadilah: 11) *)

"Seperti emas yang ditempa dengan panas, semakin murni dan indah.

Yakinlah bahwa di balik kesakitan,

ada hikmah yang tiada tara."

(Pipiet Senja, Novel 'Jangan Jadi Perempuan Cengeng')

"Habis gelap terbitlah terang."

(R. A. Kartini) **)

-
- *) Departemen Agama Republik Indonesia. 2004. *Al-Qur'an dan Terjemahannya*. Bandung. CV Penerbit J-ART.
- ***) Kartini, R. A. 2009. *Habis gelap terbitlah terang/R. A. Kartini*. Terjemahan Armijn Pane. Cetakan 27. Jakarta. Balai Pustaka.

HALAMAN PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Vivie Aisyafi Fatimah

NIM : 121810101050

menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang berjudul: Analisa Koneksi Pelangi dan Koneksi Pelangi Kuat pada Topologi Graf Hasil Operasi adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali jika dalam pengutipan substansi disebutkan sumbernya, dan belum diajukan pada instansi manapun, serta bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa adanya tekanan dan paksaan dari pihak manapun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, Juni 2016

Yang menyatakan,

Vivie Aisyafi Fatimah

NIM. 121810101050

SKRIPSI

**ANALISA KONEKSI PELANGI DAN KONEKSI
PELANGI KUAT PADA TOPOLOGI GRAF HASIL
OPERASI**

Oleh

**Vivie Aisyafi Fatimah
NIM 121810101050**

Dosen Pembimbing 1 : Kosala Dwidja Purnomo, S.Si, M.Si

Dosen Pembimbing 2 : Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D.

PENGESAHAN

Skripsi berjudul "Analisa Koneksi Pelangi dan Koneksi Pelangi Kuat pada Topologi Graf Hasil Operasi" telah diuji dan disahkan oleh Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam pada :

hari :

tanggal :

tempat : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Tim Penguji :

Ketua,

Sekretaris,

Kosala Dwidja Purnomo, S.Si., M.Si.

Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D.

NIP. 19690828 199802 1 001

NIP. 19680802 199303 1 004

Anggota I,

Anggota II,

Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si.

Dr. Mohamad Fatekurohman, S.Si., M.Si.

NIP. 19840801 200801 2 006

NIP. 19690606 199803 1 001

Mengesahkan

Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Universitas Jember,

Drs. Sujito, Ph.D.

NIP. 19610204 198711 1 001

RINGKASAN

Analisa Koneksi Pelangi dan Koneksi Pelangi Kuat pada Topologi Graf Hasil Operasi; Vivie Aisyafi Fatimah, 121810101050; 2016: 78 halaman; Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Jember.

Matematika diskrit adalah bagian dari matematika yang membahas segala sesuatu yang bersifat diskrit. Salah satu bagian dari matematika diskrit adalah teori graf yang saat ini banyak dikembangkan. Teori graf pertama kali muncul ketika Leonhard Euler yang berasal dari Swiss mencoba menyelesaikan permasalahan yang berkaitan dengan jembatan Konigsberg pada tahun 1736.

Salah satu teori yang dikembangkan dalam teori graf adalah Koneksi Pelangi (*Rainbow Connection*). Koneksi Pelangi adalah pemberian warna pada sisi graf dengan syarat dua sisi yang bertetangga boleh diberi warna yang sama. Namun sisi yang masuk dalam lintasan pelangi tidak boleh ada dua sisi atau lebih yang memiliki warna sama, dimana lintasan pelangi (*rainbow path*) adalah sebuah lintasan yang terdapat dalam graf tersebut. Pewarnaan minimal dalam suatu graf disebut koneksi pelangi dilambangkan dengan rc . Sedangkan koneksi pelangi kuat merupakan pewarnaan pada lintasan $u - v$ terpendek dilambangkan dengan src .

Penelitian ini menggunakan metode penelitian *deduktif* dan *eksploratif*. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk menentukan kardinalitas titik dan sisi, nilai koneksi pelangi dan nilai koneksi pelangi kuat. Berdasarkan penelitian pada graf hasil operasi dihasilkan 10 teorema baru terkait $rc(G)$ dan $src(G)$, diantaranya sebagai berikut:

Tebrema 4.1.1. Untuk $n \geq 2$, nilai koneksi pelangi dan nilai koneksi pelangi kuat dari graf $((S_4 + K_1) \square P_n)$ adalah $n + 1$.

Teorema 4.1.2. Untuk $n \geq 2$, nilai koneksi pelangi dan nilai koneksi pelangi kuat dari graf $(AP_3 \square P_n)$ adalah $n + 1$.

Teorema 4.1.3. Untuk $n \geq 2$, nilai koneksi pelangi dan nilai koneksi pelangi kuat dari graf $(L_3 \square P_n)$ adalah $n + 2$.

Teorema 4.1.4. Untuk $n \geq 2$, nilai koneksi pelangi dan nilai koneksi pelangi kuat dari graf $((C_3 + P_2) \square P_n)$ adalah n .

Teorema 4.1.5. Untuk $n \geq 2$, nilai koneksi pelangi dan nilai koneksi pelangi kuat dari graf $(H_3 \square P_n)$ adalah $n + 2$.

Teorema 4.1.6. Untuk $n \geq 2$, nilai koneksi pelangi dan nilai koneksi pelangi kuat dari graf $shack((C_3 + P_2), v, n)$ adalah n .

Teorema 4.1.7. Untuk $n \geq 2$, nilai koneksi pelangi dan nilai koneksi pelangi kuat dari graf $gshack(amal(W_4, v, 2), C_4, n)$ adalah $2n$.

Teorema 4.1.8. Untuk $n \geq 2$, nilai koneksi pelangi dan nilai koneksi pelangi kuat dari graf $gshack(F_{1,4}, P_2, n)$ adalah $n + 2$.

Teorema 4.1.9. Untuk $n \geq 2$, nilai koneksi pelangi dan nilai koneksi pelangi kuat dari graf $gshack(amal(F_{1,3}, v, 2), P_3, n)$ adalah $2n$.

Teorema 4.1.10. Untuk $n \geq 2$, nilai koneksi pelangi dan nilai koneksi pelangi kuat dari graf $gshack(F_{2,6}, P_3, n)$ adalah $2n$.

KATA PENGANTAR

Puji syukur kehadirat Allah SWT atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul Analisa Koneksi Pelangi dan Koneksi Pelangi Kuat pada Topologi Graf Hasil Operasi. Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan pendidikan strata satu (S1) pada Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih atas bantuan dan bimbingan dalam penyusunan skripsi ini, terutama kepada yang terhormat:

1. Drs. Sujito, Ph.D., selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
2. Kusbudiono, S.Si., M.Si., selaku Ketua Jurusan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
3. Kosala Dwidja Purnomo S.Si., M.Si., selaku Dosen Pembimbing Utama, Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D., selaku Dosen Pembimbing Anggota, Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si., selaku dosen Penguji I dan Dr. Mohamad Fatekurohman, S.Si., M.Si., selaku dosen penguji II yang telah meluangkan waktu, pikiran, dan perhatian dalam penulisan skripsi ini;
4. dosen dan karyawan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
5. semua pihak yang telah membantu terselesaikannya skripsi ini.

Semoga bantuan, bimbingan, dan dorongan beliau dicatat sebagai amal baik oleh Allah SWT dan mendapat balasan yang sesuai dari-Nya. Selain itu, penulis juga menerima segala kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan skripsi ini. Akhirnya penulis berharap, semoga skripsi ini dapat bermanfaat.

Jember, Juni 2016

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PERSEMBAHAN	ii
HALAMAN MOTTO	iii
HALAMAN PERNYATAAN	iv
HALAMAN PENGESAHAN	vi
RINGKASAN	vii
KATA PENGANTAR	ix
DAFTAR ISI	x
DAFTAR GAMBAR	xii
DAFTAR TABEL	xiv
1 PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang Masalah	1
1.2 Rumusan Masalah	2
1.3 Batasan Masalah	3
1.4 Tujuan Penelitian	3
1.5 Manfaat Penelitian	4
2 TINJAUAN PUSTAKA	5
2.1 Konsep Dasar dan Terminologi Graf	5
2.2 Graf Khusus dan Operasi Graf	8
2.3 Koneksi Pelangi	17
2.4 Aplikasi Koneksi Pelangi dan Koneksi Pelangi Kuat pada Proses Distribusi	17
2.5 Hasil-hasil <i>Rainbow Connection</i>	20
3 METODE PENELITIAN	21
3.1 Jenis Penelitian	21
3.2 Rancangan Penelitian	21
4 HASIL DAN PEMBAHASAN	24
4.1 Koneksi Pelangi dan Koneksi Pelangi Kuat	25
4.2 Pembahasan	76

5 PENUTUP	80
5.1 Kesimpulan	80
5.2 Saran	84
DAFTAR PUSTAKA	86
LAMPIRAN	88



DAFTAR GAMBAR

2.1	Contoh Graf yang Memiliki $V = 5$ dan $E = 8$	5
2.2	Graf G (a), Subgraf G (b) dan <i>Spanning Subgraph</i> G (c)	7
2.3	Graf G (a) dan Contoh Graf yang Isomorfis dengan Graf G (b)	8
2.4	Graf Lintasan P_2 dan P_5	8
2.5	Graf Siklus C_5 dan C_6	9
2.6	Graf Roda W_3 dan W_5	9
2.7	Graf Kipas $F_{1,4}$ dan $F_{2,4}$	10
2.8	Graf Bintang S_3 dan S_4	10
2.9	Graf Antiprisma H_3	11
2.10	Graf <i>Ladder</i> L_3	11
2.11	Graf <i>Helm</i> H_3	12
2.12	Graf Lengkap K_1 dan K_5	13
2.13	Graf Hasil Operasi <i>Shackle</i> dari $(C_3 + P_2)$	14
2.14	Graf Hasil Operasi <i>Generalized Shackle</i> dari $F_{1,4}$ dan P_2	14
2.15	Graf Hasil Operasi <i>Amalgamation</i> dari $F_{1,3}$	15
2.16	Graf Hasil Operasi <i>Cartesian Product</i> dari L_3	16
2.17	Graf Hasil Operasi <i>Joint</i> dari K_1 dan S_4	16
2.18	Contoh Aplikasi $rc(G)$ (a) dan Contoh Aplikasi <i>Spanning Tree</i> (b)	18
2.19	Contoh Aplikasi $rc(G)$ (a) dan Contoh Aplikasi <i>Spanning Tree</i> (b)	19
3.1	Skema Penelitian	23
4.1	Graf Hasil Operasi <i>Cartesian Product</i> dari graf $(S_4 + K_1)$ dan P_n	26
4.2	Contoh Pewarnaan Pelangi $(S_4 + K_1) \square P_3$	30
4.3	Graf Hasil Operasi <i>Cartesian Product</i> dari graf AP_3 dan P_n	32
4.4	Contoh Pewarnaan Pelangi $AP_3 \square P_3$	36
4.5	Graf Hasil Operasi <i>Cartesian Product</i> dari graf L_3 dan P_n	38
4.6	Contoh Pewarnaan Pelangi $L_3 \square P_3$	42
4.7	Graf Hasil Operasi <i>Cartesian Product</i> dari graf $(C_3 + P_2)$ dan P_n	44
4.8	Contoh Pewarnaan Pelangi $(C_3 + P_2) \square P_3$	47

