

LAPORAN AKHIR
PENELITIAN FUNDAMENTAL



**Pengembangan Sistem Kodefikasi Model-Model
Topologi Jaringan Diskonektif dengan Teknik Super
Edge Antimagic Total Labeling (SEATL)**
*(The Development of Coding System of Disconnected Network
Topology Models by Super Edge Antimagic Total Labeling
(SEATL) Technique)*

Oleh:
Prof. Drs. Dafik, M.Sc, Ph.D.
Arika Indah K, S.Si, M.Pd.

FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS JEMBER
NOPEMBER 2015

HALAMAN PENGESAHAN

Judul : Pengembangan Sistem Kode kasi Model-model Topologi Jaringan Diskonektif dengan Teknik Super Edge Antimagic Total Labeling (SEATL) (The Development of Coding System of Disconnected Network Topology Models by Super Edge Antimagic Total Labeling (SEATL) Technique)

Peneliti/Pelaksana
Nama Lengkap : Prof. Drs. DAFIK M.Sc., Ph.D.
Perguruan Tinggi : Universitas Jember
NIDN : 0001016827
Jabatan Fungsional : Guru Besar
Program Studi : Pendidikan Matematika
Nomor HP : 081217760566
Alamat surel (e-mail) : d.dafik@gmail.com

Anggota (1)
Nama Lengkap : ARIKA INDAH KRISTIANA S.Si., M.Pd
NIDN : 0002057606
Perguruan Tinggi : Universitas Jember
Institusi Mitra (jika ada) : -
Nama Institusi Mitra : -
Alamat : -
Penanggung Jawab : -
Tahun Pelaksanaan : Tahun ke 1 dari rencana 2 tahun
Biaya Tahun Berjalan : Rp 61.500.000,00
Biaya Keseluruhan : Rp 150.000.000,00

Mengetahui,
Pembantu Dekan I FKIP



Dr. Sukarman, M.Pd

NIP/NIK 19640123 199512 1 001

Jember, 9 - 2 - 2016
Ketua,

(Prof. Drs. DAFIK M.Sc., Ph.D.)
NIP/NIK 196808021993031004

Menyetujui,
Ketua Lembaga Penelitian



(Prof. Ir. Achmad Subagio, M.Agr., Ph.D)
NIP/NIK 196905171992011001

KATA PENGANTAR

Puji syukur kehadirat Allah SWT atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan laporan akhir penelitian fundamental yang dilakukan oleh peneliti sebagai anggota CGANT research Group Universitas Jember. Penelitian tahun ini difokuskan pada teknik pengkodean topologi jaringan melalui judul: Pengembangan Sistem Kodefikasi Model-Model Topologi Jaringan Diskonektif dengan Teknik Super Edge Antimagic Total Labeling (*The Development of Coding System of Disconnected Network Topology Models by Super Edge Antimagic Total Labeling Technique*). Topologi jaringan yang dihasilkan dalam penelitian ini adalah kodefikasi pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic dan total super (a, d) - H antimagic. Tahun ini topologi jaringan difokuskan pada dua famili graf khusus yaitu: (1) pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic pada **graf semi parasut** tunggal maupun gabungan saling lepasnya; (2) pelabelan total super (a, d) - H antimagic pada **amalgamasi graf kipas** tunggal maupun gabungan saling lepasnya.

Terdapat beberapa mahasiswa yang dilibatkan dalam penelitian fundamental ini, namun yang penelitiannya terkait langsung dengan penelitian ini adalah terdiri dari empat mahasiswa dan dua orang diantaranya sudah menyelesaikan studinya. Melalui kolaborasi yang intensif dalam CGANT reserach group, kedua mahasiswa ini telah mendapatkan beberapa hasil penelitian yang signifikan dan hasil penelitiannya telah dituangkan dalam joint paper yang telah disubmit dan dinyatakan accepted dalam international conference dan jurnal internasional yang keduanya terindeks oleh SCOPUS.

Pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih dan penghargaan yang sebesar-besarnya atas bantuan dalam penyusunan laporan ini, terutama kepada yang terhormat:

1. Lembaga Penelitian Universitas Jember;
2. Anggota CGANT Research Group Universitas Jember;
3. Tim peneliti hibah fundamental 2015

4. Semua pihak yang terlibat secara langsung dan tidak langsung dalam terselesaikannya laporan kemajuan penelitian ini.

Penulis menyadari bahwa laporan kemajuan ini masih jauh dari sempurna, oleh karenanya kritik dan saran yang konstruktif tetap dibutuhkan untuk perbaikan laporan ini dikemudian hari. Akhirnya penulis berharap, semoga laporan kemajuan ini dapat bermanfaat.

Jember, Nopember 2015

Penulis

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR	i
DAFTAR ISI	iv
DAFTAR GAMBAR	vi
DAFTAR TABEL	vii
DAFTAR LAMPIRAN	viii
DAFTAR LAMBANG	ix
1 PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang Masalah	1
1.2 Masalah Penelitian	2
2 TINJAUAN PUSTAKA	4
2.1 Sejarah Perkembangan Teori Graf	4
2.2 Terminologi Dasar Graf	11
2.3 Jenis-jenis graf	15
2.4 Pelabelan Graf	21
2.5 Hasil-Hasil Pelabelan Total Super (a, d) -Sisi Antimagic pada Graf Diskonektif	30
3 TUJUAN DAN MANFAAT PENELITIAN	35
3.1 Tujuan Penelitian	35
3.2 Manfaat Penelitian	35
3.3 Jurnal Ilmiah yang Menjadi Sasaran	36
3.4 Kolaborator yang Terlibat	37
3.5 Research Group yang Menaunginya	37
4 METODE PENELITIAN	38
4.1 Metode Penelitian	38
4.2 Definisi Operasional Pelabelan Total Super (a, d) -Sisi Antimagic	38
4.3 Teknik Penelitian	38
5 HASIL DAN PEMBAHASAN	41
5.1 Pelabelan Total Super (a, d) -Sisi Antimagic pada Graf Semi Parasut SP_{2n-1}	42

5.1.1	Semi Parasut konektif SP_{2n-1}	42
5.1.2	Semi Parasut Diskonektif mSP_{2n-1}	54
5.2	Pelabelan Super (a, d) - \mathcal{H} -Antimagic Total Dekomposisi pada Amalgamasi Graf Kipas Konektif	81
5.3	Pelabelan Super (a, d) - \mathcal{H} Antimagic Total Dekomposisi pada Amalgamasi Graf Kipas Diskonektif	112
6	KESIMPULAN DAN SARAN	123
6.1	Kesimpulan	123
6.2	Saran	123
	DAFTAR PUSTAKA	125

DAFTAR GAMBAR

2.1	Gambaran Kota Königsberg tahun 1736	4
2.2	Representasi Jembatan Könisberg dalam Graf	5
2.3	Visualisasi teori empat warna pada sebuah peta.	7
2.4	Model-model topologi jaringan komunikasi.	10
2.5	Contoh Jaringan Komputer	11
2.6	Kombinasi model-model topologi jaringan komunikasi.	12
2.7	Graf G_1 dan G_2	12
2.8	Graf G	13
2.9	Keisomorfisan graf	14
2.10	Contoh graf tidak sederhana dan graf sederhana	15
2.11	Contoh gabungan graf	16
2.12	(a) Graf sederhana, (b) Graf ganda, dan (c) Graf semu	17
2.13	Graf berhingga	17
2.14	Graf tak-berhingga	17
2.15	Graf Berarah dan Tak Berarah	18
2.16	Graf Ulat Sutra Sw_n	19
2.17	Graf Rantai Pentagon \mathfrak{PC}_n	20
2.18	Graf Tribun \mathfrak{T}_n	21
2.19	Graf Lampion $\mathcal{L}_{n,m}$	22
2.20	Contoh model topologi jaringan diskonektif.	22
2.21	Pola barisan bilangan dengan selisih tiap suku adalah 1	28
4.1	Diagram alir penelitian	40
5.1	Jumlah titik dan jumlah sisi pada graf Semi Parasut SP_{2n-1} dengan $n = 4$ dan $n = 6$	43
5.2	Pelabelan (3,1)-sisi antimagic titik pada SP_{11} dengan $n = 6$	45
5.3	SEATL graf semi parasut SP_{11} dengan $d = 0$	47
5.4	SEATL graf semi parasut SP_{11} dengan $d = 2$	49
5.5	SEATL graf semi parasut SP_{11} dengan $d = 1$	51

5.6	Pelabelan (9,1)-sisi antimagic titik pada $5SP_{2n-1}$	59
5.7	Pelabelan super (154, 0)-sisi antimagic total pada $5SP_{2n-1}$ dengan $n = 6$	64
5.8	Pelabelan super (70, 2)-sisi antimagic total pada $5SP_{2n-1}$ dengan $n = 6$	69
5.9	Pelabelan total super (263, 1)-sisi antimagic pada $9SP_{2n-1}$ dengan $n = 8$	80
5.10	Jumlah titik dan sisi pada $F_3^2(a)$, $F_3^3(b)$, $F_3^4(c)$	82
5.11	Super $(32n + 13, 0) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada F_3^5 . .	87
5.12	Super $(31n + 14, 2) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada F_3^5 . .	89
5.13	Super $(30n + 15, 4) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada F_3^5 . .	91
5.14	Super $(29n + 16, 6) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada F_3^5 . .	92
5.15	Super $(28n + 17, 8) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada F_3^5 . .	94
5.16	Super $(30n + 15, 10) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada F_3^5 .	96
5.17	Super $(26n + 19, 12) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada F_3^5 .	97
5.18	Super $(25n + 20, 14) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada (F_3^5)	99
5.19	Super $(24n + 21, 16) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada F_3^5 .	101
5.20	Super $(23n + 22, 18) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada F_3^5 .	102
5.21	Super $(22n + 23, 20) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada F_3^5 .	104
5.22	Super $(21n + 24, 22) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada F_3^5 .	105
5.23	Super $(20n + 25, 24) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada F_3^5 .	107
5.24	Super $(19n + 26, 26) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada F_3^5 .	108
5.25	Super $(18n + 27, 28) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada F_3^5 .	110
5.26	Super $(20n + 25, 30) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada F_3^5 .	111
5.27	Super $(15n + 30, 34) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada F_3^5 .	113
5.28	Super $(30nm + \frac{17m+13}{2}, 4) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada gabungan saling lepas $5F_3^5$	119
5.29	Super $(29nm + \frac{17m+15}{2}, 6) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada gabungan saling lepas $5F_3^5$	122

DAFTAR TABEL

2.1	Ringkasan pelabelan total super (a, d) -edge antimagic pada graf konektif.	30
2.2	Ringkasan pelabelan total super (a, d) -edge antimagic pada graf diskonektif.	32

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran A	135
Lampiran B	138

DAFTAR LAMBANG

$Db_{n,p}$	= Lambang untuk graf Rem Cakram
$mDb_{n,p}$	= Lambang untuk gabungan graf Rem Cakram
$x_{i,j}$	= Titik ke- i dalam komponen ke- j pada lingkaran pada graf Rem Cakram
$y_{k,l}$	= Titik ke- i dalam komponen ke- j pada belah ketupat sebelah kiri dan kanan pada graf Rem Cakram
$x_{i,j}^s$	= Titik ke- i dalam komponen ke- j <i>copy</i> ke- s pada lingkaran pada gabungan graf Rem Cakram
$y_{k,l}^s$	= Titik ke- i pada komponen ke- j <i>copy</i> ke- s pada belah ketupat bagian kiri dan kanan pada graf Rem Cakram
$f_a(x_{i,j})$	= Fungsi bijektif pelabelan titik pada lingkaran graf Rem Cakram
$f_a(y_{k,l})$	= Fungsi bijektif pelabelan titik pada belah ketupat sebelah kiri dan kanan pada graf Rem Cakram
$f_a(x_{i,j}x_{i+1,j})$	= Fungsi bijektif label sisi pada lingkaran pada graf Rem Cakram
$f_a(x_{n,j}x_{1,j})$	= Fungsi bijektif label sisi pada sisi akhir di lingkaran antar dua titik pada graf Rem Cakram
$f_a(y_{k,l}y_{k+1,l})$	= Fungsi bijektif label sisi yang menghubungkan titik (samping) belah ketupat pada graf Rem Cakram
$f_a(x_{i,j}y_{2i-2,j})$	= Fungsi bijektif label sisi yang menghubungkan titik antara lingkaran dengan belah ketupat pada graf Rem Cakram
$f_a(x_{i,j}y_{2i-1,j})$	= Fungsi bijektif label sisi yang menghubungkan titik antara lingkaran dengan belah ketupat pada graf Rem Cakram
$f_a(x_{1,j}y_{2n,j})$	= Fungsi bijektif label sisi yang menghubungkan titik awal pada lingkaran dengan titik akhir pada belah ketupat bagian samping pada graf Rem Cakram

$f_a(x_{1,j}y_{1,j})$	= Fungsi bijektif label sisi yang menghubungkan titik awal pada lingkaran dengan titik awal pada belah ketupat pada bagian samping pada graf Rem Cakram
$f_a(x_{i,j})$	= Fungsi bijektif pelabelan titik pada lingkaran graf Rem Cakram
$f_a(y_{k,l})$	= Fungsi bijektif pelabelan titik pada belah ketupat sebelah kiri dan kanan pada graf Rem Cakram
$w_a(x_{i,j}x_{i+1,j})$	= Bobot sisi pada lingkaran pada graf Rem Cakram
$w_a(x_{n,j}x_{1,j})$	= Bobot sisi pada sisi akhir di lingkaran antar dua titik pada graf Rem Cakram
$w_a(y_{k,l}y_{k+1,l})$	= Bobot sisi yang menghubungkan titik (samping) belah ketupat pada graf Rem Cakram
$w_a(x_{i,j}y_{2i-2,j})$	= Bobot sisi yang menghubungkan titik antara lingkaran dengan belah ketupat pada graf Rem Cakram
$w_a(x_{i,j}y_{2i-1,j})$	= Bobot sisi yang menghubungkan titik antara lingkaran dengan belah ketupat pada graf Rem Cakram
$w_a(x_{1,j}y_{2n,j})$	= Bobot sisi yang menghubungkan titik awal pada lingkaran dengan titik akhir pada belah ketupat bagian samping pada graf Rem Cakram
$w_a(x_{1,j}y_{1,j})$	= Bobot sisi yang menghubungkan titik awal pada lingkaran dengan titik awal pada belah ketupat pada bagian samping pada graf Rem Cakram
$W_a(x_{i,j})$	= Fungsi bijektif dari pelabelan total pada lingkaran graf Rem Cakram

- $W_a(y_{k,l})$ = Fungsi bijektif dari pelabelan total pada belah ketupat sebelah kiri dan kanan pada graf Rem Cakram
- $W_a(x_{i,j}x_{i+1,j})$ = Fungsi bijektif dari pelabelan total pada lingkaran pada graf Rem Cakram
- $W_a(x_{n,j}x_{1,j})$ = Fungsi bijektif dari pelabelan total pada sisi akhir di lingkaran antar dua titik pada graf Rem Cakram
- $W_a(y_{k,l}y_{k+1,l})$ = Fungsi bijektif dari pelabelan total yang menghubungkan titik (samping) belah ketupat pada graf Rem Cakram
- $W_a(x_{i,j}y_{2i-2,j})$ = Fungsi bijektif dari pelabelan total yang menghubungkan titik antara lingkaran dengan belah ketupat pada graf Rem Cakram
- $W_a(x_{i,j}y_{2i-1,j})$ = Fungsi bijektif dari pelabelan total yang menghubungkan titik antara lingkaran dengan belah ketupat pada graf Rem Cakram
- $W_a(x_{1,j}y_{2n,j})$ = Fungsi bijektif dari pelabelan total yang menghubungkan titik awal pada lingkaran dengan titik akhir pada belah ketupat bagian samping pada graf Rem Cakram
- $W_a(x_{1,j}y_{1,j})$ = Fungsi bijektif dari pelabelan total yang menghubungkan titik awal pada lingkaran dengan titik awal pada belah ketupat pada bagian samping pada graf Rem Cakram

BAB 1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Ringkasan Perkembangan teknologi informasi membawa dampak kepada dinamika topologi jaringan. Jaringan dalam hal ini tidak terbatas pada jaringan komputer namun termasuk didalamnya jaringan transportasi, irigasi, distribusi, komunikasi dan jaringan-jaringan terkait lainnya. Kompleksitas muncul apabila jumlah komponen semakin masif dan relasi antara komponen semakin kompleks. Sehingga handling management, problem tracing, problem shooting termasuk optimalisasi topologi jaringan akan menjadi rumit. Salah satu cara adalah dengan mengembangkan sistem kodekasi terhadap komponen dan relasinya sehingga memperoleh sifat-sifat yang unik yang akhirnya mudah untuk dilakukan problem solving. Penelitian ini bertujuan untuk memecahkan masalah ini dengan menggunakan teknik super antimagic total labeling dan super antimagic total covering.

Topologi jaringan (baik jaringan komunikasi secara umum ataupun jaringan komunikasi dalam komputer) dapat direpresentasikan sebagai bentuk sebuah **graf**, dimana masing-masing elemen digambarkan sebagai titik dan koneksi antara dua elemen digambarkan sebagai sisi. Jumlah titik yang terkait dalam jaringan dinamakan order, sedangkan jumlah koneksi yang terhubung ke sebuah titik disebut derajat suatu titik.

Saat ini, kajian dan pengembangan teori graf menjadi bahasan utama dikalangan peneliti, lebih-lebih kaitannya dengan perkembangan teknologi digital dan internet. Hal ini disebabkan tuntutan akan komunikasi yang dinamis, fleksible dan masif (ele-men yang terkoneksi sangat banyak) merupakan kebutuhan utama pengembangan teknologi jaringan ini.

Namun demikian kompleksitas dalam jaringan akan meningkat secara dramatis apabila jumlah elemen (atau komputer) yang terkait dalam jaringan bertambah, apalagi jika jumlah koneksi yang terhubung ke sebuah titik juga semakin besar, maka terbentuknya jaringan yang efisien dan berkecepatan tinggi, handal

dalam modulariti, mempunyai toleransi kegagalan fungsi yang baik serta resiko vulnerabiliti yang rendah akan selalu menjadi perhatian utama dalam mendesain topologi jaringan ini. Salah satu upaya penting yang dapat dikerjakan adalah dengan melakukan pelabelan terhadap model-model topologi jaringan itu. Kongkritnya menentukan **pelabelan** terhadap graf.

Kemudian, dengan diterapkannya teknologi jaringan pada hampir seluruh aspek kehidupan masyarakat, perkembangan model topologi mengarah pada model-model topologi (graf) diskonektif baik statik maupun dinamis. Namun demikian, temuan atau publikasi jurnal nasional maupun internasional yang terkait dengan hasil pelabelan untuk graf diskonektif masih relatif sedikit, baca (Gallian, 2007:356-359). Secara praktis baru dimulai pada tahun 2004. Oleh karena itu, dalam hal ini akan dilakukan penelitian terkait dengan pengembangan sistem kodefikasi dengan teknik pelabelan super edge antimagic total labeling (SEATL) dan super H -antimagic total labeling (SHATL) terhadap graf diskonektif.

1.2 Masalah Penelitian

Beberapa masalah yang akan dikaji dalam penelitian ini adalah:

1. Bagaimana visualisasi bentuk gabungan saling lepas model-model topologi jaringan yang dimungkinkan memiliki karakteristik pelabelan total super antimagic labeling dan super antimagic covering?
2. Bagaimanakah format algoritma pelabelan total super antimagic labeling dan super antimagic covering dari gabungan saling lepas model-model topologi jaringan itu?
3. Bagaimana bentuk teorema, aksioma/lemma serta korollari baru yang diperoleh dari proses generalisasi algoritma baru yang ditemukan di atas?
4. Bagaimana skema aplikasi desain atau model dengan teorema, aksioma/lemma serta korollari baru yang ditemukan dalam kodefikasi teknologi jaringan konektif atau diskonektif?

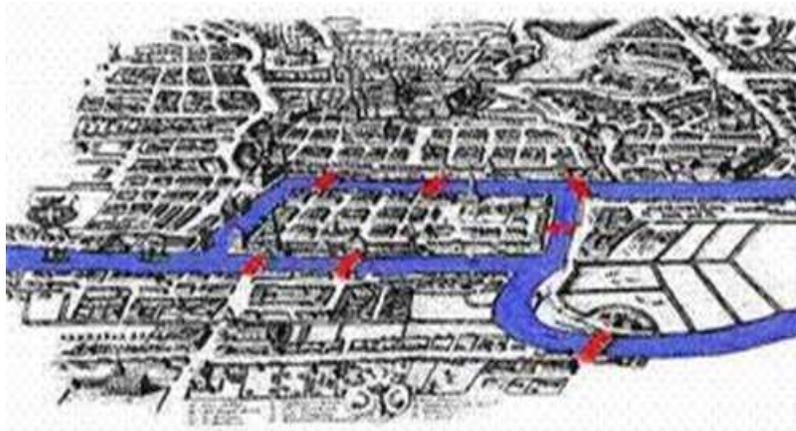
Gambaran untuk menyelesaikan masalah-masalah di atas dapat dijelaskan sebagai berikut.

1. Visualisasi bentuk gabungan saling lepas model-model topologi jaringan akan diperoleh secara eksporatif dari teknologi jaringan informasi yang dipakai di dunia saat ini, yang polanya direpresentasikan oleh sebuah bentuk famili *graf*. Kegiatan eksplorasi akan dilakukan dengan teknik web-searching melalui internet terhadap dynamic survey, book survey, journal publications, proceeding and poster;
2. Algoritma pelabelan total antimagic labeling dan antimagic covering dari sebuah gabungan graphs didapat dari penerapan teknik *EAVL (Edge Antimagic Vertex Labeling)*, *patern recognition*, *permutation tech technique and colouring* pada beberapa famili graf, yang merupakan dasar untuk memperluas pelabelan total antimagic labeling dan covering dari sebuah graphs.
3. Penurunan teorema, aksioma atau lemma serta korollari baru dari pelabelan total antimagic labeling dan antimagic covering akan diperoleh dengan metoda deduktif matematik.
4. Dengan metode diskriptif akan dijelaskan skema aplikasi teorema, aksioma atau lemma serta korollari baru khususnya mengurangi resiko vulnerabilitas topologi jaringan komputer statis atau dinamis.

BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Sejarah Perkembangan Teori Graf

Teori Graf merupakan bagian kajian dalam matematika diskrit. Kajian ini berkembang sangat pesat dalam dekade terakhir ini. Bahkan dengan perkembangan teknologi informasi dan komunikasi serta perkembangan dinamika sosial lainnya pemanfaatan teori graph semakin diperhitungkan. Sehingga kajian teori ini hampir ditemukan di segala cabang ilmu.

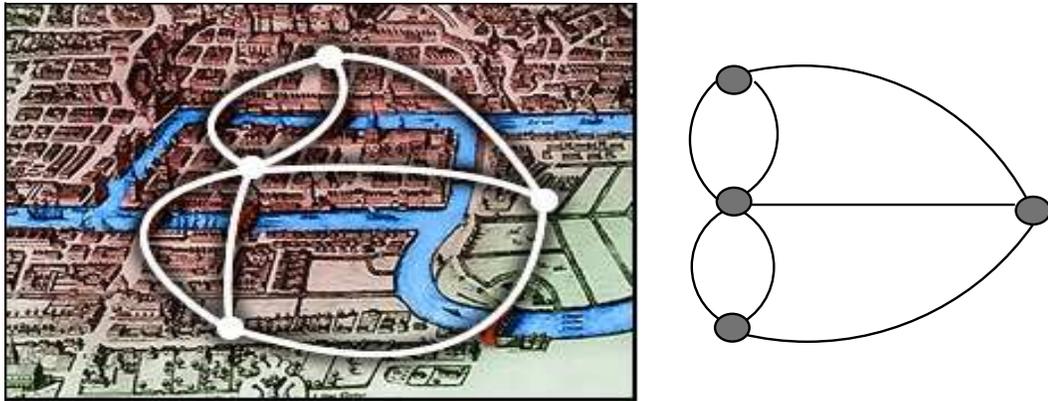


Gambar 2.1 Gambaran Kota Königsberg tahun 1736

Teori graf sendiri pertama kali muncul bersamaan dengan diajukannya sebuah masalah yang dikenal dengan masalah jembatan *Königsberg*. Kota Königsberg (sekarang bernama kota Kiliningrad) yang terletak di sebelah timur Prussia, Jerman, memiliki sungai yang dikenal dengan nama sungai *Pregel*. Sungai ini mengalir mengitari pulau Kneiphof lalu bercabang menjadi dua buah anak sungai yang membagi kota Königsberg menjadi empat daratan. Pada sungai itu terdapat tujuh buah jembatan yang menghubungkan keempat daratan. Permasalahan terkenal jembatan Königsberg adalah ”**Apakah mungkin seorang berangkat dari daerah tertentu melalui ketujuh buah jembatan itu masing-masing**

tepat satu kali, dan kembali lagi ke daerah semula”. Gambar 2.1 merupakan visualisasi dari jembatan Königsberg.

Tidak satupun dari ilmuwan dapat memecahkan masalah tersebut. Sampai suatu saat seorang matematikawan sekaligus fisikawan Swiss bernama Leonhard Euler, tahun 1736, berhasil menemukan jawaban terhadap masalah tersebut dengan memberikan gambaran pembuktian yang sederhana. Ia memodelkan masalah ini ke dalam sebuah graf. Gambar 2.2 adalah representasi graf dari permasalahan jembatan Königsberg.

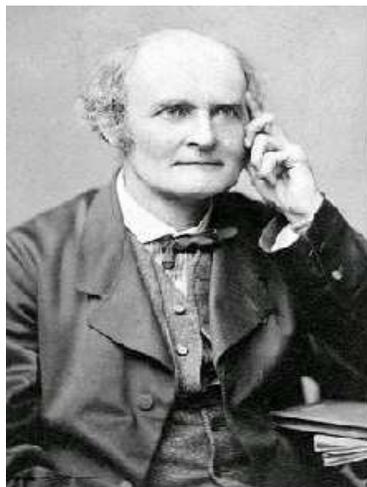


Gambar 2.2 Representasi Jembatan Konisberg dalam Graf

Daratan direpresentasikan dengan sebuah titik (*vertex*) sedangkan jembatan dinyatakan dengan sebuah garis atau sisi (*edge*). Pembuktian Euler tersebut ditulis dalam karya tulisnya yang berjudul *Solutio Problematis ad Geometriam Situs Pertinentis*. Sehingga masalah jembatan Konigsberg menjadi masalah yang sangat populer di seluruh negara Eropa dikala itu. Sekarang masalah ini menjelma menjadi masalah *Eulerian Path/Cycle*.

Kurang lebih seratus tahun setelah lahirnya tulisan Euler, tidak ada lagi perkembangan yang berarti berkenaan dengan graf. Baru pada tahun 1847, G.R. Kirchoff (1824 - 1887) berhasil mengembangkan teori pohon (theory of trees) yang digunakan dalam persoalan jaringan listrik. Sepuluh tahun kemudian, A. Cayley (1821 - 1895) juga menggunakan konsep pohon untuk menyelesaikan permasalahan kimia dalam model molekul senyawa alkane C_nH_{2n+2} . Permasalahan

dalam senyawa ini adalah menghitung jumlah isomernya (variasi struktur ikatannya), yaitu untuk n tertentu berapa jumlah isomer dari alkane tersebut?.



Athur Cayley (1821-1895)



William Clifford (1845-1879)

Athur Cayley dan William Clifford dua matematisi yang banyak berperan dalam masalah jumlah isomer dari struktur kimia alkane. Pada tahun 1874 Cayley mempublikasikan papernya dengan judul *On the Mathematical Theory of Isomers*. Dalam paper ini Cayley mencoba menghitung jumlah isomer alkane secara matematis namun dia menemukan kegagalan untuk n secara umum. Lima puluh tahun berikutnya masalah jumlah isomer alkane masih menjadi masalah terbuka, sampai tahun 1932 dua pakar kimia Amerika Henry Henze dan Richard Blair menemukan prosedur recursive, namun demikian generalisasinya tidak begitu memuaskan. Akhirnya pada tahun 1935 matematisi Hungarian George Polya dapat mengeneralisasi sebuah rumus namun dengan syarat kesimitrian didefinisikan terlebih dahulu.



George Pólya (Hungarian: Pólya György; December 13, 1887 - September 7, 1985) was a Hungarian mathematician. He was a professor of mathematics from 1914 to 1940 at ETH Zürich and from 1940 to 1953 at Stanford University. He made fundamental contributions to combinatorics, number theory, numerical analysis and probability theory. He is also noted for his work in heuristics and mathematics education.



Gambar 2.3 Visualisasi teori empat warna pada sebuah peta.

Pada masa Kirchoff dan Cayley juga lahir dua hal penting dalam teori graph. Salah satunya berkenaan dengan konjektur empat warna, yang menyatakan bahwa untuk mewarnai sebuah atlas cukup dengan menggunakan empat macam warna sedemikian hingga tiap negara yang berbatasan akan memiliki warna yang berbeda. Gambar 2.3 adalah representasi pewarnaan peta dengan empat warna.

Namun para ahli teori graph berkeyakinan bahwa orang yang pertama kali mengemukakan masalah empat warna adalah A.F. Mobius (1790 - 1868) dalam salah satu kuliahnya di Tahun 1840. Sepuluh tahun kemudian, A. De Morgan (1806 - 1871) kembali membahas masalah ini bersama ahli-ahli matematika lain-

nya di kota London. Tulisan De Morgan dianggap sebagai referensi pertama berkenaan dengan masalah empat warna. Masalah empat warna ini menjadi sangat terkenal setelah Cayley mempublikasikan artikelnya pada tahun 1879 dalam *Proceedings of the Royal Geographic Society* volume pertama. Hal lain yang penting untuk dibicarakan sehubungan dengan perkembangan teori graph adalah apa yang dikemukakan oleh Sir W.R. Hamilton (1805 - 1865). Pada Tahun 1859 dia berhasil menemukan suatu permainan yang kemudian dijualnya ke sebuah pabrik mainan di Dublin. Permainan tersebut terbuat dari kayu berbentuk dodecahedron beraturan yakni berupa sebuah polihedron dengan 12 muka dan 20 pojok. Tiap muka berbentuk sebuah pentagon beraturan dan tiap pojoknya dibentuk oleh tiga sisi berbeda. Tiap pojok dari dodecahedron tersebut dipasangkan dengan sebuah kota terkenal seperti London, New York, Paris, dan lain-lain. Masalah dalam permainan ini adalah, seorang diminta untuk mencari suatu rute melalui sisi-sisi dari dodecahedron sehingga tiap kota dari 20 kota yang ada dapat dilalui tepat satu kali. Saat ini masalah tersebut berkembang menjadi masalah *Hamiltonian Path/Cycle*.

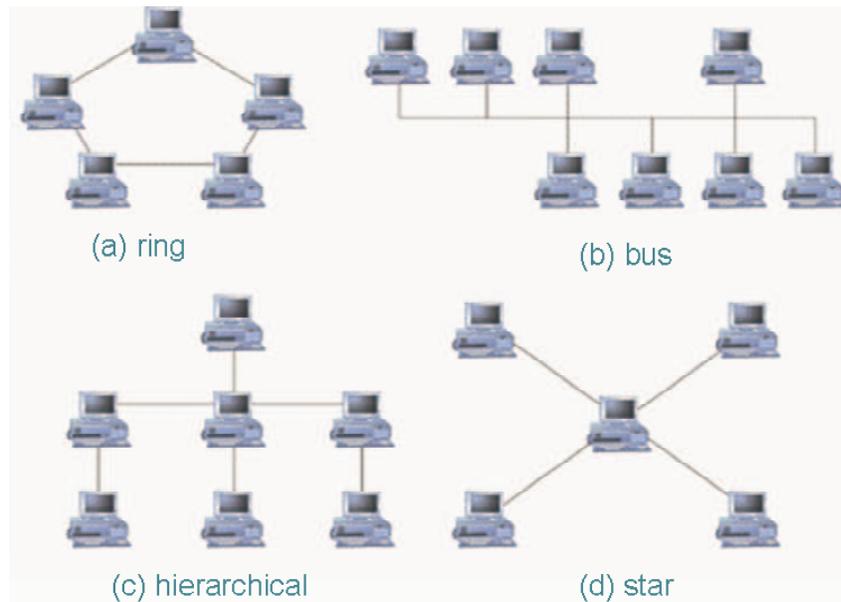
Kurang lebih setengah abad setelah masa Hamilton, aktivitas dalam bidang teori graf dapat dikatakan relatif kecil. Pada Tahun 1920-an kegiatan tersebut muncul kembali yang dipelopori oleh D. Konig. Konig berupaya mengumpulkan hasil-hasil pemikiran para ahli matematika tentang teori graf termasuk hasil pemikirannya sendiri, kemudian dikemasnya dalam bentuk buku yang diterbitkan pada Tahun 1936. Buku tersebut dianggap sebagai buku pertama tentang teori graf. Sejak itu, dan tiga puluh tahun terakhir ini perkembangan graf sangat pesat. Graf dikaji baik terkait dalam kepentingan *science for science* atau *science for application*. Ribuan bahkan jutaan artikel telah dipublikasikan, dan berbagai macam buku mengenai graf kini dengan mudah dapat ditemukan, dari yang sangat teoritis sampai ke yang praktis. Termasuk banyak research group telah dikembangkan yang terdiri dari peneliti, dosen mahasiswa sarjana dan pascasarjana nasional maupun internasional. Pada skala internasional terdapat Graph Theory Group: <http://graphtheorygroup.com/>, serta Graph Theory and Application (GTA): <http://www.graphtheorygroup.com/mirka/index.html>, untuk skala na-

sional terdapat InaCombs (Indonesian Combinatorial Society): <http://www.inacombs.org/>. Tahun 2014 ini, di Universitas Jember dibentuk research group dengan nama CGANT (Combinatoric, Graph Theory and Network Topology). Beberapa site lainnya terkait graph theory dan aplikasinya serta open course ware-nya juga dikembangkan dan dapat ditemukan dengan mudah di: <http://www.graphtheory-group.com/gta/index.html>

Dalam perspektif pemodelan matematika diskrit, model-model topologi jaringan (baik jaringan komunikasi secara umum ataupun jaringan komunikasi dalam komputer) dapat direpresentasikan sebagai bentuk sebuah graf, dimana masing-masing elemen digambarkan sebagai titik dan koneksi antara dua elemen digambarkan sebagai sisi. Jumlah titik yang terkait dalam jaringan dinamakan order, sedangkan jumlah koneksi yang terhubung ke sebuah titik disebut derajat suatu titik. Jarak antara dua titik dalam graf adalah besarnya lintasan terpendek, sedangkan diameter suatu graf adalah jarak yang terpanjang dari dua buah titik. Besarnya diameter dapat mencerminkan besarnya tundaan komunikasi maksimum dalam sebuah jaringan komunikasi komputer.

Hampir diseluruh negara-negara di dunia (baik negara maju atau berkembang), kajian dan pengembangan teori graf ini menjadi bahasan utama dikalangan peneliti dan saintisi, lebih-lebih kaitannya dengan perkembangan teknologi digital dan internet saat ini. Hal ini disebabkan tuntutan akan komunikasi yang dinamis, fleksible dan masif (titik-titik yang terkoneksi sangat banyak dan tak terbatas jumlahnya) telah mencapai *point of no return* yang terus maju dan berkembang, dan manusia terus dan terus tergantung pada teknologi ini, karena dengan berkembangnya teknologi ini telah membuat batas-batas geografis antara wilayah dan negara di dunia secara perlahan semakin lenyap, baca rencana jangka panjang IBM dalam *Blue Gene Project Overview* (2008: <http://www.research.ibm.com/bluegene/index.html>).

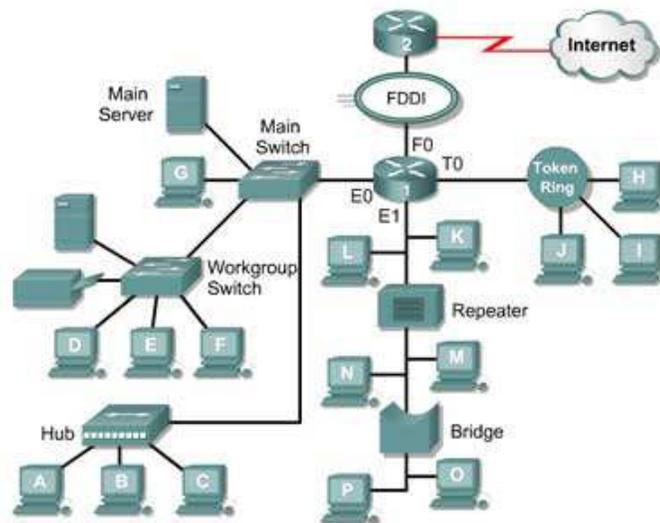
Model-model topologi jaringan komunikasi khususnya jaringan komputer sebagai salah satu contoh topologi yang terus mengalami perkembangan pesat dan dikaji secara mendalam. Seperti halnya jaringan LAN (local area network) yang biasanya dipakai di perkantoran, sekolah, universitas atau perusahaan; MAN



Gambar 2.4 Model-model topologi jaringan komunikasi.

(metropolitan area network) yang biasanya dipakai antar perkantoran, sekolah, universitas atau perusahaan di suatu kota; dan WAN (wide area network) yang merupakan jaringan dengan menggunakan satelit ataupun kabel bawah laut sehingga cakupannya sangat fleksibel dan masif. Internet dan teknologi perkembangan mobile phone merupakan salah satu contoh teknologi ini, atau secara riil jaringan bank BNI di Indonesia dan yang ada di negara-negara lainnya juga menggunakan sarana WAN ini. Gambar 1 dan 2 merupakan contoh topologi jaringan komunikasi khususnya jaringan komunikasi komputer.