4.9	Graf Hasil Operasi <i>Cartesian Product</i> dari graf H_3 dan P_n	49
4.10	Contoh Pewarnaan Pelangi $H_3 \square P_3$	53
4.11	Graf Hasil Operasi <i>Shackle</i> dari graf $(C_3 + P_2)$	54
4.12	Contoh Pewarnaan Pelangi $Shack((C_3 + P_2), v, 3)$	57
4.13	Graf Hasil Operasi <i>Generalized Shackle</i> dari graf $Amal(W_4, v, 2)$ dan C_4	58
4.14	Contoh Pewarnaan Pelangi $Gshack(Amal(W_4, v, 2), C_4, 3)$	62
4.15	Graf Hasil Operasi <i>Generalized Shackle</i> dari graf $F_{1,4}$ dan P_2	63
4.16	Contoh Pewarnaan Pelangi $Gshack(F_{1,4}, P_2, 4)$	67
4.17	Graf Hasil Operasi <i>Generalized Shackle</i> dari graf $Amal(F_{1,3}, v, 2)$ dan P_3	68
4.18	Contoh Pewarnaan Pelangi $Gshack(Amal(F_{1,3}, v, 2), P_3, 3)$	71
4.19	Graf Hasil Operasi <i>Generalized Shackle</i> dari graf $F_{2,6}$ dan P_3	72
4.20	Contoh Pewarnaan Pelangi $Gshack(F_{2,6}, P_3, n)$	76

DAFTAR TABEL

2.1	Hasil <i>Rainbow Connection</i> Sebelumnya	20
4.1	Lintasan Pelangi Kuat $((S_4 + K_1) \square P_n)$	28
4.2	Lintasan Pelangi Kuat $(AP_3 \square P_n)$	34
4.3	Lintasan Pelangi Kuat $(L_3 \square P_n)$	40
4.4	Lintasan Pelangi Kuat $((C_3 + P_2) \square P_n)$	46
4.5	Lintasan Pelangi Kuat $(H_3 \square P_n)$	51
4.6	Lintasan Pelangi Kuat $(shack((C_3 + P_2), v, n))$	56
4.7	Lintasan Pelangi Kuat $(gshack(amal(W_4, v, 2), C_4, n))$	61
4.8	Lintasan Pelangi Kuat $(gshack(F_{1,4}, P_2, n))$	65
4.9	Lintasan Pelangi Kuat $(gshack(amal(F_{1,3}, v, 2), P_3, n))$	70
4.10	Lintasan Pelangi Kuat $(gshack(F_{2,6}, P_3, n))$	75

BAB 1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Matematika diskrit adalah bagian dari matematika yang membahas segala sesuatu yang bersifat diskrit. Salah satu bagian dari matematika diskrit adalah teori graf yang saat ini banyak dikembangkan. Teori graf pertama kali muncul ketika Leonhard Euler yang berasal dari Swiss mencoba menyelesaikan permasalahan yang berkaitan dengan jembatan Konigsberg pada tahun 1736. Permasalahan yang timbul adalah kemungkinan bisa atau tidak satu kali melalui tujuh jembatan tersebut dan kembali ke tempat semula. Orang pertama yang memecahkan masalah tersebut adalah Euler dengan memodelkan ke dalam graf, dengan menggunakan titik-titik yang dihubungkan jembatan sebagai daratan dan sisi-sisi sebagai jembatan. Euler membuktikan dimulai dari daerah manapun, seorang tidak mungkin dapat pergi dan kembali ke tempat semula dengan hanya melewati setiap jembatan tepat satu kali karena daerah Konigsberg dihubungkan oleh jembatan yang berjumlah ganjil. Permasalahan tersebut menjadi awal mula munculnya teori graf.

Salah satu teori yang dikembangkan dalam teori graf adalah Koneksi Pelangi (*Rainbow Connection*). Koneksi Pelangi adalah pemberian warna pada sisi graf dengan syarat dua sisi yang bertetangga boleh diberi warna yang sama. Namun sisi yang masuk dalam lintasan pelangi tidak boleh ada dua sisi atau lebih yang memiliki warna sama, dimana lintasan pelangi (*rainbow path*) adalah sebuah lintasan yang terdapat dalam graf tersebut. Pewarnaan sisi disebut *Rainbow Coloring*, sedangkan Bilangan Koneksi Pelangi (*Rainbow Connection Number*) adalah pewarnaan minimal dalam suatu graf G dilambangkan dengan $rc(G)$. Untuk pemberian *Rainbow Coloring* harus menggambarkan pola fungsi agar mudah dalam mencari fungsi dari pewarnaannya (Chatrand *et al.*, 2006).

Koneksi Pelangi pertama kali diperkenalkan oleh Chartrand dkk, pada tahun 2006. Teknik pewarnaan graf merupakan salah satu subjek yang menarik dalam bidang graf. Terdapat 3 macam pewarnaan dalam koneksi pelangi yaitu pewarnaan titik pada graf (*vertex coloring*), pewarnaan sisi pada graf (*edge coloring*), pewarnaan bidang. Pewarnaan titik pada graf adalah pemberian warna pada titik, sehingga setiap dua titik yang bertetangga mendapatkan warna yang berbeda. Pewarnaan sisi pada sebuah graf adalah suatu fungsi dari himpunan sisi ke himpunan warna, sehingga setiap 2 sisi yang bertetangga mendapat warna yang berbeda. Pewarnaan bidang adalah pemberian warna pada bidang, sehingga setiap dua daerah yang bertetangga mendapat warna yang berbeda.

Para peneliti sebelumnya telah mengkaji dan mengembangkan koneksi pelangi pada graf. Chartand (2008) melakukan penelitian tentang koneksi pelangi dan koneksi pelangi kuat pada beberapa graf yaitu graf siklus (*cycle graph*), graf lengkap (*complet graph*), graf pohon (*tree graph*), dan graf roda (*wheel graph*). Syafrizal (2013) melakukan penelitian tentang koneksi pelangi dan koneksi pelangi kuat pada beberapa graf yaitu graf gigi (*gear graph*), graf buku (*book graph*), graf kipas (*fan graph*), dan graf matahari (*sun graph*). Hasan (2015) melakukan penelitian tentang koneksi pelangi dan koneksi pelangi kuat pada beberapa operasi graf khusus yaitu graf lintasan, graf siklus, graf lengkap, graf roda, dan graf kipas yang dioperasikan menggunakan operasi graf meliputi *joint*, *cartesian product*, *composition*, *generalized shackle*, dan *amalgamation*. Berdasarkan hal tersebut peneliti akan mengangkat masalah bagaimana menemukan koneksi pelangi dan koneksi pelangi kuat (*strong rainbow connection*) dari graf hasil operasi tersebut.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang tersebut, maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah:

- bagaimana kardinalitas titik dan sisi pada $(S_4 + K_1) \square P_n$, $AP_3 \square P_n$, $L_3 \square P_n$, $(C_3 + P_2) \square P_n$, $H_3 \square P_n$, $shack((C_3 + P_2), v, n)$, $gshack(amal(W_4, v, 2), C_4, n)$, $gshack(F_{1,4}, P_2, n)$, $gshack(amal(F_{1,3}, v, 2), P_3, n)$, $gshack(F_{2,6}, P_3, n)$?

- b. bagaimana nilai Koneksi Pelangi dan koneksi pelangi kuat pada $(S_4 + K_1) \square P_n$, $AP_3 \square P_n$, $L_3 \square P_n$, $(C_3 + P_2) \square P_n$, $H_3 \square P_n$, $shack((C_3 + P_2), v, n)$, $gshack(amal(W_4, v, 2), C_4, n)$, $gshack(F_{1,4}, P_2, n)$, $gshack(amal(F_{1,3}, v, 2), P_3, n)$, $gshack(F_{2,6}, P_3, n)$?
- c. bagaimana fungsi Koneksi Pelangi dan koneksi pelangi kuat pada $(S_4 + K_1) \square P_n$, $AP_3 \square P_n$, $L_3 \square P_n$, $(C_3 + P_2) \square P_n$, $H_3 \square P_n$, $shack((C_3 + P_2), v, n)$, $gshack(amal(W_4, v, 2), C_4, n)$, $gshack(F_{1,4}, P_2, n)$, $gshack(amal(F_{1,3}, v, 2), P_3, n)$, $gshack(F_{2,6}, P_3, n)$?

1.3 Batasan Masalah

Sedangkan untuk batasan masalah dalam penelitian ini adalah:

- a. graf khusus yang digunakan adalah *star graph* (S_n), *path graph* (P_n), *anti-prism graph* (AP_n), *ladder graph* (L_n), *helm graph* (H_n), *cycle graph* (C_n), *wheel graph* (W_n), *complete graph* K_n , dan *fan graph* ($F_{n,m}$);
- b. operasi yang digunakan adalah operasi *shackle*, *generalized shackle*, *amalgamation*, *cartesian product*, *joint*;
- c. graf hasil operasi yang digunakan adalah $(S_4 + K_1) \square P_n$, $AP_3 \square P_n$, $L_3 \square P_n$, $(C_3 + P_2) \square P_n$, $H_3 \square P_n$, $shack((C_3 + P_2), v, n)$, $gshack(amal(W_4, v, 2), C_4, n)$, $gshack(F_{1,4}, P_2, n)$, $gshack(amal(F_{1,3}, v, 2), P_3, n)$, $gshack(F_{2,6}, P_3, n)$.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah:

- a. menentukan kardinalitas titik dan sisi pada graf $(S_4 + K_1) \square P_n$, $AP_3 \square P_n$, $L_3 \square P_n$, $(C_3 + P_2) \square P_n$, $H_3 \square P_n$, $shack((C_3 + P_2), v, n)$, $gshack(amal(W_4, v, 2), C_4, n)$, $gshack(F_{1,4}, P_2, n)$, $gshack(amal(F_{1,3}, v, 2), P_3, n)$, $gshack(F_{2,6}, P_3, n)$;
- b. menentukan nilai koneksi pelangi dan koneksi pelangi kuat pada graf $(S_4 + K_1) \square P_n$, $AP_3 \square P_n$, $L_3 \square P_n$, $(C_3 + P_2) \square P_n$, $H_3 \square P_n$, $shack((C_3 + P_2), v, n)$, $gshack(amal(W_4, v, 2), C_4, n)$, $gshack(F_{1,4}, P_2, n)$, $gshack(amal(F_{1,3}, v, 2), P_3, n)$, $gshack(F_{2,6}, P_3, n)$;
- c. menentukan fungsi koneksi pelangi dan koneksi pelangi kuat pada graf $(S_4 + K_1) \square P_n$, $AP_3 \square P_n$, $L_3 \square P_n$, $(C_3 + P_2) \square P_n$, $H_3 \square P_n$, $shack((C_3 + P_2), v, n)$, $gshack(amal(W_4, v, 2), C_4, n)$, $gshack(F_{1,4}, P_2, n)$, $gshack(amal(F_{1,3}, v, 2), P_3, n)$, $gshack(F_{2,6}, P_3, n)$.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari hasil penelitian ini, yaitu:

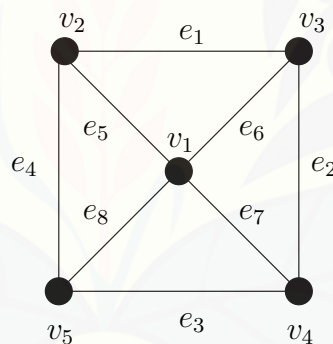
- a. menambah wawasan baru dalam bidang teori graf mengenai pewarnaan graf yaitu koneksi pelangi dan koneksi pelangi kuat;
- b. memberi motivasi pada peneliti lain untuk meneliti lebih luas tentang koneksi pelangi dan koneksi pelangi kuat pada graf-graf hasil operasi lainnya.



BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Konsep Dasar dan Terminologi Graf

Graf G adalah pasangan himpunan kosong V dan E , dimana elemen-elemen himpunan V adalah titik (*vertex*) dan elemen-elemen himpunan E adalah sisi (*edge*). Banyaknya titik pada graf disebut ordo atau *order*, dan dilambangkan dengan p atau $|V(G)|$. Sedangkan banyaknya sisi pada graf disebut size, dan dilambangkan dengan q atau $|E(G)|$. Pada Gambar 2.1 contoh graf dengan $|V(G)| = 5$ dimana himpunan titik $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan $|E(G)| = 8$ dimana himpunan sisi $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$. Sebuah graf G minimal harus mempunyai satu titik dan graf yang tidak memiliki sisi disebut graf *trivial*.



Gambar 2.1 Contoh Graf yang Memiliki $V = 5$ dan $E = 8$

Pada graf G terdapat dua buah titik yaitu titik v_1 dan v_2 , kedua titik terhubung langsung pada sisi e , dengan $e = v_1v_2$ adalah sebuah sisi pada graf G maka kedua titik tersebut bertetangga (*adjacent*). Sisi $e = v_1v_2$ dengan titik v_1 dan v_2 bersisian (*incident*) jika v_1 dan v_2 merupakan titik-titik ujung dari e . Sebagai contoh pada Gambar 2.1, titik v_3 bertetangga dengan titik v_1, v_2 dan v_4 . Sisi e_1 bersisian dengan titik v_2 dan v_3 .

Banyaknya sisi yang bersisian pada sebuah titik v di graf G disebut derajat (*degree*) dan dilambangkan dengan d_i dengan i menunjukkan titik ke- i pada graf. Jika setiap titik memiliki derajat yang sama maka graf G disebut reguler, tetapi jika setiap titik tidak memiliki derajat yang sama maka graf G disebut (*non-regular*). Titik yang tidak bersisian dengan titik lain atau memiliki derajat 0 disebut titik terisolasi (*isolated vertex*). Sedangkan titik yang mempunyai derajat satu disebut titik akhir (*end vertex*) atau daun (*leaf*). Derajat terkecil atau banyaknya sisi minimal yang bersisian pada titik v di graf G diantara titik-titik lainnya di graf G dilambangkan dengan $\delta(G)$. Sedangkan banyaknya sisi maksimal atau derajat terbesar pada graf G dilambangkan dengan $\Delta(G)$ (Hartsfield dan Ringel, 1990). Sebagai contoh dapat dilihat pada Gambar 2.1, derajat dari titik v_2 adalah 3 (tiga), memiliki derajat terkecil 3 dan derajat terbesar sama dengan 6(enam).

Jalan (*walk*) dari suatu graf G adalah sebuah barisan berhingga yang bergantian antara titik dan sisi dan diakhiri dengan titik dimana boleh berulang titik dan sisinya, dilambangkan dengan $W(G)$. Cara mengetahui panjang jalan W yaitu dengan menghitung banyaknya sisi yang dilintasi oleh jalan W tersebut. Jalan terbuka yaitu apabila jalan berawal dan berakhir dengan titik yang berbeda, sedangkan jalan tertutup yaitu jalan yang berawal dan berakhir dengan titik yang sama. Jika jalan tidak melintasi sisi yang berulang dan titiknya boleh berulang disebut jejak (*trail*). Sebagai contoh dapat dilihat pada Gambar 2.1, jalan dari titik v_3 ke titik v_5 yaitu $v_3, e_6, v_1, e_5, v_2, e_1, v_3, e_2, v_4, e_3, v_5$ dan masih banyak alternatif jalan yang lain. Jejak titik v_3 ke titik v_5 yaitu $v_3, e_2, v_4, e_7, v_1, e_8, v_5$.

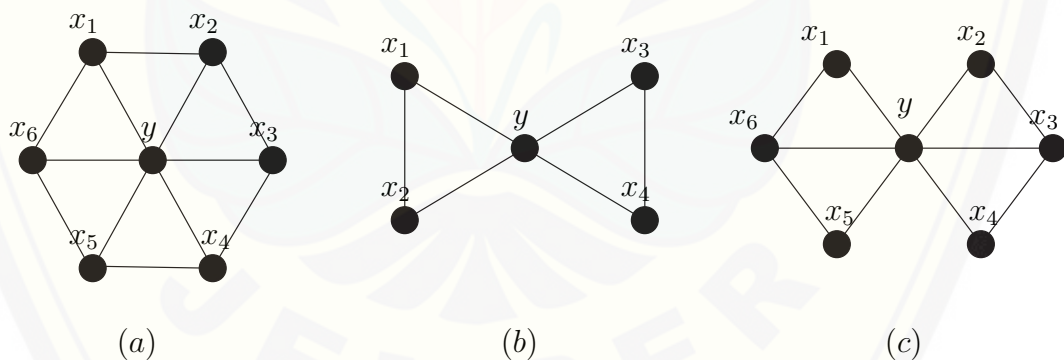
Sebuah jalan dengan titik dan sisi yang berbeda dan tidak ada titik maupun sisinya yang dipakai berulang disebut lintasan (*path*). Jika sebuah lintasan berupa *trail* memiliki titik-titik ujung yang sama disebut *trail* tertutup biasa disebut dengan siklus atau sirkuit (*circuit*). Siklus adalah sebuah jalan tertutup dengan panjang minimal 3 (tiga) dimana tidak ada sisi yang dipakai berulang dan hanya satu titik yang berulang yaitu sebagai titik awal dan titik akhir. Siklus terpendek disebut *girth*. Sebagai contoh dapat dilihat pada Gambar 2.1, siklus

dimana lintasan dari v_2 ke titik v_4 yaitu v_2, v_3, v_4, v_1, v_2 .

Jarak pada graf G adalah panjang sebuah lintasan terpendek dari titik v_i ke titik v_j dilambangkan dengan $d(v_i, v_j)$. Jarak maksimum antara kedua titik pada graf G disebut diameter, dilambangkan dengan $diamG = \max_{v \in V} d(v, v')$. Sebagai contoh dapat dilihat pada Gambar 2.1, $d(v_2, v_4) = 2$ memiliki diameter sama dengan 2 (dua).

Graf terhubung (*connected graph*) yaitu jika terdapat graf G dimana setiap pasang titik v_1 dan v_2 dalam himpunan V terdapat lintasan dari v_1 dan v_2 . Jika sebaliknya maka G disebut graf tak-terhubung (*disconnected graph*). Graf trivial adalah graf yang memiliki suatu titik dan tidak memiliki sisi satupun termasuk dalam graf terhubung dikarenakan titik tunggalnya terhubung dengan dirinya sendiri (Purwanto dkk,2006).

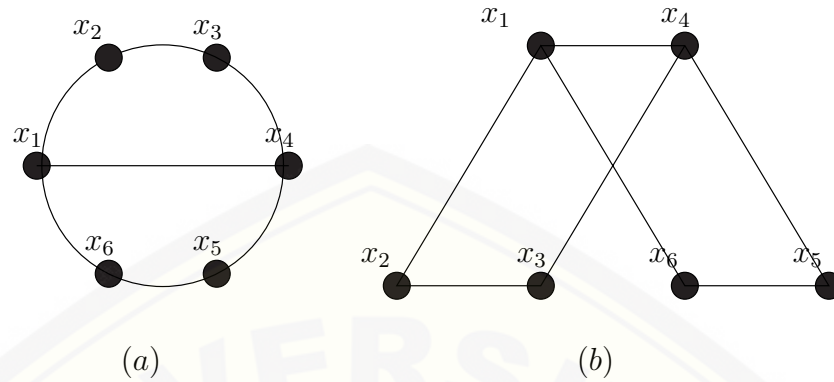
Graf G dengan himpunan V titik dan E sisi, $G_1 = (V_1, E_1)$ adalah subgraf dari G jika $V_1 \subseteq V$ dan $E_1 \subseteq E$ dan dapat diperoleh graf yang lebih kecil. Graf G dengan $m - 1$ sisi yaitu mengurangi sisinya dan tetap mengandung semua titik dari graf G yaitu $V(G_1) \subseteq V(G)$ maka G_1 merupakan *spanning subgraph* dari G . Sebagai contoh dapat dilihat pada Gambar 2.2.



Gambar 2.2 Graf G (a), Subgraf G (b) dan *Spanning Subgraph* G (c)

Terdapat dua graf atau lebih yang memiliki jumlah titik, sisi, derajat yang sama maka graf-graf tersebut dikatakan isomorfis. Sedangkan dua buah graf atau lebih memiliki jumlah titik, sisi dan derajat yang berbeda tetapi mempunyai bentuk geometri yang sama maka disebut homomorfis (Munir, 2009).

Sebagai contoh dapat dilihat pada Gambar 2.3.



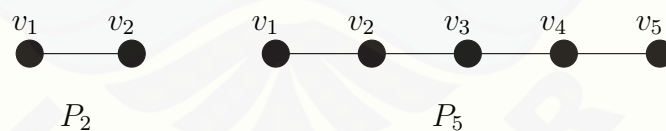
Gambar 2.3 Graf G (a) dan Contoh Graf yang Isomorfis dengan Graf G (b)

2.2 Graf Khusus dan Operasi Graf

Terdapat beberapa jenis graf khusus, berikut definisi dari beberapa graf khusus tersebut:

a. Graf Lintasan (*path*)

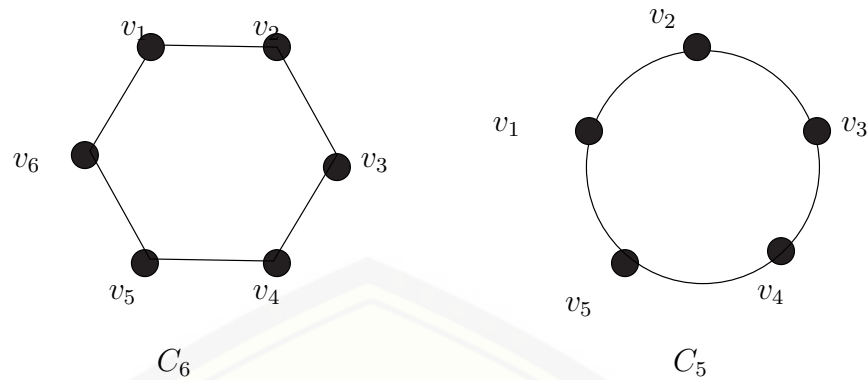
Graf lintasan adalah graf yang terdiri dari n titik pada satu lintasan dilambangkan dengan P_n . Jumlah titik dari graf lintasan yaitu n dan sisinya $n - 1$, dimana $n \geq 2$. Contoh dari graf lintasan dapat dilihat pada Gambar 2.4.



Gambar 2.4 Graf Lintasan P_2 dan P_5

b. Graf Siklus (*cycle*)

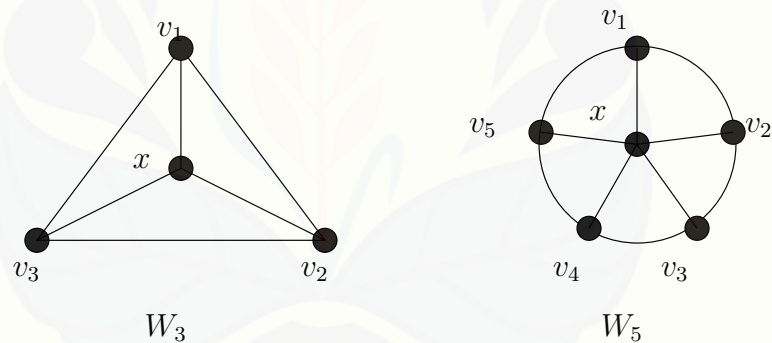
Graf siklus adalah graf yang setiap titiknya berderajat dua. Jumlah titik dan sisi graf siklus sama dan dilambangkan dengan C_n dimana $n \geq 3$ (Purwanto dkk, 2006). Contoh dari graf siklus dapat dilihat pada Gambar 2.5.