Permasalahannya sekarang adalah, kompleksitas dalam jaringan akan meningkat secara dramatis apabila jumlah komputer atau elemen (order) yang terkait dalam jaringan bertambah, apalagi jika jumlah koneksi yang terhubung ke sebuah titik (derajad) juga semakin besar, maka terbentuknya jaringan yang efisien dan berkecepatan tinggi, handal dalam modulariti, mempunyai toleransi kegagalan fungsi yang baik serta resiko vulnerabiliti yang rendah akan selalu menjadi perhatian utama dalam mendesain topologi jaringan ini. Oleh karena itu salah satu upaya penting yang dapat dikerjakan adalah dengan melakukan pelabelan ter-



Gambar 2.5 Contoh Jaringan Komputer

Sumber gambar

<http://roh4n.wordpress.com/2009/07/25/jaringan-komputer-2/>

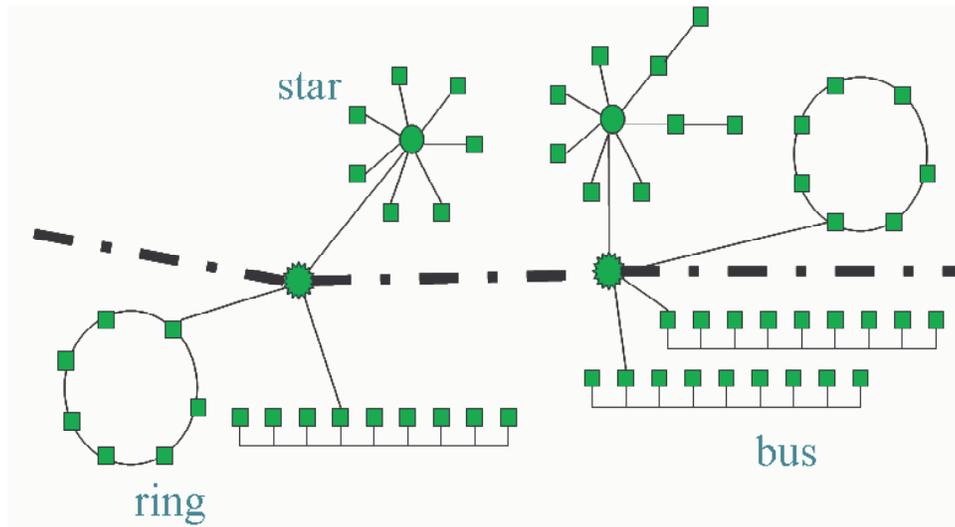
hadap model-model topologi jaringan itu. Kongkritnya menentukan **pelabelan terhadap graf** sebagai representasi model-model topologi jaringan komunikasi, dengan jenis pelabelan total antimagic, irregular total, distance and cover labeling of graphs, sedemikian hingga resiko vulnerabilitas komunikasi elemen dalam jaringan dapat ditekan sekecil mungkin.

2.2 Terminologi Dasar Graf

Berikut diberikan definis formal dari sebuah graf.

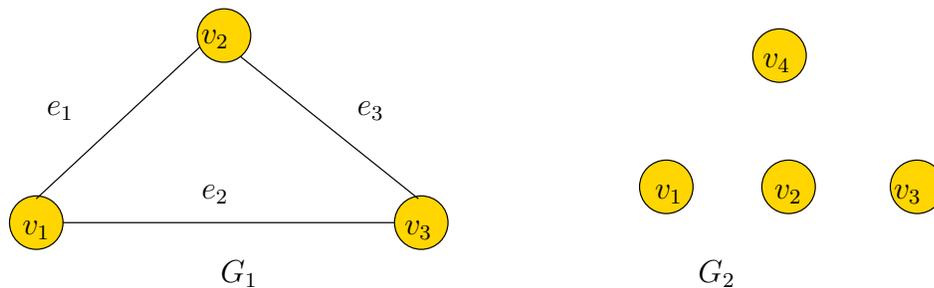
Definisi 2.2.1. *Sebuah graf G merupakan himpunan $(V(G);E(G))$, dimana $V(G)$ adalah himpunan berhingga tak kosong dari elemen yang disebut titik, dan $E(G)$ adalah sebuah himpunan (boleh kosong) dari pasangan tak terurut $u; v$ dari titik-titik $u; v \in V(G)$ yang disebut sisi. $V(G)$ disebut himpunan titik dari G dan $E(G)$ disebut himpunan sisi dari G (Slamin, 2009: 11).*

Jadi, sebuah graf dimungkinkan tidak mempunyai sisi satu buah pun, tetapi titiknya harus ada minimal satu. Banyaknya unsur dari V disebut order, dilambangkan dengan p dan banyaknya unsur dari E disebut ukuran dari graf yang



Gambar 2.6 Kombinasi model-model topologi jaringan komunikasi.

dilambangkan dengan q . Jika hanya membicarakan sebuah graf, misalkan graf G , maka order dan sisi dari graf G masing-masing hanya ditulis dengan $G(p, q)$.



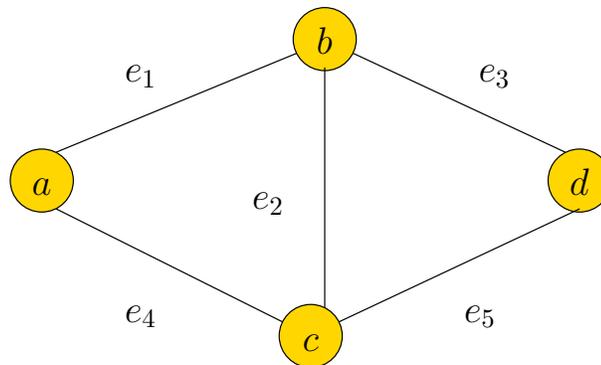
Gambar 2.7 Graf G_1 dan G_2

Gambar 2.7. G_1 adalah graf dengan $V(G_1) = v_1, v_2, v_3$ dan $E(G_1) = e_1, e_2, e_3$ dengan $e_1 = v_1v_2$, $e_2 = v_1v_3$, $e_3 = v_2v_3$. Titik v_1 dan v_2 , v_1 dan v_3 , v_2 dan v_3 berhubungan langsung, sisi e_1 terkait dengan titik v_1 dan v_2 . Sedangkan pada (G_2), $V(G_2) = v_1, v_2, v_3, v_4$ dan $E(G_2) = \emptyset$, maka G_2 adalah graf kosong. Dua titik dikatakan berhubungan jika ada sisi yang menghubungkan keduanya. Pada G_1 , v_1 dan v_2 dan v_3 dapat dikatakan saling berhubungan karena ada sisi yang menghubungkannya. Dan sebuah sisi dikatakan menempel untuk dua titik berbeda

yang menghubungkan sisi tersebut.

Definisi 2.2.2. (Degree). Derajat sebuah vertek v pada sebuah graf G , ditulis dengan $deg(v)$ adalah jumlah sisi yang terhubung pada v , dengan kata lain jumlah sisi yang memuat v sebagai titik ujung (Seymour Lipschutz, 2002:7).

Pengertian *degree* biasanya digunakan untuk menentukan keisomorfisan graf Rem Cakram. Pada suatu graf misal graf G , maka himpunan semua titik di G yang terhubung langsung dengan titik, misalkan titiknya v maka banyaknya sisi di G yang terkait langsung dengan v disebut dengan derajat titik di graf G , ditulis dengan $degG(v)$. Berikut disajikan gambar graf G dengan himpunan titik $V(G) = a, b, c, d$ dan $E(G) = e_1, e_2, e_3, e_4, e_5$ pada gambar 2.8 Dengan



Gambar 2.8 Graf G

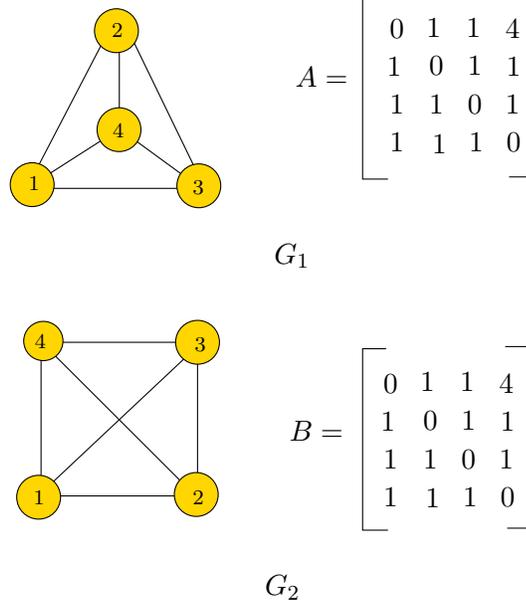
demikian, maka $deg(a) = 2, deg(b) = 3, deg(c) = 3, deg(d) = 2$ dan $D(G) = 3$ dan $d(G) = 2$.

Definisi 2.2.3. (Adjacent). Dua buah titik dikatakan bertetangga atau adjacent bila keduanya terhubung langsung dengan sebuah sisi (Munir, 2012:365).

Dua buah graf dikatakan isomorfis jika mereka mempunyai struktur yang sama dan kebanyakan, mereka berbeda cara pemberian label titik-titik dan sisi-sisinya, atau cara menggambarannya. Untuk memperjelasnya akan didefinisikan dua graf G_1 dan G_2 isomorfis jika ada suatu fungsi $\phi : V(G) \rightarrow V(G)$ sedemikian hingga $uv \in (G_i) \iff \phi(u)\phi(v) \in E(G_2)$. Fungsi ϕ dinamakan sebuah fungsi

isomorfis. Jika dua graf G_1 dan G_2 isomorfis, maka dituliskan $G_1 \cong G_2$. Sampai saat ini untuk menentukan apakah dua graf G_1 dan G_2 isomorfis atau tidak belum ada teori yang dapat dipakai. Tetapi, jika graf G_1 dan G_2 isomorfis, maka kedua graf tersebut selalu memenuhi 4 syarat sebagai berikut : (1) jumlah titik $G_1 =$ jumlah titik G_2 (jumlah simpul yang sama); (2) jumlah garis $G_1 =$ jumlah garis G_2 (jumlah sisi yang sama); (3) jumlah garis yang mempunyai derajat tertentu dalam graf G_1 dan G_2 sama (mempunyai jumlah simpul yang sama berderajat tertentu); (4) graf G_1 dan G_2 mempunyai *girth*(panjang siklus terpendek) yang sama.

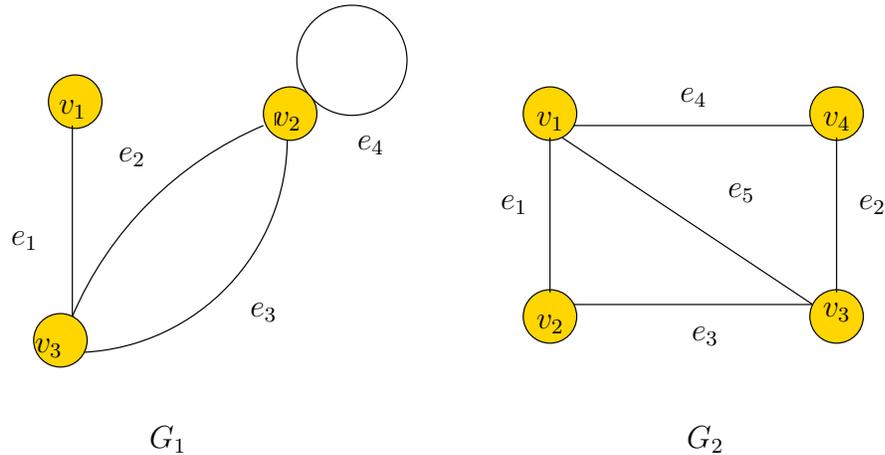
Keempat syarat tersebut belum cukup menjamin bahwa kedua graf isomorfis. Untuk menunjukkan bahwa kedua graf G_1 dan G_2 isomorfis, maka dapat dilihat dari matriks ketetanggaan kedua graf tersebut sama. Keisomorfisan graf dapat dilihat pada Gambar 2.9. Graf G_1 dan G_2 isomorfis karena memenuhi keempat syarat diatas dan matriks ketetanggaannya juga sama.



Gambar 2.9 Keisomorfisan graf

Definisi 2.2.4. (Loop). Suatu sisi pada sebuah graf yang menghubungkan suatu titik ke dirinya sendiri disebut *loop* atau *self loop* (Vasudev, 2006:4).

Jika Sebuah graf yang di dalamnya tidak terdapat loop dan sisi paralel disebut dengan graf sederhana. Pada gambar berikut ini disajikan graf sederhana, dan tidak sederhana.



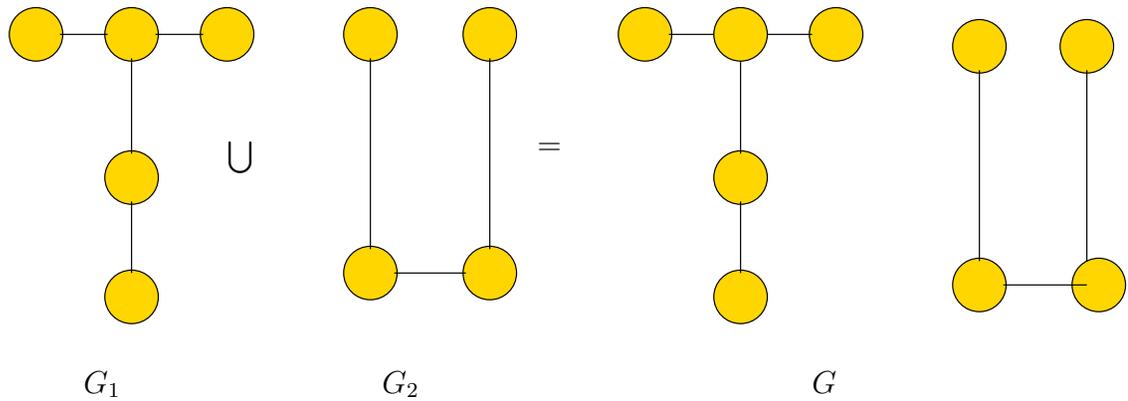
Gambar 2.10 Contoh graf tidak sederhana dan graf sederhana

Berdasarkan gambar 2.10. G_1 bukan graf sederhana karena memiliki loop yaitu sisi e_4 dan memiliki sisi rangkap yaitu e_2 dan e_3 . Sedangkan graf G_2 merupakan graf sederhana karena tidak memiliki sisi rangkap dan loop.

Gabungan dari dua graf G_1 dan G_2 dinotasikan dengan $G_1 \cup G_2$, didefinisikan sebagai graf dengan himpunan titiknya adalah $V(G_1) \cup V(G_2)$ dan himpunan sisi $E(G_1) \cup E(G_2)$. Pada Gambar 2.11, graf G merupakan gabungan graf G_1 dan G_2 , yaitu $G = G_1 \cup G_2$. Graf gabungan mG didefinisikan sebagai gabungan saling lepas dari m buah kopi graf G , atau dapat juga dikatakan sebagai graf dengan m komponen, dimana setiap komponennya adalah graf G . Dengan kata lain $mG = G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup \dots \cup G_m$, dengan $G_1 = G_2 = G_3 = \dots = G_m = G$. Misal graf G mempunyai p titik dan q sisi, maka graf mG mempunyai mp titik dan mq sisi.

2.3 Jenis-jenis graf

Berdasarkan ada tidaknya gelang atau sisi ganda pada suatu graf, maka graf digolongkan menjadi dua jenis:

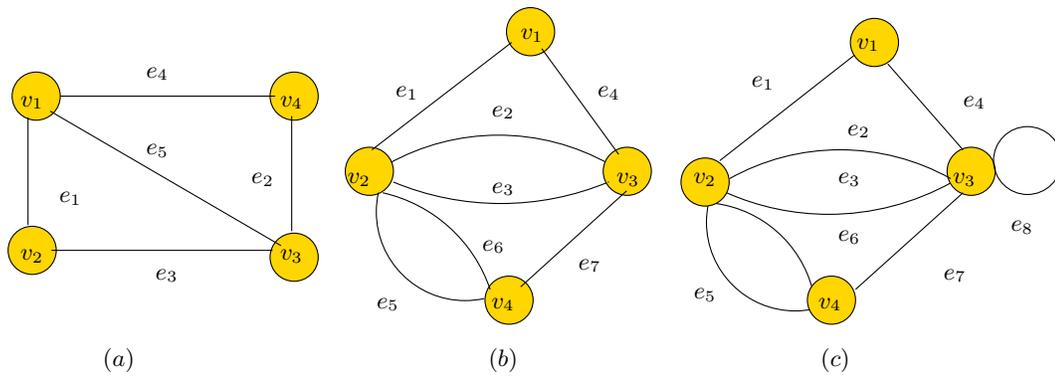


Gambar 2.11 Contoh gabungan graf

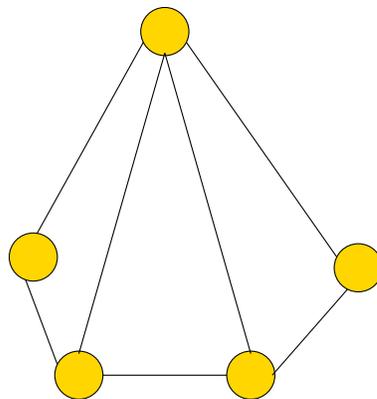
1. Graf sederhana (*simple graf*) adalah graf yang tidak mengandung gelang maupun sisi-ganda dinamakan graf sederhana. Contoh graf sederhana di-representasikan dengan jaringan komputer. Pada graf sederhana sisi (u, v) sama saja dengan (v, u) .
2. Graf tak-sederhana (*unsimple-graf / multigraf*) adalah graf yang mengandung sisi ganda atau gelang. Graf tak sederhana dibagi menjadi dua macam, yaitu graf ganda atau multigraf dan graf semu atau pseudograf. Graf ganda adalah graf yang mengandung sisi ganda. Sedangkan graf semu adalah graf yang mengandung gelang(loop). Sisi pada graf semu dapat terhubung ke dirinya sendiri.

Jumlah simpul pada graf disebut sebagai kardinalitas graf, dan dinyatakan dengan $n = |V|$, dan jumlah sisi kita nyatakan dengan $m = |E|$. Berdasarkan jumlah simpul pada suatu graf, maka secara umum graf dapat digolongkan menjadi dua jenis, yang pertama graf berhingga pada gambar berikut,

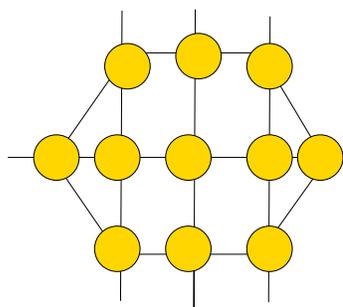
1. Graf berhingga (*finite graf*) adalah graf yang jumlah simpulnya, n berhingga.
2. Graf tak-berhingga (*unfinite graf*) adalah graf yang jumlah simpulnya, n tidak berhingga banyaknya disebut graf tak berhingga.



Gambar 2.12 (a) Graf sederhana, (b) Graf ganda, dan (c) Graf semu



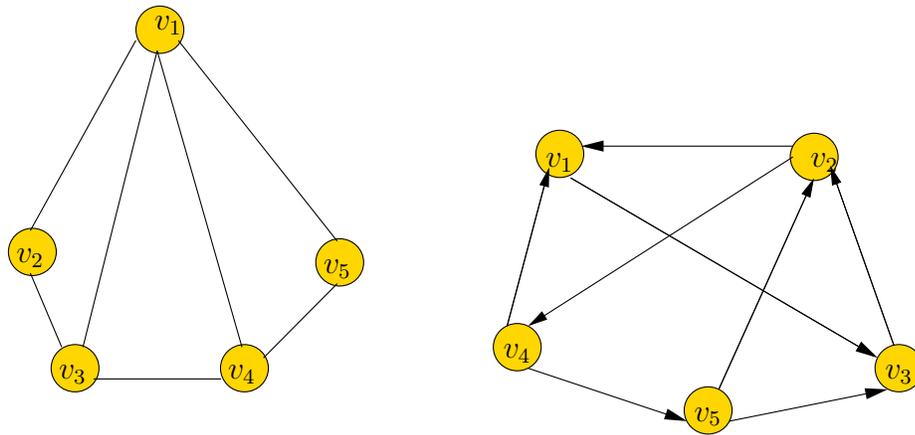
Gambar 2.13 Graf berhingga



Gambar 2.14 Graf tak-berhingga

Berdasarkan orientasi arah pada sisi, maka secara umum graf dibedakan atas 2 jenis:

1. Graf tak-berarah (*undirected graf*) Graf yang sisinya tidak mempunyai orientasi arah disebut tak-berarah. Pada graf tak-berarah, urutan pasangan simpul yang dihubungkan oleh sisi tidak diperhatikan. Jadi, $(u, v) = (v, u)$ adalah sisi yang sama.
2. Graf berarah (*directed graf atau digraf*) Graf berarah G merupakan pasangan himpunan $(V(G), A(G))$ dimana $V(G)$ adalah himpunan berhingga tak kosong dari elemen berbeda yang disebut titik, dan $A(G)$ adalah himpunan terurut (u, v) dari titik yang berbeda u, v yang disebut sisi berarah.
(Slamin, 2009:21)



Gambar 2.15 Graf Berarah dan Tak Berarah

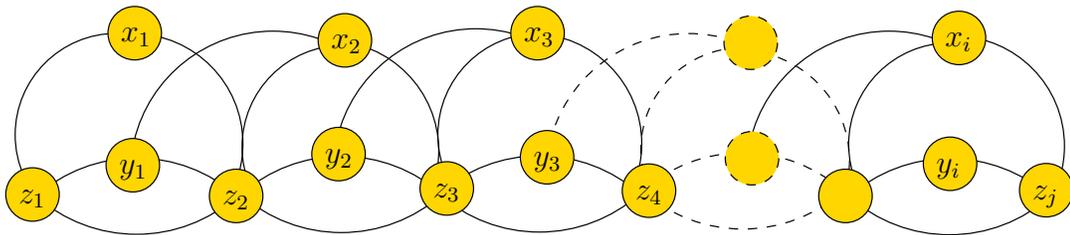
Graf khusus adalah graf yang mempunyai keunikan dan karakteristik bentuk khusus. Keunikannya adalah graf khusus tidak isomorfis dengan graf lainnya. Karakteristik bentuknya, dapat diperluas sampai order n tetapi simetris. Graf khusus yang sudah populer dinamakan *well-known special graph* sedangkan graf khusus yang belum populer tetapi dengan karakteristik graf khusus dinamakan *well-defined special graph*. Berikut ini beberapa contoh graf khusus.

Graf khusus populer ialah graf yang sudah dikenal oleh banyak orang. Berikut beberapa graf khusus yang sudah populer yaitu, graf lengkap adalah graf seder-

hana yang setiap simpulnya mempunyai sisi ke semua simpul lainnya sehingga untuk mencari jumlah sisi dengan n buah sisi kita gunakan rumus $n(n-1) \div 2$, graf bintang adalah graf pohon yang terdiri dari 1 titik yang berderajat $(n-1)$ dan $(n-1)$ titik yang berderajat 1, graf lingkaran adalah graf sederhana yang setiap simpulnya berderajat dua, graf teratur adalah graf yang setiap simpulnya mempunyai derajat yang sama. apabila derajat setiap simpulnya adalah r maka graf tersebut disebut sebagai graf teratur berderajat r , graf bipartit adalah graf misal graf G yang himpunan simpulnya dapat dikelompokkan menjadi dua himpunan bagian V_1 dan V_2 sedemikian sehingga setiap sisi di dalam G menghubungkan sebuah simpul di V_1 ke sebuah simpul di V_2 , dan dinyatakan sebagai $G(V_1, V_2)$. Selain itu ada juga graf planar. Graf planar ialah graf yang tidak memiliki sisi yang berpotongan.

Graf khusus yang belum populer diantaranya adalah graf khusus yang mempunyai sifat beautiful dan expandable.

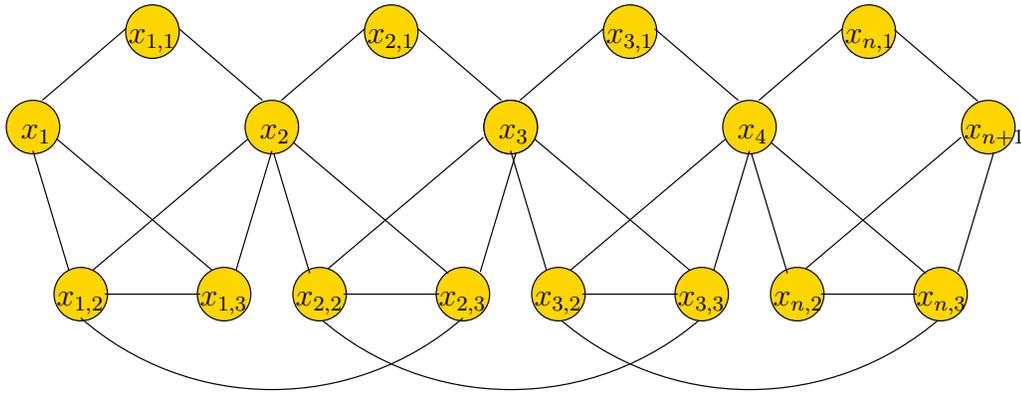
1. Graf Ulat Sutra (Dian, A.H., 2014) adalah satu graf yang menarik yang dikembangkan dari graf Snake. Graf Ulat sutra dinotasikan dengan Sw_n dimana himpunan titik Sw_n adalah $V(Sw_n) = \{x_i, y_i, z_j; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n+1\}$ dan $E(Sw_n) = \{x_i z_i, x_i z_{i+1}, z_i z_{i+1}, y_i z_i, y_i z_{i+1}; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\}$. Gambar 2.16 merupakan graf Ulat sutra Sw_n .



Gambar 2.16 Graf Ulat Sutra Sw_n

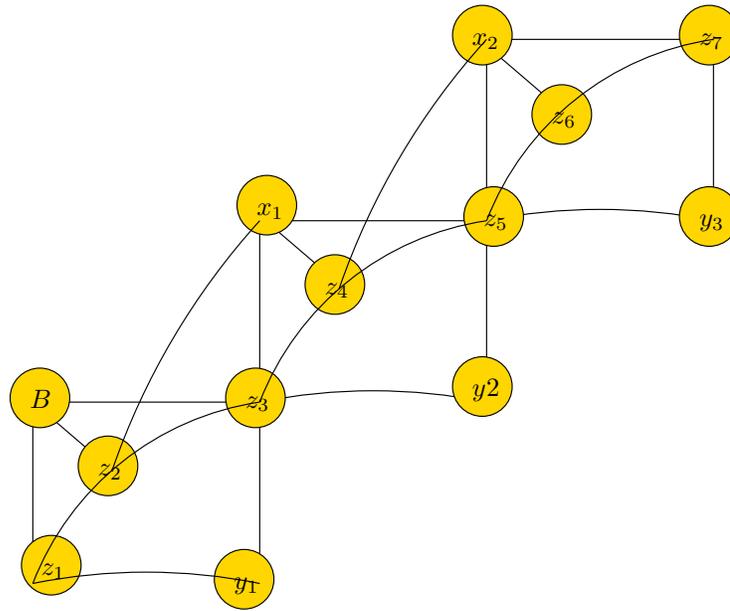
2. Graf Rantai Pentagon (Ermita, R.A., 2014) adalah salah satu graf yang dikembangkan dari graf Siklis dan graf Snake. Graf *Snake*, yang berupa *expand* dari graf pentagon, adalah graf yang salah satu titiknya dipakai bersama dengan graf lainnya. Graf Rantai Pentagon adalah sebuah graf yang dinotasikan dengan \mathfrak{PC}_n dimana titik (vertex) adalah $V\mathfrak{PC}_n = \{x_i, x_{i,j}; 1 \leq i \leq$

$n; 1 \leq j \leq 3\}$ dan Sisi (edge) adalah $E\mathfrak{PC}_n = \{x_i, x_{i,j}; x_{i,j}, x_{i+1}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq 3\} \cup \{x_{i,2}, x_{i,3}; x_{i,2}, x_{i+1,3}; 1 \leq i \leq n\}$. Gambar 2.17 merupakan graf rantai pentagon \mathfrak{PC}_n .



Gambar 2.17 Graf Rantai Pentagon \mathfrak{PC}_n

3. Graf Tribun (Muhlisatul, M,2014) adalah sebuah graf yang dikembangkan dari graf ular (*Snake*) dan dinotasikan dengan \mathfrak{T}_n . Bentuk dari graf Tribun dapat dilihat pada gambar 2.18. Graf Tribun memiliki himpunan *vertex*, \mathfrak{T}_n dimana titik (*vertex*) adalah $V\mathfrak{T}_n = \{x_i, z_j, y_i, B; 1 \leq i \leq n \text{ dan } 1 \leq j \leq n\}$ dan Sisi (edge) adalah $E\mathfrak{T}_n = \{Bz_1, Bz_2, Bz_3 \cup z_j z_{j+1}; 1 \leq j \leq n \cup x_i z_{2i+1}; 1 \leq i \leq n \cup x_i z_{2i+3}; 1 \leq i \leq n \cup y_i z_{2i+1}; 1 \leq i \leq n \cup y_i z_{2i-1}; 1 \leq i \leq n\}$
4. Graf Lampion (Robiyatul, A., 2014) adalah salah satu graf yang merupakan famili dari graf buku segitiga. Graf lampion adalah sebuah graf yang dinotasikan dengan $\mathcal{L}_{n,m}$ dimana $V(\mathcal{L}_{n,m}) = \{x_i, x_{i,1,j}, x_{i,2,j}; 1 \leq i \leq n+1, 1 \leq j \leq m\}$ dan $E(\mathcal{L}_{n,m}) = \{x_i x_{i,1,j}; 1 \leq i \leq n+1, 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_i x_{i,2,j}; 1 \leq i \leq n+1, 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_{i,1,j} x_{i+1}; 1 \leq i \leq n+1, 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_{i,2,j} x_{i+1}; 1 \leq i \leq n+1, 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_{i,1,1} x_{i,2,1}; 1 \leq i \leq n+1\}$. Berikut ini gambar 2.19 adalah gambar graf lampion,

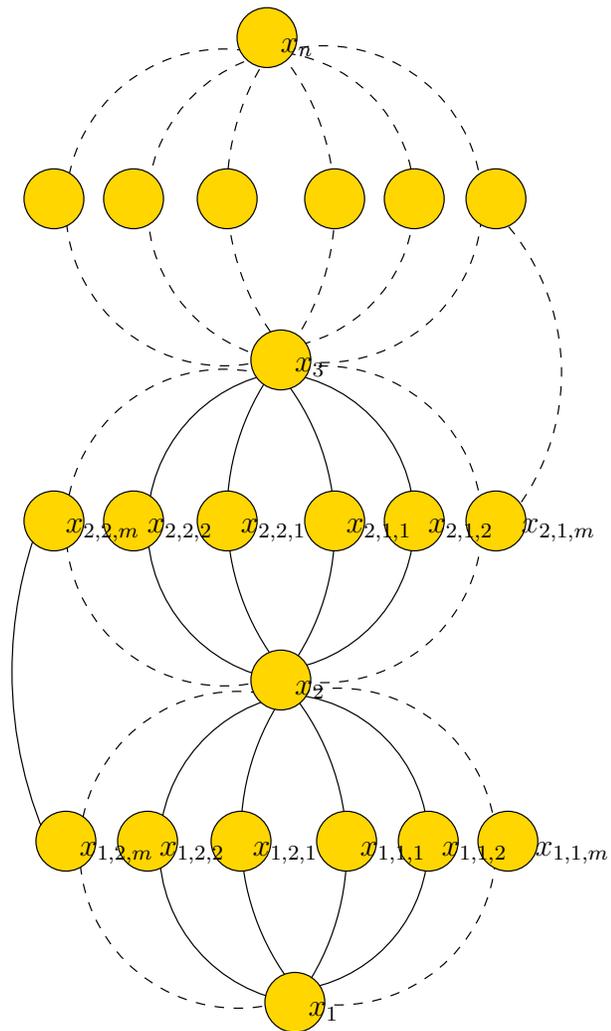
Gambar 2.18 Graf Tribun \mathfrak{T}_n

2.4 Pelabelan Graf

Berikut kita sajikan definisi formal dari suatu pelabelan graf. Suatu $G = (V, E)$ disebut graf apabila $V(G)$ merupakan himpunan tidak kosong dari suatu elemen, disebut *titik*, dan $E(G)$ merupakan himpunan (mungkin himpunan kosong) dari suatu pasangan takberurut $\{u, v\}$ dimana titik-titik $u, v \in G$, disebut *sisi*. Graf yang akan dikaji dalam penelitian ini adalah tak berarah dan tanpa *loop*. Jika $|V(G)|$ dan $|E(G)|$ berturut-turut menggambarkan jumlah titik dan jumlah sisi maka sebuah (p, q) -graf adalah graf dimana $|V(G)| = p$ dan $|E(G)| = q$.

Suatu graf G dikatakan *konektif* jika untuk sebarang dua titik u dan v pada G selalu ditemukan lintasan yang menghubungkan keduanya, jika tidak maka G dikatakan *diskonektif*. Gabungan saling lepas dari dua graf atau lebih, dinotasikan dengan $G_1 \cup \dots \cup G_m$, adalah graf dengan himpunan titik-titik $V_1 \cup \dots \cup V_m$ dan himpunan sisi-sisi $E_1 \cup \dots \cup E_m$. Tipe graf ini merupakan jenis graf diskonektif. Gambar 2.4 merupakan contoh gabungan saling lepas model topologi jaringan $C_8 \cup C_8 \cup C_8$ yang sekaligus merupakan contoh graf diskonektif.

Pelabelan graf G adalah sebuah pemetaan dari elemen-elemen graf G ter-



Gambar 2.19 Graf Lampion $\mathcal{L}_{n,m}$

Gambar 2.20 Contoh model topologi jaringan diskonektif.

hadap bilangan bulat positif. Jika domainnya adalah himpunan titik G maka pelabelan disebut *pelabelan titik (vertex labeling)*, sedangkan jika domainnya adalah himpunan sisi G maka pelabelan disebut *pelabelan sisi (edge labeling)*. Jika domainnya adalah kedua himpunan tersebut maka pelabelan disebut *pelabelan total (total labeling)*.

Secara spesifik pelabelan graf telah memberikan kontribusi besar dalam pemodelan matematik yang banyak dibutuhkan dalam aplikasi. Pelabelan graf kualitatif telah memberikan inspirasi dalam penelitian *human enquiry* seperti resolusi konflik dalam psikologi sosial, teori sirkuit kelistrikan, dan analisa pemetaan krisis energi. Pelabelan graf kuantitatif banyak digunakan dalam aplikasi bidang seperti sistem pengadresan radar dan desain topologi jaringan komunikasi, bioinformatik (analisa protein dalam DNA), problem dalam teori pengkodean, automata dalam ilmu komputer dan kristalografi sinar x (*x-ray crystallography*).

Problema dalam teori pengkodean adalah dalam mendesain kode nonperiodik yang baik pada gelombang radar dan sistem pengarah rudal. Problema ini identik dengan sebuah pelabelan graf *complete* dengan bilangan bulat positif sedemikian hingga label sisi-sinya adalah semuanya berbeda. Label titik-titiknya menggambarkan posisi dalam hal mana gelombang ditransmisikan.

Aplikasi pelabelan dalam kristalografi sinar x meliputi determinasi struktur kristal dari data difraksi sinar x secara optikal. Problema ini ekuivalen dengan menentukan himpunan pelabelan titik yang berakibat pada terbentuknya himpunan pelabelan sisi yang berciri khusus.

Dalam desain topologi jaringan komunikasi dibutuhkan pola pengadresan yang baik. Label diberikan terhadap masing-masing terminal dan terhadap setiap koneksi. Dengan kekhususan ciri-ciri label pada masing-masing terminal dan koneksi pada setiap komputer maka prosesor komputer dapat menerima pesan yang cepat dan tepat sasaran walaupun dalam skala besar, sehingga terciptalah topologi jaringan yang efisien dan berkecepatan tinggi, handal dalam modulariti, toleransi kegagalan fungsi yang tinggi serta resiko vulnerabiliti yang rendah.

Pelabelan dalam desain sirkuit kelistrikan adalah terkait dengan permasalahan penempatan sebuah komponen dalam tempat yang linier. Penempatan

komponen dalam sebuah tempat ditunjukkan oleh sebuah bilangan. Karena komponen itu menempati ruang yang sama ukurannya maka perbedaan dari nomor urut posisi menunjukkan jumlah satuan unit kabel yang dibutuhkan untuk mengkaitkan seluruh komponen. Secara riil masalah itu digambarkan sebagai berikut: diberikan suatu graf yang menunjukkan koneksi antara komponen, beri label terhadap komponen dengan nomor posisi sedemikian hingga jumlah selisih antara masing-masing label komponen adalah minimal.

Aplikasi lain dari pelabelan graf adalah pendesainan sistem estimasi keakuratan optik yang digunakan untuk mesin pengebor otomatis. Dalam aplikasi ini pelabelan graf digunakan dalam mendesain kode sinkronisasi angular dan untuk menentukan konfigurasi jaringan resistor sederhana. Masih terdapat segudang aplikasi lainnya dari pelabelan graf ini misalnya dalam teori bilangan dan teori group dalam matematika (Bloom dan Golomb, 1977:562-570, 1978:53-65). Berbagai studi dalam pelabelan graf mengacu pada penelitian Rosa (1967:349355). Rosa memperkenalkan sebuah fungsi f dari suatu himpunan titik dalam graf G terhadap himpunan bilangan bulat positif $\{0, 1, 2, \dots, |E(G)|\}$ sedemikian hingga setiap sisi xy dilabeli dengan $|f(x) - f(y)|$, dan menghasilkan semua label yang berbeda. Rosa menyebut pelabelan ini dengan β -valuation.

Sedláček (1963:163-169) dengan tak diduga telah mempublikasikan sebuah jurnal yang memperkenalkan tipe lain dari pelabelan graf, namanya adalah pelabelan *magic*. Definisi yang dikembangkannya dimotivasi oleh konsep persegi magic dalam teori bilangan. Sebuah pelabelan *magic* adalah suatu pemetaan dari himpunan sisi dalam suatu graf terhadap himpunan bilangan riil positif sedemikian hingga jumlah label sisi yang terikat dengan setiap titik-titik dalam G adalah semuanya sama. Dalam definisi Sedláček ini label berkisar pada semua bilangan riil positif, namun kenyataannya yang dipakai hanya bilangan bulat positif. Stewart (1966:1031-1056) menamakan pelabelan magic sebagai *supermagic* jika himpunan label sisi-sisinya terdiri dari himpunan bilangan bulat berurut.

Termotivasi dengan penelitian yang dilakukan Sedláček dan Stewart, kemudian banyak model pelabelan dalam graf dikembangkan dan diteliti termasuk pelabelan *faces* pada graf planar, dan telah banyak hasil-hasil baru yang

dipublikasikan. Namun demikian, walaupun terdapat banyak publikasi, dalam aplikasinya masih banyak dibutuhkan beberapa temuan dan desain baru. Mengingat karakteristik topologi jaringan komunikasi berbeda dari suatu lokasi ke lokasi lain, dari suatu domain ke domain lain dan dari suatu fungsi ke fungsi lainnya. Sehingga masih terdapat banyak *open problems* yang harus diselesaikan untuk menunjang perkembangan teknologi komunikasi. Hal ini disebabkan pula oleh sebuah kenyataan bahwa untuk memutuskan bahwa graf G memiliki sebuah pelabelan titik-magic atau sisi-magic adalah sama dengan suatu problema memutuskan apakah sistem persamaan linier homogen *Diophantine* mempunyai solusi atau tidak. sementara ini tidak ada algoritma dengan batas waktu polinomial untuk menyelesaikannya sehingga untuk memutuskan graf G adalah titik-magic atau sisi-magic tidak dapat dilakukan dengan pemrograman dalam komputer. Inilah awal dari permasalahan besar itu, sehingga diperlukan pemikir-pemikir atau peneliti-peneliti handal untuk menyelesaikannya.

2.2.2 Pelabelan Magic dan Antimagic

Terkait dengan konsep pelabelan magic yang dikenalkan Sedláček, konsep pelabelan *antimagic* diintrodusir oleh Hartsfield dan Ringel (1989:107-115). Tidak lama kemudian Nicholas, *dkk.* (2004:207-220), Bodendiek dan Walther (1995:3-25) merupakan peneliti yang pertama kali mengenalkan konsep pelabelan (a, d) -titik-antimagic sisi; yang kemudian dikenal dengan *pelabelan (a, d) -titik-antimagic*.

Pada kedua jenis pelabelan ini, magic atau antimagic, terminologi yang sangat penting untuk diketahui adalah apa yang disebut dengan ‘bobot’ (*weight*). Bobot adalah jumlah dari semua label yang berkaitan dengan elemen-elemen dari suatu graf. Dengan istilah ini, secara formal definisi dari pelabelan (a, d) -titik-antimagic sisi dan (a, d) -titik antimagic total dari graf dapat diuraikan sebagai berikut.

Sebuah fungsi bijektif $f : E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, q\}$ disebut pelabelan (a, d) -*titik-antimagic sisi*, jika himpunan *bobot titik* dalam pelabelan sisi, $w(u) = \sum_{v \in N(u)} f(uv)$, dari semua titik-titik pada G adalah $\{a, a + d, \dots, a + (p - 1)d\}$, dimana $a > 0$ dan $d \geq 0$ merupakan dua konstanta bilangan bulat. Sebuah fungsi bijektif $f : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, p + q\}$ disebut pelabelan (a, d) -*titik-antimagic to-*

tal, jika himpunan *bobot titik* dalam pelabelan total, $w(u) = f(u) + \sum_{v \in N(u)} f(v)$, dari semua titik-titik pada G adalah $\{a, a + d, \dots, a + (p - 1)d\}$, dimana $a > 0$ dan $d \geq 0$ juga merupakan dua konstanta bilangan bulat.

Sebuah pelabelan total f disebut *super (a, d) -titik-antimagic total* jika $f(V) = \{1, 2, \dots, p\}$. Jika $d = 0$ maka pelabelan (a, d) -titik-antimagic total disebut pelabelan *titik-magic total*.

Bentuk lain pelabelan antimagic adalah pelabelan (a, d) -sisi-antimagic titik dan pelabelan super (a, d) -sisi-antimagic total. Konsep ini di introdusir oleh Simanjuntak, Bertault and Miller (2000:179-189), yang merupakan pengembangan alami dari konsep sebelumnya yaitu pelabelan sisi magic yang dikenalkan oleh Kotzig dan Rosa. Acharya dan Hegde dalam thesisnya di tahun 1989 mengungkapkan konsep pelabelan *strongly (k, d) -indexable* yang tidak jauh beda dengan konsep pelabelan (a, d) -sisi-antimagic titik (1991:275-299). Sugeng (2005) meneliti tentang sifat-sifat dari pelabelan (a, d) -sisi-antimagic total dan menemukan beberapa famili graf konektif yang memenuhi pelabelan (a, d) -sisi-antimagic total. Definisi formal dari pelabelan (a, d) -sisi antimagic titik dan pelabelan (a, d) -sisi antimagic total dari sebuah graf adalah sebagai berikut:

Sebuah fungsi bijektif $f : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, p\}$ disebut pelabelan (a, d) -sisi-antimagic titik jika himpunan *bobot sisi* dalam pelabelan titik, $w(uv) = f(u) + f(v)$, dari semua sisi-sisi pada G adalah $\{a, a + d, \dots, a + (q - 1)d\}$, dimana $a > 0$ dan $d \geq 0$ merupakan dua konstanta bilangan bulat. Sebuah fungsi bijektif $f : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, p + q\}$ disebut pelabelan (a, d) -sisi-antimagic total, jika himpunan *bobot sisi* dalam pelabelan total, $w(uv) = f(u) + f(v) + f(uv)$, dari semua sisi-sisi pada G adalah $\{a, a + d, \dots, a + (q - 1)d\}$, dimana $a > 0$ dan $d \geq 0$ juga merupakan dua konstanta bilangan bulat. Pelabelan total f disebut *super (a, d) -sisi-antimagic total* jika $f(V) = \{1, 2, \dots, p\}$. Jika $d = 0$ maka pelabelan ini disebut pelabelan *super sisi-magic total*.

Untuk mempermudah mengingat istilah-istilah ini, maka digunakan kependekan dari terminologi tersebut. Pelabelan sisi-antimagic titik disingkat EAV (edge antimagic vertex), sedangkan pelabelan super sisi-antimagic total disingkat SEAT (super edge antimagic total) dan pelabelan super sisi-magic total disingkat

SEMT (super edge magic total).

Sebuah graf G disebut (a, d) -titik-antimagic total atau *super (a, d) -titik-antimagic total* jika terdapat pelabelan (a, d) -titik-antimagic total atau pelabelan super (a, d) -titik-antimagic total pada graf G . Sebuah graf G disebut (a, d) -sisi-antimagic total atau *super (a, d) -sisi-antimagic total* jika terdapat sebuah pelabelan (a, d) -sisi-antimagic total atau pelabelan super (a, d) -sisi-antimagic total pada graf G . Untuk mencari batas atas nilai beda d pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic dapat ditentukan dengan lema berikut ini seperti (Dafik: 2007: 26-27).

Lema 2.4.1. *Jika sebuah graf (p, q) adalah pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic maka $d \leq \frac{2p+q-5}{q-1}$*

Misalkan graf- (p, q) adalah pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic dengan pemetaan $f : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{p+1, p+2, \dots, p+q\}$. Nilai minimum yang mungkin dari bobot sisi terkecil $f(u) + f(uv) + f(v) = 1 + (p+1) + 2 = p+4$. Dapat ditulis: $p+4 \leq a$ Sedangkan pada sisi yang lain, nilai maksimum yang mungkin dari bobot sisi terbesar yaitu dengan menjumlahkan dua label titik terbesar $(p-1)$ dan p dengan satu label sisi terbesar $(p+q)$, sehingga diperoleh: $(p-1) + (p+q) + p = 3p+q-1$. Akibatnya:

$$\begin{aligned} a + (q-1)d &\leq 3p+q-1 \\ &\leq \frac{3p+q-1-(p+4)}{q-1} \\ &\leq \frac{2p+q-5}{q-1} \end{aligned}$$

Dari persamaan (2.1) terbukti bahwa $d \leq \frac{2p+q-5}{q-1}$ sehingga diperoleh d dari berbagai famili graf. \square

Penelitian ini akan mengkaji dan mengembangkan pelabelan super sisi-antimagic dari suatu graf diskonektif. Fokus permasalahan dari beberapa permasalahan yang dirumuskan di atas adalah: Jika sebuah graf konektif G adalah super (a, d) -sisi-antimagic total, apakah gabungan saling lepas dari beberapa graf G juga merupakan super (a, d) -sisi-antimagic total?

Dafik, Robiyatul pada tahun 2014 menemukan lema yang dapat digunakan untuk menemukan pelabelan total super $(a, 1)$ -sisi antimagic pada gabungan graf untuk jumlah sisi ganjil. Karena lema berikut sangat penting maka disajikan bersama pembuktiannya.

Lema 2.4.2. *Misalkan Ψ merupakan sebuah himpunan bilangan berurutan $\Psi = \{c, c+1, c+2, \dots, c+k\}$, dengan k genap. Maka terdapat sebuah permutasi $\Pi(\Psi)$ dari anggota-anggota himpunan Ψ sehingga $\Psi + \Pi(\Psi)$ juga merupakan sebuah himpunan bilangan berurutan yaitu $\Psi + \Pi(\Psi) = \{2c + \frac{k}{2}, 2c + \frac{k}{2} + 1, 2c + \frac{k}{2} + 2, \dots, 2c + \frac{3k}{2}\}$.*

Secara sederhana lema tersebut dapat diperlihatkan berdasarkan pola seperti disajikan oleh gambar 2.21 berikut.

v_i	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
w_i	25	26	27	28	29	30	20	21	22	23	24
	30	32	34	36	38	40	31	33	35	37	39

Gambar 2.21 Pola barisan bilangan dengan selisih tiap suku adalah 1

Selanjutnya teorema 2.4.1 digunakan untuk membuktikan pelabelan super $(a, 1)$ untuk gabungan sebuah graf G_i dari graf tunggal yang sudah diketahui.

Teorema 2.4.1. *Misalkan G_s untuk $s = 1, 2, \dots, m$ adalah graf dengan jumlah titik p dan jumlah sisi q dan memiliki pelabelan super $(a, 1)$ -EAT. Maka, gabungan saling lepas dari $\cup_{s=1}^m G_s$ juga memiliki super $(b, 1)$ -EAT.*

Bukti. Misalkan $G_s, s = 1, 2, \dots, m$ adalah sebuah graf yang memiliki p titik dan q sisi. Perlu diketahui bahwa G_i tidak harus isomorfis dengan G_j untuk $i = j$. Misalkan untuk setiap $G_s, s = 1, 2, \dots, m$ memiliki sebuah pelabelan super $(a, 1)$ -EAT berdasarkan f_s , sedemikian hingga:

$$\begin{aligned} f_s &= V(G_s) \rightarrow \{1, 2, \dots, p\} \\ &= E(G_s) \rightarrow \{p+1, p+2, \dots, p+q\} \end{aligned}$$

dan $\{f_s(u) + f_s(v) + f_s(uv); uv \in E(G_s)\} = \{a, a + 1, \dots, a + q - 1\}$

Definisi pelabelan f untuk semua titik dan sisi dari $\cup_{s=1}^m G_s$ adalah sebagai berikut:

$$f(x) = \begin{cases} m[(f_1)_s(x) - 1] + s, & \text{jika } x \in V(G_s) \\ m(f_1)_s(x) + 1 - s, & \text{jika } x \in E(G_s) \end{cases}$$

Bobot total dari gabungan $\cup_{s=1}^m G_s$ adalah $\{f(u) + f(v) + f(uv) : uv \in E(\cup_{s=1}^m G_s)\}$ sama dengan $\{m(a - 2) + 2, m(a - 2) + 3, \dots, m(a + q - 2) + 1\}$

Kemudian untuk batas atas super antimagic total covering dari suatu graf dapat ditunjukkan dalam lemma berikut:

Lema 2.4.3. *Jika sebuah graf $G (V, E)$ adalah pelabelan selimut (a, d) - \mathcal{H} anti ajaib super maka $d \leq \frac{(p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H}{s-1}$ untuk $s = |\mathcal{H}_i|$, $H \subseteq G$ yang isomorfik dengan \mathcal{H} $p_G = |V|$, $q_G = |E|$, $p_H = |V'|$, $q_H = |E'|$.*

Bukti. $f(V) = \{1, 2, 3, \dots, p_G\}$ dan $f(E) = \{p_G + 1, p_G + 2, p_G + 2, \dots, p_G + q_G\}$. Misalkan graf (p_G, q_G) mempunyai pelabelan selimut (a, d) - \mathcal{H} anti ajaib super dengan fungsi total $f(V \cup E) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots, p_G + q_G\}$ maka himpunan bobot selimut sebuah graf adalah $\{a, a + d, a + 2d, \dots, a(s - 1)d\}$ dimana a merupakan bobot selimut terkecil maka berlaku:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + p_H + (p_G + 1) + (p_G + 2) + \dots + (p_G + q_H) &\leq a \\ \frac{p_H}{2}(1 + p_H) + q_H p_G + \frac{q_H}{2}(1 + q_H) &\leq a \\ \frac{p_H}{2} + \frac{p_H^2}{2} + q_H p_G + \frac{q_H}{2} + \frac{q_H^2}{2} &\leq a \end{aligned}$$

Sedangkan untuk nilai terbesar berlaku:

$$\begin{aligned} a + (s - 1)d &\leq p_G + p_G - 1 + p_G - 2 + \dots + (p_G - (p_H - 1)) + (p_G + q_G) \\ &\quad + (p_G + q_G - 1) + (p_G + q_G - 2) + \dots + (p_G + q_G - (q_H - 1)) \\ &= p_H p_G - \frac{p_H - 1}{2}(1 + (p_H - 1)) + q_H p_G + q_H p_G \\ &\quad - \frac{q_H - 1}{2}(1 + (q_H - 1)) \\ &= p_H p_G - \frac{p_H - 1}{2}(p_H) + q_H p_G + q_H p_G - \frac{q_H - 1}{2}(q_H) \end{aligned}$$

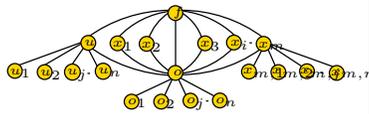
$$\begin{aligned}
(s-1)d &\leq p_H p_G - \frac{p_H - 1}{2}(p_H) + q_H p_G + q_H p_G - \frac{q_H - 1}{2}(q_H) - a \\
&\leq p_H p_G - \frac{p_H - 1}{2}(p_H) + q_H p_G + q_H p_G - \frac{q_H - 1}{2}(q_H) - \\
&\quad \left(\frac{p_H}{2} + \frac{p_H^2}{2} + q_H p_G + \frac{q_H}{2} + \frac{q_H^2}{2}\right) \\
&= p_H p_G - \frac{p_H^2}{2} + \frac{p_H}{2} + q_H p_G - \frac{q_H^2}{2} + \frac{q_H}{2} - \left(\frac{p_H}{2} + \frac{p_H^2}{2} + \frac{q_H}{2} + \frac{q_H^2}{2}\right) \\
&= p_H p_G + q_H q_G - p_H^2 - q_H^2 \\
&= p_H p_G - p_H^2 + q_H q_G - q_H^2 \\
&= (p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H \\
d &\leq \frac{(p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H}{(s-1)}
\end{aligned}$$

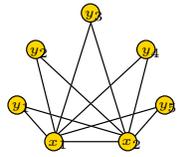
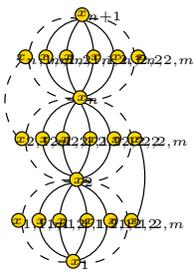
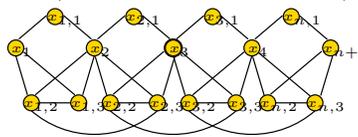
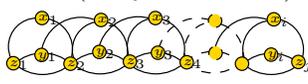
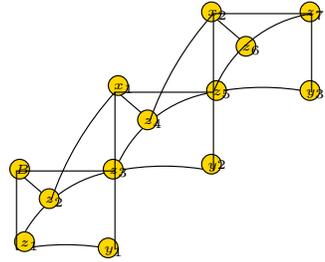
Dari persamaan diatas terbukti bahwa batas atas $d \leq \frac{(p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H}{s-1}$ jika graf G memiliki pelabelan selimut (a, d) - \mathcal{H} anti ajaib super dari berbagai famili graf. (Dafik, 2014) \square

2.5 Hasil-Hasil Pelabelan Total Super (a, d) -Sisi Antimagic pada Graf Diskonektif

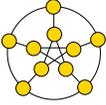
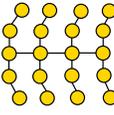
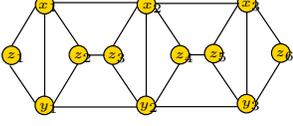
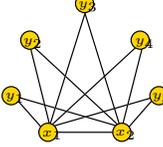
Pada tabel dibawah ini, disajikan beberapa rangkuman hasil pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic pada graf konektif dan diskonektif dari para peneliti terdahulu yang dapat digunakan sebagai rujukan dalam mengerjakan pelabelan graf Rem Cakram.

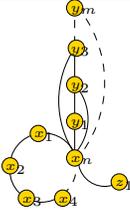
Tabel 2.1: Ringkasan pelabelan total super (a, d) -edge antimagic pada graf konektif.

Graf	d	Hasil	Open Problem
$U_{m,n}$ (Graf UFO) 	$d \leq 2$	$d \in \{0, 1, 2\}$ untuk $n \geq 1$ (Umilasari, R, 2013)	untuk m genap, n ganjil -

Graf	d	Hasil	Open Problem
<p>Bt_n (Buku segitiga)</p> 	$d \leq 2$	$d \in \{0, 1, 2\}$ untuk $n \geq 1$ (F.E.Chandra, 2011)	-
<p>Bt_n (Graf Lampion)</p> 	$d \leq 2$	$d \in \{0, 1, 2\}$ untuk $m, n \geq 1$ (Adawiyah, R, 2014)	-
<p>Bt_n (Graf Rantai Pentagon)</p> 	$d \leq 2$	$d \in \{0, 1, 2\}$ untuk $n \geq 1$ (A.R. Ermita, 2014)	-
<p>Bt_n (Graf Ulat Sutra)</p> 	$d \leq 2$	$d \in \{0, 1, 2\}$ untuk $n \geq 1$ (Hadi, A.D, 2014)	-
<p>Bt_n (Graf Tribun)</p> 	$d \leq 2$	$d \in \{0, 1, 2\}$ untuk $n \geq 1$ (Mahmudah, M, 2014)	-

Tabel 2.2: Ringkasan pelabelan total super (a, d) -edge antimagic pada graf diskonektif.

Notasi Graf	d	Hasil	Open Problem
$kP_{(n,2)}$ (<i>Petersen</i>) 	$d < 3$	$d \in \{0, 1, 2\}$ untuk k, n ganjil (Indayani.D.V., 2010)	jika $d \in \{0, 1, 2\}$ untuk k, n genap
$m\mathcal{L}_{(i,j,k)}$ (<i>Lobster Graph</i>) 	$d < 4$	$d \in \{0, 1, 2, 3\}$ untuk $m \geq 3$, $1 \leq i \leq n$, $j = 2$, dan $k = 1$ (Raty, R.R.,2010)	<ul style="list-style-type: none"> • jika $d = 3$ untuk $m \geq 3$ ganjil dan $n \geq il \geq 2$ genap • jika $d \in \{1, 3\}$ untuk $m \geq 3$ ganjil dan $n \geq il \geq 2$ ganjil • jika $d \in \{1, 3\}$ untuk $m \geq 3$ genap dan $n \geq i \geq 2$
$Diamond(nDl_n)$ 	$d < 3$	$d \in \{0, 1, 2\}$ untuk $m \geq 3$ ganjil $d \in \{1\}$ untuk $m \geq 2$ dan m sembarang (Syakdiyah, L., 2011)	<ul style="list-style-type: none"> • jika $d \in \{0, 2\}$ untuk $1 \leq j \leq m$ genap
Buku Segitiga(mBt_n) 	$d \leq 3$	$d \in \{0, 1, 2\}$ untuk $m \geq 3$ ganjil dan $n \geq 1$ (Chandra, F.E.,2011)	<ul style="list-style-type: none"> • jika $d \in \{0, 1, 2\}$ untuk $m \geq 3$ genap dan $n \geq 1$
$sCR_{n,m}$ (<i>Tunas Kelapa</i>)	$d \leq 2$	$d \in \{0, 1, 2\}$; $n \geq 3$; $m, s \geq 2$	jika $d = 1$ untuk s genap

Notasi Graf	d	Hasil	Open Problem
		(Lestari, I.L.,2013)	-
$s\mathcal{L}_{(n,m)}$ (Lampion)	$d \leq 2$	$d \in \{0, 1, 2, \}$ untuk $n \geq 1$ dan $m \geq 1$ (Adawiyah.R., 2014)	jika $d \in \{0, 1, 2\}$ untuk s genap
$m\mathcal{T}_n$ (Tribun)	$d \leq 2$	$d \in \{0, 1, 2, \}$ untuk $n \geq 1$ dan $1 \geq k \geq m$ (Mahmudah.M.,2014)	jika $d = 0$ dan $d = 2$ untuk m genap
mSw_n (Ulat Sutra)	$d \leq 2$	$d \in \{0, 1, 2, 3\}$ untuk $n \geq 2$, $m \geq 3$ (Hadi, A.D, 2014)	<ul style="list-style-type: none"> • jika $d = 0$ dan $d = 2$ untuk m genap • jika $d = 1$ untuk n ganjil, m genap m, n genap
$s\mathcal{L}_{(n,m)}$ (Rantai Pentagon)	$d \leq 2$	$d \in \{0, 1, 2, \}$ untuk $n \geq 1$ dan $m \geq 3$; m ganjil (Albirri.R.E.,2014)	jika $d \in \{0, 1, 2\}$ untuk m genap

2.3 Orientasi Penelitian

Sebagaimana disebutkan di atas, bahwa pelabelan atas model topologi jaringan diskonektif sangat dibutuhkan, mengingat kondisi riel di lapangan bahwa jaringan

komputer telah dipakai di setiap instansi atau perusahaan sehingga terbentuklah cluster-cluster workstation. Komunikasi antara cluster ini tidak lagi memakai jaringan LAN namun menggunakan WAN yang mengandalkan teknologi satelit melalui internet. Sehingga secara praktis topologi antara masing-masing cluster adalah diskonektif. Mengingat temuan-temuan yang terkait dengan pelabelan total antimagic untuk graf diskonektif masih relatif sedikit, maka penelitian tentang pelabelan jenis ini perlu terus dilakukan. Sehingga hasil utama yang diharapkan adalah *algoritma dan teorema baru pelabelan total antimagic untuk graf diskonektif*. Namun demikian secara umum kodifikasi pelabelan total antimagic untuk graf diskonektif diturunkan dari graf konektif, sehingga kajian pelabelan total antimagic untuk graf konektif juga menjadi hasil utama penelitian ini.

BAB 3. TUJUAN DAN MANFAAT PENELITIAN

3.1 Tujuan Penelitian

Sesuai dengan rumusan masalah dan latar belakang di atas, maka tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Memahami bentuk gabungan saling lepas model-model topologi jaringan dari teknologi jaringan informasi yang dipakai di dunia saat ini, yang bentuknya direpresentasikan oleh sebuah bentuk famili *graf* dan kemudian menentukan batas atas d sehingga gabungan saling lepas graf tersebut mempunyai pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic dan super (a, d) - H antimagic;
2. Mengembangkan algoritma pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic dan super (a, d) - H sisi antimagic dengan teknik pencarian *EAVL (Edge Antimagic Vertex Labeling)* pada beberapa famili graf, yang merupakan dasar untuk mengembangkan algoritma *SEATL atau SHTC*.
3. Menurunkan teorema, aksioma atau lemma serta korollari baru dari hasil pengembangan algoritma pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic
4. Menentukan skema aplikasi desain atau model dengan teorema, aksioma/lemma serta korollari baru yang ditemukan dalam kodifikasi teknologi jaringan konektif atau diskonektif

3.2 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari hasil penelitian ini adalah:

1. **Dalam pengembangan topologi jaringan.** Topologi jaringan yang didapat, algoritma, teorema atau aksioma baru yang dikembangkan dapat digunakan sebagai dasar pengembangan teknologi jaringan informasi dan komunikasi berskala besar yang safety dan secure, handal dalam modulariti,

mempunyai toleransi kegagalan fungsi yang tinggi serta resiko vulnerabiliti yang rendah.

2. **Dalam pengembangan matematika terapan dan pemodelan.** Lema, teorema dan korolari baru terkait super antimagic total labeling dan covering sangat dibutuhkan terutama kaitannya dengan graf konektif dan diskonektif yang dapat digunakan sebagai landasan kajian atau pembuktian deduktif oleh matematisi selanjutnya.
3. **Dalam peningkatan profesionalisme dosen.** Dalam peningkatan profesionalisme dosen. Dapat dipakai untuk mengembangkan book survey, book chapter, atau buku teks dari pelabelan graf dan mengajarkannya dalam mata kuliah Matematika Diskrit, Pelabelan Graf, Automata, Pemodelan Matematika, Broadcasting Network, Database Security dan mata kuliah terkait lainnya dalam matematika dan ilmu komputer.
4. **Dalam pengembangan Computer Science pada Fakultas Teknik Informatika.** Hasil penelitian ini dapat membantu saintisi dan praktisi untuk mengembangkan topologi jaringan dalam bidang komputer, sosial dan transportasi yang aman dan efektif;
5. **Pada institusi CGANT research group.** Hasil penelitian dapat digunakan untuk peningkatan profesionalisme dosen terutama dengan peningkatan jumlah publikasi ilmiah dosen dan frekwensi kehadiran dosen dalam forum-forum ilmiah dan dalam jangka panjang akan menambah performansi CGANT (Combinatorics Graph Theory and Network Topology) research group.

3.3 Jurnal Ilmiah yang Menjadi Sasaran

Beberapa alternatif jurnal ilmiah yang menjadi sasaran untuk mempublikasikan hasil penelitian ini adalah Journal of The Indonesian Mathematical Society (JIMS-Indonesia), Ars Combinatoria (Canada), Australasian Journal of Combinatorics (Australia), The Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing (JCMCC-USA), Utilitas Math (Canada), AKCE International Journal of

Graph and Combinatorics (India), atau Discrete Mathematics Journal (USA). Semua jurnal sasaran tersebut sudah terindeks Google Scholar, DOAJ, Thomson Reuters, Copernicus, Majestic SEO dan SCIMAGO-SCOPUS dengan h-index, impact factor cukup tinggi. Peneliti telah mempunyai pengalaman sebelumnya dalam mempublikasikan artikel dalam jurnal-jurnal ini yaitu tentang graph labeling dengan network topogy yang berbeda dan fokus kajian yang berbeda pula.

3.4 Kolaborator yang Terlibat

The University of Newcastle, Australia. Collaborator: Mirka Miller, Professor of Computer Science, School of Electrical Engineering and Computer Sciences. Technical University, Kosice, Slovak Republic. Collaborator: Martin Baca, Professor of Combinatorics, dan A Semanicova Fenovcikova, Scientist of Combinatorics Department of Applied Mathematics Faculty of Mechanical Engineering. Universitas Indonesia: Kiki Ariyanti Sugeng, Associate Professor of Combinatorics, Department of Mathematics Faculty of MIPA.

3.5 Research Group yang Menaunginya

CGANT (Combinatorics, Graph Theory and Network Topology) Research Group, SK Rektor Universitas Jember No. 5665/UN 25/KP/2014. Ketua: Prof. Drs. Slamain, M.Com.Sc, Ph.D, wakil ketua: Prof. Drs. Dafik, M.Sc, Ph.D. Melibatkan mahasiswa skripsi S1 dan thesis S2 ditiga fakultas yaitu FKIP, PSII dan FMIPA Universitas Jember.

BAB 4. METODE PENELITIAN

4.1 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah deskriptif aksiomatik, yaitu dengan menurunkan aksioma atau teorema yang telah ada, kemudian diterapkan dalam pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic pada gabungan saling lepas graf lobster. Dalam penelitian ini, terlebih dahulu akan ditentukan nilai beda (d) pada gabungan famili graf tertentu, selanjutnya nilai d tersebut diterapkan dalam pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic pada gabungan graf. Jika terdapat pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic, maka akan dirumuskan bagaimana pola pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic pada gabungan graf tersebut dengan menggunakan metode pendeteksian pola (*pattern recognition*) untuk menentukan pola umumnya.

4.2 Definisi Operasional Pelabelan Total Super (a, d) -Sisi Antimagic

Definisi operasional variabel digunakan untuk memberikan gambaran secara sistematis dalam penelitian dan untuk menghindari terjadinya perbedaan pengertian makna. Definisi operasional variabel yang dimaksud adalah: Pelabelan total (a, d) -sisi antimagic adalah sebuah pemetaan satu-satu f dari $V(G) \cup E(G)$ ke bilangan bulat $\{1, 2, 3 \dots p + q\}$ sehingga himpunan bobot sisinya $w(uv) = f(u) + f(v) + f(w)$ pada semua sisi G adalah $\{a, a + d, \dots, a + (q - 1)d\}$ untuk $a > 0$ dan $d \geq 0$ adalah bilangan bulat. Sebuah pelabelan total (a, d) -sisi antimagic disebut pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic jika $f(V) = \{1, 2, 3 \dots p\}$ dan $\{f(E) = p + 1, p + 2, \dots, p + q\}$.

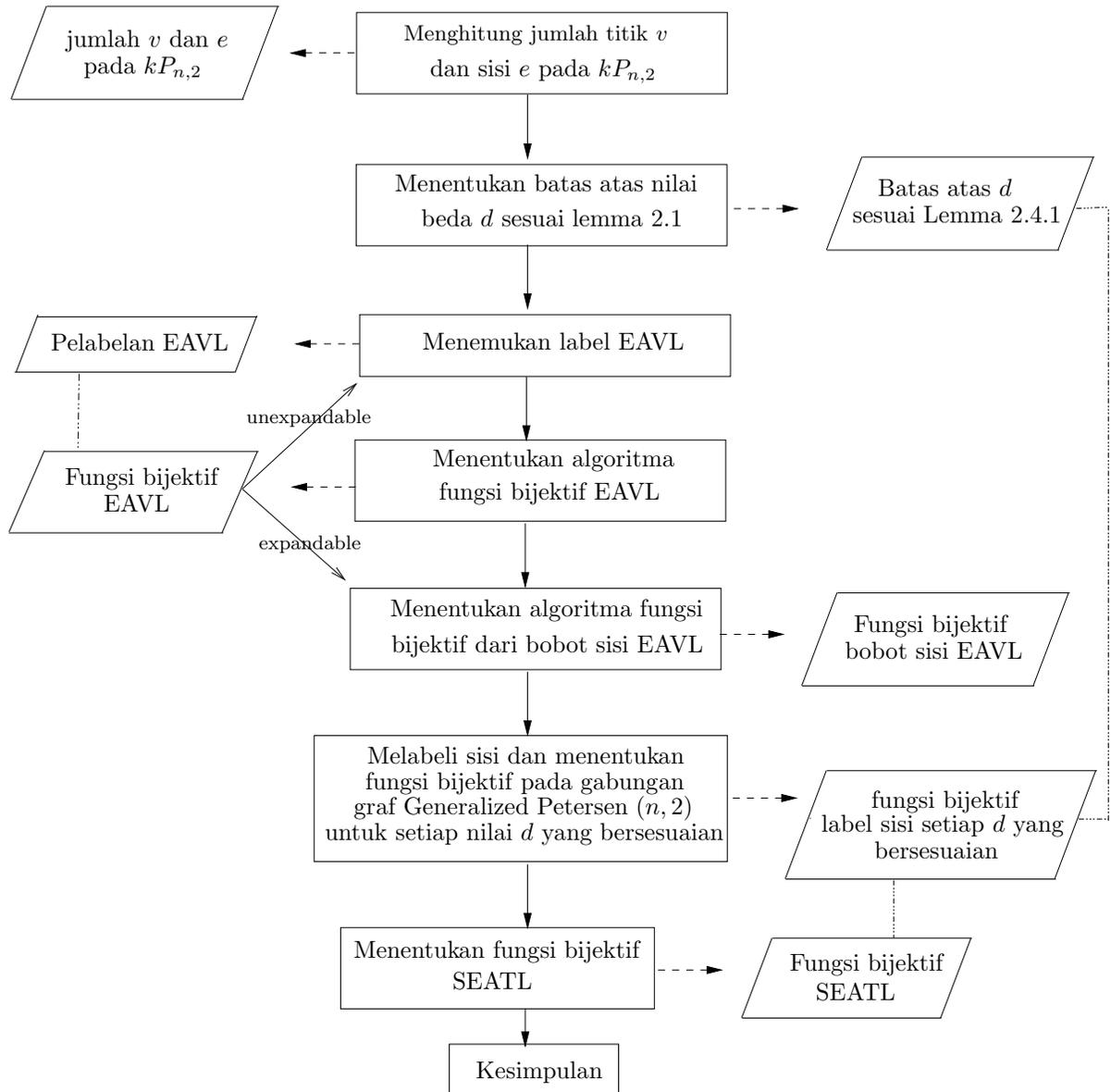
4.3 Teknik Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada gabungan graf tertentu, jika pada graf tersebut ditemukan pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic maka dilanjutkan dengan pendeteksian pola (*pattern recognition*). Adapun tahapan penelitian ini adalah

sebagai berikut:

1. **Penentuan model topologi jaringan.** Dengan menggunakan teknik web-searching, visualisasi bentuk gabungan saling lepas model topologi jaringan akan diperoleh secara ekspolaratif, yang polanya direpresentasikan dalam sebuah famili *graf*. Kemudian dengan metode induktif berbantuan komputasi komputer, sampel famili graf diskonektif yang beorder kecil diberi label $1, 2, \dots, |V|$, untuk melihat fisibilitinya dalam pelabelan selanjutnya. Kemudian dihitung jumlah titik p dan sisi q pada gabungan suatu graf dan selanjutnya menentukan batas atas nilai beda d pada pada gabungan sebuah graf sesuai dengan Lemma yang ada.
2. **Algoritma pelabelan total super antimagic.** Dengan menerapkan teknik pelabelan *EAVL (Edge Antimagic Vertex)* terhadap famili graf diskonektif beorder kecil kemudian digeneralisasi untuk memperoleh algoritme dasar. Dengan menerapkan teorema Bača, selanjutnya dikembangkan algoritme pelabelan *SEATL (Super Edge Antimagic Total)*.
3. **Penurunan teorema, aksioma/lemma serta korollari baru.** Dengan metoda deduktif dan induktif dalam kosep matematika diskrit dan pemodelan matematik, teorema, aksioma/lemma serta korollari baru diturunkan dan dibuktikan. Pembuktian dilakukan dengan prosedural formal sesuai dengan prinsip-prinsip logika matematik.
4. **Skema aplikasi teorema, aksioma/lemma serta korollari baru.** Dengan metode diskriptif akan dijelaskan skema aplikasi teorema, aksioma atau lemma serta korollari baru khususnya mengurangi resiko vulnerabilitas topologi jaringan komputer statis atau dinamis.

Secara umum, langkah-langkah penelitian di atas dapat juga disajikan dalam bagan diagram alir sebagai berikut:



Keterangan:

—> : aliran proses

- - -> : aliran hasil

- · - · - : aliran pengecekan algoritma

▭ : proses kegiatan

▭ : data

Gambar 4.1 Diagram alir penelitian

BAB 5. HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini berturut-turut akan disajikan hasil penelitian yang merupakan joint research antara dosen dan mahasiswa. Semetara terdapat dua mahasiswa yang terlibat dalam penelitian ini yaitu Karinda Rizqi Aprilia dan Khuri Faridatun Nafisah. Target penelitian ini adalah melibatkan empat mahasiswa di akhir tahunnya. Hasil dari penelitian ini telah dituangkan dalam joint paper yang telah disubmit ke suatu forum ilmiah yaitu the 7th South East Asian Mathematical Society (SEAMS) International Conference UGM Yogyakarta, lihat <http://seams2015.fmipa.ugm.ac.id/> dan the International Conference on Mathematics, its Application and Mathematics Education (ICMAME) Sanata Darma Yogyakarta, lihat <https://www.usd.ac.id/seminar/icmame>. Kedua conference ini menerbitkan conference proceeding yang terindeks oleh SCOPUS. Satu paper lagi telah dalam bentuk draf yang akan disubmit dalam international journal terindeks oleh SCOPUS.

Penelitian ini diawali dengan menentukan batas atas d , menentukan $EAVL$ dan bobot sisi EAV , menentukan $SEATL$ dan menentukan bobot total $SEATL$ pada masing-masing famili graf khusus di atas tunggal maupun gabungan saling lepasnya. Hasil utama penelitian pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic dan total super (a, d) - H antimagic adalah berupa lemma dan teorema, yang urutan penyajiannya adalah dengan menuliskan lemma ataupun teorema terlebih dahulu, dilanjutkan dengan bukti mengenai lemma dan teorema tersebut kemudian beberapa contoh gambar atau ilustrasi sebagai visualisasi kebenaran pembuktian lemma dan teorema tersebut.

Topologi jaringan yang dihasilkan dalam kegiatan penelitian awal ini adalah: (1) pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic pada graf semi parasut tunggal maupun gabungan saling lepasnya; (2) pelabelan total super (a, d) - H antimagic dekomposisi pada amalgamasi graf kipas tunggal maupun gabungan saling lepas-

nya. Berikut ini berturut akan disajikan hasil penelitian terkait dua famili graf khusus di atas.