Gambar 2.5 Graf Siklus C_5 dan C_6

c. Graf Roda (*Wheel Graph*)

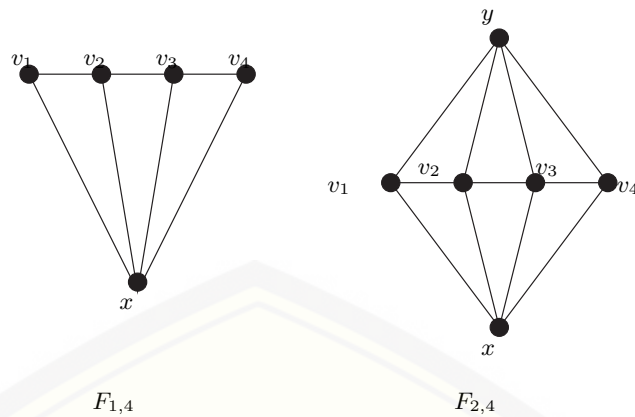
Graf roda adalah graf yang didapatkan dengan menghubungkan semua titik dari graf siklus C_n ke titik yang disebut titik pusat dan dilambangkan dengan W_n . Jumlah titik dari graf roda yaitu $n + 1$ dan sisinya $2n$, dimana $n \geq 3$. Contoh dari graf roda dapat dilihat pada Gambar 2.6.



Gambar 2.6 Graf Roda W_3 dan W_5

e. Graf Kipas (*Fan Graph*)

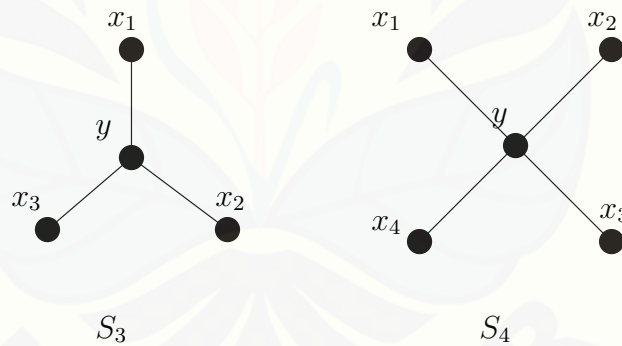
Graf kipas adalah graf yang terbentuk dari titik m graf lintasan P_m yang dihubungkan pada sebanyak n titik pusat. Sehingga jumlah titik dari graf kipas adalah $n + m$ dan sisinya $mn + m - 1$, dimana $m \geq 2$ dan $n \geq 1$ dilambangkan dengan $F_{n,m}$. Contoh dari graf kipas dapat dilihat pada Gambar 2.7.



Gambar 2.7 Graf Kipas $F_{1,4}$ dan $F_{2,4}$

f. Graf Bintang (*Star Graph*)

Graf bintang adalah graf pohon yang terdiri dari satu titik pusat yang berderajat n dan n titik yang berderajat satu. Jadi, graf bintang S_n terdiri dari $n + 1$ titik dan n sisi dengan $n \geq 2$ (Slamin, 2009). Contoh dari graf bintang dapat dilihat pada Gambar 2.8.

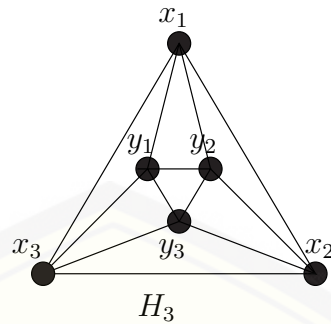


Gambar 2.8 Graf Bintang S_3 dan S_4

g. Graf Antiprisma (*antiprism graph*)

Graf antiprisma dinotasikan dengan H_n yaitu sebuah graf yang memuat 2 buah *cycle* berorder n dan dihubungkan oleh graf lintasan P_n pada titik yang saling berhadapan. Graf prisma H_n terdiri dari $2n$ titik dan $4n$ dengan

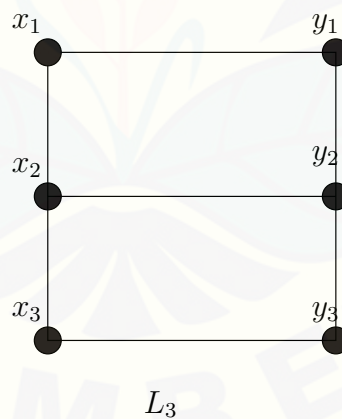
$n \geq 3$. Contoh dari graf antiprisma dapat dilihat pada Gambar 2.9.



Gambar 2.9 Graf Antiprisma H_3

h. Graf Tangga (*Ladder graph*)

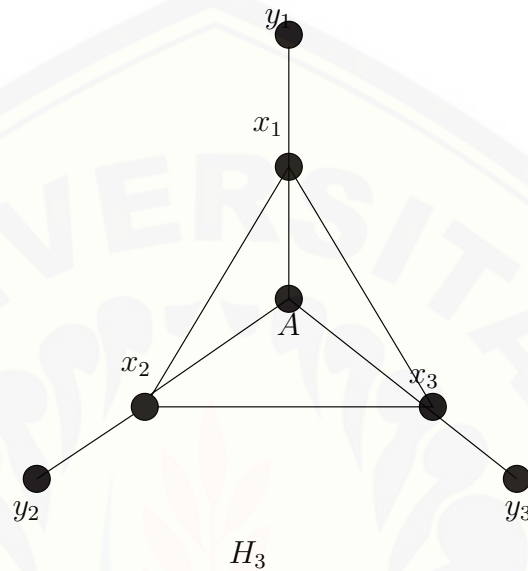
Graf *ladder* yang dilambangkan dengan L_n adalah sebuah graf dengan himpunan titik $V(L_n) = \{x_i, y_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan $E(L_n) = \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_i y_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_i y_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\}$. Graf *ladder* L_n terdiri dari $2n$ titik dan $3n-2$ sisi dengan $n \geq 3$. Contoh dari graf *ladder* dapat dilihat pada Gambar 2.10.



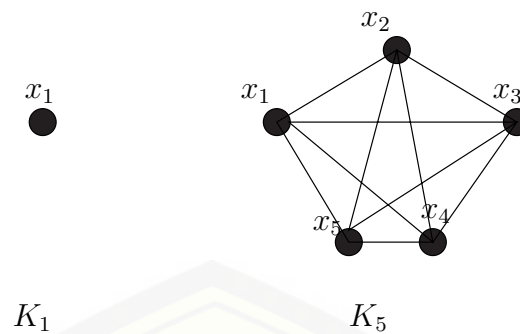
Gambar 2.10 Graf *Ladder* L_3

i. Graf Helm (*Helm graph*)

Graf *helm* adalah jenis graf dari *family* graf roda. Graf *helm* adalah sebuah graf yang dinotasikan dengan H_n dimana $V(H_n) = A, x_i, y_i; 1 \leq i \leq n$ dan $E(H_n) = x_n x_1, A x_i, x_i y_i; 1 \leq i \leq n, \cup x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n - 1$. Contoh dari graf *helm* dapat dilihat pada Gambar 2.11.

Gambar 2.11 Graf *Helm* H_3 j. Graf Lengkap (*Complete graph*)

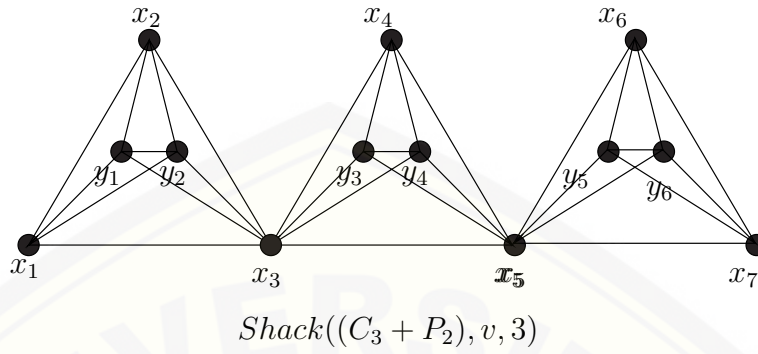
Graf lengkap adalah graf sederhana yang setiap titiknya mempunyai sisi ke semua titik lainnya. Graf lengkap dengan n buah titik dilambangkan dengan K_n . Himpunan sisi dan titik pada graf lengkap (K_n) adalah $V(G) = \{x_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan $E(G) = \{x_i x_j; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n, i \neq j\}$. Jumlah sisi pada graf lengkap yang terdiri dari n buah titik adalah $n(n - 1)/2$ (Slamin, 2009). Contoh graf lengkap dapat dilihat pada Gambar 2.12.

Gambar 2.12 Graf Lengkap K_1 dan K_5

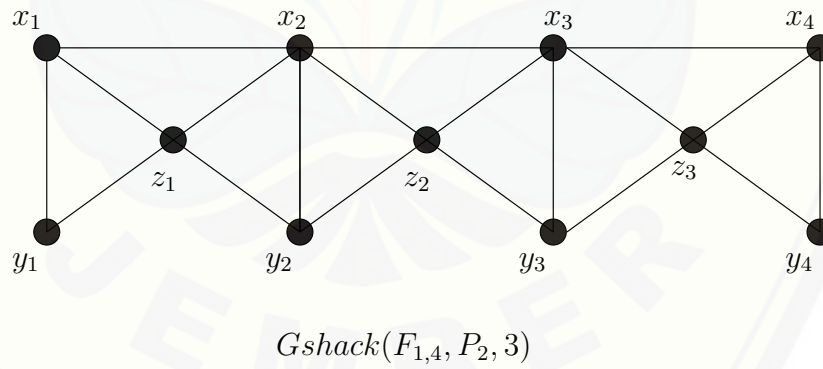
Operasi graf adalah suatu cara yang dilakukan untuk memperoleh graf baru dengan mengombinasikan dua buah graf. Berikut ini adalah beberapa macam operasi graf.

Definisi 2.2.1. Graf Shackle dari G_1, G_2, \dots, G_n dinotasikan dengan $Shack(G, n)$ ialah graf yang dibangun dari graf terhubung non trivial dari graf $\{G_1, G_2, \dots, G_n\}$ sedemikian hingga untuk setiap $s, t \in [1, n]$ dengan $|s - t| \geq 2$, G_s dan G_t tidak memiliki titik umum dan untuk setiap $i \in [1, n - 1]$, G_i dan G_{i+1} memiliki tepat satu titik yang sama yang disebut titik penghubung dan $k - 1$ titik penghubung tersebut adalah berbeda. Jika $G = shack(H, v, n)$ titik penghubung digantikan dengan subgraf $K \subset H$ disebut dengan generalized shackle, dan dinotasikan dengan $G = gshack(H, K \subset H, n)$ (Dafik et al., 2010). Contoh operasi shackle dapat dilihat pada Gambar 2.13.

Definisi 2.2.2. Generalized Shackle atau shackle tergeneralisir yaitu apabila satu titik umum terbagi oleh G_i dan G_{i+1} digantikan dengan satu subgraf umum H sebagai subgraf penghubungnya. Jika tidak semua anggota dari H terbagi maka graf shackle tergeneralisir dinotasikan sebagai berikut: $gshack(G, v \in H, n)$, $gshack(G, e \in H, n)$ atau $gshack(G, K \subseteq H, n)$ dengan K merupakan sebuah subgraf dari H (Dafik, 2015). Contoh operasi generalized shackle dapat dilihat pada Gambar 2.14.