5.1 Pelabelan Total Super (a, d) -Sisi Antimagic pada Graf Semi

Parasut SP_{2n-1}

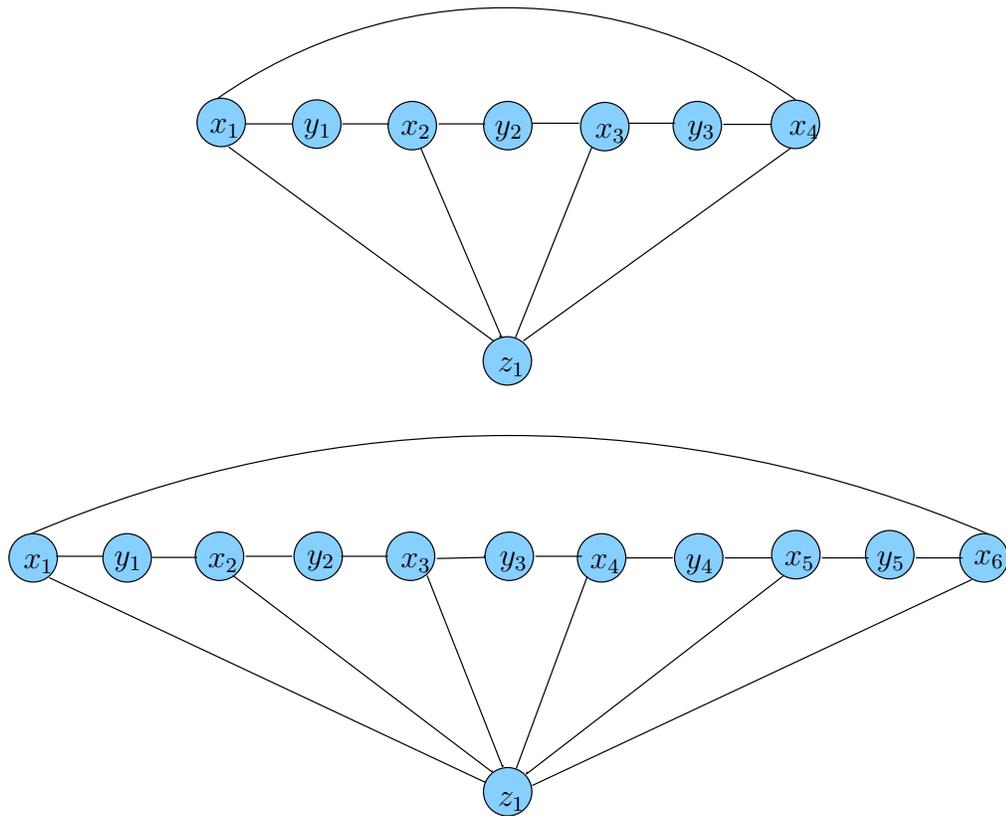
5.1.1 Semi Parasut konektif SP_{2n-1}

Berdasarkan definisi, graf semi parasut adalah sebuah graf yang dinotasikan dengan SP_{2n-1} dengan himpunan *vertex*, $V = \{x_i, y_j, z; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq n-1\}$ dan himpunan *edge*, $E = \{zx_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_1x_n\} \cup \{x_iy_i; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{y_ix_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\}$. Nilai n yang dimaksud adalah banyaknya titik yang terhubung dengan satu titik pusat dibawah dari graf semi parasut. Berdasarkan pola pada gambar 5.1 dan setelah memperhatikan graf semi parasut untuk nilai n lainnya, didapatkan rumusan jumlah titik pada graf semi parasut SP_{2n-1} adalah $p = 2n$. Sedangkan jumlah sisi pada graf semi parasut SP_{2n-1} adalah $q = 3n - 1$.

Untuk menentukan nilai-nilai d , perlu diketahui jumlah titik (p) dan jumlah sisi (q) graf semi parasut tunggal maupun gabungannya. Batas atas d graf Semi Parasut SP_{2n-1} dapat ditentukan dengan menggunakan Lemma ???. Jika diketahui jumlah titik pada graf SP_{2n-1} adalah $p = 2n$ dan jumlah sisi $q = 3n - 1$ maka batas atas nilai beda d tersebut adalah:

$$\begin{aligned} d &\leq \frac{2p + q - 5}{q - 1} \\ &= \frac{2(2n) + (3n - 1) - 5}{(3n - 1) - 1} \\ &= \frac{4n + 3n - 6}{3n - 2} \\ &= \frac{7n - 6}{3n - 2} \\ &= 2 + \frac{n - 2}{3n - 2} \end{aligned}$$

Karena $0 \leq \frac{n-2}{3n-2} \leq 1$ dan pada penelitian ini dibatasi untuk $n \geq 2$ dan n bilang positif maka nilai $d < 3$ dan d adalah bilangan bulat, sehingga $d \in \{0, 1, 2\}$. Selanjutnya penentuan fungsi bijektif pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic



Gambar 5.1 Jumlah titik dan jumlah sisi pada graf Semi Parasut SP_{2n-1} dengan $n = 4$ dan $n = 6$

akan disesuaikan dengan nilai d yang telah ditetapkan.

Setelah mengetahui batas atas nilai d , langkah selanjutnya adalah menentukan pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic dengan terlebih dahulu menentukan pelabelan titik $(a, 1)$ -sisi antimagic pada graf semi parasut SP_{2n-1} dimana $V = \{x_i, y_j, z; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq n-1\}$ sekaligus menentukan fungsi bijektifnya melalui pengamatan pola dan penggunaan konsep barisan aritmatika. Lemma 5.1.1 adalah lemma yang berkaitan dengan pelabelan titik $(a, 1)$ -sisi antimagic pada graf semi parasut SP_{2n-1} .

Lema 5.1.1. *Ada pelabelan $(3, 1)$ -sisi antimagic titik pada graf semi parasut SP_{2n-1} untuk $n \geq 2$.*

Bukti. Labeli titik graf semi parasut SP_{2n-1} untuk $n \geq 2$ dengan fungsi bijektif α_1 yang didefinisikan sebagai $\alpha_1 : V(SP_{2n-1}) \rightarrow \{1, 2, \dots, 3n-1\}$, maka pelabelan α_1 dapat dituliskan sebagai berikut:

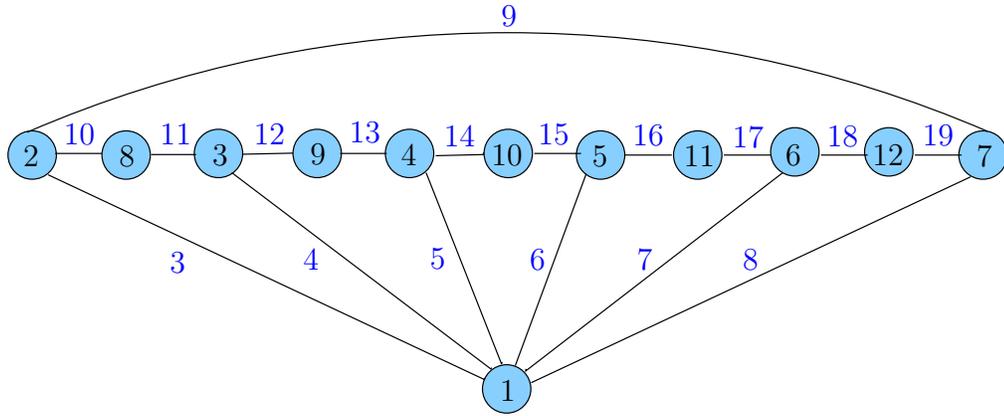
$$\begin{aligned}\alpha_1(z) &= 1 \\ \alpha_1(x_i) &= i + 1, \quad 1 \leq i \leq n \\ \alpha_1(y_i) &= n + i + 1, \quad 1 \leq i \leq n - 1\end{aligned}$$

Pelabelan titik diatas adalah fungsi bijektif dari $\alpha_1 : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, 2n\}$. Misal bobot sisi SP_{2n-1} berdasarkan α_1 adalah w_{α_1} , dimana bobot sisi pelabelan titik diperoleh dari penjumlahan 2 buah label titik yang bersisian, maka w_{α_1} dapat didefinisikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}w_{\alpha_1}(zx_i) &= i + 2, & 1 \leq i \leq n \\ w_{\alpha_1}(x_1x_n) &= n + 3 \\ w_{\alpha_1}(x_iy_i) &= n + 2i + 2, & 1 \leq i \leq n - 1 \\ w_{\alpha_1}(y_ix_{i+1}) &= n + 2i + 3, & 1 \leq i \leq n - 1\end{aligned}$$

Berdasarkan bobot sisi pada pelabelan sisi antimagic titik, bobot sisi terkecil terletak pada $w_{\alpha_1}(zx_i)$ yaitu $i+2$ untuk $i = 1$. Sedangkan bobot sisi terbesar terletak pada $w_{\alpha_1}(y_ix_{i+1})$ yaitu $n + 2i + 3$ untuk $i = n - 1$. Dengan mensubstitusikan fungsi yang bergerak $1 \leq i \leq n$ maka didapatkan nilai-nilai berurutan yang akan membentuk himpunan $\bigcup_{k=1}^4 w_{\alpha_1} = \{3, 4, 5, \dots, 3n + 1\}$. Sehingga, terbukti bahwa

graf semi parasut SP_{2n-1} untuk $n \geq 2$ memiliki pelabelan $(3, 1)$ -sisi antimagic titik. Gambar 5.2 merupakan contoh pelabelan $(3, 1)$ -sisi antimagic titik beserta bobot sisi $EAVL$ graf semi parasut SP_{2n-1} dengan $n = 6$. \square



Gambar 5.2 Pelabelan $(3,1)$ -sisi antimagic titik pada SP_{11} dengan $n = 6$

Berdasarkan Lemma 5.1.1 maka diperoleh pelabelan $(3, 1)$ -sisi antimagic titik selanjutnya pelabelan super sisi antimagic total dengan nilai awal a dan nilai beda $d = 0$ atau dapat dituliskan dengan pelabelan super $(a, 0)$ -sisi antimagic total dapat ditentukan dengan mengkonstruksi label sisi dari pelabelan titik yang telah ditemukan selanjutnya peletakan label sisi ditentukan berdasarkan letak bobot sisi $EAVL$ w dengan urutan yang berkebalikan. Dengan kata lain, sisi dengan w terkecil dilabeli dengan label sisi terbesar dan sisi dengan w terbesar dilabeli dengan label sisi terkecil. Berdasarkan uraian di atas dapat diturunkan teorema 5.1.1:

\diamond **Teorema 5.1.1.** *Ada pelabelan super $(5n + 2, 0)$ -sisi antimagic total graf semi parasut SP_{2n-1} untuk $n \geq 2$.*

Bukti. Labeli titik graf semi parasut SP_{2n-1} untuk $n \geq 2$ dengan fungsi bijektif $\alpha_2 = \alpha_1$, sehingga α_2 :

$$\begin{aligned}\alpha_2(z) &= 1 \\ \alpha_2(x_i) &= i + 1, \quad 1 \leq i \leq n \\ \alpha_2(y_i) &= n + i + 1, \quad 1 \leq i \leq n - 1\end{aligned}$$

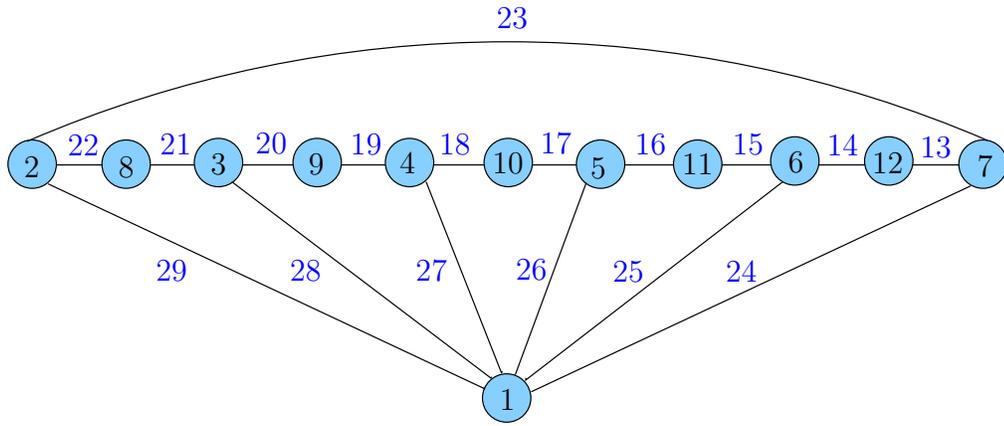
kemudian labeli sisinya sedemikian hingga label sisi α_2 untuk pelabelan total super $(a, 0)$ -sisi antimagic pada graf SP_{2n-1} dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\alpha_2(y_i x_{i+1}) &= 4n - 2i - 1, & 1 \leq i \leq n - 1 \\ \alpha_2(x_i y_i) &= 4n - 2i, & 1 \leq i \leq n - 1 \\ \alpha_2(x_1 x_n) &= 4n - 1 \\ \alpha_2(zx_i) &= 5n - i, & 1 \leq i \leq n\end{aligned}$$

Dengan mudah dapat dilihat bahwa pelabelan titik diatas adalah fungsi bijektif dari $f_1: V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, 5n-1\}$. Misal bobot total didefinisikan sebagai W_{α_2} , maka berdasarkan penjumlahan bobot sisi w_{α_1} yang terdapat pada lemma 5.1.1 dengan label sisi α_2 yang bersesuaian maka diperoleh W_{α_2} sebagai berikut:

$$\begin{aligned}W_{\alpha_2}^1(y_i x_{i+1}) &= \{w_{\alpha_1} + \alpha_2(y_i x_{i+1})\} \\ &= (n + 2i + 3) + (4n - 2i - 1) \\ &= 5n + 2 \\ W_{\alpha_2}^2(x_i y_i) &= \{w_{\alpha_1} + \alpha_2(x_i y_i)\} \\ &= (n + 2i + 2) + (4n - 2i) \\ &= 5n + 2 \\ W_{\alpha_2}^3(x_1 x_n) &= \{w_{\alpha_1} + \alpha_2(x_1 x_n)\} \\ &= (n + 3) + (4n - 1) \\ &= 5n + 2 \\ W_{\alpha_2}^4(zx_i) &= \{w_{\alpha_1} + \alpha_2(zx_i)\} \\ &= (i + 2) + (5n - i) \\ &= 5n + 2\end{aligned}$$

Berdasarkan hasil diatas, dapat dilihat bahwa $\bigcup_{k=1}^4 W_{\alpha_2}^k = \{5n + 2, 5n + 2, \dots, 5n + 2\}$. Sehingga terbukti bahwa graf semi parasut SP_{2n-1} dengan $n \geq 2$ mempunyai pelabelan super (a, d) -sisi antimagic total dengan $a = 5n + 2$ dan $d = 0$. Bilangan 1, 2, \dots , 4 pada $W_{\alpha_2}^1, W_{\alpha_2}^2, \dots, W_{\alpha_2}^4$ bukan merupakan pangkat, melainkan bilangan tersebut hanya merupakan kode pembeda bobot sisi W_{α_2} untuk tiap sisi yang berlainan. \square



Gambar 5.3 SEATL graf semi parasut SP_{11} dengan $d = 0$

◇ **Teorema 5.1.2.** *Ada pelabelan super $(2n + 4, 2)$ -sisi antimagic total graf semi parasut SP_{2n-1} untuk $n \geq 2$.*

Bukti. Berdasarkan Lemma 5.1.1 maka diperoleh pelabelan $(3, 1)$ -sisi antimagic titik, selanjutnya dapat ditentukan pelabelan super $(a, 2)$ -sisi antimagic total dengan menentukan label sisi dari pelabelan titik yang telah ditemukan. Labeli titik graf semi parasut SP_{2n-1} dengan fungsi bijektif $\alpha_3 = \alpha_1$, sehingga α_3 :

$$\begin{aligned}\alpha_3(z) &= 1 \\ \alpha_3(x_i) &= i + 1, \quad 1 \leq i \leq n \\ \alpha_3(y_i) &= n + i + 1, \quad 1 \leq i \leq n - 1\end{aligned}$$

kemudian definisikan label sisi α_3 sedemikian hingga untuk pelabelan total super $(a, 2)$ -sisi antimagic sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\alpha_3(zx_i) &= 2n + i, & 1 \leq i \leq n \\ \alpha_3(x_1x_n) &= 3n + 1 \\ \alpha_3(x_iy_i) &= 3n + 2i, & 1 \leq i \leq n - 1 \\ \alpha_3(y_ix_{i+1}) &= 3n + 2i + 1, & 1 \leq i \leq n - 1\end{aligned}$$

Jika W_{α_3} didefinisikan sebagai bobot total, maka berdasarkan penjumlahan bobot sisi w_{α_1} yang terdapat pada lemma 5.1.1 dengan label sisi α_3 yang bersesuaian diperoleh W_{α_3} untuk nilai $d = 2$ dengan syarat batas i , sehingga diperoleh W_{α_3} sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_3}^1(zx_i) &= \{w_{\alpha_1} + \alpha_3(zx_i)\} \\
&= (i + 2) + (2n + i) \\
&= 2n + 2i + 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_3}^2(x_1x_n) &= \{w_{\alpha_1} + \alpha_3(x_1x_n)\} \\
&= (n + 3) + (3n + 1) \\
&= 4n + 4
\end{aligned}$$

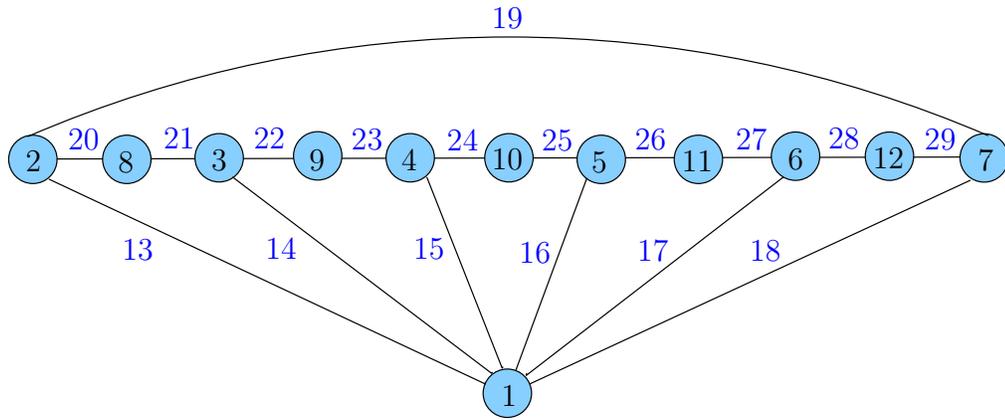
$$\begin{aligned}
W_{\alpha_3}^3(x_iy_i) &= \{w_{\alpha_1}(x_iy_i) + \alpha_3(x_iy_i)\} \\
&= (n + 2i + 2) + (3n + 2i) \\
&= 4n + 4i + 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_3}^4(y_ix_{i+1}) &= \{w_{\alpha_1} + \alpha_3(y_ix_{i+1})\} \\
&= (n + 2i + 3) + (3n + 2i + 1) \\
&= 4n + 4i + 4
\end{aligned}$$

Berdasarkan himpunan bobot sisi W_{α_3} , dapat dilihat bahwa bobot sisi terkecil terdefiniskan oleh $W_{\alpha_3}^1(zx_i)$ untuk $i = 1$ dengan nilai $2n + 4$ dan bobot sisi terbesar terdefiniskan oleh $W_{\alpha_3}^4(y_ix_{i+1})$ dengan nilai $8n$ untuk $i = n - 1$. Sehingga kita dapat menentukan bobot sisi terbesar dengan mensubstitusikan nilai awal $a = 2n + 4$ dimana $i=1$ dan nilai $b = 2$ ke persamaan $U_n = a + (n - 1)b = 2n + 4 + (3n - 1 - 1)2$, didapatkan $U_n = 8n$. Terlihat bobot sisi terbesar terletak pada $W_{\alpha_3}^4(y_ix_{i+1}) = 8n$ untuk $i = n - 1$. Dan didapatkan himpunan $\bigcup_{r=1}^4 W_{\alpha_3}^r = \{2n+4, 2n+6, \dots, 8n\}$. Dapat dinyatakan bahwa W_{α_3} membentuk barisan aritmatika dengan suku awal $2n + 4$ dan beda 2. Sehingga terbukti bahwa graf semi parasut SP_{2n-1} mempunyai Pelabelan super $(2n + 4, 2)$ -Sisi antimagic total. \square

\diamond **Teorema 5.1.3.** *Ada pelabelan super $(\frac{7n+6}{2}, 1)$ -sisi antimagic total pada graf semi parasut SP_{2n-1} untuk $n \geq 2$ dan n genap.*

Bukti.5.1.3a. Labeli titik graf semi parasut SP_{2n-1} dengan fungsi bijektif $\alpha_4 = \alpha_1$, sehingga α_4 :



Gambar 5.4 SEATL graf semi parasut SP_{11} dengan $d = 2$

$$\begin{aligned}\alpha_4(z) &= 1 \\ \alpha_4(x_i) &= i + 1, \quad 1 \leq i \leq n \\ \alpha_4(y_i) &= n + i + 1, \quad 1 \leq i \leq n - 1\end{aligned}$$

maka label sisi α_4 untuk pelabelan super $(a, 1)$ -sisi antimagic total pada graf SP_{2n-1} dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\alpha_4(y_i x_{i+1}) &= 3n - i, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n - 1 \\ \alpha_4(x_1 x_n) &= 3n \\ \alpha_4(z x_i) &= \frac{7n-i+1}{2}, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n - 1; i \text{ ganjil} \\ \alpha_4(x_i y_i) &= \frac{9n-2i}{2}, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n - 1 \\ \alpha_4(z x_i) &= \frac{10n-i}{2}, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n - 1; i \text{ genap}\end{aligned}$$

Jika W_{α_4} didefinisikan sebagai bobot total, berdasarkan pelabelan sisi α_4 maka W_{α_4} dapat diperoleh dengan menjumlahkan rumus bobot sisi EAVL $w_{\alpha_1} = w_{\alpha_4}$ dan rumus label sisi α_4 , sehingga himpunan bobot total dapat diturunkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_4}^1(y_i x_{i+1}) &= \{w_{\alpha_1} + \alpha_4(y_i x_{i+1})\}; \text{ untuk } 1 \leq i \leq n-1 \\
&= (n+2i+3) + (3n-i) \\
&= 4n+i+3
\end{aligned}$$

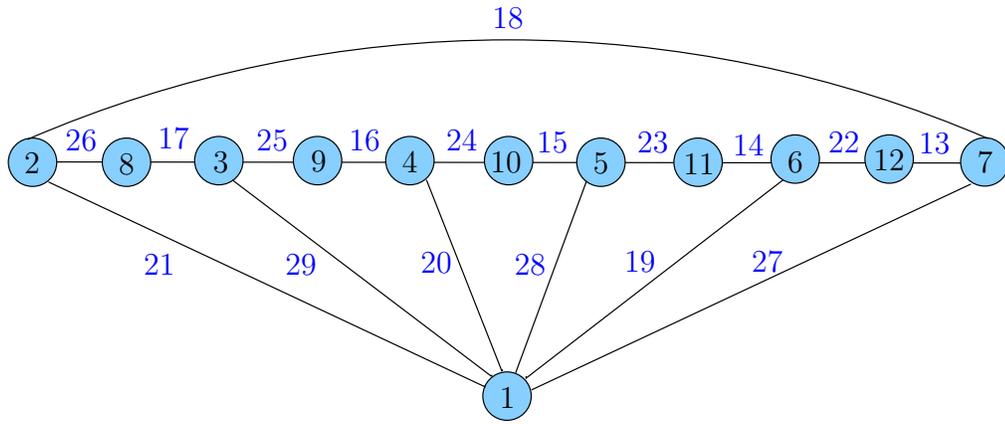
$$\begin{aligned}
W_{\alpha_4}^2(x_1 x_n) &= \{w_{\alpha_1} + \alpha_4(x_1 x_n)\} \\
&= (n+3) + (3n) \\
&= 4n+3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_4}^3(zx_i) &= \{w_{\alpha_1} + \alpha_4(zx_i)\}; \text{ untuk } 1 \leq i \leq n-1; i \text{ ganjil} \\
&= (i+2) + \left(\frac{7n-i+1}{2}\right) \\
&= \frac{7n+i+5}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_4}^4(x_i y_i) &= \{w_{\alpha_1} + \alpha_4(x_i y_i)\} \\
&= (n+2i+2) + \left(\frac{9n-2i}{2}\right) \\
&= \frac{11n+2i+4}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_4}^5(zx_i) &= \{w_{\alpha_1} + \alpha_4(zx_i)\}; \text{ untuk } 1 \leq i \leq n-1; i \text{ genap} \\
&= (i+2) + \left(\frac{10n-i}{2}\right) \\
&= \frac{10n+i+4}{2}
\end{aligned}$$

Dapat dilihat bahwa bobot sisi terkecil pertama terletak pada $W_{\alpha_4}^3(zx_i)$ untuk $i = 1$ yaitu $\frac{7n+6}{2}$, bobot sisi terkecil kedua terletak pada $W_{\alpha_4}^3(zx_i)$ untuk $i = 2$, dan bobot sisi terbesar terletak pada $W_{\alpha_4}^4(x_i y_i)$ untuk $i = n-1$ atau dapat diperoleh dengan mensubstitusikan $U_n = a + (n-1)b = \frac{7n+6}{2} + (3n-1-1)1$, didapatkan $U_n = \frac{13n+2}{2}$. Jika nilai tiap batas rumusan bobot w_{α_4} disubstitusikan dengan tepat, maka akan diperoleh sebuah rangkaian bilangan yang membentuk deret aritmatika dengan suku awal $\frac{7n+6}{2}$ dan beda $d=1$, sehingga dapat ditulis dalam himpunan $\bigcup_{r=1}^5 W_{\alpha_4}^r = \{\frac{7n+6}{2}, \frac{7n+8}{2}, \dots, \frac{13n+2}{2}\}$. Jadi terbukti bahwa graf semi parasut SP_{2n-1} mempunyai pelabelan super $(\frac{7n+6}{2}, 1)$ -sisi antimagic total untuk $n \geq 2$ dan n genap. \square



Gambar 5.5 SEATL graf semi parasut SP_{11} dengan $d = 1$

Berikut diberikan bukti alternatif untuk membuktikan bahwa graf semi parasut SP_{2n-1} mempunyai Super $(\frac{7n+6}{2}, 1)$ -EAT. Untuk mengetahui bagaimana pelabelan $(a, 1)$ -sisi antimagic untuk graf semi parasut SP_{2n-1} peneliti menggunakan sebuah lemma untuk mendapatkan barisan bilangan berurutan. Lemma tersebut dikembangkan berdasarkan identifikasi awal terhadap lemma yang disajikan pada bab 2. Lemma lain yang digunakan penulis adalah lemma yang dikembangkan oleh Dafik dan Robiatul pada tahun 2014 dengan beda 1 dari sebuah permutasi $\Pi(\Psi)$ dan himpunan bilangan berurutan Ψ . Lemma yang digunakan adalah sebagai berikut:

Berdasarkan ??, Misalkan Ψ merupakan sebuah himpunan bilangan berurutan $\Psi = \{c, c + 1, c + 2, \dots, c + k\}$, dengan k genap. Maka terdapat sebuah permutasi $\Pi(\Psi)$ dari anggota-anggota himpunan Ψ sehingga $\Psi + \Pi(\Psi)$ juga merupakan sebuah himpunan bilangan berurutan yaitu $\Psi + \Pi(\Psi) = \{2c + \frac{k}{2}, 2c + \frac{k}{2} + 1, 2c + \frac{k}{2} + 2, \dots, 2c + \frac{3k}{2}\}$.

Bukti. Misal Ψ adalah suatu himpunan bilangan berurutan $\Psi = \{v_i | v_i = c + (i - 1), 1 \leq i \leq k + 1\}$ dan k adalah genap. Selanjutnya didefinisikan nilai permutasi $\Pi(\Psi) = \{w_i | 1 \leq i \leq k + 1\}$ dari anggota Ψ adalah sebagai berikut:

$$w_i = \begin{cases} c + i + \frac{k}{2} - 1, & \text{jika } 1 \leq i \leq \frac{k}{2} + 1 \\ c + i - (\frac{k}{2} + 2), & \text{jika } \frac{k}{2} + 2 \leq i \leq k + 1 \end{cases}$$

Untuk membuktikan lemma ??, langkah pertama yang harus dilakukan adalah mensubstitusikan nilai i sesuai batasan yang diberikan maka akan diperoleh w_i sebagai berikut:

Untuk $1 \leq i \leq \frac{k}{2} + 1$ maka akan diperoleh hasil: untuk $i = 1$, maka $w_1 = c + \frac{k}{2}$; untuk $i = 2$, maka $w_2 = c + \frac{k}{2} + 1$; untuk $i = \frac{k}{2}$, maka $w_{\frac{k}{2}} = c + k - 1$; \dots ; untuk $i = \frac{k}{2} + 1$, maka $w_{\frac{k}{2}+1} = c + k$.

Sedangkan untuk nilai $\frac{k}{2} + 2 \leq i \leq k + 1$ diperoleh hasil: untuk $i = \frac{k}{2} + 2$, maka $w_{\frac{k}{2}+2} = c$; untuk $i = \frac{k}{2} + 3$, maka $w_4 = c + 1$; \dots ; untuk $i = k$, maka $w_k = c + \frac{k}{2} - 2$; untuk $i = k + 1$, maka $w_{k+1} = c + \frac{k}{2} - 1$.

Jika \mathfrak{C} dinyatakan dalam himpunan v_i dan $\Pi(\Psi)$ dinyatakan dalam himpunan w_i seperti telah disampaikan sebelumnya, maka akan diperoleh: $\Psi + \Pi(\Psi) = \{v_i + w_i | 1 \leq i \leq k + 1\} = \{2c + \frac{k}{2}, 2c + \frac{k}{2} + 1, 2c + \frac{k}{2} + 2, \dots, 2c + \frac{3k}{2}\}$.

Selanjutnya, sebagai alternatif pembuktian dari teorema 5.1.3, peneliti akan menggunakan lemma ?? yang telah dijelaskan sebelumnya.

Bukti.5.1.3b. Berdasarkan lemma ?? bahwa graf semi parasut SP_{2n-1} memiliki pelabelan $(\frac{7n+6}{2}, 1)$ -EAV. Hal ini berarti graf SP_{2n-1} memiliki himpunan bobot sisi berdasarkan pelabelan titik α_1 , dengan kata lain graf SP_{2n-1} memiliki barisan bobot sisi dengan nilai awal $a = \frac{7n+6}{2}$ dan beda tiap sukunya adalah 1.

Jika dimisalkan barisan bobot sisi SP_{2n-1} dinyatakan dalam $\Upsilon = \{c, c + 1, c + 2, \dots, c + k\}$ maka diperoleh nilai $c = 2n$ dan $k = 3n - 2$. Berdasarkan lemma ??, $\Pi(\Upsilon)$ adalah permutasi nilai Υ sedemikian hingga nilai $\Upsilon + (\Pi(\Upsilon) + \eta)$ adalah bobot total dari fungsi tersebut.

$$\begin{aligned} \Upsilon + (\Pi(\Upsilon) + \eta) &= a \\ c + (c + 1 + \frac{k}{2} - 1) + \eta &= \frac{7n + 6}{2} \\ 2c + \frac{k}{2} + \eta &= \frac{7n + 6}{2} \\ 2(2n) + \frac{k}{2} + \eta &= \frac{7n + 6}{2} \\ \eta &= \frac{-n + 6}{2} - \frac{k}{2} \end{aligned}$$

Maka $\Upsilon + (\Pi(\Upsilon) + \eta)$ adalah bobot total dari fungsi tersebut. Pembuktian lemma 2.3.2 telah menyebutkan bobot total terkecil terletak pada $i = 1$ sehingga:

$$\begin{aligned}\Upsilon + (\Pi(\Upsilon) + \eta) &= c + (c + i + \frac{k}{2} - 1 + \frac{-n+6}{2} - \frac{k}{2}) \\ &= 2c + \frac{k}{2} + \frac{-n+6}{2} - \frac{k}{2} \\ &= \frac{7n+6}{2}\end{aligned}$$

bobot total terkecil kedua terletak di $i = \frac{k}{2} + 2$:

$$\begin{aligned}\Upsilon + (\Pi(\Upsilon) + \eta) &= (c + \frac{k}{2} + 1) + (c) + (\frac{-n+6}{2} - \frac{k}{2}) \\ &= 2c + \frac{k}{2} + 1 + \frac{-n+6}{2} - \frac{k}{2} \\ &= \frac{7n+6}{2} + 1\end{aligned}$$

dan seterusnya, hingga bobot total terbesar terletak di $i = \frac{k}{2} + 1$:

$$\begin{aligned}\Upsilon + (\Pi(\Upsilon) + \eta) &= (c + \frac{k}{2}) + (c + k) + (\frac{-n+6}{2} - \frac{k}{2}) \\ &= 2c + \frac{3k}{2} + \frac{-n+6}{2} - \frac{k}{2} \\ &= \frac{13n+2}{2}\end{aligned}$$

Nilai yang diperoleh dari perhitungan berdasarkan lemma ?? dengan bobot terkecil adalah $\frac{7n+6}{2}$ dan bobot terbesar adalah $\frac{13n+2}{2}$ sesuai dengan nilai yang terdapat pada teorema 5.1.3. Berdasarkan perhitungan yang telah dituliskan, diketahui bahwa nilai $\Upsilon + (\Pi(\Upsilon) + \eta)$ dapat dinyatakan dalam himpunan $\{\frac{7n+6}{2}, \frac{7n+8}{2}, \frac{7n+10}{2}, \dots, \frac{13n+2}{2}\}$. Sehingga terbukti bahwa graf semi parasut SP_{2n-1} memiliki pelabelan $(a, 1)$ -super sisi antimagic untuk $n \geq 2$, dan n genap.

5.1.2 Semi Parasut Diskonektif mSP_{2n-1}

Selanjutnya peneliti melakukan penelitian untuk gabungan saling lepas graf semi parasut mSP_{2n-1} . Penelitian ini merupakan pengembangan dari graf semi parasut tunggal. Gabungan graf semi parasut didefinisikan sebagai graf semi parasut dengan salinan sebanyak m . Gabungan graf semi parasut mSP_{2n-1} didefinisikan sebagai $V = \{z^k; 1 \leq k \leq m\} \cup \{x_i^k; 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m\} \cup \{y_i^k; 1 \leq i \leq n-1, 1 \leq k \leq m\}$ dan $E = \{z^k x_i^k; 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m\} \cup \{x_1^k x_n^k; 1 \leq k \leq m\} \cup \{x_i^k y_i^k; 1 \leq i \leq n-1, 1 \leq k \leq m\} \cup \{y_i^k x_{i+1}^k; 1 \leq i \leq n-1, 1 \leq k \leq m\}$.

Sama seperti graf semi parasut tunggal, untuk menentukan batas atas d pada gabungan graf semi parasut, perlu diketahui pula rumusan jumlah titik (p) dan jumlah sisi (q) pada gabungan graf semi parasut.

Jumlah titik dan jumlah sisi pada graf semi parasut dapat ditentukan dengan terlebih dahulu mencermati definisi gabungan pada suatu graf. Gabungan m graf semi parasut yang dinotasikan mSP_{2n-1} didefinisikan sebagai gabungan saling lepas dari m buah salinan graf semi parasut mSP_{2n-1} dengan $1 \leq k \leq m$, ditulis: $mSP_{2n-1}^1 \cup mSP_{2n-1}^2 \cup mSP_{2n-1}^3 \cup \dots \cup mSP_{2n-1}^m$. Sehingga jumlah titik graf mSP_{2n-1} yang dimisalkan p_1 adalah m kali jumlah titik graf SP_{2n-1} dapat dituliskan dalam

$$p_1 = m.(2n) \Rightarrow p_1 = 2mn$$

dan jumlah sisi graf mSP_{2n-1} adalah m kali jumlah sisi graf semi parasut SP_{2n-1} . Misalkan q_1 adalah jumlah sisi graf semi parasut SP_{2n-1} dituliskan dengan

$$q_1 = m.(3n-1) \Rightarrow q_1 = 3nm - m$$

Batas atas d gabungan graf semi parasut mSP_{2n-1} juga dapat ditentukan dengan menggunakan lemma ???. Diketahui jumlah titik pada graf mSP_{2n-1} adalah $p_1 = 2nm$ dan jumlah sisi $q_1 = 3nm - m$ untuk m adalah jumlah salinan graf semi parasut, n adalah jumlah titik yang terhubung pada satu titik bawah dari graf semi parasut. Dengan demikian batas atas nilai beda d tersebut adalah:

$$\begin{aligned}
d &\leq \frac{2p_1 + q_1 - 5}{q_1 - 1} \\
&= \frac{2(2nm) + (3nm - m) - 5}{(3nm - m) - 1} \\
&= \frac{4nm + 3nm - m - 5}{3nm - m - 1} \\
&= \frac{7mn - m - 5}{3nm - m - 1} \\
&= 2 + \frac{nm + m + 3}{3nm - m - 1}
\end{aligned}$$

Karena $0 \leq \frac{nm+m+3}{3nm-m-1} \leq 1$ dan pada penelitian ini dibatasi untuk $n \geq 2$, $m \geq 3$ dan n, m bilangan positif maka nilai $d < 3$ dan d adalah bilangan bulat, sehingga $d \in \{0, 1, 2\}$. Selanjutnya akan ditentukan fungsi bijektif pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic sesuai dengan nilai d yang telah ditetapkan. Langkah selanjutnya adalah menentukan pelabelan titik $(a, 1)$ -sisi antimagic pada gabungan graf semi parasut.