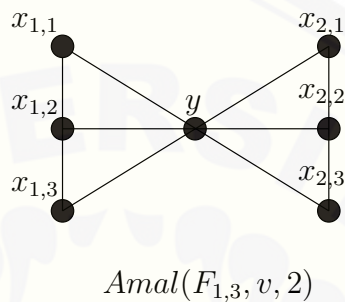


Gambar 2.13 Graf Hasil Operasi *Shackle* dari $(C_3 + P_2)$



Gambar 2.14 Graf Hasil Operasi *Generalized Shackle* dari $F_{1,4}$ dan P_2

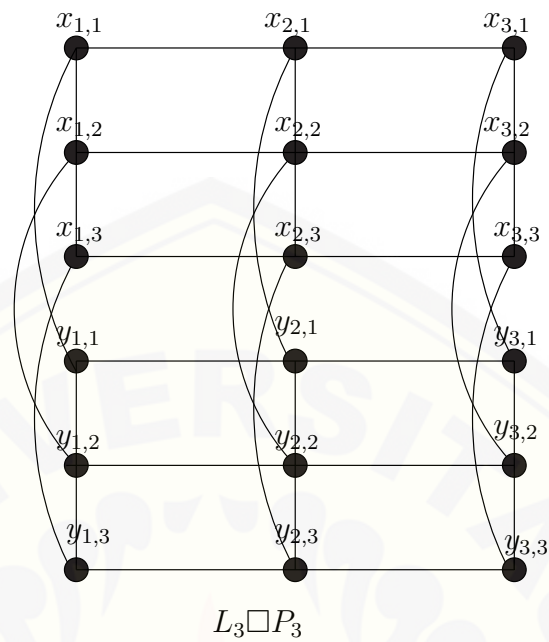
Definisi 2.2.3. *Amalgamation* dinotasikan dengan $Amal(H_i, v, r)$. Misalkan H_i adalah suatu keluarga graf berhingga dan setiap H_i mempunyai suatu titik v yang disebut titik terminal, dan r menyatakan banyaknya graf H_i yang akan diamalgamation, sehingga semua H_i dengan seluruh terminalnya direkatkan menjadi satu titik (Ardiyansah, 2013). Contoh operasi amalgamation dapat dilihat pada Gambar 2.15.



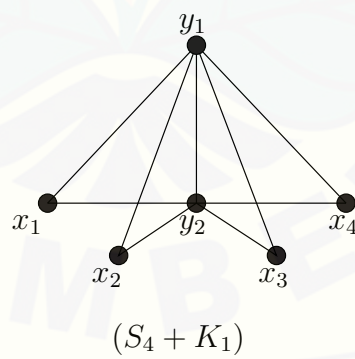
Gambar 2.15 Graf Hasil Operasi *Amalgamation* dari $F_{1,3}$

Definisi 2.2.4. *Cartesian product* dari graf $G_1(V_1, E_1)$ dan $G_2(V_2, E_2)$ adalah graf $G(V, E)$, ditulis $G = G_1 \square G_2$, jika $V = V(G_1) \times V(G_2)$, dan dua titik $\langle u_1, u_2 \rangle$ dan $\langle v_1, v_2 \rangle$ di G bertetangga jika dan hanya jika salah satu dari dua hal berikut berlaku: $u_1 = v_1$ dan $(u_2, v_2) \in E(G_2)$ atau $u_2 = v_2$ dan $(u_1, v_1) \in E(G_1)$ (Harary, 2007). Contoh Operasi cartesian product dapat dilihat pada Gambar 2.16.

Definisi 2.2.4. *Graph joint* $(G_1 + G_2)$ dari graf G_1 dan G_2 , dinotasikan dengan $G = G_1 + G_2$, adalah graf G dimana $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ dan $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup uv | U \in V(G_2)$ (Harary, 2007). Contoh dari operasi joint dapat dilihat pada Gambar 2.17.



Gambar 2.16 Graf Hasil Operasi *CartesianProduct* dari L_3



Gambar 2.17 Graf Hasil Operasi *Joint* dari K_1 dan S_4

2.3 Koneksi Pelangi

Misalkan $G = (V(G), E(G))$ merupakan suatu graf terhubung yang tak-trivial, didefinisikan pewarnaan sisi $e \in E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k \mid k \in N\}$, dimana sisi yang bertetangga boleh memiliki warna yang sama. Suatu *path* adalah jalan yang semua titik berbeda. Suatu lintasan $u-v$ *path* di G dinamakan lintasan pelangi jika tidak terdapat dua sisi dilintasi yang berwarna sama. Graf G disebut koneksi pelangi dengan pewarnaan c jika G memuat suatu lintasan $u-v$ untuk setiap dua titik $\{u, v \in G\}$. Jika terdapat k warna di G maka c dikatakan pewarnaan k -pelangi (*rainbow k -coloring*). Minimum k sehingga terdapat pewarnaan k -pelangi di G disebut bilangan koneksi pelangi, ditulis $rc(G)$. Suatu pewarnaan pelangi yang menggunakan $rc(G)$ warna dikatakan pewarnaan pelangi minimal atau *minimum rainbow coloring* di G (Chartrand, 2008).

Misalkan f merupakan suatu pewarnaan pelangi yang terdapat pada suatu graf terhubung G . Untuk sebarang dua titik u dan v di G , pelangi $u-v$ *geodesic* di G adalah suatu lintasan pelangi dengan panjang $d(u, v)$, dimana $d(u, v)$ adalah jarak antara u dan v . Graf G dikatakan koneksi pelangi kuat jika G memuat satu pelangi $u-v$ *geodesic* untuk setiap dua titik u dan v pada G , ditulis $src(G)$.

Sebelumnya telah dilakukan penelitian tentang batas bawah dan batas atas dari koneksi pelangi. Berikut teorema yang didapatkan dan akan digunakan untuk membuktikan beberapa teorema yang didapatkan dalam penelitian ini.

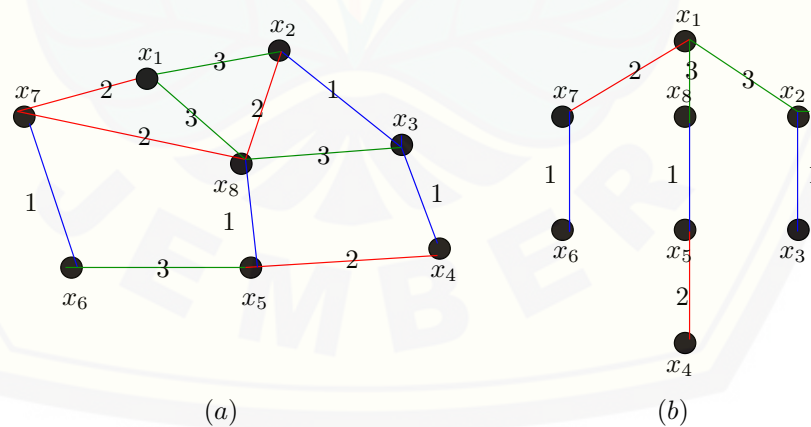
◇ **Teorema 1.** *Andaikan G adalah graf terhubung dengan $d(G) \geq 2$ dan jika G adalah interval graf, maka $k(G) \leq rc(G) \leq k(G) + 1$, sedangkan yang lainnya jika G unit interval graf, maka $k(G) = rc(G)$ (Li dan Sun, 2012).*

2.4 Aplikasi Koneksi Pelangi dan Koneksi Pelangi Kuat pada Proses Distribusi

Konsep koneksi pelangi dan koneksi pelangi kuat dapat diaplikasikan pada proses distribusi, misalnya digunakan dalam pendistribusian emas ke beberapa Kabupaten di Provinsi Jawa Timur perlu pengawalan yang ketat karena merupakan barang berharga yang nilai jualnya sangat tinggi. Emas adalah salah

satu pilihan investasi sebagian orang. Investasi emas dapat dijadikan variasi dalam berinvestasi ini dikarekan emas tahan terhadap pengaruh inflasi dan juga harga emas tiap tahunnya akan terus meningkat. Dalam pendistribusian emas diperlukan tim pengawalan pengawasan agar pendistribusian emas berjalan lancar dan hal-hal buruk dapat diminimalkan. Dapat dipilih jalur yang menjangkau beberapa kabupaten/kota yang ada di Provinsi Jawa Timur dan jalur yang dilalui tidak terdapat tim yang sama. Sehingga, dengan penerapan koneksi pelangi dapat menentukan jumlah minimal tim pengawalan pengawasan yang dibutuhkan. Untuk menjamin keamanan dan meminimalkan hal-hal buruk maka pada pendistribusian ini akan dibentuk beberapa tim yang akan menyebar ke beberapa kabupaten atau kota di Provinsi Jawa Timur. Untuk mempermudah analisa maka kita gambar alur pendistribusian.

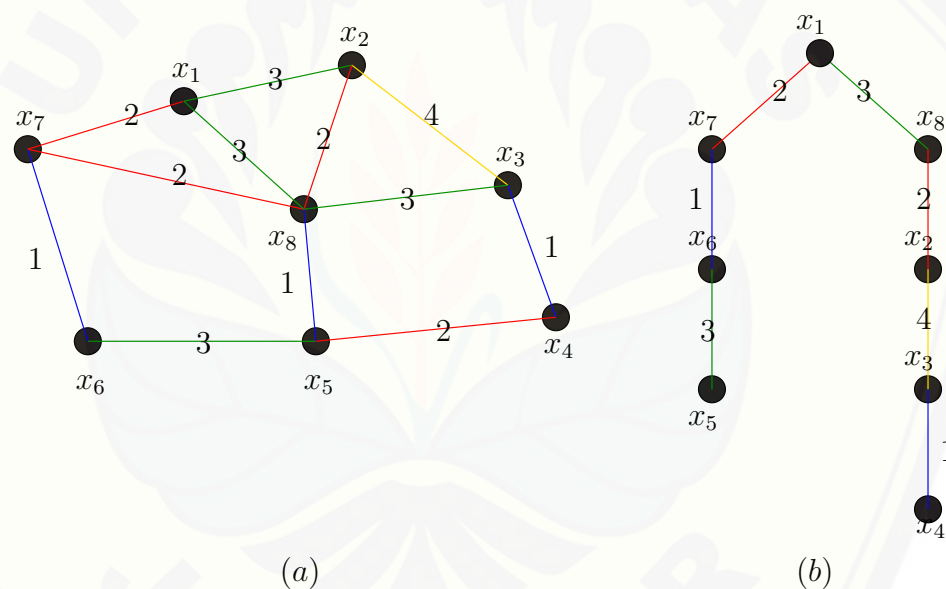
Pada Gambar 2.11(a) memiliki $k = 3$, sesuai dengan teorema yang ada bahwa batas atas dan bawah dari $rc(G)$ adalah $k(G) \leq rc(G) \leq k(G) + 1$, maka batas bawah dan batas atas dari $rc(G)$ adalah $3 \leq rc(G) \leq 3 + 1$, maka $3 \leq rc(G) \leq 4$, setelah diwarnai $f : E(G) \rightarrow 1, 2, 3$ sehingga $rc(G) = 3$ dan $src(G) = 4$. Jadi yang harus dibentuk adalah 3 tim pengawas dan disebar menurut pewarnaan pelangi dari $rc(G)$ seperti pada Gambar 2.11. Kemudian diambil lintasan yang dapat menjangkau titik terbanyak dengan warna sisi harus berbeda.