Lema 5.1.2. *Ada pelabelan $(\frac{3m+3}{2}, 1)$ -sisi antimagic titik pada gabungan graf semi parasut mSP_{2n-1} jika $n \geq 2$, $m \geq 3$ dan m ganjil.*

Bukti. Labeli titik-titik pada gabungan graf semi parasut mSP_{2n-1} dengan fungsi bijektif β_1 yang definisikan sebagai pelabelan $\beta_1 : V(mSP_{2n-1}) \rightarrow \{1, 2, \dots, 3nm - m\}$ maka pelabelan β_1 dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\beta_1(z^k) &= k, \text{ untuk } 1 \leq k \leq m, k \text{ sebarang} \\
\beta_1(x_i^k) &= \begin{cases} \frac{m+2mi-k+2}{2}, & \text{untuk } 1 \leq i \leq n-1, 1 \leq k \leq m, k \text{ ganjil} \\ \frac{2m+2mi-k+2}{2}, & \text{untuk } 1 \leq i \leq n-1, 1 \leq k \leq m, k \text{ genap} \end{cases} \\
\beta_1(x_n^k) &= \begin{cases} \frac{2nm+m-k+1}{2}, & \text{untuk } 1 \leq k \leq m, k \text{ genap} \\ \frac{2nm+2m-k+1}{2}, & \text{untuk } 1 \leq k \leq m, k \text{ ganjil} \end{cases} \\
\beta_1(y_i^k) &= mn + mi + k, \text{ untuk } 1 \leq k \leq m, k \text{ sebarang}
\end{aligned}$$

Pelabelan titik β_1 tersebut merupakan sebuah fungsi bijektif. Jika w_{β_1} merupakan bobot sisi berdasarkan pelabelan titik β_1 dimana bobot sisi pelabelan titik diperoleh dari penjumlahan 2 buah label titik yang bersisian pada mSP_{2n-1} yang dapat dinyatakan sebagai berikut:

Bobot sisi $z^k x_i^k$:

$$w_{\beta_1}(z^k x_i^k) = \frac{m+2mi+k+2}{2}, \quad \text{untuk } 1 \leq i \leq n-1, 1 \leq k \leq m; k \text{ ganjil}$$

$$w_{\beta_1}(z^k x_i^k) = \frac{2m+2mi+k+2}{2}, \quad \text{untuk } 1 \leq i \leq n-1, 1 \leq k \leq m; k \text{ genap}$$

Bobot sisi $z^k x_n^k$:

$$w_{\beta_1}(z^k x_n^k) = \frac{2nm+m+k+1}{2}, \quad \text{untuk } 1 \leq k \leq m; k \text{ genap}$$

$$w_{\beta_1}(z^k x_n^k) = \frac{2nm+2m+k+1}{2}, \quad \text{untuk } 1 \leq k \leq m; k \text{ ganjil}$$

Bobot sisi $x_1^k x_n^k$:

$$w_{\beta_1}(x_1^k x_n^k) = \frac{2nm+5m-2k+3}{2}, \quad \text{untuk } 1 \leq k \leq m$$

Bobot sisi $x_i^k y_i^k$:

$$w_{\beta_1}(x_i^k y_i^k) = \frac{2nm+4mi+m+k+2}{2}, \quad \text{untuk } 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq k \leq m; k \text{ ganjil}$$

$$w_{\beta_1}(x_i^k y_i^k) = \frac{2nm+4mi+2m+k+2}{2}, \quad \text{untuk } 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq k \leq m; k \text{ genap}$$

Bobot sisi $y_i^k x_{i+1}^k$:

$$w_{\beta_1}(y_i^k x_{i+1}^k) = \frac{2nm+4mi+3m+k+2}{2}, \quad \text{untuk } 1 \leq i \leq n-2; 1 \leq k \leq m; k \text{ ganjil}$$

$$w_{\beta_1}(y_i^k x_{i+1}^k) = \frac{2nm+4mi+4m+k+2}{2}, \quad \text{untuk } 1 \leq i \leq n-2; 1 \leq k \leq m; k \text{ genap}$$

Bobot sisi $y_{n-1}^k x_n^k$:

$$w_{\beta_1}(y_{n-1}^k x_n^k) = \frac{6nm-m+k+1}{2}, \quad \text{untuk } 1 \leq k \leq m; k \text{ genap}$$

$$w_{\beta_1}(y_{n-1}^k x_n^k) = \frac{6nm+k+1}{2}, \quad \text{untuk } 1 \leq k \leq m; k \text{ ganjil}$$

Berdasarkan bobot sisi EAV ini, bobot sisi terkecil terletak pada $w_{\beta_1}(z^k x_i^k)$ untuk $i = 1$ dan k ganjil yaitu $k = 1$, sedangkan bobot sisi terbesar terletak pada $w_{\beta_1}(y_{n-1}^k x_n^k)$ untuk k ganjil yaitu $k = m$. Dengan mensubstitusikan nilai batas pada tiap definisi rumusan yang diberikan maka didapatkan nilai-nilai berurutan yang akan membentuk himpunan $w_{\beta_1} = \left\{ \frac{3m+3}{2}, \frac{7m+3}{2}, \dots, \frac{6nm+m+1}{2} \right\}$. Himpunan tersebut membentuk sebuah himpunan yang memiliki nilai awal $\frac{3m+3}{2}$ dan beda

tiap elemennya adalah 1, sehingga dapat disimpulkan bahwa pelabelan β_1 adalah suatu pelabelan $(\frac{3m+3}{2}, 1)$ -antimagic titik untuk $n \geq 2$, $m \geq 3$ dan m ganjil. \square

Gambar 5.6 merupakan contoh pelabelan $(9, 1)$ -sisi antimagic titik beserta bobot sisi $EAVL$ graf semi parasut $5SP_{2n-1}$ dengan $d = 1$.

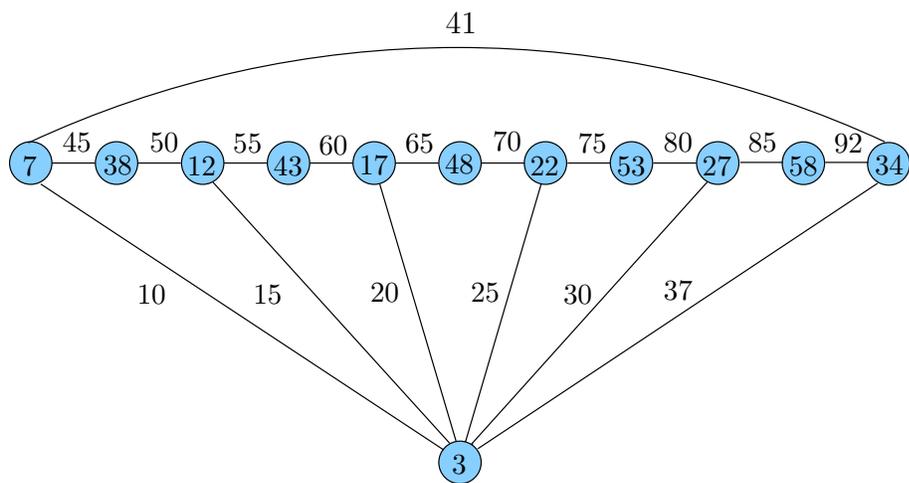
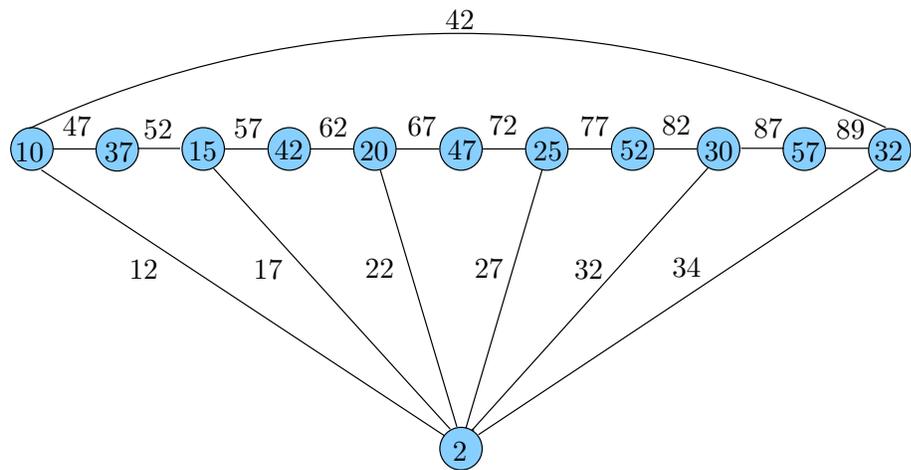
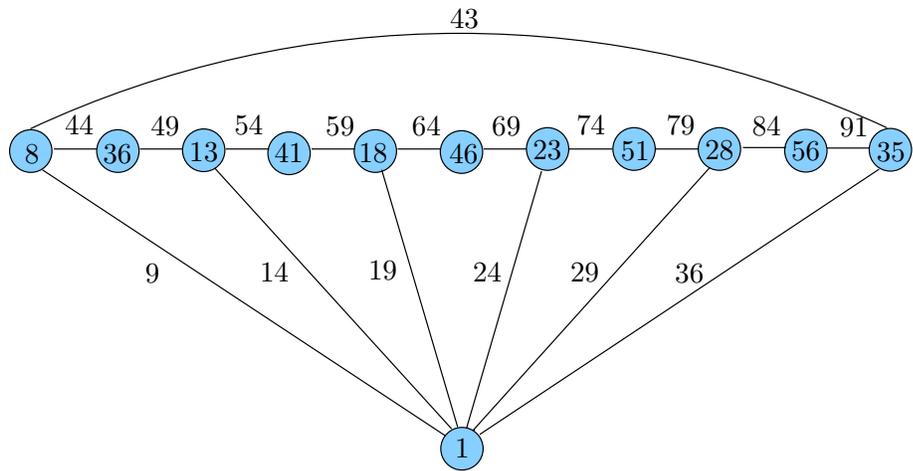
\diamond **Teorema 5.1.4.** *Ada pelabelan super $(\frac{10nm+m+3}{2}, 0)$ -sisi antimagic total pada gabungan graf semi parasut mSP_{2n-1} jika $n \geq 2$, $m \geq 3$ dan m ganjil*

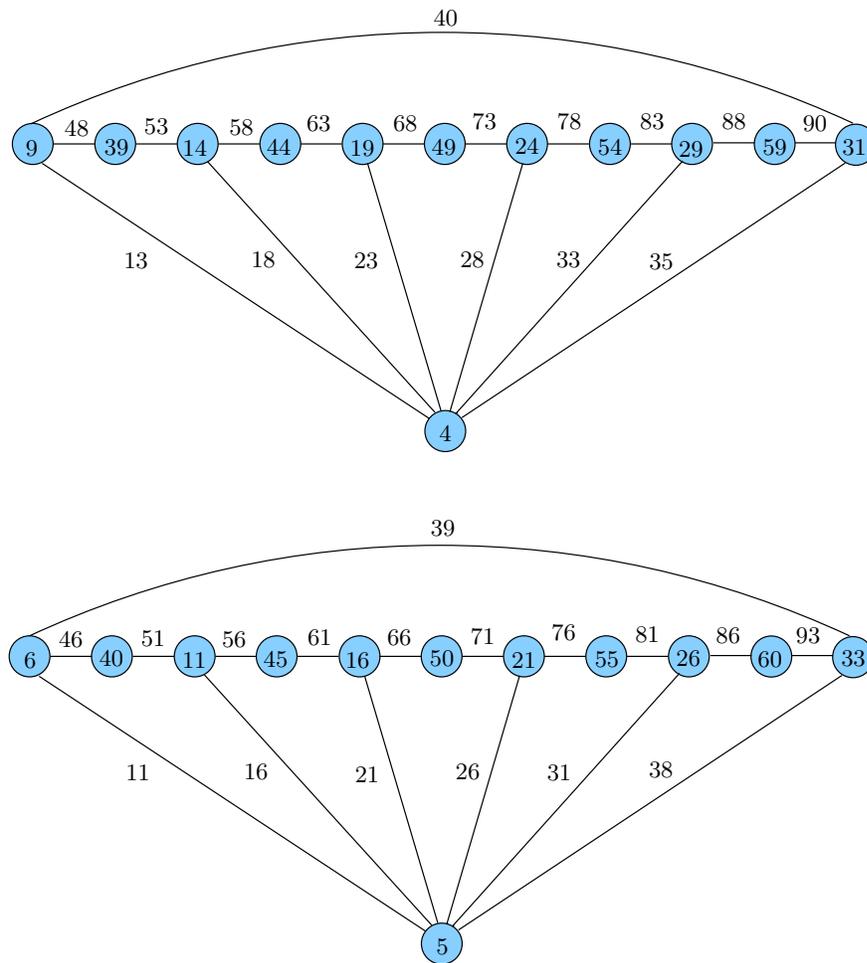
Bukti. Gunakan pelabelan titik fungsi bijektif $\beta_2 = \beta_1$ untuk melabeli titik gabungan graf semi parasut mSP_{2n-1} , sehingga:

$$\begin{aligned}\beta_2(z^k) &= k, \text{ untuk } 1 \leq k \leq m, k \text{ sebarang} \\ \beta_2(x_i^k) &= \begin{cases} \frac{m+2mi-k+2}{2}, & \text{untuk } 1 \leq i \leq n-1, 1 \leq k \leq m, k \text{ ganjil} \\ \frac{2m+2mi-k+2}{2}, & \text{untuk } 1 \leq i \leq n-1, 1 \leq k \leq m, k \text{ genap} \end{cases} \\ \beta_2(x_n^k) &= \begin{cases} \frac{2nm+m-k+1}{2}, & \text{untuk } 1 \leq k \leq m, k \text{ genap} \\ \frac{2nm+2m-k+1}{2}, & \text{untuk } 1 \leq k \leq m, k \text{ ganjil} \end{cases} \\ \beta_2(y_i^k) &= mn + mi + k, \text{ untuk } 1 \leq k \leq m, k \text{ sebarang}\end{aligned}$$

kemudian definisikan label sisi $\beta_2 : E(mSP_{2n-1}) \rightarrow \{\frac{4nm+m-k+2}{2}, \frac{4nm+2m-k+2}{2}, \dots, \frac{10nm-2mi-k+1}{2}\}$, sedemikian hingga label sisi β_2 untuk pelabelan total super $(a, 0)$ -sisi antimagic pada graf mSP_{2n-1} dapat dirumuskan sebagai berikut:

untuk $1 \leq k \leq m$ maka :





Gambar 5.6 Pelabelan (9,1)-sisi antimagic titik pada $5SP_{2n-1}$

$$\begin{aligned}
\beta_2(y_{n-1}^k x_n^k) &= \frac{4nm+m-k+2}{2}, \text{ untuk } 1 \leq k \leq m; k \text{ ganjil} \\
\beta_2(y_{n-1}^k x_n^k) &= \frac{4nm+2m-k+2}{2}, \text{ untuk } 1 \leq k \leq m; k \text{ genap} \\
\beta_2(x_i^k y_i^k) &= \frac{8nm-4mi-m-k+1}{2}, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n-1, 1 \leq k \leq m; k \text{ genap} \\
\beta_2(x_i^k y_i^k) &= \frac{8nm-4mi-k+1}{2}, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n-1, 1 \leq k \leq m; k \text{ ganjil} \\
\beta_2(y_i^k x_{i+1}^k) &= \frac{8nm-4mi-3m-k+1}{2}, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n-2, 1 \leq k \leq m; k \text{ genap} \\
\beta_2(y_i^k x_{i+1}^k) &= \frac{8nm-4mi-2m-k+1}{2}, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n-2, 1 \leq k \leq m; k \text{ ganjil} \\
\beta_2(x_1^k x_n^k) &= 4nm - 2m + k, \text{ untuk } 1 \leq k \leq m \\
\beta_2(z^k x_n^k) &= \frac{8nm-m-k+2}{2}, \text{ untuk } 1 \leq k \leq m; k \text{ ganjil} \\
\beta_2(z^k x_n^k) &= \frac{8nm-k+2}{2}, \text{ untuk } 1 \leq k \leq m; k \text{ genap} \\
\beta_2(z^k x_i^k) &= \frac{10nm-2mi-m-k+1}{2}, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n-1, 1 \leq k \leq m; k \text{ genap} \\
\beta_2(z^k x_i^k) &= \frac{10nm-2mi-k+1}{2}, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n-1, 1 \leq k \leq m; k \text{ ganjil}
\end{aligned}$$

Jika W_{β_2} didefinisikan sebagai bobot total, maka W_{β_2} dapat diperoleh dengan menjumlahkan rumus bobot sisi EAVL $w_{\beta_2} = w_{\beta_1}$ dan rumus label sisi β_2 dengan syarat batas i dan k yang bersesuaian dan diturunkan rumus:

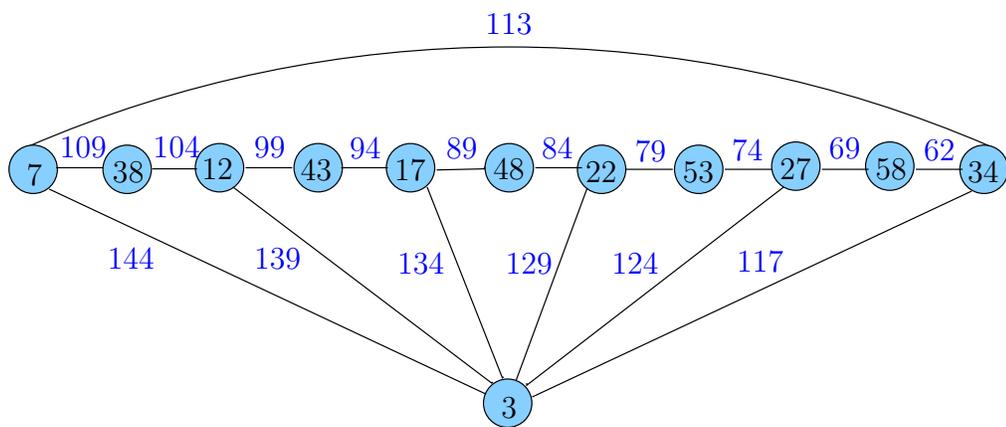
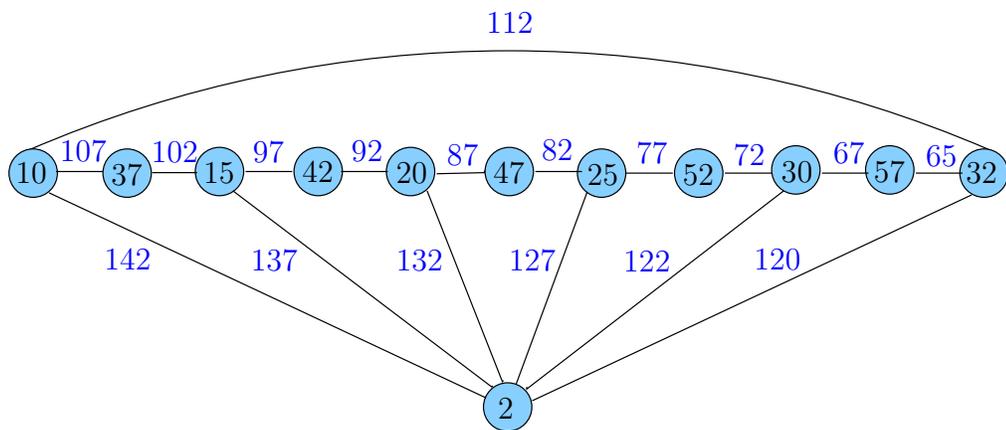
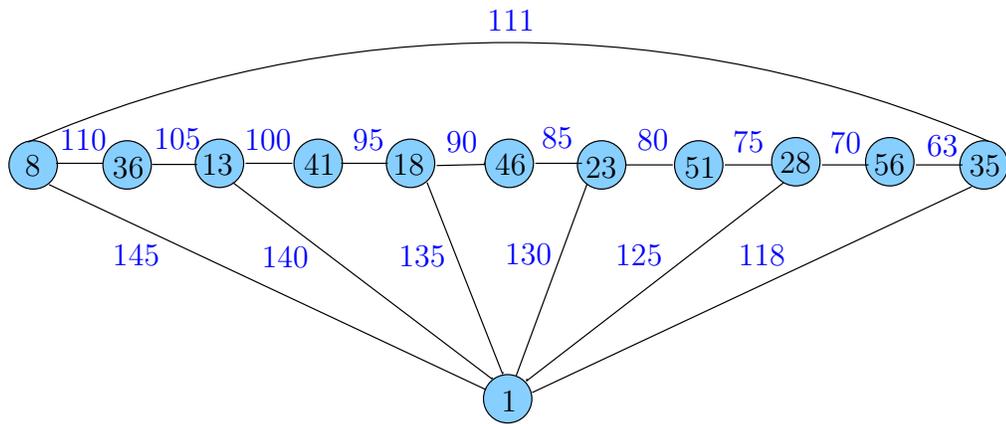
$$\begin{aligned}
W_{\beta_2}^1(y_{n-1}^k x_n^k) &= \{w_{\beta_1} + \beta_2(y_{n-1}^k x_n^k); \text{ untuk } 1 \leq k \leq m; k \text{ ganjil}\} \\
&= \left(\frac{6nm+k+1}{2} + \frac{4nm+m-k+2}{2}\right) \\
&= \frac{10nm+m+3}{2} \\
W_{\beta_2}^2(y_{n-1}^k x_n^k) &= \{w_{\beta_1} + \beta_2(y_{n-1}^k x_n^k); \text{ untuk } 1 \leq k \leq m; k \text{ genap}\} \\
&= \left(\frac{4nm+2m-k+2}{2} + \frac{6nm-m+k+1}{2}\right) \\
&= \frac{10nm+m+3}{2} \\
W_{\beta_2}^3(x_i^k y_i^k) &= \{w_{\beta_1} + \beta_2(x_i^k y_i^k); \text{ untuk } 1 \leq i \leq n-1, \\
1 \leq k \leq m; k \text{ genap}\} \\
&= \left(\frac{8nm-4mi-m-k+1}{2} + \frac{2nm+4mi+2m+k+2}{2}\right) \\
&= \frac{10nm+m+3}{2} \\
W_{\beta_2}^4(x_i^k y_i^k) &= \{w_{\beta_1} + \beta_2(x_i^k y_i^k); \text{ untuk } 1 \leq i \leq n-1, \\
1 \leq k \leq m; k \text{ ganjil}\} \\
&= \left(\frac{8nm-4mi-k+1}{2} + \frac{2nm+4mi+m+k+2}{2}\right) \\
&= \frac{10nm+m+3}{2} \\
W_{\beta_2}^5(y_i^k x_{i+1}^k) &= \{w_{\beta_1} + \beta_2(y_i^k x_{i+1}^k); \text{ untuk } 1 \leq i \leq n-2, \\
1 \leq k \leq m; k \text{ genap}\} \\
&= \left(\frac{8nm-4mi-3m-k+1}{2} + \frac{2nm+4mi+4m+k+2}{2}\right) \\
&= \frac{10nm+m+3}{2} \\
W_{\beta_2}^6(y_i^k x_{i+1}^k) &= \{w_{\beta_1} + \beta_2(y_i^k x_{i+1}^k); \text{ untuk } 1 \leq i \leq n-2, \\
1 \leq k \leq m; k \text{ ganjil}\} \\
&= \left(\frac{8nm-4mi-2m-k+1}{2} + \frac{2nm+4mi+3m+k+2}{2}\right) \\
&= \frac{10nm+m+3}{2} \\
W_{\beta_2}^7(x_1^k x_n^k) &= \{w_{\beta_1} + \beta_2(x_1^k x_n^k); \text{ untuk } 1 \leq k \leq m\} \\
&= \left(4nm - 2m + k + \frac{2nm+5m-2k+3}{2}\right) \\
&= \frac{10nm+m+3}{2} \\
W_{\beta_2}^8(z^k x_n^k) &= \{w_{\beta_1} + \beta_2(z^k x_n^k); \text{ untuk } 1 \leq k \leq m; k \text{ ganjil}\} \\
&= \left(\frac{8nm-m-k+2}{2} + \frac{2nm+2m+k+1}{2}\right) \\
&= \frac{10nm+m+3}{2}
\end{aligned}$$

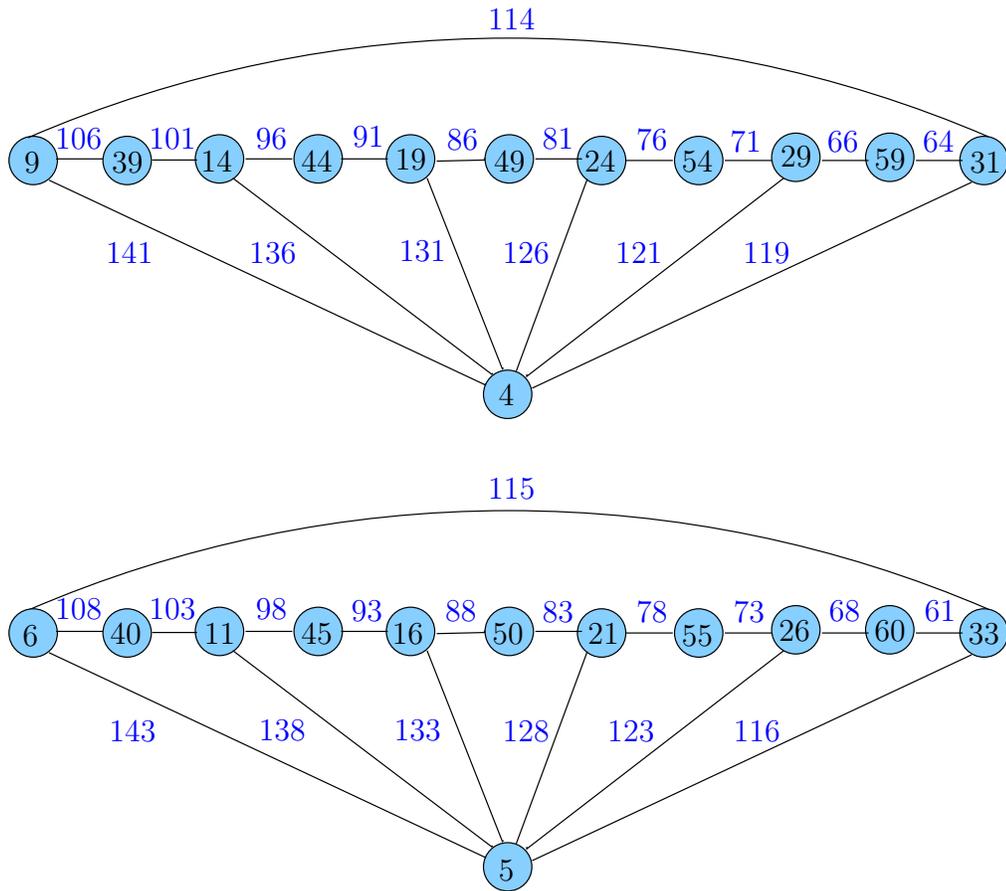
$$\begin{aligned}
W_{\beta_2}^9(z^k x_n^k) &= \{w_{\beta_1} + \beta_2(z^k x_n^k); \text{ untuk } 1 \leq k \leq m; k \text{ genap}\} \\
&= \left(\frac{8nm-k+2}{2} + \frac{2nm+m+k+1}{2}\right) \\
&= \frac{10nm+m+3}{2} \\
W_{\beta_2}^{10}(z^k x_i^k) &= \{w_{\beta_1} + \beta_2(z^k x_i^k); \text{ untuk } 1 \leq i \leq n-1, 1 \leq k \leq m; k \text{ genap}\} \\
&= \left(\frac{10nm-2mi-m-k+1}{2} + \frac{2mi+2m+k+2}{2}\right) \\
&= \frac{10nm+m+3}{2} \\
W_{\beta_2}^{11}(z^k x_i^k) &= \{w_{\beta_1} + \beta_2(z^k x_i^k); \text{ untuk } 1 \leq i \leq n-1, 1 \leq k \leq m; k \text{ ganjil}\} \\
&= \left(\frac{10nm-2mi-k+1}{2} + \frac{2mi+m+k+2}{2}\right) \\
&= \frac{10nm+m+3}{2}
\end{aligned}$$

Tampak bahwa semua sisi memiliki bobot yang sama yaitu $\frac{10nm+m+3}{2}$, maka himpunan bobot sisi $\bigcup_{r=1}^{11} W_{\beta_2}^r = \{\frac{10nm+m+3}{2}, \frac{10nm+m+3}{2}, \dots, \frac{10nm+m+3}{2}\}$. Sehingga dapat disimpulkan bahwa gabungan graf semi parasut mSP_{2n-1} dengan $m \geq 3$ dan $n \geq 2$ mempunyai pelabelan super (a, d) -sisi antimagic total dengan $a = \frac{10nm+m+3}{2}$ dan $d = 0$, atau gabungan graf semi parasut mSP_{2n-1} mempunyai pelabelan super $(\frac{10nm+m+3}{2}, 0)$ -sisi antimagic total jika $m \geq 3$ dan $n \geq 2$. Gambar 5.7 merupakan contoh pelabelan super $(154, 0)$ -sisi antimagic total (*SEATL*) pada gabungan graf semi parasut ($7SP_{2n-1}$). \square

\diamond **Teorema 5.1.5.** *Ada pelabelan super $(\frac{4nm+3m+5}{2}, 2)$ -sisi antimagic total pada gabungan saling lepas graf semi parasut mSP_{2n-1} jika $n \geq 2$, $m \geq 3$ dan m ganjil.*

Bukti. Gunakan pelabelan titik fungsi bijektif $\beta_3 = \beta_1$ untuk melabeli titik





Gambar 5.7 Pelabelan super $(154, 0)$ -sisi antimagic total pada $5SP_{2n-1}$ dengan $n = 6$

gabungan saling lepas semi parasut mSP_{2n-1} , sehingga:

$$\begin{aligned}\beta_1(z^k) &= k, \text{ untuk } 1 \leq k \leq m, k \text{ sebarang} \\ \beta_1(x_i^k) &= \begin{cases} \frac{m+2mi-k+2}{2}, & \text{untuk } 1 \leq i \leq n-1, 1 \leq k \leq m, k \text{ ganjil} \\ \frac{2m+2mi-k+2}{2}, & \text{untuk } 1 \leq i \leq n-1, 1 \leq k \leq m, k \text{ genap} \end{cases} \\ \beta_1(x_n^k) &= \begin{cases} \frac{2nm+m-k+1}{2}, & \text{untuk } 1 \leq k \leq m, k \text{ genap} \\ \frac{2nm+2m-k+1}{2}, & \text{untuk } 1 \leq k \leq m, k \text{ ganjil} \end{cases} \\ \beta_1(y_i^k) &= mn + mi + k, \text{ untuk } 1 \leq k \leq m, k \text{ sebarang}\end{aligned}$$

kemudian definisikan label sisi $\beta_3 : E(mSP_{2n-1}) \rightarrow \left\{ \frac{4nm+2mi-2m+k+1}{2}, \frac{4nm+2mi-m+k+1}{2}, \dots, \frac{10nm-3m+k}{2} \right\}$, sedemikian hingga label sisi β_3 untuk pelabelan total super $(a, 2)$ -sisi antimagic pada gabungan saling lepas graf semi parasut mSP_{2n-1} dapat dirumuskan sebagai berikut:

untuk $1 \leq k \leq m$ maka :

$$\begin{aligned}\beta_3(z^k x_i^k) &= \frac{4nm+2mi-2m+k+1}{2}, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n-1, 1 \leq k \leq m; k \text{ ganjil} \\ \beta_3(z^k x_i^k) &= \frac{4nm+2mi-m+k+1}{2}, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n-1, 1 \leq k \leq m; k \text{ genap} \\ \beta_3(z^k x_n^k) &= \frac{6nm-2m+k}{2}, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n-1, 1 \leq k \leq m; k \text{ genap} \\ \beta_3(z^k x_n^k) &= \frac{6nm-m+k}{2}, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n-1, 1 \leq k \leq m; k \text{ ganjil} \\ \beta_3(x_1^k x_n^k) &= 3nm + m - k + 1, \text{ untuk } 1 \leq k \leq m \\ \beta_3(x_i^k y_i^k) &= \frac{6nm+4mi-2m+k+1}{2}, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n-1, 1 \leq k \leq m; k \text{ ganjil} \\ \beta_3(x_i^k y_i^k) &= \frac{6nm+4mi-m+k+1}{2}, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n-1, 1 \leq k \leq m; k \text{ genap} \\ \beta_3(y_i^k x_{i+1}^k) &= \frac{6nm+4mi+k+1}{2}, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n-2, 1 \leq k \leq m; k \text{ ganjil} \\ \beta_3(y_i^k x_{i+1}^k) &= \frac{6nm+4mi+m+k+1}{2}, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n-2, 1 \leq k \leq m; k \text{ genap} \\ \beta_3(y_{n-1}^k x_n^k) &= \frac{10nm-4m+k}{2}, \text{ untuk } 1 \leq k \leq m; k \text{ genap} \\ \beta_3(y_{n-1}^k x_n^k) &= \frac{10nm-3m+k}{2}, \text{ untuk } 1 \leq k \leq m; k \text{ ganjil}\end{aligned}$$

Selanjutnya jika W_{β_3} didefinisikan sebagai bobot total, maka W_{β_3} dapat diperoleh dengan menjumlahkan rumus bobot sisi EAVL $w_{\beta_3} = w_{\beta_1}$ dan rumus label sisi β_3 dengan syarat batas i dan k yang bersesuaian dan dapat diturunkan rumus

sebagai berikut:

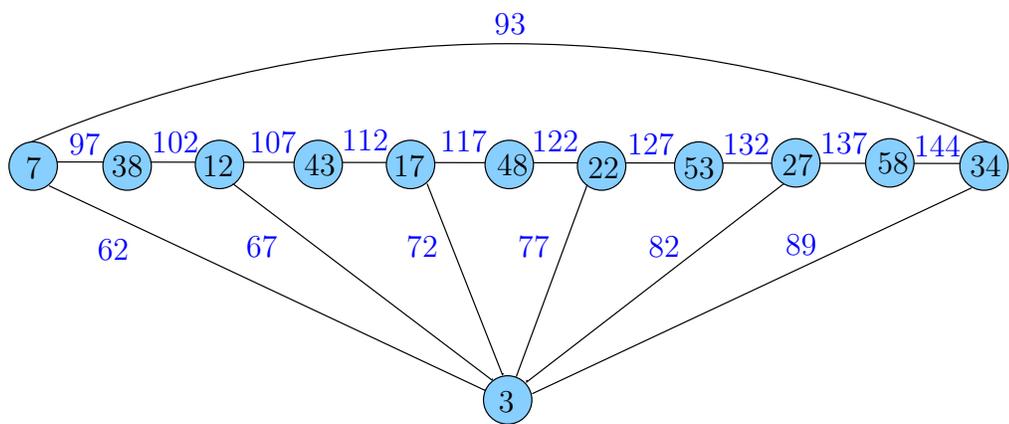
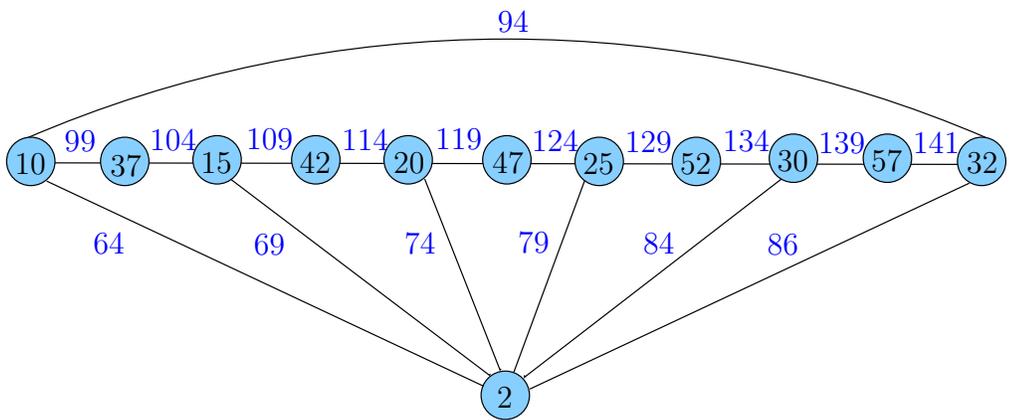
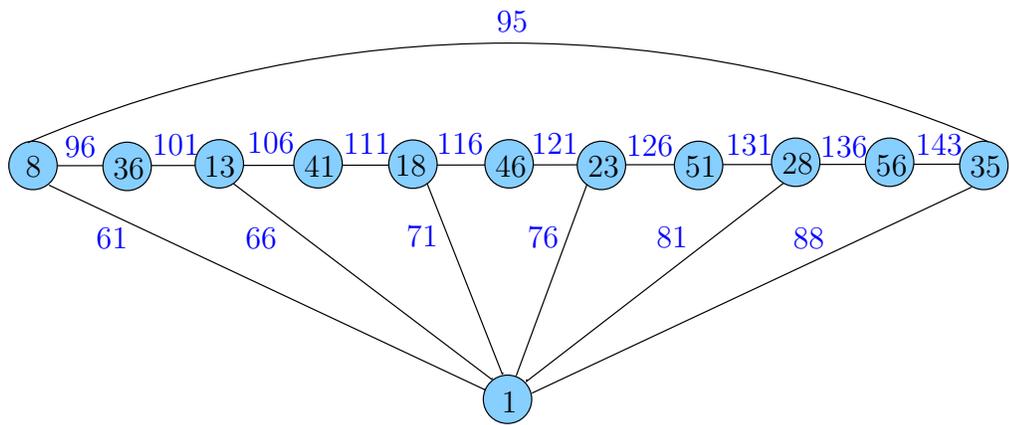
$$\begin{aligned}
W_{\beta_3}^1(z^k x_i^k) &= \{w_{\beta_1} + \beta_3(z^k x_i^k); \text{ untuk } 1 \leq i \leq n-1, \\
&1 \leq k \leq m; k \text{ ganjil}\} \\
&= \left(\frac{m+2mi+k+2}{2} + \frac{4nm+2mi-2m+k+1}{2} \right) \\
&= \frac{4nm+4mi-m+2k+3}{2} \\
W_{\beta_3}^2(z^k x_i^k) &= \{w_{\beta_1} + \beta_3(z^k x_i^k); \text{ untuk } 1 \leq i \leq n-1, \\
&1 \leq k \leq m; k \text{ genap}\} \\
&= \left(\frac{2m+2mi+k+2}{2} + \frac{4nm+2mi-m+k+1}{2} \right) \\
&= \frac{4nm+4mi+m+2k+3}{2} \\
W_{\beta_3}^3(z^k x_n^k) &= \{w_{\beta_1} + \beta_3(z^k x_n^k); \text{ untuk } 1 \leq k \leq m; k \text{ genap}\} \\
&= \left(\frac{2nm+m+k+1}{2} + \frac{6nm-2m+k}{2} \right) \\
&= \frac{8nm-m+2k+1}{2} \\
W_{\beta_3}^4(z^k x_n^k) &= \{w_{\beta_1} + \beta_3(z^k x_n^k); \text{ untuk } 1 \leq k \leq m; k \text{ ganjil}\} \\
&= \left(\frac{2nm+2m+k+1}{2} + \frac{6nm-m+k}{2} \right) \\
&= \frac{8nm+m+2k+1}{2} \\
W_{\beta_3}^5(x_1^k x_n^k) &= \{w_{\beta_1} + \beta_3(x_1^k x_n^k); \text{ untuk } 1 \leq k \leq m\} \\
&= \left(\frac{2nm+5m-2k+3}{2} + 3nm + m - k + 1 \right) \\
&= \frac{8nm+7m-4k+5}{2} \\
W_{\beta_3}^6(x_i^k y_i^k) &= \{w_{\beta_1} + \beta_3(x_i^k y_i^k); \text{ untuk } 1 \leq i \leq n-1; \\
&1 \leq k \leq m; k \text{ ganjil}\} \\
&= \left(\frac{2nm+4mi+m+k+2}{2} + \frac{6nm+4mi-2m+k+1}{2} \right) \\
&= \frac{8nm+8mi-m+2k+3}{2} \\
W_{\beta_3}^7(x_i^k y_i^k) &= \{w_{\beta_1} + \beta_3(x_i^k y_i^k); \text{ untuk } 1 \leq i \leq n-1; \\
&1 \leq k \leq m; k \text{ genap}\} \\
&= \left(\frac{2nm+4mi+2m+k+2}{2} + \frac{6nm+4mi-m+k+1}{2} \right) \\
&= \frac{8nm+8mi+m+2k+3}{2} \\
W_{\beta_3}^8(y_i^k x_{i+1}^k) &= \{w_{\beta_1} + \beta_3(y_i^k x_{i+1}^k); \text{ untuk } 1 \leq i \leq n-2, \\
&1 \leq k \leq m; k \text{ ganjil}\} \\
&= \left(\frac{2nm+4mi+3m+k+2}{2} + \frac{6nm+4mi+k+1}{2} \right) \\
&= \frac{8nm+8mi+3m+2k+3}{2}
\end{aligned}$$

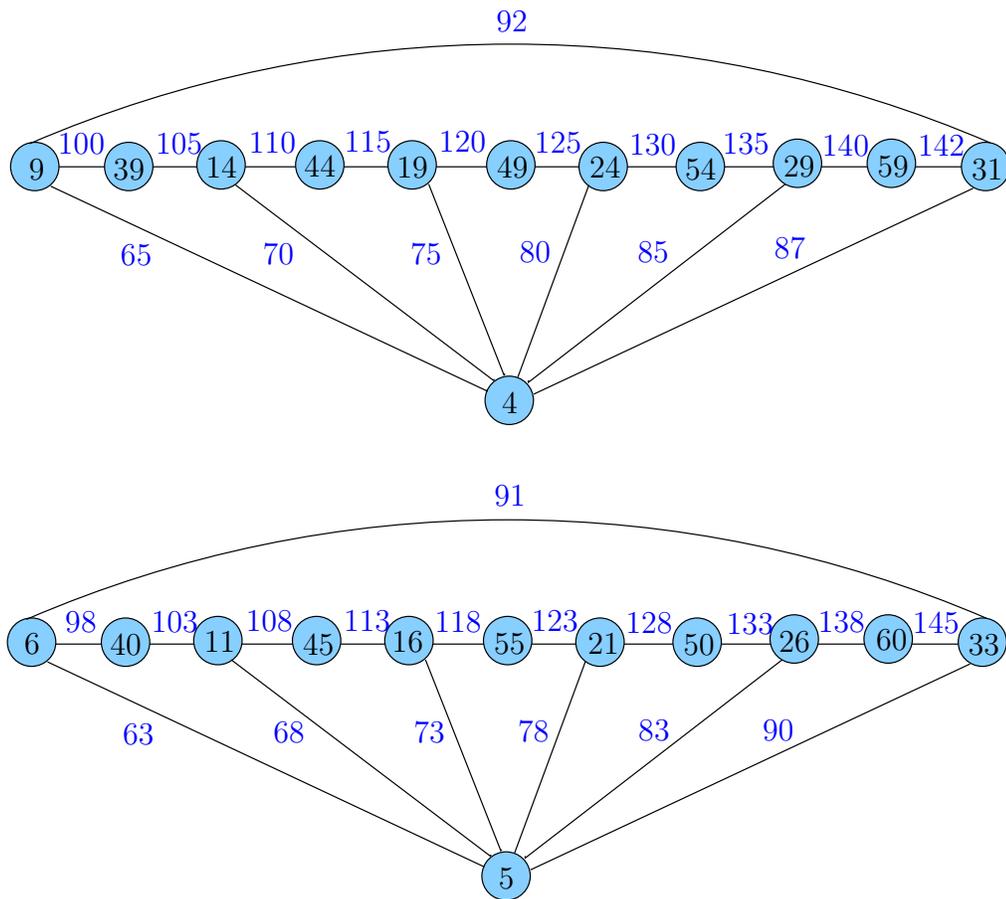
$$\begin{aligned}
W_{\beta_3}^9(y_i^k x_{i+1}^k) &= \{w_{\beta_1} + \beta_3(y_i^k x_{i+1}^k); \text{ untuk } 1 \leq i \leq n-2, \\
&1 \leq k \leq m; k \text{ genap}\} \\
&= \left(\frac{2nm+4mi+4m+k+2}{2} + \frac{6nm+4mi+m+k+1}{2}\right) \\
&= \frac{8nm+8mi+5m+2k+3}{2} \\
W_{\beta_3}^{10}(y_{n-1}^k x_n^k) &= \{w_{\beta_1} + \beta_3(y_{n-1}^k x_n^k); \text{ untuk } 1 \leq k \leq m; k \text{ genap}\} \\
&= \left(\frac{6nm-m+k+1}{2} + \frac{10nm-4m+k}{2}\right) \\
&= \frac{16nm-5m+2k+1}{2} \\
W_{\beta_3}^{11}(y_{n-1}^k x_n^k) &= \{w_{\beta_1} + \beta_3(y_{n-1}^k x_n^k); \text{ untuk } 1 \leq k \leq m; k \text{ ganjil}\} \\
&= \left(\frac{6nm+k+1}{2} + \frac{10nm-3m+k}{2}\right) \\
&= \frac{16nm-3m+2k+1}{2}
\end{aligned}$$

Jika disubstitusikan nilai batasan yang tepat sesuai rumusan yang diberikan diatas, maka nilai bobot terkecil akan diperoleh pada $W_{\beta_3}^1(z^k x_i^k)$ untuk $i = 1$ dan $k = 1$ yaitu $\frac{4nm+3m+5}{2}$. Sedangkan bobot terbesar terletak pada $W^{11}_{\beta_3}(y_{n-1}^k x_n^k)$ untuk $k = m$ atau dapat diperoleh dengan mensubstitusikan $U_n = a + (n-1)b = \frac{4nm+3m+5}{2} + (3nm-m-1)2$, $U_n = \frac{16nm-m+1}{2}$. Setelah semua nilai batasan dimasukkan dengan benar sesuai definisi rumus diatas, maka rumusan tersebut dapat pula dituliskan sebagai $\bigcup_{r=1}^{11} W_{\beta_3}^r = \{\frac{4nm+3m+5}{2}, \frac{4nm+3m+9}{2}, \dots, \frac{16nm-m+1}{2}\}$. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa gabungan graf semi parasut mSP_{2n-1} dengan $m \geq 3$, m ganjil, $n \geq 2$, mempunyai pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic dengan $a = \frac{4nm+3m+5}{2}$ dan $d = 2$, dengan kata lain gabungan graf semi parasut mSP_{2n-1} mempunyai pelabelan super $(\frac{4nm+3m+5}{2}, 2)$ -sisi antimagic total jika $m \geq 3$, $n \geq 2$, m ganjil. Gambar 5.8 adalah contoh pelabelan $(\frac{4nm+3m+5}{2}, 2)$ -sisi antimagic. \square

\diamond **Teorema 5.1.6.** *Ada pelabelan super $(\frac{14nm+4m+8}{4}, 1)$ -sisi antimagic total pada gabungan graf semi parasut mSP_{2n-1} untuk $m \geq 3$, m ganjil dan $n \geq 2$, n genap.*

Bukti. Labeli titik gabungan graf semi parasut mSP_{2n-1} dengan fungsi bijektif fungsi bijektif $\beta_4 = \beta_1$ untuk $1 \leq k \leq m$, sehingga:





Gambar 5.8 Pelabelan super $(70, 2)$ -sisi antimagic total pada $5SP_{2n-1}$ dengan $n = 6$

$$\begin{aligned}
\beta_4(z^k) &= k, \text{ untuk } 1 \leq k \leq m, k \text{ sebarang} \\
\beta_4(x_i^k) &= \begin{cases} \frac{m+2mi-k+2}{2}, & \text{untuk } 1 \leq i \leq n-1, 1 \leq k \leq m, k \text{ ganjil} \\ \frac{2m+2mi-k+2}{2}, & \text{untuk } 1 \leq i \leq n-1, 1 \leq k \leq m, k \text{ genap} \end{cases} \\
\beta_4(x_n^k) &= \begin{cases} \frac{2nm+m-k+1}{2}, & \text{untuk } 1 \leq k \leq m, k \text{ genap} \\ \frac{2nm+2m-k+1}{2}, & \text{untuk } 1 \leq k \leq m, k \text{ ganjil} \end{cases} \\
\beta_4(y_i^k) &= mn + mi + k, \text{ untuk } 1 \leq k \leq m, k \text{ sebarang}
\end{aligned}$$

Kemudian definisikan pelabelan $\beta_4 : E(mSP_{2n-1}) \rightarrow \{\frac{8nm+m-k+4}{4}, \frac{8nm+2m-k+4}{4}, \dots, \frac{20nm-2im-2m-k+3}{4}\}$, sedemikian hingga label sisi β_4 untuk pelabelan super $(a, 1)$ -sisi antimagic tota pada gabungan saling lepas graf semi parasut mSP_{2n-1} dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\beta_4(y_{n-1}^k x_n^k) &= \frac{8nm+m-k+4}{4}, \text{ untuk } 1 \leq k \leq m; \\
k &= 1 \text{ mod } 4 \\
\beta_4(y_{n-1}^k x_n^k) &= \frac{8nm+2m-k+4}{4}, \text{ untuk } 1 \leq k \leq m; \\
k &= 2 \text{ mod } 4 \\
\beta_4(x_i^k y_i^k) &= \frac{12nm-4mi-m-k+3}{4}, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n-1; \\
1 \leq k \leq m; k &= 2 \text{ mod } 4 \\
\beta_4(x_i^k y_i^k) &= \frac{12nm-4mi-k+3}{4}, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n-1; \\
1 \leq k \leq m; k &= 3 \text{ mod } 4 \\
\beta_4(y_i^k x_{i+1}^k) &= \frac{12nm-4mi-3m-k+3}{4}, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n-2; \\
1 \leq k \leq m; k &= 4 \text{ mod } 4 \\
\beta_4(y_i^k x_{i+1}^k) &= \frac{12nm-4mi-2m-k+3}{4}, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n-1; \\
1 \leq k \leq m; k &= 1 \text{ mod } 4 \\
\beta_4(x_1^k x_n^k) &= \frac{12nm-4m+2k+2}{4}, \text{ untuk } 1 \leq k \leq m; \\
k &= 1 \text{ mod } 2 \\
\beta_4(z^k x_n^k) &= \frac{12nm-m-k+4}{4}, \text{ untuk } 1 \leq k \leq m; \\
k &= 3 \text{ mod } 4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_4(z^k x_n^k) &= \frac{12nm-k+4}{4}, \text{ untuk } 1 \leq k \leq m; \\
k &= 4 \pmod{4} \\
\beta_4(z^k x_i^k) &= \frac{14nm-2mi-m-k+3}{4}, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n-1; \\
i &\text{ ganjil; } 1 \leq k \leq m; k = 4 \pmod{4} \\
\beta_4(z^k x_i^k) &= \frac{14nm-2mi-k+3}{4}, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n-1; \\
i &\text{ ganjil; } 1 \leq k \leq m; k = 1 \pmod{4} \\
\beta_4(z^k x_i^k) &= \frac{14nm-2mi-m-k+3}{4}, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n-2; \\
i &\text{ genap; } 1 \leq k \leq m; k = 2 \pmod{4} \\
\beta_4(z^k x_i^k) &= \frac{14nm-2mi-k+3}{4}, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n-2; \\
i &\text{ genap; } 1 \leq k \leq m; k = 3 \pmod{4} \\
\beta_4(y_{n-1}^k x_n^k) &= \frac{14nm-m-k+4}{4}, \\
\text{untuk } 1 \leq k \leq m; k &= 3 \pmod{4} \\
\beta_4(y_{n-1}^k x_n^k) &= \frac{14nm-k+4}{4}, \\
\text{untuk } 1 \leq k \leq m; k &= 4 \pmod{4} \\
\beta_4(x_i^k y_i^k) &= \frac{18nm-4mi-3m-k+3}{4}, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n-1; \\
1 \leq k \leq m; k &= 4 \pmod{4} \\
\beta_4(x_i^k y_i^k) &= \frac{18nm-4mi-2m-k+3}{4}, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n-1; \\
1 \leq k \leq m; k &= 1 \pmod{4} \\
\beta_4(y_i^k x_{i+1}^k) &= \frac{18nm-4mi-5m-k+3}{4}, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n-2; \\
1 \leq k \leq m; k &= 2 \pmod{4} \\
\beta_4(y_i^k x_{i+1}^k) &= \frac{18nm-4mi-4m-k+3}{4}, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n-2; \\
1 \leq k \leq m; k &= 3 \pmod{4} \\
\beta_4(x_1^k x_n^k) &= \frac{18nm-6m+2k+2}{4}, \\
\text{untuk } 1 \leq k \leq m; k &= 2 \pmod{2} \\
\beta_4(z^k x_n^k) &= \frac{18nm-3m-k+4}{4}, \\
\text{untuk } 1 \leq k \leq m; k &= 1 \pmod{4} \\
\beta_4(z^k x_n^k) &= \frac{18nm-2m-k+4}{4}, \\
\text{untuk } 1 \leq k \leq m; k &= 2 \pmod{4} \\
\beta_4(z^k x_i^k) &= \frac{20nm-2mi-3m-k+3}{4}, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n-1; \\
i &\text{ ganjil; } 1 \leq k \leq m; k = 2 \pmod{4} \\
\beta_4(z^k x_i^k) &= \frac{20nm-2mi-2m-k+3}{4}, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n-1; \\
i &\text{ ganjil; } 1 \leq k \leq m; k = 3 \pmod{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_4(z^k x_i^k) &= \frac{20nm-2mi-3m-k+3}{4}, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n-2; \\
& i \text{ genap; } 1 \leq k \leq m; k = 4 \text{ mod } 4 \\
\beta_4(z^k x_i^k) &= \frac{20nm-2mi-2m-k+3}{4}, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n-2; \\
& i \text{ genap; } 1 \leq k \leq m; k = 1 \text{ mod } 4
\end{aligned}$$

Jika W_{β_4} didefinisikan sebagai bobot sisi pelabelan total pada graf semi parasut maka W_{β_4} dapat diperoleh dengan menjumlahkan rumus bobot sisi EAVL $w_{\beta_4} = w_{\beta_1}$ dan rumus label sisi β_4 sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
W_{\beta_4}^1(y_{n-1}^k x_n^k) &= \{w_{\beta_1} + \beta_4(y_{n-1}^k x_n^k); \text{ untuk } 1 \leq k \leq m; \\
& k = 1 \text{ mod } 4\} \\
&= \left(\frac{6nm+k+1}{2} + \frac{8nm+m-k+4}{4}\right) \\
&= \frac{20nm+m+k+6}{4} \\
W_{\beta_4}^2(y_{n-1}^k x_n^k) &= \{w_{\beta_1} + \beta_4(y_{n-1}^k x_n^k); \text{ untuk } 1 \leq k \leq m; \\
& k = 2 \text{ mod } 4\} \\
&= \left(\frac{6nm-m+k+1}{2} + \frac{8nm+2m-k+4}{4}\right) \\
&= \frac{20nm+k+6}{4} \\
W_{\beta_4}^3(x_i^k y_i^k) &= \{w_{\beta_1} + \beta_4(x_i^k y_i^k); \text{ untuk } 1 \leq i \leq n-1; \\
& 1 \leq k \leq m; k = 2 \text{ mod } 4\} \\
&= \left(\frac{2nm+4mi+2m+k+2}{2} + \frac{12nm-4mi-m-k+3}{4}\right) \\
&= \frac{16nm+4mi+3m+k+7}{4} \\
W_{\beta_4}^4(x_i^k y_i^k) &= \{w_{\beta_1} + \beta_4(x_i^k y_i^k); \text{ untuk } 1 \leq i \leq n-1; \\
& 1 \leq k \leq m; k = 3 \text{ mod } 4\} \\
&= \left(\frac{2nm+4mi+m+k+2}{2} + \frac{12nm-4mi-k+3}{4}\right) \\
&= \frac{16nm+4mi+2m+k+7}{4} \\
W_{\beta_4}^5(y_i^k x_{i+1}^k) &= \{w_{\beta_1} + \beta_4(y_i^k x_{i+1}^k); \text{ untuk } 1 \leq i \leq n-2; \\
& 1 \leq k \leq m; k = 4 \text{ mod } 4\} \\
&= \left(\frac{2nm+4mi+4m+k+2}{2} + \frac{12nm-4mi-3m-k+3}{4}\right) \\
&= \frac{16nm+4mi+5m+k+7}{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\beta_4}^6(y_i^k x_{i+1}^k) &= \{w_{\beta_1} + \beta_4(y_i^k x_{i+1}^k); \text{ untuk } 1 \leq i \leq n-2; \\
1 \leq k \leq m; k &= 1 \pmod{4}\} \\
&= \left(\frac{2nm+4mi+3m+k+2}{2} + \frac{12nm-4mi-2m-k+3}{4} \right) \\
&= \frac{16nm+4mi+4m+k+7}{4} \\
W_{\beta_4}^7(x_1^k x_n^k) &= \{w_{\beta_1} + \beta_4(x_1^k x_n^k); \text{ untuk } 1 \leq k \leq m; \\
k &= 1 \pmod{2}\} \\
&= \left(\frac{2nm+5m-2k+3}{2} + \frac{12nm-4m+2k+2}{4} \right) \\
&= \frac{16nm+6m-2k+8}{4} \\
W_{\beta_4}^8(z^k x_n^k) &= \{w_{\beta_1} + \beta_4(z^k x_n^k); \text{ untuk } 1 \leq k \leq m; \\
k &= 3 \pmod{4}\} \\
&= \left(\frac{2nm+2m+k+1}{2} + \frac{12nm-m-k+4}{4} \right) \\
&= \frac{16nm+3m+k+6}{4} \\
W_{\beta_4}^9(z^k x_n^k) &= \{w_{\beta_1} + \beta_4(z^k x_n^k); \text{ untuk } 1 \leq k \leq m; \\
k &= 4 \pmod{4}\} \\
&= \left(\frac{2nm+m+k+1}{2} + \frac{12nm-k+4}{4} \right) \\
&= \frac{16nm+2m+k+6}{4} \\
W_{\beta_4}^{10}(z^k x_i^k) &= \{w_{\beta_1} + \beta_4(z^k x_i^k); \text{ untuk } 1 \leq i \leq n-1; i \text{ ganjil}; \\
1 \leq k \leq m; k &= 4 \pmod{4}\} \\
&= \left(\frac{2nm+2mi+k+2}{2} + \frac{14nm-2mi-m-k+3}{4} \right) \\
&= \frac{14nm+2mi+3m+k+7}{4} \\
W_{\beta_4}^{11}(z^k x_i^k) &= \{w_{\beta_1} + \beta_4(z^k x_i^k); \text{ untuk } 1 \leq i \leq n-1; i \text{ ganjil}; \\
1 \leq k \leq m; k &= 1 \pmod{4}\} \\
&= \left(\frac{2mi+m+k+2}{2} + \frac{14nm-2mi-k+3}{4} \right) \\
&= \frac{14nm+2mi+2m+k+7}{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\beta_4}^{12}(z^k x_i^k) &= \{w_{\beta_1} + \beta_4(z^k x_i^k); \text{ untuk } 1 \leq i \leq n-2; i \text{ genap}; \\
&1 \leq k \leq m; k = 2 \text{ mod } 4\} \\
&= \left(\frac{2mi+2m+k+2}{2} + \frac{14nm-2mi-m-k+3}{4} \right) \\
&= \frac{14nm+2mi+3m+k+7}{4} \\
W_{\beta_4}^{13}(z^k x_i^k) &= \{w_{\beta_1} + \beta_4(z^k x_i^k); \text{ untuk } 1 \leq i \leq n-2; i \text{ ganjip}; \\
&1 \leq k \leq m; k = 3 \text{ mod } 4\} \\
&= \left(\frac{2mi+m+k+2}{2} + \frac{14nm-2mi-k+3}{4} \right) \\
&= \frac{14nm+2mi+2m+k+7}{4} \\
W_{\beta_4}^{14}(y_{n-1}^k x_n^k) &= \{w_{\beta_1} + \beta_4(y_{n-1}^k x_n^k); \text{ untuk } 1 \leq k \leq m; \\
&k = 3 \text{ mod } 4\} \\
&= \left(\frac{6nm+k+1}{2} + \frac{14nm-m-k+4}{4} \right) \\
&= \frac{26nm-m+k+6}{4} \\
W_{\beta_4}^{15}(y_{n-1}^k x_n^k) &= \{w_{\beta_1} + \beta_4(y_{n-1}^k x_n^k); \text{ untuk } 1 \leq k \leq m; \\
&k = 4 \text{ mod } 4\} \\
&= \left(\frac{6nm-m+k+1}{2} + \frac{14nm-k+4}{4} \right) \\
&= \frac{26nm-2m+k+6}{4} \\
W_{\beta_4}^{16}(x_i^k y_i^k) &= \{w_{\beta_1} + \beta_4(x_i^k y_i^k); \text{ untuk } 1 \leq i \leq n-1; \\
&1 \leq k \leq m; k = 4 \text{ mod } 4\} \\
&= \left(\frac{2nm+4mi+2m+k+2}{2} + \frac{18nm-4mi-3m-k+3}{4} \right) \\
&= \frac{22nm+4mi+m+k+7}{4} \\
W_{\beta_4}^{17}(x_i^k y_i^k) &= \{w_{\beta_1} + \beta_4(x_i^k y_i^k); \text{ untuk } 1 \leq i \leq n-1; \\
&1 \leq k \leq m; k = 1 \text{ mod } 4\} \\
&= \left(\frac{2nm+4mi+m+k+2}{2} + \frac{18nm-4mi-m-k+3}{4} \right) \\
&= \frac{22nm+4mi+k+7}{4} \\
W_{\beta_4}^{18}(y_i^k x_{i+1}^k) &= \{w_{\beta_1} + \beta_4(y_i^k x_{i+1}^k); \text{ untuk } 1 \leq i \leq n-2; \\
&1 \leq k \leq m; k = 2 \text{ mod } 4\} \\
&= \left(\frac{2nm+4mi+4m+k+2}{2} + \frac{18nm-4mi-5m-k+3}{4} \right) \\
&= \frac{22nm+4mi+3m+k+7}{4}
\end{aligned}$$

$$W_{\beta_4}^{19}(y_i^k x_{i+1}^k) = \{w_{\beta_1} + \beta_4(y_i^k x_{i+1}^k); \text{ untuk } 1 \leq i \leq n-2;$$

$$1 \leq k \leq m; k = 3 \pmod{4}\}$$

$$= \left(\frac{2nm+4mi+3m+k+2}{2} + \frac{18nm-4mi-4m-k+3}{4} \right)$$

$$= \frac{22nm+4mi+2m+k+7}{4}$$

$$W_{\beta_4}^{20}(x_1^k x_n^k) = \{w_{\beta_1} + \beta_4(x_1^k x_n^k); \text{ untuk } 1 \leq k \leq m;$$

$$k = 2 \pmod{2}\}$$

$$= \left(\frac{2nm+5m-2k+3}{2} + \frac{18nm-6m+2k+2}{4} \right)$$

$$= \frac{22nm+4m-2k+8}{4}$$

$$W_{\beta_4}^{21}(z^k x_n^k) = \{w_{\beta_1} + \beta_4(z^k x_n^k); \text{ untuk } 1 \leq k \leq m;$$

$$k = 1 \pmod{4}\}$$

$$= \left(\frac{2nm+2m+k+1}{2} + \frac{18nm-3m-k+4}{4} \right)$$

$$= \frac{22nm+m+k+6}{4}$$

$$W_{\beta_4}^{22}(z^k x_n^k) = \{w_{\beta_1} + \beta_4(z^k x_n^k); \text{ untuk } 1 \leq k \leq m;$$

$$k = 2 \pmod{4}\}$$

$$= \left(\frac{2nm+m+k+1}{2} + \frac{18nm-2m-k+4}{4} \right)$$

$$= \frac{22nm+k+6}{4}$$

$$W_{\beta_4}^{23}(z^k x_i^k) = \{w_{\beta_1} + \beta_4(z^k x_i^k); \text{ untuk } 1 \leq i \leq n-1;$$

$$1 \leq k \leq m; k = 2 \pmod{4}\}$$

$$= \left(\frac{2mi+2m+k+2}{2} + \frac{20nm-2mi-3m-k+3}{4} \right)$$

$$= \frac{20nm+2mi+m+k+7}{4}$$

$$W_{\beta_4}^{24}(z^k x_i^k) = \{w_{\beta_1} + \beta_4(z^k x_i^k); \text{ untuk } 1 \leq i \leq n-1;$$

$$1 \leq k \leq m; k = 3 \pmod{4}\}$$

$$= \left(\frac{2mi+m+k+2}{2} + \frac{20nm-2mi-m-k+3}{4} \right)$$

$$= \frac{20nm+2mi+k+7}{4}$$

$$\begin{aligned}
W_{\beta_4}^{25}(z^k x_i^k) &= \{w_{\beta_1} + \beta_4(z^k x_i^k); \text{ untuk } 1 \leq i \leq n-2; 1 \leq k \leq m; \\
&\quad k = 4 \pmod{4}\} \\
&= \left(\frac{2mi+2m+k+2}{2} + \frac{20nm-2mi-3m-k+3}{4} \right) \\
&= \frac{20nm+2mi+m+k+7}{4} \\
W_{\beta_4}^{26}(z^k x_i^k) &= \{w_{\beta_1} + \beta_4(z^k x_i^k); \text{ untuk } 1 \leq i \leq n-2; 1 \leq k \leq m; \\
&\quad k = 1 \pmod{4}\} \\
&= \left(\frac{2mi+m+k+2}{2} + \frac{20nm-2mi-2m-k+3}{4} \right) \\
&= \frac{20nm+2mi+k+7}{4}
\end{aligned}$$

Jika diperhatikan himpunan bobot total terkecil terletak pada $W_{\beta_4}^{11}(z^k x_i^k) = \frac{14nm+2mi+2m+k+7}{4}$ untuk $i=1$ dan $k=1$ yaitu $\frac{14nm+4m+8}{4}$ sedangkan bobot sisi terbesar terletak pada $W_{\beta_4}^{14}(y_{n-1}^k x_n^k) = \frac{26nm-m+k+6}{4}$ untuk $k=m-2$ atau dapat dieproleh dengan mensubstitusikan $U_n = a + (n-1)b = \frac{14nm+4m+8}{4} + (3nm-m-1)1$, $U_n = \frac{26nm+4}{4}$. Dapat dinyatakan bahwa W_{β_4} membentuk barisan aritmatika dengan suku awal $\frac{14nm+4m+8}{4}$ dan beda 1, atau dapat dituliskan $\bigcup_{r=1}^{26} W_{\beta_4}^r = \left\{ \frac{14nm+4m+8}{4}, \frac{14nm+8m+8}{4}, \dots, \frac{26nm+4}{4} \right\}$. Dapat disimpulkan bahwa gabungan graf semi parasut mSP_{2n-1} mempunyai pelabelan super (a, d) -sisi antimagic total dengan $a = \frac{14nm+4m+8}{4}$ dan $d=1$ atau gabungan graf semi parasut mSP_{2n-1} , $m \geq 3$, m ganjil dan $n \geq 2$, n genap. \square

Untuk pelabelan super (a, d) -sisi antimagic total pada gabungan graf semi parasut mSP_{2n-1} dengan $d = 1$, penulis akan membuktikannya melalui sebuah teorema yang sudah dibuktikan oleh Martin Baca yakni apabila pada graf tunggal memiliki pelabelan super $(a, 1)$ -sisi antimagic total maka pasti pada gabungan grafnya memiliki pelabelan super $(a, 1)$ -sisi antimagic total. Berikut penjelasannya:

Bukti. Berdasarkan teorema martin baca untuk pelabelan super (a, d) -sisi antimagic, maka diperoleh rumusan:

$$\gamma(r), r \in V(G_k) = \begin{cases} m[\alpha_1(z) - 1] + k, 1 \leq k \leq m \\ m[\alpha_1(x_i) - 1] + k, 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m \\ m[\alpha_1(y_i) - 1] + k, 1 \leq i \leq n-1, 1 \leq k \leq m \end{cases}$$

dan

$$\delta(d), d \in E(G_k) = \begin{cases} m\alpha_4 + 1 - k, & 1 \leq i \leq n-1, 1 \leq k \leq m \\ m\alpha_4(x_1x_n) + 1 - k, & 1 \leq k \leq m \\ m\alpha_4(zx_i) + 1 - k, & 1 \leq i \leq n-1, i \text{ ganjil } 1 \leq k \leq m \\ m\alpha_4(x_iy_i) + 1 - k, & 1 \leq i \leq n-1, 1 \leq k \leq m \\ m\alpha_4(zx_i) + 1 - k, & 1 \leq i \leq n-1, i \text{ genap } 1 \leq k \leq m \end{cases}$$

Jika himpunan $\{f_s(u) + f_s(v) + f_s(uv); uv \in E(G_s)\} = \{a, a+1, \dots, a+q-1\}$ merupakan himpunan bobot total dari gabungan graf semi parasut mSP_{2n-1} maka berdasarkan rumus di atas diperoleh rumusan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f_s(u) + f_s(v) + f_s(uv) &= m[f_s(u) - 1] + s + m[f_s(v) - 1] + s + m.f_s(uv) + 1 - s \\ &= m[f_s(u) + f_s(v) + f_s(uv) - 2] + 1 + s \\ &= m[a - 2] + 1 + s \end{aligned}$$

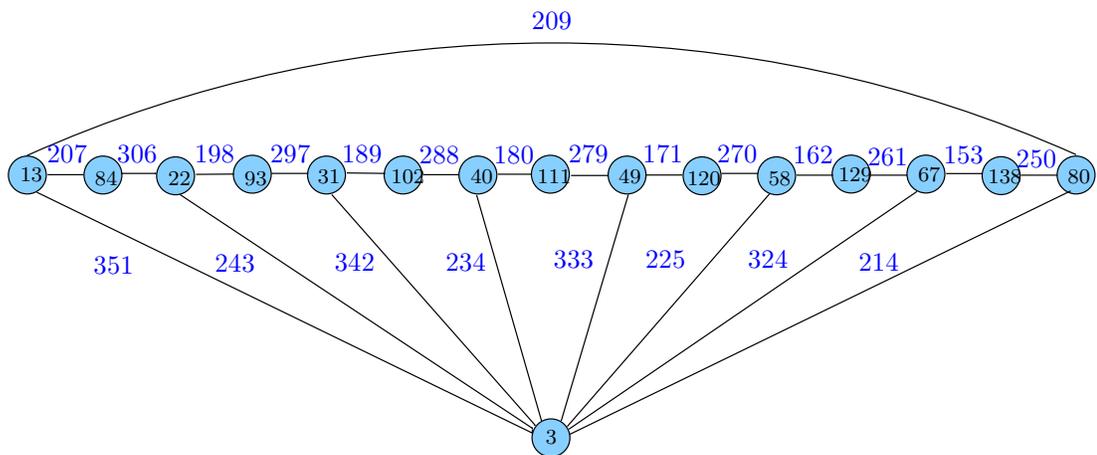
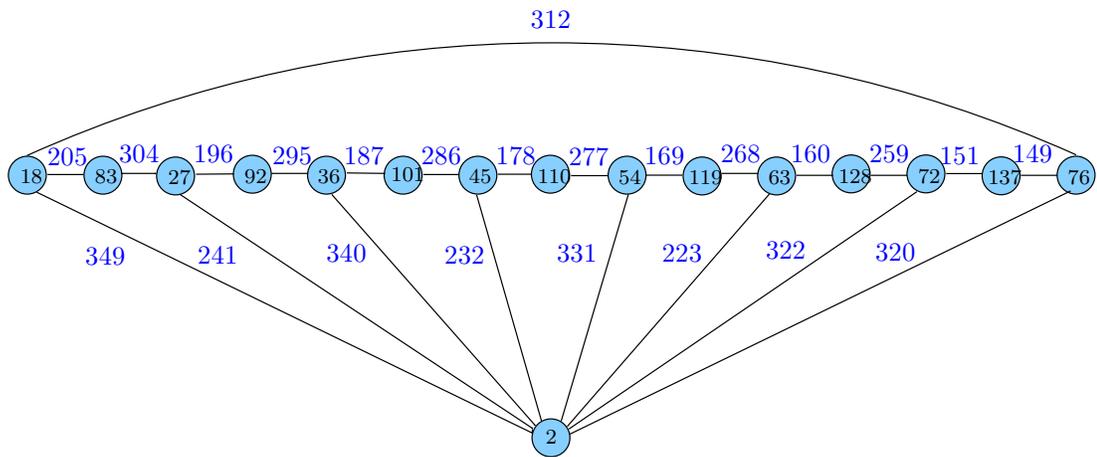
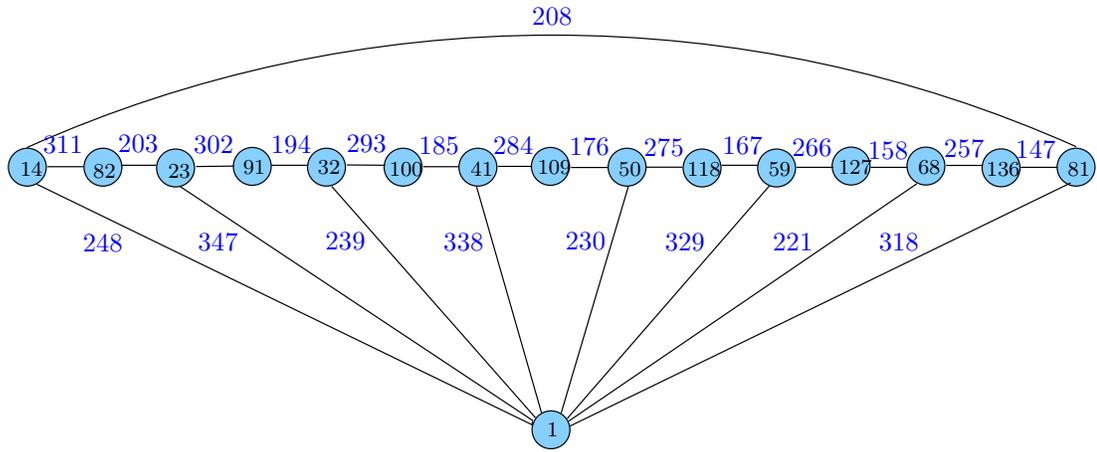
Sehingga, bobot terkecil pertama:

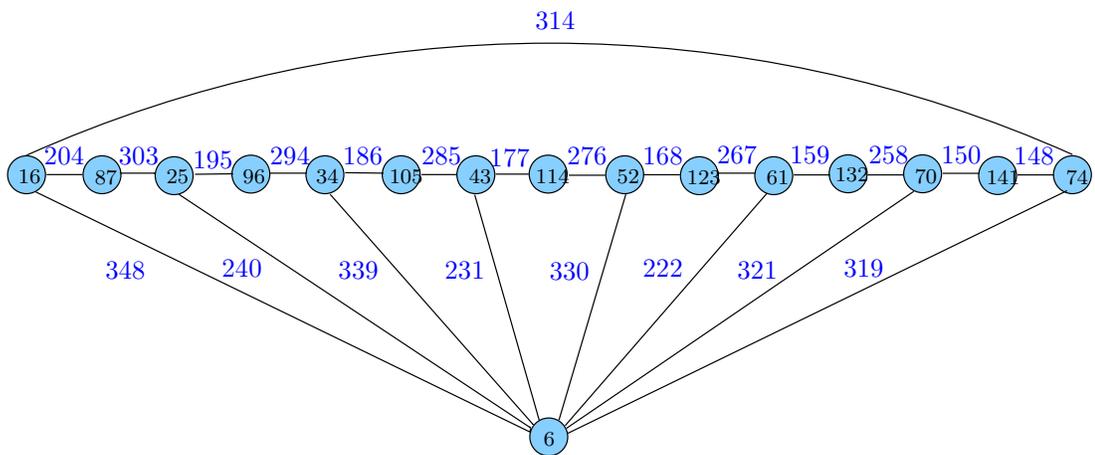
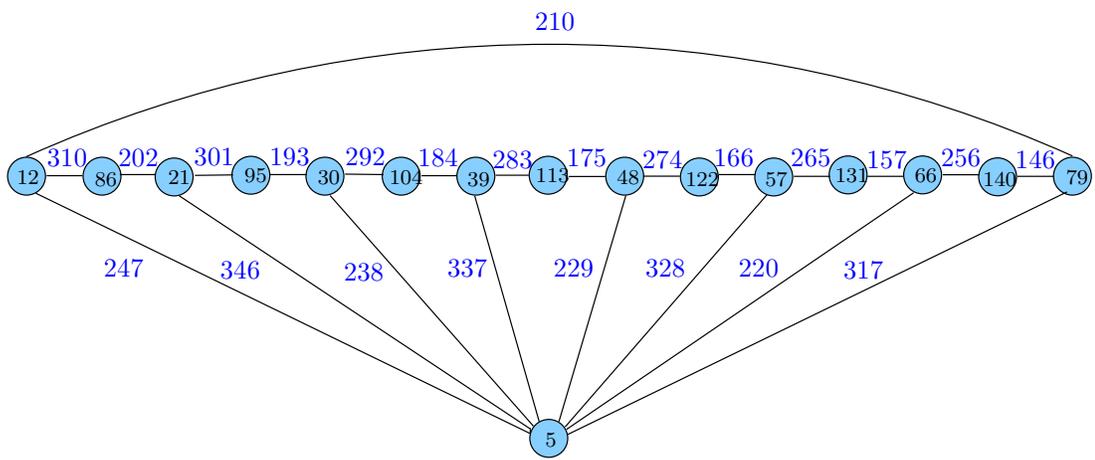
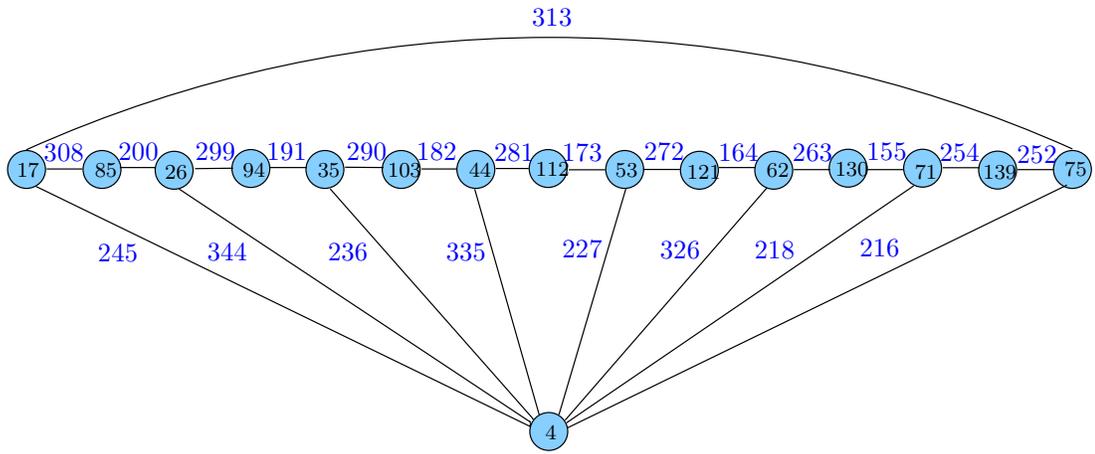
$$\begin{aligned} m[a - 2] + 1 + s &= m\left[\frac{7n+6}{2} - 2\right] + 1 + 1 \\ &= \frac{7nm + 2m + 4}{2} \end{aligned}$$