Gambar 2.18 Contoh Aplikasi $rc(G)$ (a) dan Contoh Aplikasi *Spanning Tree* (b)

Pada Gambar 2.11(b) dimisalkan pusat pendistribusian emas berpusat di x_1 . Untuk menuju titik x_6 harus melewati x_7 dan diperiksa oleh tim 2 dan 1 secara berturut-turut. Untuk menuju titik x_4 harus melewati x_8 dan x_5 diperiksa oleh tim 3, 1, dan 2 secara berturut-turut. Untuk menuju x_3 harus melewati x_2 dan diperiksa oleh tim 3 dan 1.

Konsep koneksi pelangi kuat dapat diaplikasikan pada proses distribusi emas. Sedikit berbeda dengan koneksi pelangi, perbedaannya terletak pada tim pengawas pengawas minimal sama dengan konsep koneksi pelangi, namun waktu yang dibutuhkan minimal sama atau lebih cepat. Karena tempat pendistribusian emas melalui lintasan terpendek. Sesuai dengan konsep koneksi pelangi kuat bahwa antara dua titik harus menggunakan lintasan terpendek, maka pada Gambar 2.12(a) terdapat sedikit perubahan yaitu pada sisi x_2x_3 berwarna 4.



Gambar 2.19 Contoh Aplikasi $rc(G)$ (a) dan Contoh Aplikasi *Spanning Tree* (b)

Pada Gambar 2.12(b) dimisalkan pendistribusian emas berpusat di x_1 . Untuk menuju ke titik x_5 harus melewati x_7 dan x_6 diperiksa oleh tim 2, 1 dan 3. Untuk menuju titik x_4 harus melewati x_8 , x_2 dan x_3 diperiksa oleh tim 3, 2, 4 dan 1. Jadi waktu yang diperlukan sedikit lebih cepat.

2.5 Hasil-hasil *Rainbow Connection*

Pada bagian ini disajikan beberapa rangkuman hasil *Rainbow Connection* yang dapat digunakan sebagai rujukan penelitian ini.

Tabel 2.1: Hasil *Rainbow Connection* Sebelumnya

Graf	$rc(G)$	Keterangan
<i>graf Gear</i> G_8	4	Syafrizal. (2013)
<i>graf Fan</i> (F_{10})	3	Alfarisi and Dafik. (2014)
<i>graf Komplemen</i> <i>Lingkaran</i> \overline{C}_8	2	Wijaya. (2013)
<i>graf Lingkaran</i> C_n	$\frac{n}{2}$	(Chartrand <i>et al.</i> , 2006)
<i>graf Roda</i> W_n	1, untuk $n = 3$ 2, untuk $4 \leq n \leq 6$ 3, untuk $n \geq 7$	(Chartrand <i>et al.</i> , 2006)
<i>graf Kipas Tangkai</i> Kt_n	1, untuk $n = 2, 3$ 3, untuk $n \geq 4$	(Alfarisi and Dafik <i>et al.</i> , 2014)
<i>graf Jaring</i> <i>Laba-laba</i> Wb_n	3, untuk $3 \leq n \leq 6$ 4, untuk $n = 7$ 5, untuk $n \geq 8$	Alfarisi and Dafik. (2014)
<i>graf Tangga</i> <i>Permata</i> Dl_n	$n + 1$	Alfarisi and Dafik. (2014)
<i>graf Bunga</i> Fl_n	3	Alfarisi and Dafik. (2014)
<i>graf Parasut</i> Pc_n	$n + 1$	Alfarisi and Dafik. (2014)
<i>graf Windmild</i> W_4^n	3	Alfarisi and Dafik. (2014)
<i>graf Prisma</i> $P_{n,m}$	m , untuk $n = 3$ $\lceil \frac{n}{2} \rceil + (m - 1)$, untuk $n \geq 4$	Darmawan and Dafik. (2014)
<i>graf AntiPrisma</i> AP_n	2, untuk $n = 3$ $\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$, untuk $n \geq 4$	Darmawan and Dafik. (2014)

BAB 3. METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Penelitian ini dikategorikan kedalam penelitian eksploratif dan penelitian terapan (*applied research*), yaitu:

- a. Metode deduktif adalah metode yang menggunakan prinsip-prinsip pembuktian deduktif yang berlaku dalam logika matematika dengan menggunakan aksioma atau teorema yang telah ada untuk memecahkan suatu masalah yang akan diteliti.
- b. Penelitian eksploratif adalah jenis penelitian yang bertujuan menggali hal-hal yang ingin diketahui oleh peneliti dan hasil penelitian dapat digunakan sebagai dasar penelitian selanjutnya.

3.2 Rancangan Penelitian

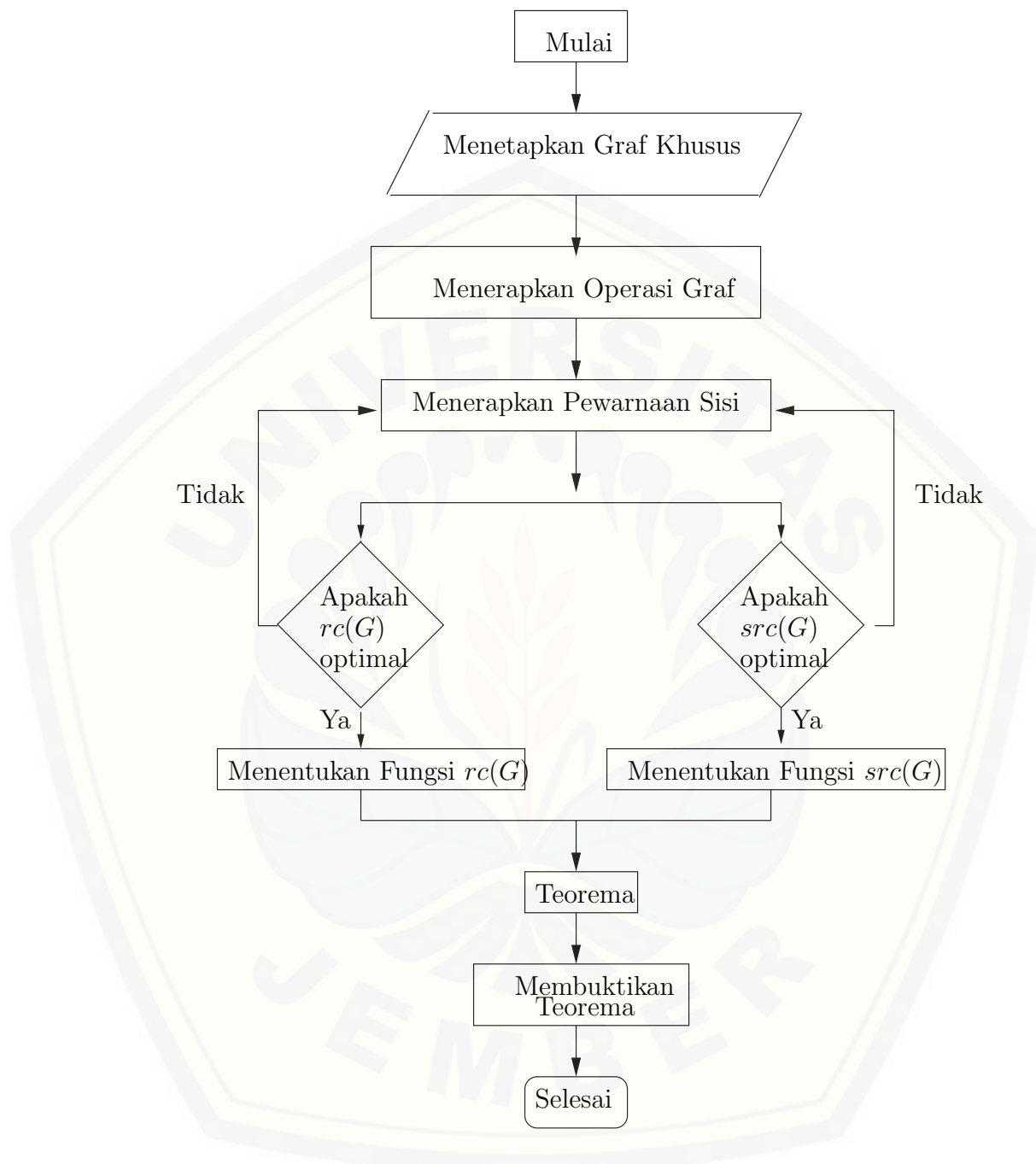
Penelitian ini dilakukan pada graf $(S_4 + K_1) \square P_n$, $AP_3 \square P_n$, $L_3 \square P_n$, $(C_3 + P_2) \square P_n$, $H_3 \square P_n$, $shack((C_3 + P_2), v, n)$, $gshack(amal(W_4, v, 2), C_4, n)$, $gshack(F_{1,4}, P_2, n)$, $gshack(amal(F_{1,3}, v, 2), P_3, n)$, dan $gshack(F_{2,6}, P_3, n)$. Adapun teknik penelitian adalah sebagai berikut:

- a. menentukan graf-graf khusus sebagai objek penelitian;
- b. menerapkan operasi graf yang telah ditentukan;
- c. menenentukan kardinalitas titik dan sisi dari graf;
- d. menerapkan pewarnaan pelangi dan pewarnaan pelangi kuat pada graf yang telah dioperasikan dan menerapkan prinsip koneksi pelangi dan koneksi pelangi kuat;
- e. memeriksa $rc(G)$ dan $src(G)$ menggunakan teorema 2.3.1, apabila sudah berada dalam selang dilanjutkan dengan menentukan fungsi, dan apabila belum berada pada selang maka kembali ke tahap sebelumnya ;
- f. menentukan fungsi sisi berdasarkan $rc(G)$ dan $src(G)$ pada graf;

- g. melakukan pembuktian teorema dengan menggunakan fungsi sehingga didapatkan teorema baru.
- h. membuktikan teorema yang telah didapatkan.

Secara umum, rancangan penelitian diatas dapat disajikan dalam skema Gambar 3.1.





Gambar 3.1 Skema Penelitian

BAB 5. PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Hasil dari pembahasan bab sebelumnya tentang koneksi pelangi dan koneksi pelangi kuat dapat disimpulkan sebagai berikut:

1. Kardinalitas titik dan sisi yang diperoleh dari operasi graf diantaranya sebagai berikut:
 - a. Untuk $n \geq 2$, Kardinalitas titik dan sisi dari graf $((S_4 + K_1) \square P_n)$ adalah $|V((S_4 + K_1) \square P_n)| = 6n$ dan $|E((S_4 + K_1) \square P_n)| = 15n - 6$.
 - b. Untuk $n \geq 2$, Kardinalitas titik dan sisi dari graf $(AP_3 \square P_n)$ adalah $|V(AP_3 \square P_n)| = 6n$ dan $|E(AP_3 \square P_n)| = 18n - 6$.
 - c. Untuk $n \geq 2$, Kardinalitas titik dan sisi dari graf $(L_3 \square P_n)$ adalah $|V(L_3 \square P_n)| = 6n$ dan $|E(L_3 \square P_n)| = 13n - 6$.
 - d. Untuk $n \geq 2$, Kardinalitas titik dan sisi dari graf $((C_3 + P_2) \square P_n)$ adalah $|V((C_3 + P_2) \square P_n)| = 5n$ dan $|E((C_3 + P_2) \square P_n)| = 15n - 5$.
 - e. Untuk $n \geq 2$, Kardinalitas titik dan sisi dari graf $(H_3 \square P_n)$ adalah $|V(H_3 \square P_n)| = 7n$ dan $|E(H_3 \square P_n)| = 16n - 8$.
 - f. Untuk $n \geq 2$, Kardinalitas titik dan sisi dari graf $shack((C_3 + P_2), v, n)$ adalah $|V(shack((C_3 + P_2), v, n))| = 4n + 1$ dan $|E(shack((C_3 + P_2), v, n))| = 10n$.