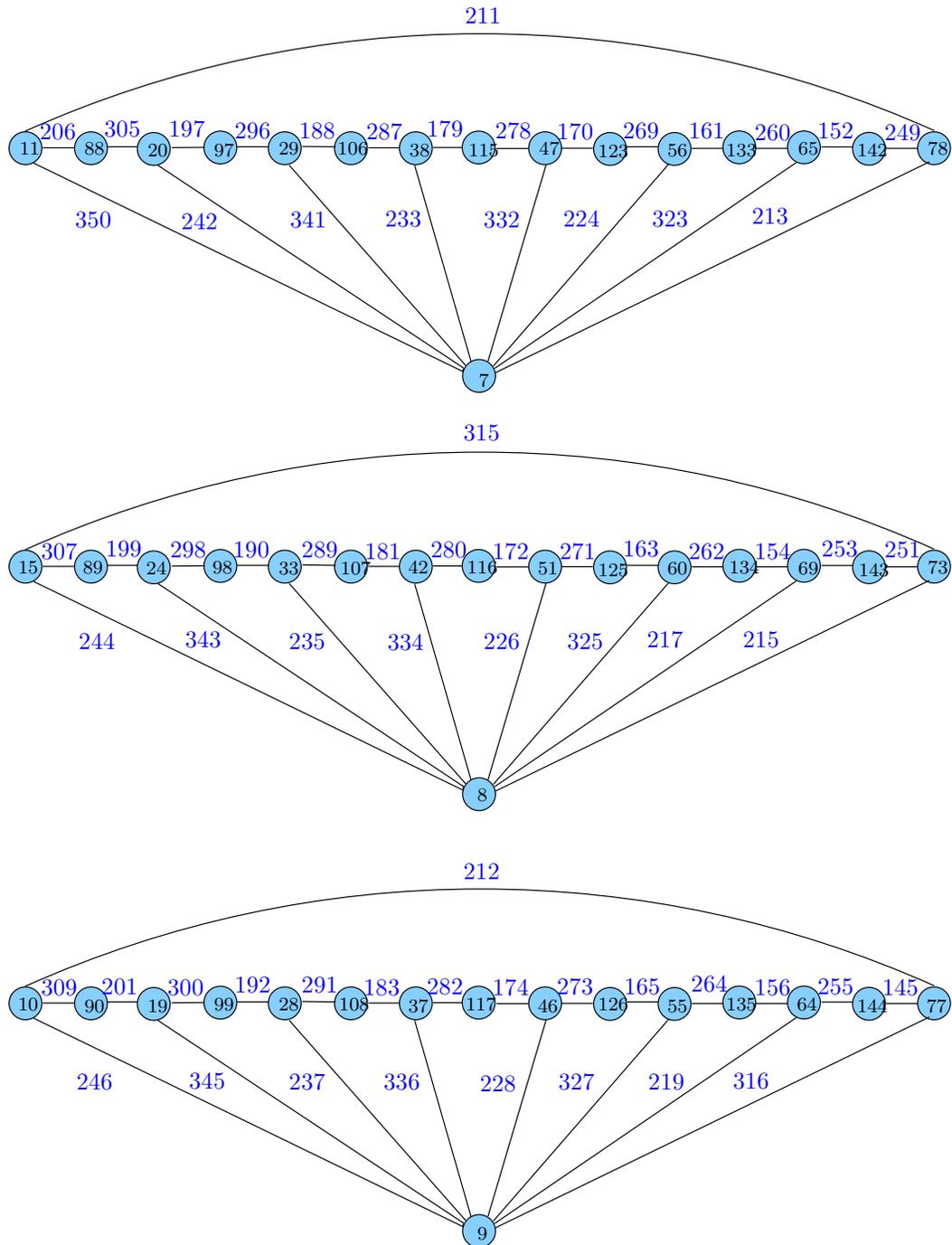
dan bobot terbesarnya adalah:

$$\begin{aligned} m[a + q - 2] + 1 &= m\left[\left(\frac{7n+6}{2} + 3n - 1 - 2\right)\right] + 1 \\ &= \frac{13nm + 2}{2} \end{aligned}$$

Maka dapat ditulis bahwa himpunan bobot sisi gabungan pada graf semi parasut mSP_{2n-1} adalah $\{\frac{7nm+2m+4}{2}, \dots, \frac{13nm+2}{2}\}$. Sehingga dapat disimpulkan bahwa graf semi parasut mSP_{2n-1} memiliki pelabelan $(a, 1)$ -super sisi antimagic total untuk $m \geq 3$, $m \equiv 1 \pmod{4}$ dan $n \geq 2$, dan n genap. Gambar 5.9 adalah contoh pelabelan $(\frac{14nm+4m+8}{4}, 1)$ -sisi antimagic total. \square







Gambar 5.9 Pelabelan total super $(263, 1)$ -sisi antimagic pada $9SP_{2n-1}$ dengan $n = 8$

5.2 Pelabelan Super (a, d) - \mathcal{H} -Antimagic Total Dekomposisi pada Amalgamasi Graf Kipas Konektif

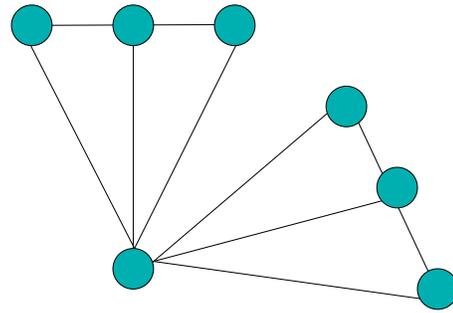
Penentuan batas atas d merupakan hal yang penting dalam penelitian ini. Batas atas ini adalah titik penting yang mengisyaratkan seberapa banyak nilai beda yang mungkin dimiliki oleh amalgamasi graf kipas tunggal maupun gabungan saling lepasnya dalam pelabelan super antimagic dekomposisi. Untuk menentukan nilai-nilai d tersebut, perlu diketahui jumlah titik (p_G) dan jumlah sisi (q_G) pada amalgamasi graf kipas tunggal maupun gabungannya, serta perlu diketahui jumlah titik (p_H) dan jumlah sisi (q_H) pada subgraf atau selimut amalgamasi graf kipas tunggal maupun gabungannya beserta jumlah selimutnya (s).

Amalgamasi graf kipas merupakan sebuah graf yang dinotasikan dengan F_3^n dengan $V(F_3^n) = \{p, x_i, y_i, z_i : 1 \leq i \leq n\}$ dan sisi $E(F_3^n) = \{px_i, py_i, pz_i, x_iy_i, y_iz_i : 1 \leq i \leq n\}$. Untuk jumlah titik $|V| = (p_G)$ dan sisinya $|E| = (q_G)$ serta jumlah titik (p_H) dan jumlah sisi (q_H) pada subgraf atau selimut amalgamasi graf kipas tunggal. Nilai n yang dimaksudkan adalah banyaknya *expand* graf kipas F_3 yang terdapat pada amalgamasi graf kipas. Gambar 5.10 merupakan sebuah ilustrasi untuk menentukan jumlah titik dan jumlah sisi pada amalgamasi graf kipas.

Berdasarkan pola pada Gambar 5.10 dan setelah memperhatikan pada amalgamasi graf kipas F_3^n dengan n yang berbeda, didapatkan rumusan jumlah titik pada graf amalgamasi kipas adalah $(p_G) = 3n + 1$. Sedangkan jumlah sisi pada amalgamasi graf kipas F_3^n merupakan jumlah seluruh sisi yang menghubungkan sebuah titik dengan titik yang lainnya pada graf tersebut sesuai definisi yang diberikan adalah $(q_G) = 5n$.

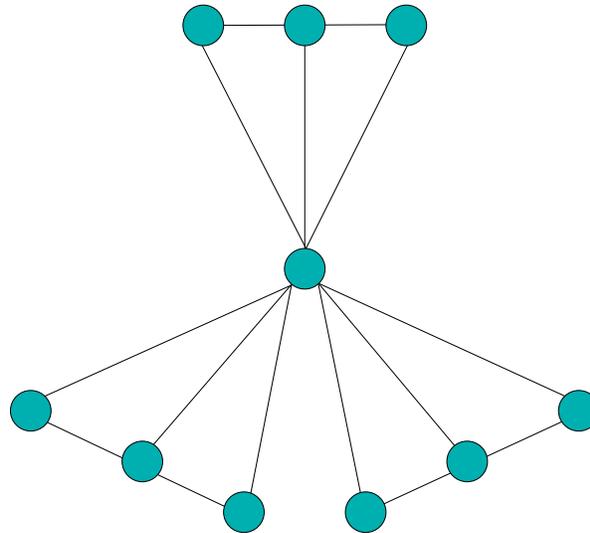
Dekomposisi pada amalgamasi graf kipas F_3^n berupa subgraf dari amalgamasi graf kipas yang berupa graf kipas F_3 , maka jumlah titik yang merupakan dekomposisi adalah $p_H = 4$, sedangkan jumlah sisi dekomposisi adalah $q_H = 5$ dan rumusan jumlah dekomposisi pada F_3^n adalah n . Untuk menentukan batas atas nilai beda d super (a, d) - \mathcal{H} antimagic total dekomposisi dapat ditentukan dengan lemma berikut ini.

Lema 5.2.1. *Jika graf (F_3^n) adalah super $(a, d) - F_3$ antimagic total dekomposisi*



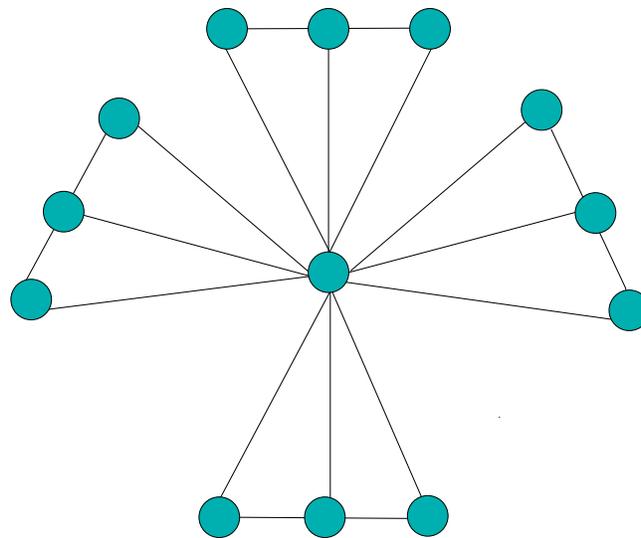
$n=2$
 Jumlah titik = 7
 Jumlah sisi = 10

(a)



$n = 3$
 Jumlah titik = 10
 Jumlah sisi = 15

(b)



$n = 4$
 Jumlah titik = 13
 Jumlah sisi = 20

(c)

Gambar 5.10 Jumlah titik dan sisi pada F_3^2 (a), F_3^3 (b), F_3^4 (c)

maka

$$d \leq \frac{(p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H}{s - 1}$$

untuk $s = |H_i|$, $p_G = |V|$, $q_G = |E|$, $p_H = |V'|$, $q_H = |E'|$

Bukti. $f(V) = \{1, 2, 3, \dots, p_G\}$ dan $f(E) = \{p_G + 1, p_G + 2, p_G + 2, \dots, p_G + q_G\}$. Misalkan graf (p_G, q_G) mempunyai pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} antimagic total dekomposisi dengan fungsi total $f(\text{total}) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots, p_G + q_G\}$ maka himpunan bobot dekomposisi sebuah graf adalah $\{a, a + d, a + 2d, \dots, a(t - 1)d\}$ dimana a merupakan bobot dekomposisi terkecil maka berlaku:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + p_H + (p_G + 1) + (p_G + 2) + \dots + (p_G + q_H) &\leq a \\ \frac{p_H}{2}(1 + p_H) + q_H p_G + \frac{q_H}{2}(1 + q_H) &= \\ \frac{p_H}{2} + \frac{p_H^2}{2} + q_H p_G + \frac{q_H}{2} + \frac{q_H^2}{2} &\leq a \end{aligned}$$

Sedangkan untuk nilai terbesar berlaku:

$$\begin{aligned} a + (s - 1)d &\leq p_G + p_G - 1 + p_G - 2 + \dots + (p_G - (p_H - 1)) + (p_G + q_G) \\ &\quad + (p_G + q_G - 1) + (p_G + q_G - 2) + \dots + (p_G + q_G - (q_H - 1)) \\ &= p_H p_G - \frac{p_H - 1}{2}(1 + (p_H - 1)) + q_H p_G + q_H p_G \\ &\quad - \frac{q_H - 1}{2}(1 + (q_H - 1)) \\ &= p_H p_G - \frac{p_H - 1}{2}(p_H) + q_H p_G + q_H p_G - \frac{q_H - 1}{2}(q_H) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(s-1)d &\leq p_H p_G - \frac{p_H - 1}{2}(p_H) + q_H p_G + q_H p_G - \frac{q_H - 1}{2}(q_H) - a \\
&\leq p_H p_G - \frac{p_H - 1}{2}(p_H) + q_H p_G + q_H p_G - \frac{q_H - 1}{2}(q_H) - \\
&\quad \left(\frac{p_H}{2} + \frac{p_H^2}{2} + q_H p_G + \frac{q_H}{2} + \frac{q_H^2}{2}\right) \\
&= p_H p_G - \frac{p_H^2}{2} + \frac{p_H}{2} + q_H p_G - \frac{q_H^2}{2} + \frac{q_H}{2} - \left(\frac{p_H}{2} + \frac{p_H^2}{2} + \frac{q_H}{2} + \frac{q_H^2}{2}\right) \\
&= p_H p_G + q_H q_G - p_H^2 - q_H^2 \\
&= p_H p_G - p_H^2 + q_H q_G - q_H^2 \\
&= (p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H \\
d &\leq \frac{(p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H}{(s-1)}
\end{aligned}$$

Dari persamaan diatas terbukti bahwa batas atas $d \leq \frac{(p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H}{s-1}$ jika graf G memiliki pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} -antimagic total dekomposisi dari berbagai famili graf (Dafik. 2007). \square

Diketahui dengan jumlah titik $p_G = 3n + 1$ dan sisi $q_G = 5n$, sedangkan jumlah titik selimut adalah $p_H = 4$ dan jumlah sisi selimut adalah $q_H = 5$ dengan jumlah selimut $s = n$. Batas atas nilai beda d tersebut adalah :

$$\begin{aligned}
d &\leq \frac{(p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H}{s-1} \\
&= \frac{(3n + 1 - 4)4 + (5n - 5)5}{n-1} \\
&= \frac{(3n - 3)4 + (5n - 5)5}{n-1} \\
&= \frac{12n - 12 + 25n - 25}{n-1} \\
&= \frac{37n - 37}{n-1} \\
&= \frac{37(n-1)}{n-1} \\
&\leq 37
\end{aligned}$$

Karena pelabelan \mathcal{SHAT} selalu menggunakan bilangan bulat positif, maka nilai $d \geq 0$ dan d adalah bilangan bulat, sehingga $d \in \{0, 1, 2, 3, \dots, 37\}$. Selanjutnya penentuan fungsi bijektif pelabelan selimut super (a, d) - \mathcal{H} -antimagic akan disesuaikan dengan nilai d yang telah ditetapkan.

Untuk menentukan pelabelan selimut super \mathcal{H} antimagic pada amalgamasi graf kipas digunakan metode yang terdiri dari beberapa langkah. Metode ini diawali dengan menggunakan pendeteksian pola (*pattern recognition*) untuk menentukan pelabelan yang berlaku pada batas i yang telah ditemukan. Untuk penentuan pola secara umum digunakan fungsi-fungsi barisan aritmatika, fungsi ini pada akhirnya merupakan fungsi bijektif pada graf yang diteliti. Setelah fungsi bijektif diketahui selanjutnya dilakukan pembuktian secara deduktif matematik untuk membuktikan kebenaran dari teorema yang didapat. Sebagai catatan, teorema dalam penelitian ini adalah bukan teorema yang *biimplikatif* atau karakteristik sehingga pembuktiannya hanya dilakukan satu arah.

Berdasarkan hasil penggabungan pola melalui pedektesian pola (*pattern recognition*) dan konsep barisan aritmatika, maka diperoleh beberapa teorema dan akibat sebagai berikut. Teorema yang ditemukan dalam penelitian ini tidak bersifat tunggal (berkenaan dengan sifat ketunggalan) melainkan hanya bersifat keberadaan (*existence but not unique*).

Setelah mengetahui batas atas nilai d , langkah selanjutnya adalah menentukan pelabelan super \mathcal{H} antimagic total dekomposisi dengan terlebih dahulu menentukan fungsi bijektif melalui pengamatan pola dan penggunaan konsep barisan aritmatika dari titik dan sisi pada amalgamasi graf kipas $amal(F_3, v, n)$, dimana $V(F_3^n) = \{p, x_i, y_i, z_i : 1 \leq i \leq n\}$ dan sisi $E(F_3^n) = \{px_i, py_i, pz_i, x_iy_i, y_iz_i : 1 \leq i \leq n\}$ untuk $n \geq 2$.

◇ **Teorema 5.2.1.** *Ada pelabelan super $(32n + 13, 0)$ - F_3 antimagic total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas F_3^n untuk $n \geq 2$.*

Bukti. Labeli titik amalgamasi graf kipas F_3^n dengan fungsi bijektif f_1 dengan

label sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 f_1(p) &= 1 \\
 f_1(x_i) &= i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
 f_1(y_i) &= 2n - i + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
 f_1(z_i) &= 3n - i + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n
 \end{aligned}$$

Dapat dilihat bahwa f_1 adalah fungsi bijektif yang memetakan F_3^n ke himpunan bilangan bulat $f(V) = \{1, 2, 3, \dots, 3n + 1\}$. Jika w_{f_1} didefinisikan sebagai bobot dekomposisi dari pelabelan total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas dimana bobot dekomposisi tersebut adalah $\mathcal{H}=F_3$ sebagai dekomosisinya, Maka fungsi bijektif w_{f_1} dapat ditentukan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 w_{f_1} &= f_1(p) + f_1(x_i) + f_1(y_i) + f_1(z_i) \\
 &= (1) + (i + 1) + (2n - i + 2) + (3n - i + 2) \\
 &= 5n - i + 6, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n
 \end{aligned}$$

Labeli sisi amalgamasi graf kipas F_3^n dengan fungsi bijektif f_1 dengan label sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 f_1(px_i) &= 3n + i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
 f_1(x_iy_i) &= 5n - i + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
 f_1(y_iz_i) &= 5n + i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
 f_1(pz_i) &= 7n - i + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
 f_1(py_i) &= 7n + i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n
 \end{aligned}$$

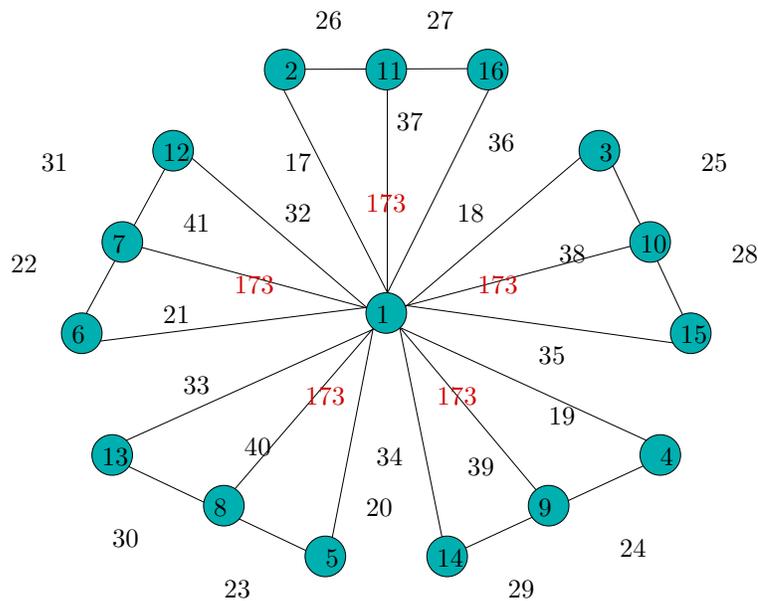
Jika W_{f_1} didefinisikan sebagai bobot total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas berdasarkan penjumlahan bobot dekomposisi dengan label sisinya maka w_{f_1} dan fungsi label sisi dengan syarat batas i yang bersesuaian, sehingga dapat

dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} W_{f_1} &= w_{f_1} + f_1(px_i) + f_1(x_iy_i) + f_1(y_iz_i) + f_1(pz_i) + f_1(py_i) \\ &= 32n + 13, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Dengan demikian maka didapatkan himpunan bobot total dekomposisi $W_{f_1} = \{32n + 13, 32n + 13, \dots, 32n + 13\}$. Sehingga terbukti bahwa amalgamasi pada graf kipas F_3^n memiliki super $(32n + 13, 0) - F_3$ antimagic total dekomposisi untuk $n \geq 2$. \square

Gambar 5.11 merupakan contoh super $(32n + 13, 0) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas F_3^5



Gambar 5.11 Super $(32n + 13, 0) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada F_3^5

Pada teorema berikutnya akan dibuktikan super $(a, d) - \mathcal{H}$ antimagic total dekomposisi pada amalgamsi graf kipas F_3^n dengan nilai $d=2$ yang berlaku untuk $n \geq 2$.

\diamond **Teorema 5.2.2.** *Ada pelabelan super $(31n + 14, 2) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas F_3^n untuk $n \geq 2$.*

Bukti. Labeli titik amalgamasi graf kipas F_3^n dengan fungsi f_2 sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f_2(p) &= 1 \\ f_2(x_i) &= i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ f_2(y_i) &= 2n - i + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ f_2(z_i) &= 2n + 1 + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Dapat dilihat bahwa f_2 adalah fungsi bijektif yang memetakan F_3^n ke himpunan bilangan bulat $f(V) = \{1, 2, 3, \dots, 3n + 1\}$. Jika w_{f_2} didefinisikan sebagai bobot dekomposisi dari pelabelan total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas dimana bobot dekomposisi tersebut adalah $\mathcal{H}=F_3$ sebagai dekomposisinya, maka fungsi bijektif w_{f_2} dapat ditentukan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} w_{f_2} &= f_2(p) + f_2(x_i) + f_2(y_i) + f_2(z_i) \\ &= (1) + (i + 1) + (2n - i + 2) + (2n + i + 1) \\ &= 4n + i + 5, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Untuk melabeli sisi amalgamasi graf kipas F_3^n gunakan label sisi yang terdapat pada teorema 5.2.1 ke dalam teorema 5.2.2 dimana $f_2=f_1$. Sehingga $f_2(px_i)=f_1(px_i)$, $f_2(x_iy_i)=f_1(x_iy_i)$, $f_2(y_iz_i)=f_1(y_iz_i)$, $f_2(pz_i)=f_1(pz_i)$, $f_2(py_i)=f_1(py_i)$.

Jika W_{f_2} didefinisikan sebagai bobot total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas berdasarkan penjumlahan bobot dekomposisi dengan label sisinya maka w_{f_2} dan fungsi label sisi dengan syarat batas i yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

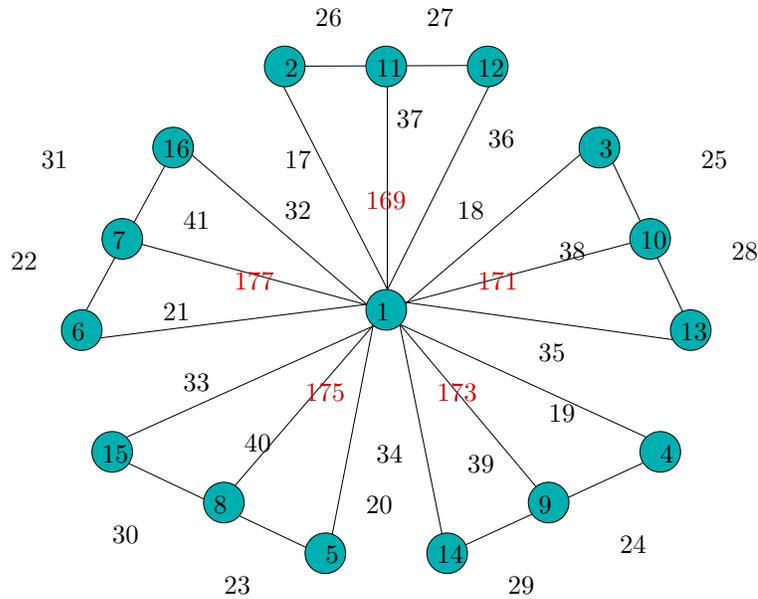
$$\begin{aligned} W_{f_2} &= w_{f_2} + f_1(px_i) + f_1(x_iy_i) + f_1(y_iz_i) + f_1(pz_i) + f_1(py_i) \\ &= 31n + 2i + 12, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Dengan demikian maka didapatkan himpunan bobot total dekomposisi $W_{f_2} = \{31n + 14, 31n + 16, \dots, 33n + 12\}$. Sehingga terbukti bahwa amalgamasi pada graf kipas F_3^n memiliki super $(31n + 14, 2) - F_3$ antimagic total dekomposisi untuk

$n \geq 2$.

□

Gambar 5.12 merupakan contoh super $(31n + 14, 2) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas F_3^5



Gambar 5.12 Super $(31n + 14, 2) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada F_3^5

Pada teorema berikutnya akan dibuktikan super $(a, d)\mathcal{H}$ antimagic total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas F_3^n dengan nilai $d=4$ dengan syarat berlaku untuk $n \geq 2$. Teorema dibawah ini menggunakan label titik yang sama seperti pada teorema 5.2.1 sehingga hanya ditulis $f_3=f_1$.

◇ **Teorema 5.2.3.** *Ada pelabelan super $(30n + 15, 4)\text{-}F_3$ antimagic total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas F_3^n untuk $n \geq 2$.*

Bukti. Untuk melabeli titik amalgamasi graf kipas F_3^n gunakan label titik yang terdapat pada teorema 5.2.1 ke dalam teorema 5.2.3 dimana $f_3=f_1$. Sehingga $f_3(p)=f_1(p)$, $f_3(x_i)=f_1(x_i)$, $f_3(y_i)=f_1(y_i)$, $f_3(z_i)=f_1(z_i)$. Dengan demikian maka bobot dekomposisi dari pelabelan total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas yang didefinisikan dengan $w_{f_3}=w_{f_1}=5n - i + 6$.

Labeli sisi dan amalgamasi graf kipas F_3^n dengan fungsi f_3 sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f_3(px_i) &= 3n + i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ f_3(x_iy_i) &= 4n + i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ f_3(y_iz_i) &= 5n + i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ f_3(pz_i) &= 6n + i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ f_3(py_i) &= 7n + i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Jika W_{f_3} didefinisikan sebagai bobot total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas berdasarkan penjumlahan bobot dekomposisi dengan label sisinya maka w_{f_3} dan fungsi label sisi dengan syarat batas i yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} W_{f_3} &= w_{f_3} + f_3(px_i) + f_3(x_iy_i) + f_3(y_iz_i) + f_3(pz_i) + f_3(py_i) \\ &= 30n + 4i + 11, \text{ jika } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

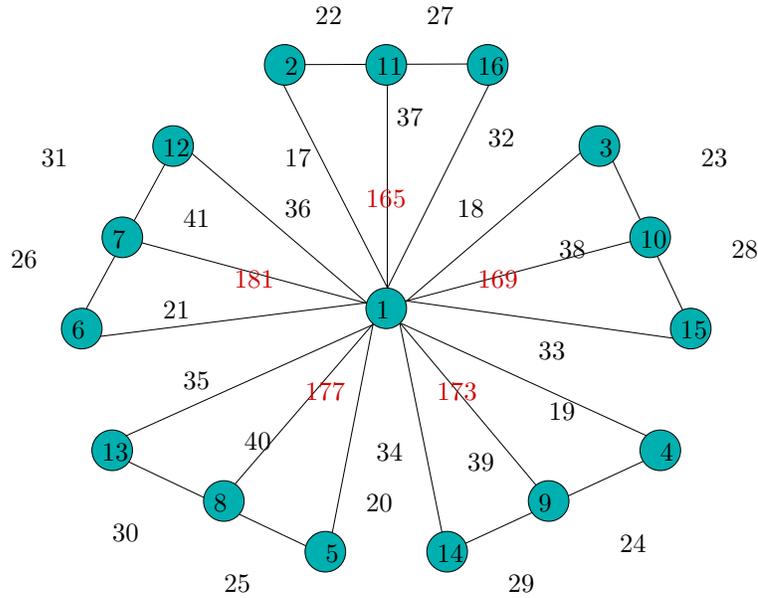
Dengan demikian maka didapatkan himpunan bobot total dekomposisi $W_{f_3} = \{30n + 15, 30n + 19, \dots, 34n + 11\}$. Sehingga terbukti bahwa amalgamasi pada graf kipas F_3^n memiliki super $(30n + 15, 4) - F_3$ antimagic total dekomposisi untuk $n \geq 2$. \square

Gambar 5.13 merupakan contoh super $(30n + 15, 4) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas F_3^5

Pada teorema berikutnya akan dibuktikan super $(a, d) - \mathcal{H}$ antimagic total dekomposisi pada amalgamsi graf kipas F_3^n dengan nilai $d=6$ dengan syarat berlaku untuk $n \geq 2$. Teorema dibawah ini menggunakan label titik yang sama seperti pada teorema 5.2.2 $f_4=f_2$ dan label sisi yang sama seperti teorema 5.2.3 $f_4=f_3$.

\diamond **Teorema 5.2.4.** *Ada pelabelan super $(29n + 16, 6) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas F_3^n untuk $n \geq 2$.*

Bukti. Untuk melabeli titik amalgamasi graf kipas F_3^n gunakan label titik yang terdapat pada teorema 5.2.2 ke dalam teorema 5.2.4 dimana $f_4=f_2$. Sehingga



Gambar 5.13 Super $(30n + 15, 4) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada F_3^5

$f_4(p)=f_2(p)$, $f_4(x_i)=f_2(x_i)$, $f_4(y_i)=f_2(y_i)$, $f_4(z_i)=f_2(z_i)$. Dengan demikian maka bobot dekomposisi dari pelabelan total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas yang didefinisikan dengan $w_{f_4}=w_{f_2}=4n + i + 5$.

Untuk melabeli sisi amalgamasi graf kipas F_3^n gunakan label sisi yang terdapat pada teorema 5.2.3 ke dalam teorema 5.2.4 dimana $f_4=f_3$. Sehingga $f_4(px_i) = f_3(px_i)$, $f_4(x_iy_i)=f_3(x_iy_i)$, $f_4(y_iz_i)=f_3(y_iz_i)$, $f_4(pz_i)=f_3(pz_i)$, $f_4(py_i)=f_3(py_i)$.

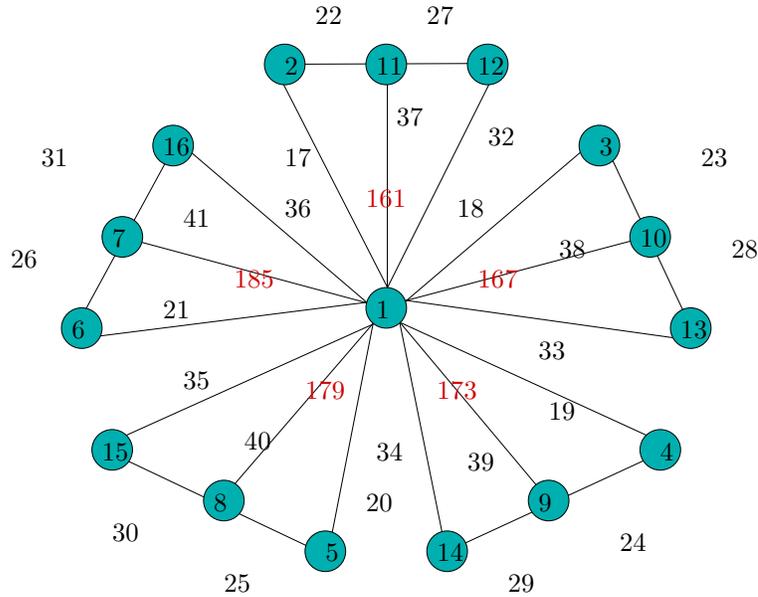
Jika W_{f_4} didefinisikan sebagai bobot total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas berdasarkan penjumlahan bobot dekomposisi dengan label sisinya maka w_{f_4} dan fungsi label sisi dengan syarat batas i yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} W_{f_4} &= w_{f_4} + f_4(px_i) + f_4(x_iy_i) + f_4(y_iz_i) + f_4(pz_i) + f_4(py_i) \\ &= 29n + 6i + 10, \text{ jika } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Dengan demikian maka didapatkan himpunan bobot total dekomposisi $W_{f_4} = \{29n + 16, 29n + 22, \dots, 35n + 10\}$. Sehingga terbukti bahwa amalgamasi pada graf kipas F_3^n memiliki super $(29n + 16, 6) - F_3$ antimagic total dekomposisi untuk

$n \geq 2$. □

Gambar 5.14 merupakan contoh super $(29n + 16, 6) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas F_3^5



Gambar 5.14 Super $(29n + 16, 6) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada F_3^5

Pada teorema berikutnya akan dibuktikan super $(a, d)\text{-}\mathcal{H}$ antimagic total dekomposisi pada amalgamsi graf kipas F_3^n dengan nilai $d=8$ dengan syarat berlaku untuk $n \geq 2$. Teorema dibawah ini menggunakan label sisi yang sama seperti teorema 5.2.3 $f_5=f_3$.

◇ **Teorema 5.2.5.** *Ada pelabelan super $(28n + 17, 8)\text{-}F_3$ antimagic total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas F_3^n untuk $n \geq 2$.*

Bukti. Labeli titik amalgamasi graf kipas F_3^n dengan fungsi f_5 sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f_5(p) &= 1 \\ f_5(x_i) &= i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ f_5(y_i) &= n + i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ f_5(z_i) &= 2n + i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Dapat dilihat bahwa f_5 adalah fungsi bijektif yang memetakan F_3^n ke himpunan bilangan bulat $f(V) = \{1, 2, 3, \dots, 3n + 1\}$. Jika w_{f_5} didefinisikan sebagai bobot dekomposisi dari pelabelan total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas dimana bobot dekomposisi tersebut adalah $\mathcal{H}=F_3$ sebagai dekomposisinya, maka fungsi bijektif w_{f_5} dapat ditentukan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} w_{f_5} &= f_5(p) + f_5(x_i) + f_5(y_i) + f_5(z_i) \\ &= (1) + (i + 1) + (n + i + 1) + (2n + i + 1) \\ &= 3n + 3i + 4, \text{ jika } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Untuk melabeli sisi amalgamasi graf kipas F_3^n gunakan label sisi yang terdapat pada teorema 5.2.3 ke dalam teorema 5.2.5 dimana $f_5=f_3$. Sehingga $f_5(px_i) = f_3(px_i)$, $f_5(x_iy_i)=f_3(x_iy_i)$, $f_5(y_iz_i)=f_3(y_iz_i)$, $f_5(pz_i)=f_3(pz_i)$, $f_5(py_i)=f_3(py_i)$.

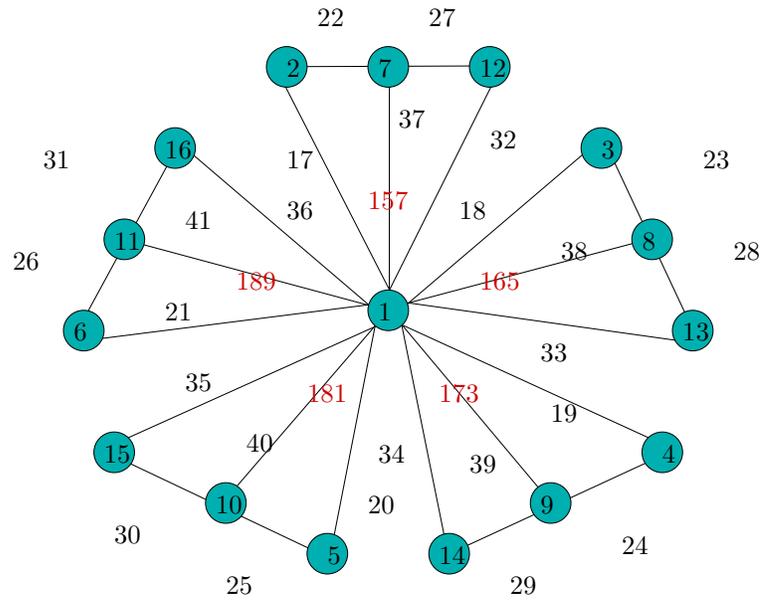
Jika W_{f_5} didefinisikan sebagai bobot total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas berdasarkan penjumlahan bobot dekomposisi dengan label sisinya maka w_{f_5} dan fungsi label sisi dengan syarat batas i yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} W_{f_5} &= w_{f_5} + f_5(px_i) + f_5(x_iy_i) + f_5(y_iz_i) + f_5(pz_i) + f_5(py_i) \\ &= 28n + 8i + 9, \text{ jika } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Dengan demikian maka didapatkan himpunan bobot total dekomposisi $W_{f_5} = \{28n + 17, 28n + 25, \dots, 36n + 9\}$. Sehingga terbukti bahwa amalgamasi pada graf kipas F_3^n memiliki super $(28n + 17, 8) - F_3$ antimagic total dekomposisi untuk $n \geq 2$. \square

Gambar 5.15 merupakan contoh super $(28n + 17, 8) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas F_3^5

Pada teorema berikutnya akan dibuktikan super $(a, d)\text{-}\mathcal{H}$ antimagic total dekomposisi pada amalgamsi graf kipas F_3^n dengan nilai $d=10$ dengan syarat berlaku untuk $n \geq 2$. Teorema dibawah ini menggunakan label sisi yang sama



Gambar 5.15 Super $(28n + 17, 8) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada F_3^5

seperti teorema 5.2.3 $f_6 = f_3$.