- g. Untuk $n \geq 2$, Kardinalitas titik dan sisi dari graf $gshack(amal(W_4, v, 2), C_4, n)$ adalah $|V(gshack(amal(W_4, v, 2), C_4, n))| = 5n + 4$ dan $|E(gshack(amal(W_4, v, 2), C_4, n))| = 12n + 4$.
- h. Untuk $n \geq 2$, Kardinalitas titik dan sisi dari graf $gshack(F_{1,4}, P_2, n)$ adalah $|V(gshack(F_{1,4}, P_2, n))| = 3n + 2$, dan $|E(gshack(F_{1,4}, P_2, n))| = 6n + 1$.
- i. Untuk $n \geq 2$, Kardinalitas titik dan sisi dari graf $gshack(amal(F_{1,3}, v, 2), P_3, n)$ adalah $|V(gshack(amal(F_{1,3}, v, 2), P_3, n))| = 4n + 3$, dan $|E(gshack(amal(F_{1,3}, v, 2), P_3, n))| = 8n + 2$.
- j. Untuk $n \geq 2$, Kardinalitas titik dan sisi dari graf $gshack(F_{2,6}, P_3, n)$ adalah $|V(gshack(F_{2,6}, P_3, n))| = 5n + 3$, dan $|E(gshack(F_{2,6}, P_3, n))| = 15n + 2$.
2. Nilai koneksi pelangi dan nilai koneksi pelangi kuat yang diperoleh dari operasi graf diantaranya sebagai berikut:
- a. Untuk $n \geq 2$, nilai koneksi pelangi dan nilai koneksi pelangi kuat dari graf $((S_4 + K_1) \square P_n)$ adalah $n + 1$.
- b. Untuk $n \geq 2$, nilai koneksi pelangi dan nilai koneksi pelangi kuat dari graf $(AP_3 \square P_n)$ adalah $n + 1$.
- c. Untuk $n \geq 2$, nilai koneksi pelangi dan nilai koneksi pelangi kuat dari graf $(L_3 \square P_n)$ adalah $n + 2$.
- d. Untuk $n \geq 2$, nilai koneksi pelangi dan nilai koneksi pelangi kuat dari graf $((C_3 + P_2) \square P_n)$ adalah n .

- e. Untuk $n \geq 2$, nilai koneksi pelangi dan nilai koneksi pelangi kuat dari graf $(H_3 \square P_n)$ adalah $n + 2$.
- f. Untuk $n \geq 2$, nilai koneksi pelangi dan nilai koneksi pelangi kuat dari graf $shack((C_3 + P_2), v, n)$ adalah n .
- g. Untuk $n \geq 2$, nilai koneksi pelangi dan nilai koneksi pelangi kuat dari graf $gshack(amal(W_4, v, 2), C_4, n)$ adalah $2n$.
- h. Untuk $n \geq 2$, nilai koneksi pelangi dan nilai koneksi pelangi kuat dari graf $gshack(F_{1,4}, P_2, n)$ adalah $n + 2$.
- i. Untuk $n \geq 2$, nilai koneksi pelangi dan nilai koneksi pelangi kuat dari graf $gshack(amal(F_{1,3}, v, 2), P_3, n)$ adalah $2n$.
- j. Untuk $n \geq 2$, nilai koneksi pelangi dan nilai koneksi pelangi kuat dari graf $gshack(F_{2,6}, P_3, n)$ adalah $2n$.
3. Fungsi koneksi pelangi dan fungsi koneksi pelangi kuat yang diperoleh dari operasi graf diantaranya sebagai berikut:

- a. Graf $((S_4 + K_1) \square P_n)$

$$c(e) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } e = y_{i1}y_{i2}, y_{i1}x_{i,2j-1}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq 2 \\ 2, & \text{untuk } e = y_{i1}x_{i,2j}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq 2 \\ j, & \text{untuk } e = y_{i2}x_{i,2j-1}, y_{i2}x_{i,2j}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq 2 \\ i+2, & \text{untuk } e = y_{ij}y_{i+1,j}; 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq j \leq 2 \\ i+2, & \text{untuk } e = x_{ij}x_{i+1,j}; 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq j \leq 4 \end{cases}$$

b. Graf $(AP_3 \square P_n)$.

$$c(e) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } e = x_{ij}x_{i,j+1}, y_{ij}y_{i,j+1}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq 2 \\ 1, & \text{untuk } e = x_{i1}x_{i3}, y_{i1}y_{i3}; 1 \leq i \leq n \\ 2, & \text{untuk } e = x_{ij}y_{ij}, x_{i3}y_{i1}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq 3 \\ 2, & \text{untuk } e = x_{ij}y_{i,j+1}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq 2 \\ i+2, & \text{untuk } e = x_{ij}x_{i+1,j}, y_{ij}y_{i+1,j}; 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq j \leq 3 \end{cases}$$

c. Graf $(L_3 \square P_n)$.

$$c(e) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } e = x_{ij}x_{i,j+1}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq 2 \\ 2j-1, & \text{untuk } e = y_{ij}y_{i,j+1}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq 2 \\ j+1, & \text{untuk } e = x_{ij}x_{i,j+1}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq 2 \\ i+3, & \text{untuk } e = x_{ij}x_{i+1,j}, y_{ij}y_{i+1,j}; 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq j \leq 3 \end{cases}$$

d. Graf $((C_3 + P_2) \square P_n)$.

$$c(e) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } e = x_{ij}x_{i,j+1}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq 4 \\ 1, & \text{untuk } e = x_{i1}x_{i3}, x_{ij}x_{i5}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq 3 \\ 1, & \text{untuk } e = x_{ij}x_{i4}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq 2 \\ i+1, & \text{untuk } e = x_{ij}x_{i+1,j}; 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq j \leq 5 \end{cases}$$

e. Graf $(H_3 \square P_n)$.

$$c(e) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } e = x_{i1}x_{i3}; 1 \leq i \leq n \\ j-1, & \text{untuk } e = x_{ij}y_{ij}; 1 \leq i \leq n; 2 \leq j \leq 3 \\ j, & \text{untuk } e = A_i x_{ij}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq 3 \\ j+1, & \text{untuk } e = x_{ij}x_{i,j+1}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq 2 \\ 3, & \text{untuk } e = x_{i1}y_{i1}; 1 \leq i \leq n \\ i+3, & \text{untuk } e = A_i A_{i+1}, x_{ij}x_{i+1,j}, y_{ij}y_{i+1,j}; 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq j \leq 3 \end{cases}$$

f. Graf $shack((C_3 + P_2), v, n)$.

$$c(e) = \begin{cases} i, & \text{untuk } e = x_{2i-1}x_{2i}, x_{2i}x_{2i+1}, x_{2i-1}x_{2i+1}, x_{2i-1}y_{2i-1}; 1 \leq i \leq n \\ i, & \text{untuk } e = x_{2i}y_{2i}, x_{2i}y_{2i-1}, x_{2i-1}y_{2i}; 1 \leq i \leq n \\ i, & \text{untuk } e = x_{2i+1}y_{2i-1}, x_{2i+1}y_{2i}, y_{2i-1}y_{2i}; 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

g. Graf $gshack(amal(W_4, v, 2), C_4, n)$.

$$c(e) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } e = x_{i1}x_{i2}, x_{i3}x_{i4}; 1 \leq i \leq n+1 \\ 2, & \text{untuk } e = x_{i2}x_{i3}, x_{i1}x_{i4}; 1 \leq i \leq n+1 \\ 2i-1, & \text{untuk } e = x_{ij}y_i; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq 4 \\ 2i, & \text{untuk } e = x_{i+1,j}y_i; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq 4 \end{cases}$$

h. Graf $gshack(F_{1,4}, P_2, n)$.

$$c(e) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } e = x_1y_1, x_1z_1, y_1z_1 \\ 2, & \text{untuk } e = x_2y_2, x_{i+1}z_i, y_{i+1}z_i; 1 \leq i \leq n \\ i+1, & \text{untuk } e = x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n \\ i+1, & \text{untuk } e = x_i z_i, y_i z_i; 2 \leq i \leq n \\ i+2, & \text{untuk } e = x_{i+1} y_{i+1}; 2 \leq i \leq n \end{cases}$$

i. Graf $gshack(amal(F_{1,3}, v, 2), P_3, n)$.

$$c(e) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } e = x_{i1}x_{i2}; 1 \leq i \leq n+1 \\ 2, & \text{untuk } e = x_{i2}x_{i3}; 1 \leq i \leq n+1 \\ 2i-1, & \text{untuk } e = x_{ij}y_i; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq 3 \\ 2i, & \text{untuk } e = x_{i+1,j}y_i; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq 3 \end{cases}$$

j. Graf $gshack(F_{2,6}, P_3, n)$.

$$c(e) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } e = x_{ij}x_{i,j+1}; 1 \leq i \leq n+1; 1 \leq j \leq 2 \\ 1, & \text{untuk } e = x_{i3}x_{i+1,1}; 1 \leq i \leq n \\ 2i-1, & \text{untuk } e = x_{ij}y_i; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq 2 \\ 2i-1, & \text{untuk } e = x_{i+1,j}y_i; 1 \leq i \leq n; 2 \leq j \leq 3 \\ 2i-1, & \text{untuk } e = x_{ij}z_i; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq 3 \\ 2i, & \text{untuk } e = x_{i3}y_i, x_{i+1,1}y_i, x_{i+1,j}z_i; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq 3 \end{cases}$$

5.2 Saran

Berdasarkan hasil penelitian mengenai analisa koneksi pelangi dan koneksi pelangi kuat pada graf hasil operasi *shackle*, *generalized shackle*, *amalgamation*, *cartesian product*, dan *joint*, dengan graf yang digunakan adalah *star graph* (S_n),

path graph (P_n), *anti-prism graph* (AP_n), *ladder graph* (L_n), *helm graph* (H_n), *cycle graph* (C_n), *wheel graph* (W_n), *complete graph* K_n , dan *fan graph* ($F_{n,m}$), maka peneliti memberikan saran kepada peneliti selanjutnya untuk melakukan penelitian tentang koneksi pelangi dan koneksi pelangi kuat pada graf hasil operasi lainnya.



DAFTAR PUSTAKA

- Alfarisi, R. dan Dafik. 2014. The Rainbow Connection Number of Special Graphs. *Prosiding Seminar Matematika dan Pendidikan Matematika FMIPA UNEJ*,1 No.1:457-461.
- Ardiyansah, R. dan Darmaji. 2013. Bilangan Kromatik Graf Hasil Amalgamasi Dua Buah Graf. *Jurnal Sains dan Seni Pomits*, 2 (1).
- Chartrand, G., Kalamazoo, G., Johns, S., Valley, K. A., and McKeon. (2006). *Rainbow Connection in Graphs*. *Jurnal:Math. Bohem.*, 133, No. 2, 85-98.
- Dafik., Slamini., Tanna, D.2016. *Contructions of H-antimagic graphs using snaller edge-antimagic graphs.ars Combinatoria,submitted.*
- Dafik, S. Setiawani, dan K.M.F. Azizah. 2015. *Generalized Shackle of Fans is a Super (a, d)-edge Anti magic Total Graph*. *Applied Mathematical Sciences*. Submitted.
- Darmawan, R. N. 2015. *Analisis Rainbow Connection Number pada Graf Khusus dan Hasil Operasinya*. Tidak dipublikasikan (Tesis). Jember: Universitas Jember.
- Fajariyanto, A. 2015. *Penerapan Rainbow Connection pada Graf-Graf Hasil Operasi*. Tidak dipublikasikan (Skripsi). Jember: Universitas Jember.
- Harary, F. 2007. *Graph Theory*. New London: Wesley.
- Harsya, A. Y., Agustin, I. H., dan Dafik. 2014. Pewarnaan Titik Pada Operasi Graf Lintasan, Graf Sikel, dan Graf Bintang. *Prosiding Seminar Matematika dan Pendidikan Matematika Universitas Jember*, 1 (1).
- Hasan, M.S., Agustin, I. H., dan Dafik. (2015). *Analisa Rainbow Connection dan Strong Rainbow Connection pada Graf Hasil Operasi*. *Jurnal: Universitas Jember*.
- Hartsfield, N. dan Ringel, G. 1990. *Pearls in Graph Theory*. Boston San Diego New York London: Academic Press.

- Histamedika, G. 2012. Rainbow Connection pada Beberapa Graf. *Matematika UNAND*, 2:17-25.
- Munir, R. 2009. *Matematika Diskrit Edisi 3*. Bandung: Informatika Bandung.
- Purwanto, H., Indriani, G., dan Dayanti, E. 2006. *Matematika Diskrit*. Jakarta: PT. Ercontara Rajawali.
- Slamin. 2009. *Desain Jaringan: Pendekatan Teori Graf*. Jember: Universitas Jember.
- Syafrizal, Sy., dan Estetikasari, Dewi. 2013. *On Rainbow Connection for Some Corona Graphs*. *Jurnal: Applied Mathematical Sciences.*, Vol. 7, No. 100, 4975-4979.
- Syafrizal, Sy., Medika, GH., Yulianti, Lyra. 2013. *The Rainbow Connection of Fan and Sun*. *Jurnal: Applied Mathematical Sciences.*, Vol. 7, No. 64, 3155-3159.
- Yulianti, A. dan Dafik. 2014. Rainbow Connection Number pada Operasi Graf. *Prosiding Seminar Matematika dan Pendidikan Matematika FMIPA UNEJ*, 1 No.1:521-525..

LAMPIRAN

Lanjutan Hasil Penelitian Terdahulu $rc(G)$ dan $src(G)$

Graf	Hasil	Keterangan
Dl_n (Diamond Ladder); $n \geq 2$	$rc(Dl_n) = n + 1.$	Alfarisi, dkk, 2014
PC_n (Parachute Graph); $n \geq 2$	$rc(PC_n) = n + 1.$	Alfarisi, dkk, 2014
W_4^n (Windmill Graph); $n \geq 2$	$rc(W_4^n) = 3.$	Alfarisi, dkk, 2014
$H_{n,m}$ (Helmet Graph); $n \geq 3;$ $m \geq 1$	$rc(H_{n,m}) = nm + 3.$	Alfarisi, dkk, 2014
Graph $P_n + C_n; n \geq 3$	$rc(P_n + C_n) = 2.$	Fajariyanto, 2014
Graph $C_n + S_n; n \geq 3$	$rc(C_n + S_n) = 2.$	Fajariyanto, 2014
Graph $P_n + W_n; n \geq 3$	$rc(P_n + W_n) = 2.$	Fajariyanto, 2014
Graph $C_n + W_n; n \geq 3$	$rc(C_n + W_n) = 2.$	Fajariyanto, 2014
Graph $S_n + W_n; n \geq 3$	$rc(S_n + W_n) = 2.$	Fajariyanto, 2014
Graph $P_n \square C_n;$ $n \geq 2; m \geq 3$	$rc(P_n \square C_n) = n; m = 6.$ $rc(P_n \square C_n) = n + 1;$ $4 \leq m \leq 6.$ $rc(P_n \square C_n) = n + 2;$ $m \geq 6.$	Fajariyanto, 2014
Graph Amal($W_n, v = 1, r$) $\square P_2; n \geq 3; r \geq 3$	$rc(\text{Amal}(W_n, v = 1, r)$ $\square P_2) = 4.$	Fajariyanto, 2014
Graph $P_n \otimes C_m; n \geq 3$	$rc(P_n \otimes C_m) = n.$	Fajariyanto, 2014
Graph $P_n[C_n];$ $n \geq 2; m \geq 3$	$rc(P_n[C_n]) = n - 1;$ $n - 1 \geq \frac{m}{2}.$ $rc(P_n[C_n]) = 1; m = 3;$ $n - 1 < \frac{m}{2}.$ $rc(P_n[C_n]) = \frac{m}{2};$ $n - 1 < \frac{m}{2};$ $m \text{ genap.}$ $rc(P_n[C_n]) = \frac{m-1}{2} + 1;$ $n - 1 < \frac{m}{2};$ $m \text{ ganjil} > 3.$	Fajariyanto, 2014

Graf	Hasil	Keterangan
<i>Graph</i> $P_n[W_m]$; $n \geq 3; m \geq 3$	$rc(P_n[W_m]) = 3; n = 3.$ $rc(P_n[W_m]) = n - 1;$ $n \geq 4.$	Fajariyanto,2014
<i>Graph</i> $P_n[S_m]$; $n \geq 3; m \geq 3$	$rc(P_n[S_m]) = 3; n = 3.$ $rc(P_n[S_m]) = n - 1;$ $n \geq 4.$	Fajariyanto,2014
<i>Graph Amal</i> ($C_n, v = 1, r$) $\square P_2; n \geq 3; r \geq 3$	$rc(Amal(C_n, v = 1, r)$ $\square P_2) = n + 1.$	Fajariyanto,2014
<i>Graph Amal</i> ($P_n, v = 1, r$) $\square P_2; n \geq 3; r \geq 3$	$rc(Amal(P_n, v = 1, r)$ $\square P_2) = 2n.$	Fajariyanto,2014
<i>Graph</i> $mP_n + K_1; m \geq 2;$ $n \geq 2$	$rc(mP_n + K_1) = 3.$	Darmawan,2015
<i>Graph</i> $mP_n + K_1; m \geq 2;$ $n \geq 2$	$src(mP_n + K_1) =$ $(\lceil \frac{n}{3} \rceil) m.$	Darmawan,2015
<i>Graph</i> $S_n \square P_m; n \geq 3;$ $m \geq 2$	$rc(S_n \square P_m) =$ $src(S_n \square P_m) =$ $n + m - 1.$	Darmawan,2015
<i>Graph</i> $W_n \square P_m; n \geq 3;$ $m \geq 2$	$rc(W_n \square P_m) = m; n = 3.$ $rc(W_n \square P_m) = m + 1;$ $4 \leq n \leq 6.$ $rc(W_n \square P_m) = m + 2;$ $n \geq 7.$	Darmawan,2015
<i>Graph</i> $W_n \square P_m; n \geq 3;$ $m \geq 2$	$src(W_n \square P_m) =$ $rc(W_n \square P_m); n = 3.$ $src(W_n \square P_m) =$ $rc(W_n \square P_m);$ $4 \leq n \leq 6.$ $src(W_n \square P_m) =$ $\lceil \frac{n}{3} \rceil + m - 1; n \geq 7.$	Darmawan,2015
<i>Graph</i> $P_n \odot C_m; n \geq 2;$ $m \geq 3$	$rc(P_n \odot C_m) = 2n - 1;$ $m = 3.$ $rc(P_n \odot C_m) = 3n - 1;$ $m \geq 4.$	Darmawan,2015

Graf	Hasil	Keterangan
$Graph P_n \odot C_m; n \geq 2;$ $m \geq 3$	$src(P_n \odot C_m) =$ $rc(P_n \odot C_m); m = 3.$ $src(P_n \odot C_m) =$ $rc(P_n \odot C_m);$ $4 \leq m \leq 6.$ $src(P_n \odot C_m) =$ $n \left(\lceil \frac{m}{3} \rceil \right) + (n - 1); m \geq 7.$	Darmawan,2015
$Graph shack[(P_2 \otimes W_3), n];$ $n \geq 2$	$rc(shack[(P_2 \otimes W_3), n]) =$ $src(shack[(P_2 \otimes W_3), n])$ $= 3n.$	Darmawan,2015
$Graph shack[(P_3 \otimes C_3), n];$ $n \geq 2$	$rc(shack[(P_3 \otimes C_3), n]) =$ $src(shack[(P_3 \otimes C_3), n])$ $= 4n.$	Darmawan,2015
$Graph Amal[(S_4 + K_1),$ $v = 1, n]; n \geq 2$	$rc(Amal[(S_4 + K_1),$ $v = 1, n]) = 3.$	Darmawan,2015
$Graph Amal[(S_4 + K_1),$ $v = 1, n]; n \geq 2$	$src(Amal[(S_4 + K_1),$ $v = 1, n]) = 2n.$	Darmawan,2015
$Graph Amal[(S_4 \square P_2),$ $v = 1, n]; n \geq 2$	$rc(Amal[(S_4 \square P_2),$ $v = 1, n]) =$ $src(Amal[(S_4 \square P_2),$ $v = 1, n]) = 5n.$	Darmawan,2015
$Graph Pr_{(n,m)}; n \geq 3;$ $m \geq 1$	$rc(Pr_{(n,m)}) = src(Pr_{(n,m)})$ $= m; n = 3.$ $rc(Pr_{(n,m)}) = src(Pr_{(n,m)})$ $= \lceil \frac{n}{2} \rceil + (m - 1); n \geq 4.$	Darmawan,2015
$Graph AP_n; n \geq 3;$ $m \geq 1$	$rc(AP_n) = src(AP_n)$ $= 2; n = 3.$ $rc(AP_n) = src(AP_n)$ $= \lceil \frac{n}{2} \rceil; n \geq 4.$	Darmawan,2015
$Graph F_{2,6} \square P_m; m \geq 2;$	$rc(F_{2,6} \square P_m) =$ $src(F_{2,6} \square P_m) = m + 1.$	Hasan,dkk,2015
$Graph Amal(F_{1,3}, v = 1, 2),$ $\square P_m; m \geq 2$	$rc(Amal(F_{1,3}, v = 1, 2)$ $\square P_m) =$ $src(Amal(F_{1,3}, v = 1, 2)$ $\square P_m) = m + 1.$	Hasan,dkk,2015

Graf	Hasil	Keterangan
Graph $Amal(W_4, v = 1, 2)$, $\square P_m; m \geq 2$	$rc(Amal(W_4, v = 1, 2)) =$ $\square P_m =$ $src(Amal(W_4, v = 1, 2)) =$ $\square P_m = m + 1.$	Hasan,dkk,2015
Graph $P_2[F_{2,n}]; m \geq 2;$	$rc(P_2[F_{2,n}]) =$ $src(P_2[F_{2,n}]) = 2.$	Hasan,dkk,2015
Graph $gshack(K_n, P_2, r),$	$rc(gshack(K_n, P_2, r)) =$ $src(gshack(K_n, P_2, r)) = r.$	Hasan,dkk,2015
Graph $gshack(K_n, C_3, r),$	$rc(gshack(K_n, C_3, r)) =$ $src(gshack(K_n, C_3, r)) = r.$	Hasan,dkk,2015
Graph $gshack(W_6, C_3, r),$	$rc(gshack(W_6, C_3, r)) =$ $src(gshack(W_6, C_3, r)) = 2r.$	Hasan,dkk,2015
Graph $gshack(W_6, C_4^1, r),$	$rc(gshack(W_6, C_4^1, r)) =$ $src(W_6, C_4^1, r) = 2r.$	Hasan,dkk,2015