◇ **Teorema 5.2.6.** *Ada pelabelan super $(30n + 15, 10) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas F_3^n untuk $n \geq 2$.*

Bukti. Labeli titik amalgamasi graf kipas F_3^n dengan fungsi f_6 sebagai berikut:

$$f_6(p) = 3n + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$f_6(x_i) = 2i - 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$f_6(y_i) = 2i, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$f_6(z_i) = 2n + i, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

Dapat dilihat bahwa f_6 adalah fungsi bijektif yang memetakan (F_3^n) ke himpunan bilangan bulat $f(V) = \{1, 2, 3, \dots, 3n + 1\}$. Jika w_{f_5} didefinisikan sebagai bobot dekomposisi dari pelabelan total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas dimana bobot dekomposisi tersebut adalah $\mathcal{H} = F_3$ sebagai dekomposisinya, maka fungsi

bijektif w_{f_6} dapat ditentukan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} w_{f_6} &= f_6(p) + f_6(x_i) + f_6(y_i) + f_6(z_i) \\ &= (3n + 1) + (2i - 1) + (2i) + (2n + 1) \\ &= 5n + 5i, \text{ jika } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Untuk melabeli sisi amalgamasi graf kipas F_3^n gunakan label sisi yang terdapat pada teorema 5.2.3 ke dalam teorema 5.2.6 dimana $f_6=f_3$. Sehingga $f_6(px_i)=f_3(px_i)$, $f_6(x_iy_i)=f_3(x_iy_i)$, $f_6(y_iz_i)=f_3(y_iz_i)$, $f_6(pz_i)=f_3(pz_i)$, $f_6(py_i)=f_3(py_i)$.

Jika W_{f_6} didefinisikan sebagai bobot total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas berdasarkan penjumlahan bobot dekomposisi dengan label sisinya maka w_{f_6} dan fungsi label sisi dengan syarat batas i yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} W_{f_6} &= w_{f_6} + f_6(px_i) + f_6(x_iy_i) + f_6(y_iz_i) + f_6(pz_i) + f_6(py_i) \\ &= 30n + 10i + 5, \text{ jika } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

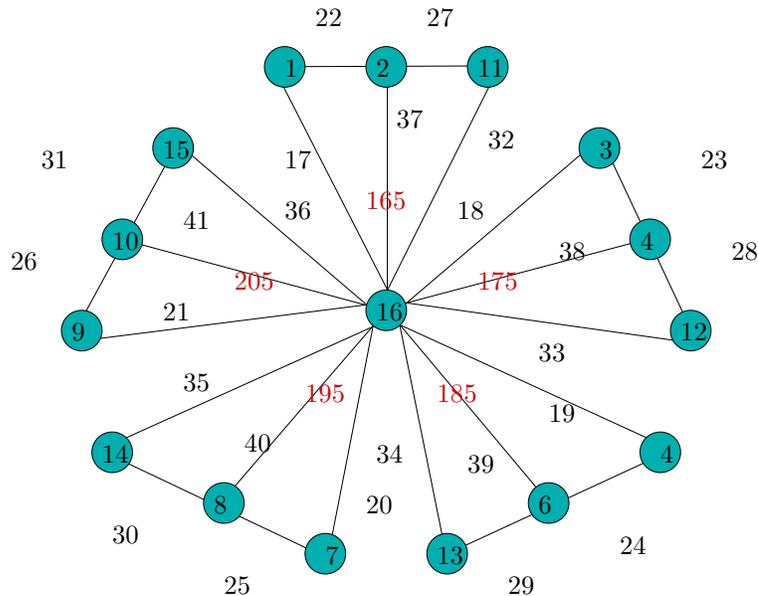
Dengan demikian maka didapatkan himpunan bobot total dekomposisi $W_{f_6} = \{30n + 15, 30n + 25, \dots, 40n + 5\}$. Sehingga terbukti bahwa amalgamasi pada graf kipas (F_3^n) memiliki super $(30n + 15, 10) - F_3$ antimagic total dekomposisi untuk $n \geq 2$. \square

Gambar 5.16 merupakan contoh super $(30n + 15, 10) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas F_3^5

Pada teorema berikutnya akan dibuktikan super (a, d) - \mathcal{H} antimagic total dekomposisi pada amalgamsi graf kipas F_3^n dengan nilai $d=12$ dengan syarat berlaku untuk $n \geq 2$. Teorema dibawah ini menggunakan label titik yang sama seperti pada teorema 5.2.5 $f_7=f_5$.

\diamond **Teorema 5.2.7.** *Ada pelabelan super $(26n + 19, 12)$ - F_3 antimagic total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas F_3^n untuk $n \geq 2$.*

Bukti. Untuk melabeli titik amalgamasi graf kipas F_3^n gunakan label titik yang terdapat pada teorema 5.2.5 ke dalam teorema 5.2.7 dimana $f_7=f_5$. Sehingga



Gambar 5.16 Super $(30n + 15, 10) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada F_3^5

$f_7(p)=f_5(p)$, $f_7(x_i)=f_5(x_i)$, $f_7(y_i)=f_5(y_i)$, $f_7(z_i)=f_5(z_i)$. Dengan demikian maka bobot dekomposisi dari pelabelan total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas yang didefinisikan dengan $w_{f_7}=w_{f_5}=3n + 3i + 4$.

Labeli sisi amalgamasi graf kipas F_3^n dengan fungsi f_7 sebagai berikut:

$$f_7(px_i) = 3n + 2i, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$f_7(x_iy_i) = 3n + 2i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$f_7(y_iz_i) = 5n + 2i, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$f_7(pz_i) = 5n + 2i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$f_7(py_i) = 7n + i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

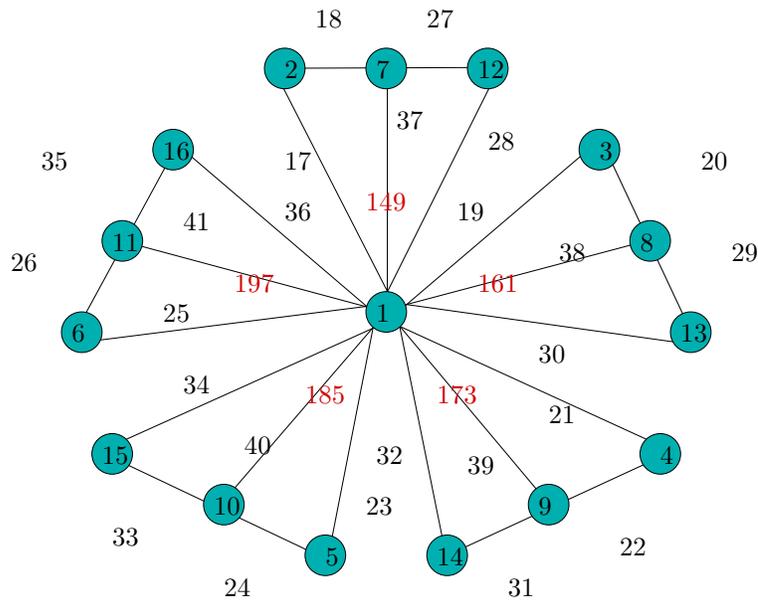
Jika W_{f_7} didefinisikan sebagai bobot total selimut pada amalgamasi graf kipas berdasarkan penjumlahan bobot dekomposisi dengan label sisinya maka w_{f_7} dan fungsi label sisi dengan syarat batas i yang bersesuaian, sehingga dapat

dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} W_{f_7} &= w_{f_7} + f_7(px_i) + f_7(x_iy_i) + f_7(y_iz_i) + f_7(pz_i) + f_7(py_i) \\ &= 26n + 12i + 7, \text{ jika } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Dengan demikian maka didapatkan himpunan bobot selimut total $W_{f_7} = \{26n + 19, 26n + 31, \dots, 38n + 7\}$. Sehingga terbukti bahwa amalgamasi pada graf kipas F_3^n memiliki super $(26n + 19, 12) - F_3$ antimagic total dekomposisi untuk $n \geq 2$. \square

Gambar 5.17 merupakan contoh super $(26n + 19, 12) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas F_3^5



Gambar 5.17 Super $(26n + 19, 12) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada F_3^5

Pada teorema berikutnya akan dibuktikan super $(a, d)\mathcal{H}$ antimagic total dekomposisi pada amalgamsi graf kipas (F_3^n) dengan nilai $d=14$ dengan syarat berlaku untuk $n \geq 2$. Teorema dibawah ini menggunakan label sisi yang sama seperti teorema 5.2.3 $f_8=f_3$.

◇ **Teorema 5.2.8.** *Ada pelabelan super $(25n + 20, 14)$ - F_3 antimagic total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas F_3^n untuk $n \geq 2$.*

Bukti. Labeli titik amalgamasi graf kipas F_3^n dengan fungsi f_8 sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f_8(p) &= 1 \\ f_8(x_i) &= 3i - 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ f_8(y_i) &= 3i, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ f_8(z_i) &= 3i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Dapat dilihat bahwa f_8 adalah fungsi bijektif yang memetakan F_3^n ke himpunan bilangan bulat $f(V) = \{1, 2, 3, \dots, 3n + 1\}$. Jika w_{f_8} didefinisikan sebagai bobot dekomposisi dari pelabelan total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas dimana bobot dekomposisi tersebut adalah $\mathcal{H}=F_3$ sebagai dekomposisinya, maka fungsi bijektif w_{f_8} dapat ditentukan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} w_{f_8} &= f_8(p) + f_8(x_i) + f_8(y_i) + f_8(z_i) \\ &= (1) + (3i - 1) + (3i) + (3i + 1) \\ &= 9i + 1, \text{ jika } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Untuk melabeli sisi amalgamasi graf kipas F_3^n gunakan label sisi yang terdapat pada teorema 5.2.3 ke dalam teorema 5.2.8 dimana $f_8=f_3$. Sehingga $f_8(px_i)=f_3(px_i)$, $f_8(x_iy_i)=f_3(x_iy_i)$, $f_8(y_iz_i)=f_3(y_iz_i)$, $f_8(pz_i)=f_3(pz_i)$, $f_8(py_i)=f_3(py_i)$.

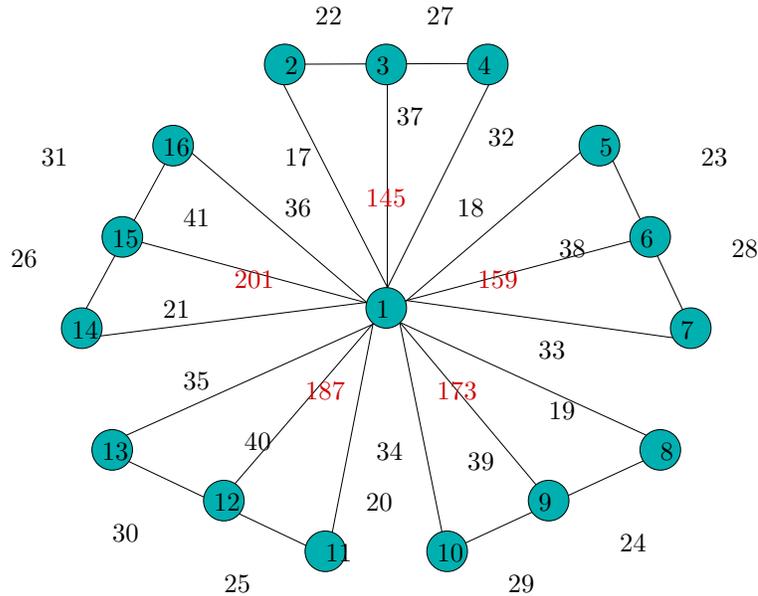
Jika W_{f_8} didefinisikan sebagai bobot total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas berdasarkan penjumlahan bobot selimut dengan label sisinya maka w_{f_8} dan fungsi label sisi dengan syarat batas i yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} W_{f_8} &= w_{f_8} + f_8(px_i) + f_8(x_iy_i) + f_8(y_iz_i) + f_8(pz_i) + f_8(py_i) \\ &= 25n + 14i + 6, \text{ jika } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Dengan demikian maka didapatkan himpunan bobot total dekomposisi W_{f_8}

$= \{25n + 20, 25n + 34, \dots, 39n + 6\}$. Sehingga terbukti bahwa amalgamasi pada graf kipas (F_3^n) memiliki super $(25n + 20, 14) - F_3$ antimagic total dekomposisi untuk $n \geq 2$. \square

Gambar 5.18 merupakan contoh super $(25n + 20, 14) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas (F_3^5)



Gambar 5.18 Super $(25n + 20, 14) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada (F_3^5)

Pada teorema berikutnya akan dibuktikan super $(a, d)\mathcal{H}$ antimagic total dekomposisi pada amalgamsi graf kipas F_3^n dengan nilai $d=16$ dengan syarat berlaku untuk $n \geq 2$. Teorema dibawah ini menggunakan label titik yang sama seperti pada teorema 5.2.8 $f_9=f_8$.

\diamond **Teorema 5.2.9.** *Ada pelabelan super $(24n + 21, 16)\text{-}F_3$ antimagic total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas F_3^n untuk $n \geq 2$.*

Bukti. Untuk melabeli titik amalgamasi graf kipas F_3^n gunakan label titik yang terdapat pada teorema 5.2.8 ke dalam teorema 5.2.9 dimana $f_9=f_8$. Sehingga $f_9(p)=f_8(p)$, $f_9(x_i)=f_8(x_i)$, $f_9(y_i)=f_8(y_i)$, $f_9(z_i)=f_8(z_i)$. Dengan demikian maka bobot dekomposisi dari pelabelan total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas yang didefinisikan dengan $w_{f_9}=w_{f_8}=9i + 1$.

Labeli sisi amalgamasi graf kipas F_3^n dengan fungsi f_9 sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f_9(px_i) &= 3n + 2i, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ f_9(x_iy_i) &= 3n + 2i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ f_9(y_iz_i) &= 5n + i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ f_9(pz_i) &= 6n + i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ f_9(py_i) &= 7n + i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Jika W_{f_9} didefinisikan sebagai bobot total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas berdasarkan penjumlahan bobot dekomposisi dengan label sisinya maka w_{f_9} dan fungsi label sisi dengan syarat batas i yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} W_{f_9} &= w_{f_9} + f_9(px_i) + f_9(x_iy_i) + f_9(y_iz_i) + f_9(pz_i) + f_9(py_i) \\ &= 24n + 16i + 5, \text{ jika } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

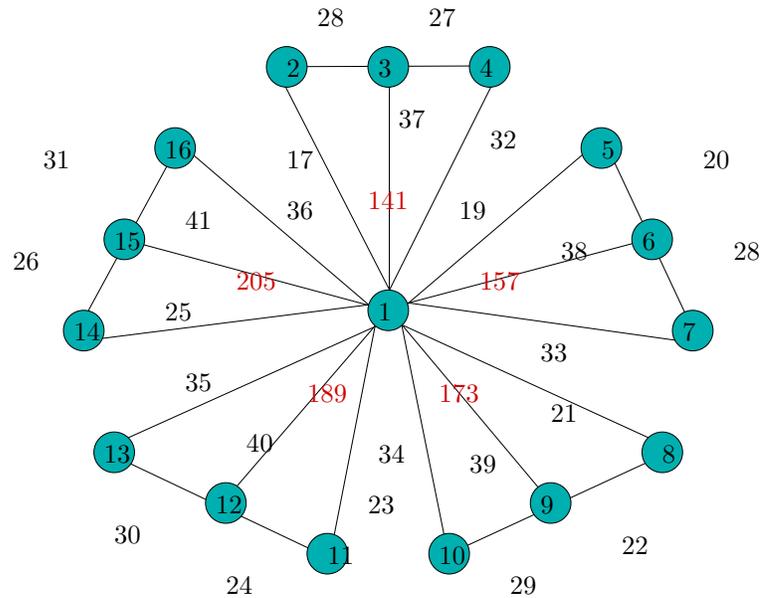
Dengan demikian maka didapatkan himpunan bobot total dekomposisi $W_{f_9} = \{24n + 21, 24n + 37, \dots, 40n + 5\}$. Sehingga terbukti bahwa amalgamasi pada graf kipas (F_3^n) memiliki super $(24n + 21, 16) - F_3$ antimagic total dekomposisi untuk $n \geq 2$. \square

Gambar 5.19 merupakan contoh super $(24n + 21, 16) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas F_3^5

Pada teorema berikutnya akan dibuktikan super (a, d) - \mathcal{H} antimagic total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas F_3^n dengan nilai $d=18$ dengan syarat berlaku untuk $n \geq 2$. Teorema dibawah ini menggunakan label titik yang sama seperti pada teorema 5.2.8 $f_{10}=f_8$ dan label sisi yang sama seperti teorema 5.2.7 $f_{10}=f_7$.

\diamond **Teorema 5.2.10.** *Ada pelabelan super $(23n + 22, 18)$ - F_3 antimagic total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas F_3^n untuk $n \geq 2$.*

Bukti. Untuk melabeli titik amalgamasi graf kipas (F_3^n) gunakan label titik yang



Gambar 5.19 Super $(24n + 21, 16) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada F_3^5

terdapat pada teorema 5.2.8 ke dalam teorema 5.2.10 dimana $f_{10}=f_8$. Sehingga $f_{10}(p)=f_8(p)$, $f_{10}(x_i)=f_8(x_i)$, $f_{10}(y_i)=f_8(y_i)$, $f_{10}(z_i)=f_8(z_i)$. Dengan demikian maka bobot dekomposisi dari pelabelan total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas yang didefinisikan dengan $w_{f_{10}}=w_{f_8}=9i + 1$.

Untuk melabeli sisi amalgamasi graf kipas (F_3^n) gunakan label sisi yang terdapat pada teorema 5.2.7 ke dalam teorema 5.2.10 dimana $f_{10}=f_7$. Sehingga $f_{10}(px_i) = f_7(px_i)$, $f_{10}(x_iy_i)=f_7(x_iy_i)$, $f_{10}(y_iz_i)=f_7(y_iz_i)$, $f_{10}(pz_i)=f_7(pz_i)$, $f_{10}(py_i) = f_7(py_i)$.

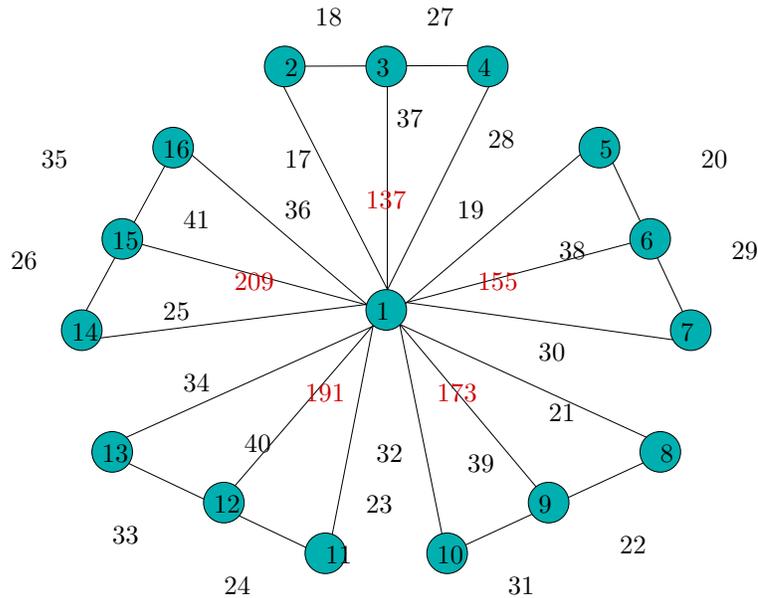
Jika $W_{f_{10}}$ didefinisikan sebagai bobot total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas berdasarkan penjumlahan bobot dekomposisi dengan label sisinya maka $w_{f_{10}}$ dan fungsi label sisi dengan syarat batas i yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} W_{f_{10}} &= w_{f_{10}} + f_{10}(px_i) + f_{10}(x_iy_i) + f_{10}(y_iz_i) + f_{10}(pz_i) + f_{10}(py_i) \\ &= 23n + 18i + 4, \text{ jika } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Dengan demikian maka didapatkan himpunan bobot total dekomposisi $W_{f_{10}}$

$= \{23n + 22, 23n + 40, \dots, 41n + 4\}$. Sehingga terbukti bahwa amalgamasi pada graf kipas F_3^n memiliki super $(23n+22, 18) - F_3$ antimagic total dekomposisi untuk $n \geq 2$. \square

Gambar 5.20 merupakan contoh super $(23n + 22, 18) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas F_3^5



Gambar 5.20 Super $(23n + 22, 18) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada F_3^5

Pada teorema berikutnya akan dibuktikan super $(a, d) - \mathcal{H}$ antimagic total dekomposisi pada amalgamsi graf kipas F_3^n dengan nilai $d=20$ dengan syarat berlaku untuk $n \geq 2$. Teorema dibawah ini menggunakan label titik yang sama seperti pada teorema 5.2.8 $f_{11}=f_8$.

\diamond **Teorema 5.2.11.** *Ada pelabelan super $(22n + 23, 20) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas F_3^n untuk $n \geq 2$.*

Bukti. Untuk melabeli titik amalgamasi graf kipas F_3^n gunakan label titik yang terdapat pada teorema 5.2.8 ke dalam teorema 5.2.11 dimana $f_{11}=f_8$. Sehingga $f_{11}(p)=f_8(p)$, $f_{11}(x_i)=f_8(x_i)$, $f_{11}(y_i)=f_8(y_i)$, $f_{11}(z_i)=f_8(z_i)$. Dengan demikian maka bobot dekomposisi dari pelabelan total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas yang didefinisikan dengan $w_{f_{11}}=w_{f_8}=9i + 1$.

Labeli sisi amalgamasi graf kipas F_3^n dengan fungsi f_{11} sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f_{11}(px_i) &= 3n + 3i - 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ f_{11}(x_iy_i) &= 3n + 3i, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ f_{11}(y_iz_i) &= 3n + 3i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ f_{11}(pz_i) &= 6n + i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ f_{11}(py_i) &= 7n + i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Jika $W_{f_{11}}$ didefinisikan sebagai bobot total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas berdasarkan penjumlahan bobot dekomposisi dengan label sisinya maka $w_{f_{11}}$ dan fungsi label sisi dengan syarat batas i yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} W_{f_{11}} &= w_{f_{11}} + f_{11}(px_i) + f_{11}(x_iy_i) + f_{11}(y_iz_i) + f_{11}(pz_i) + f_{11}(py_i) \\ &= 22n + 20i + 3, \text{ jika } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

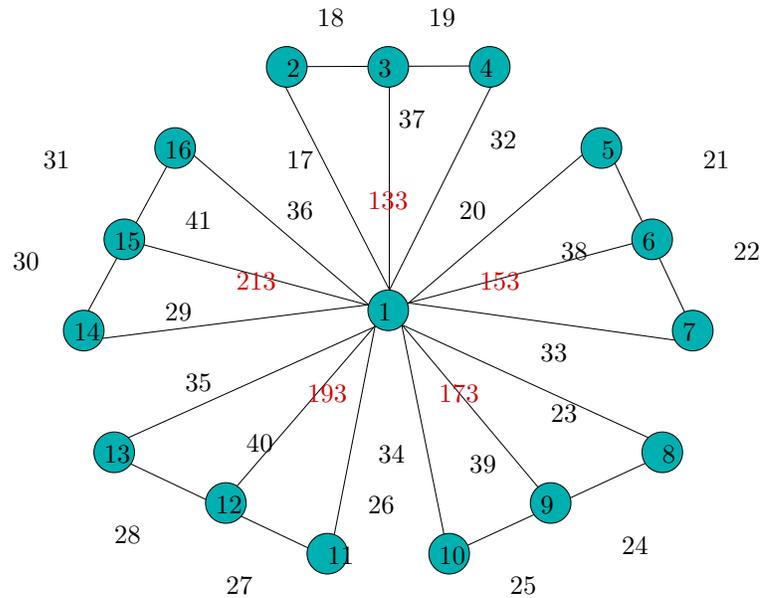
Dengan demikian maka didapatkan himpunan bobot total dekomposisi $W_{f_{11}} = \{22n + 23, 22n + 43, \dots, 42n + 3\}$. Sehingga terbukti bahwa amalgamasi pada graf kipas F_3^n memiliki super $(22n + 23, 20) - F_3$ antimagic total dekomposisi untuk $n \geq 2$. \square

Gambar 5.21 merupakan contoh super $(22n + 23, 20) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas F_3^5

Pada teorema berikutnya akan dibuktikan super $(a, d) - \mathcal{H}$ antimagic total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas F_3^n dengan nilai $d=22$ dengan syarat berlaku untuk $n \geq 2$. Teorema dibawah ini menggunakan label titik yang sama seperti pada teorema 5.2.8 $f_{12}=f_8$.

\diamond **Teorema 5.2.12.** *Ada pelabelan super $(21n + 24, 22) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas F_3^n untuk $n \geq 2$.*

Bukti. Untuk melabeli titik amalgamasi graf kipas F_3^n gunakan label titik yang terdapat pada teorema 5.2.8 ke dalam teorema 5.2.12 dimana $f_{12}=f_8$. Sehingga



Gambar 5.21 Super $(22n + 23, 20) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada F_3^5

$f_{12}(p)=f_8(p)$, $f_{12}(x_i)=f_8(x_i)$, $f_{12}(y_i)=f_8(y_i)$, $f_{12}(z_i)=f_8(z_i)$. Dengan demikian maka bobot dekomposisi dari pelabelan total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas yang didefinisikan dengan $w_{f_{12}}=w_{f_8}=9i + 1$.

Labeli sisi amalgamasi graf kipas F_3^n dengan fungsi f_{12} sebagai berikut:

$$f_{12}(px_i) = 3n + 3i - 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$f_{12}(x_iy_i) = 3n + 3i, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$f_{12}(y_iz_i) = 3n + 3i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$f_{12}(pz_i) = 6n + 2i, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$f_{12}(py_i) = 6n + 2i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

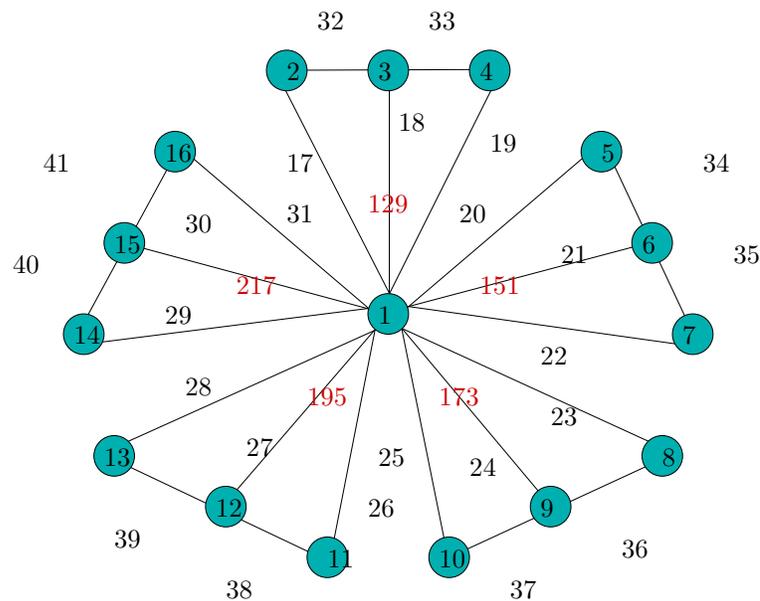
Jika $W_{f_{12}}$ didefinisikan sebagai bobot total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas berdasarkan penjumlahan bobot dekomposisi dengan label sisinya maka $w_{f_{12}}$ dan fungsi label sisi dengan syarat batas i yang bersesuaian, sehingga dapat

dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} W_{f_{12}} &= w_{f_{12}} + f_{12}(px_i) + f_{12}(x_iy_i) + f_{12}(y_iz_i) + f_{12}(pz_i) + f_{12}(py_i) \\ &= 21n + 22i + 2, \text{ jika } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Dengan demikian maka didapatkan himpunan bobot total dekomposisi $W_{f_{12}}$ = $\{21n + 24, 21n + 46, \dots, 43n + 2\}$. Sehingga terbukti bahwa amalgamasi pada graf kipas F_3^n memiliki super $(21n+24, 22) - F_3$ antimagic total dekomposisi untuk $n \geq 2$. \square

Gambar 5.23 merupakan contoh super $(21n + 24, 22) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas F_3^5



Gambar 5.22 Super $(21n + 24, 22) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada F_3^5

Pada teorema berikutnya akan dibuktikan super $(a, d) - \mathcal{H}$ antimagic total dekomposisi pada amalgamsi graf kipas F_3^n dengan nilai $d=24$ dengan syarat berlaku untuk $n \geq 2$. Teorema dibawah ini menggunakan label titik yang sama seperti pada teorema 5.2.1 $f_{13}=f_1$.

◇ **Teorema 5.2.13.** *Ada pelabelan super $(20n+25, 24)$ - F_3 antimagic total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas F_3^n untuk $n \geq 2$.*

Bukti. Untuk melabeli titik amalgamasi graf kipas F_3^n gunakan label titik yang terdapat pada teorema 5.2.1 ke dalam teorema 5.2.13 dimana $f_{13}=f_1$. Sehingga $f_{13}(p)=f_1(p)$, $f_{13}(x_i)=f_1(x_i)$, $f_{13}(y_i)=f_1(y_i)$, $f_{13}(z_i)=f_1(z_i)$. Dengan demikian maka bobot dekomposisi dari pelabelan total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas yang didefinisikan dengan $w_{f_{13}}=w_{f_1}=5n - i + 6$.

Labeli sisi amalgamasi graf kipas F_3^n dengan fungsi f_{13} sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f_{13}(px_i) &= 3n + 5i - 3, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ f_{13}(x_iy_i) &= 3n + 5i - 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ f_{13}(y_iz_i) &= 3n + 5i - 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ f_{13}(pz_i) &= 3n + 5i, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ f_{13}(py_i) &= 3n + 5i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

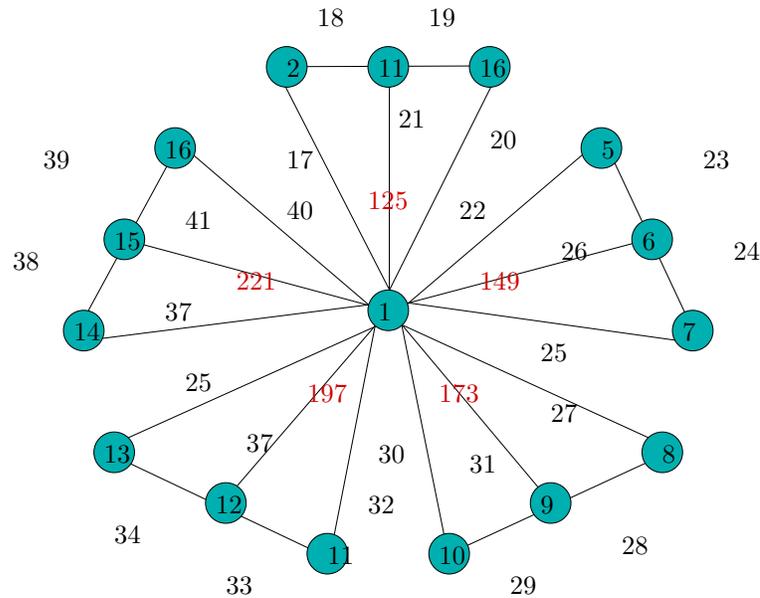
Jika $W_{f_{13}}$ didefinisikan sebagai bobot total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas berdasarkan penjumlahan bobot selimut dengan label sisinya maka $w_{f_{13}}$ dan fungsi label sisi dengan syarat batas i yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} W_{f_{13}} &= w_{f_{13}} + f_{13}(px_i) + f_{13}(x_iy_i) + f_{13}(y_iz_i) + f_{13}(pz_i) + f_{13}(py_i) \\ &= 20n + 24i + 1, \text{ jika } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Dengan demikian maka didapatkan himpunan bobot total dekomposisi $W_{f_{13}} = \{20n + 25, 20n + 49, \dots, 44n + 1\}$. Sehingga terbukti bahwa amalgamasi pada graf kipas F_3^n memiliki super $(20n+25, 24)$ - F_3 antimagic total dekomposisi untuk $n \geq 2$. \square

Gambar 5.23 merupakan contoh super $(44n + 1, 24)$ - F_3 antimagic total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas F_3^5

Pada teorema berikutnya akan dibuktikan super (a, d) - \mathcal{H} antimagic total dekomposisi pada amalgamsi graf kipas (F_3^n) dengan nilai $d=26$ dengan syarat



Gambar 5.23 Super $(20n + 25, 24) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada F_3^5

berlaku untuk $n \geq 2$. Teorema dibawah ini menggunakan label titik yang sama seperti pada teorema 5.2.2 $f_{14}=f_2$ dan label sisi yang sama seperti teorema 5.2.13 $f_{14}=f_{13}$.

◇ **Teorema 5.2.14.** *Ada pelabelan super $(19n + 26, 26) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas F_3^n untuk $n \geq 2$.*

Bukti. Untuk melabeli titik amalgamasi graf kipas F_3^n gunakan label titik yang terdapat pada teorema 5.2.2 ke dalam teorema 5.2.14 dimana $f_{14}=f_2$. Sehingga $f_{14}(p)=f_2(p)$, $f_{14}(x_i)=f_2(x_i)$, $f_{14}(y_i)=f_2(y_i)$, $f_{14}(z_i)=f_2(z_i)$. Dengan demikian maka bobot dekomposisi dari pelabelan total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas yang didefinisikan dengan $w_{f_{14}}=w_{f_2}=4n + i + 5$.

Untuk melabeli sisi amalgamasi graf kipas F_3^n gunakan label sisi yang terdapat pada teorema 5.2.13 ke dalam teorema 5.2.14 dimana $f_{14}=f_{13}$. Sehingga $f_{14}(px_i)=f_{13}(px_i)$, $f_{14}(x_iy_i)=f_{13}(x_iy_i)$, $f_{14}(y_iz_i)=f_{13}(y_iz_i)$, $f_{14}(pz_i)=f_{13}(pz_i)$, $f_{14}(py_i)=f_{13}(py_i)$.

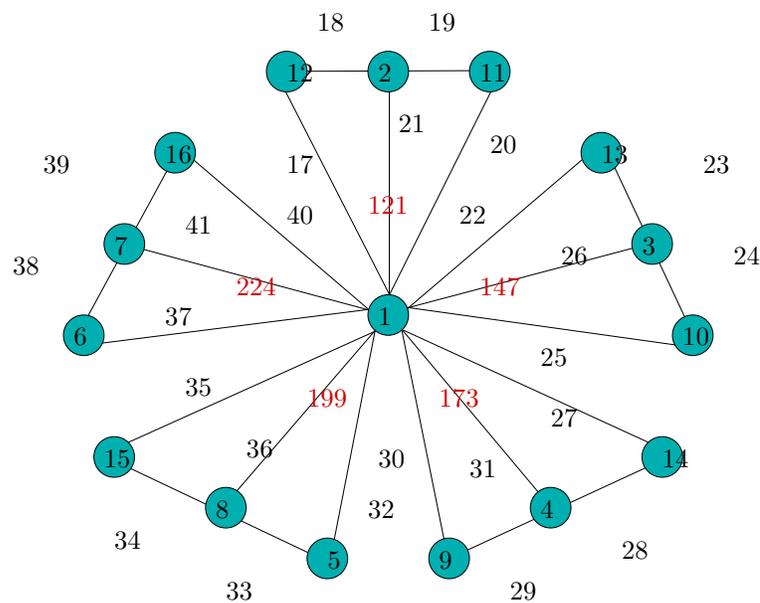
Jika $W_{f_{14}}$ didefinisikan sebagai bobot total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas berdasarkan penjumlahan bobot dekomposisi dengan label sisinya maka $w_{f_{14}}$ dan fungsi label sisi dengan syarat batas i yang bersesuaian, sehingga dapat

dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} W_{f_{14}} &= w_{f_{14}} + f_{14}(px_i) + f_{14}(x_iy_i) + f_{14}(y_iz_i) + f_{14}(pz_i) + f_{14}(py_i) \\ &= 19n + 26i, \text{ jika } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Dengan demikian maka didapatkan himpunan bobot total dekomposisi $W_{f_{14}} = \{19n + 26, 19n + 52, \dots, 45n\}$. Sehingga terbukti bahwa amalgamasi pada graf kipas F_3^n memiliki super $(19n + 26, 26) - F_3$ antimagic total dekomposisi untuk $n \geq 2$. \square

Gambar 5.24 merupakan contoh super $(19n + 26, 26) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas F_3^5



Gambar 5.24 Super $(19n + 26, 26) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada F_3^5

Pada teorema berikutnya akan dibuktikan super $(a, d) - \mathcal{H}$ antimagic total dekomposisi pada amalgamsi graf kipas F_3^n dengan nilai $d=28$ dengan syarat berlaku untuk $n \geq 2$. Teorema dibawah ini menggunakan label titik yang sama seperti pada teorema 5.2.5 $f_{15}=f_5$ dan label sisi yang sama seperti teorema 5.2.13 $f_{15}=f_{13}$.

◇ **Teorema 5.2.15.** *Ada pelabelan super $(18n+27, 28)$ - F_3 antimagic total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas F_3^n untuk $n \geq 2$.*

Bukti. Untuk melabeli titik amalgamasi graf kipas (F_3^n) gunakan label titik yang terdapat pada teorema 5.2.5 ke dalam teorema 5.2.15 dimana $f_{15}=f_5$. Sehingga $f_{15}(p)=f_5(p)$, $f_{15}(x_i)=f_5(x_i)$, $f_{15}(y_i)=f_5(y_i)$, $f_{15}(z_i)=f_5(z_i)$. Dengan demikian maka bobot dekomposisi dari pelabelan total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas yang didefinisikan dengan $w_{f_{15}}=w_{f_5}=3n+3i+4$.

Untuk melabeli sisi amalgamasi graf kipas F_3^n gunakan label sisi yang terdapat pada teorema 5.2.13 ke dalam teorema 5.2.15 dimana $f_{15}=f_{13}$. Sehingga $f_{15}(px_i)=f_{13}(px_i)$, $f_{15}(x_iy_i)=f_{13}(x_iy_i)$, $f_{15}(y_iz_i)=f_{13}(y_iz_i)$, $f_{15}(pz_i)=f_{13}(pz_i)$, $f_{15}(py_i)=f_{13}(py_i)$.

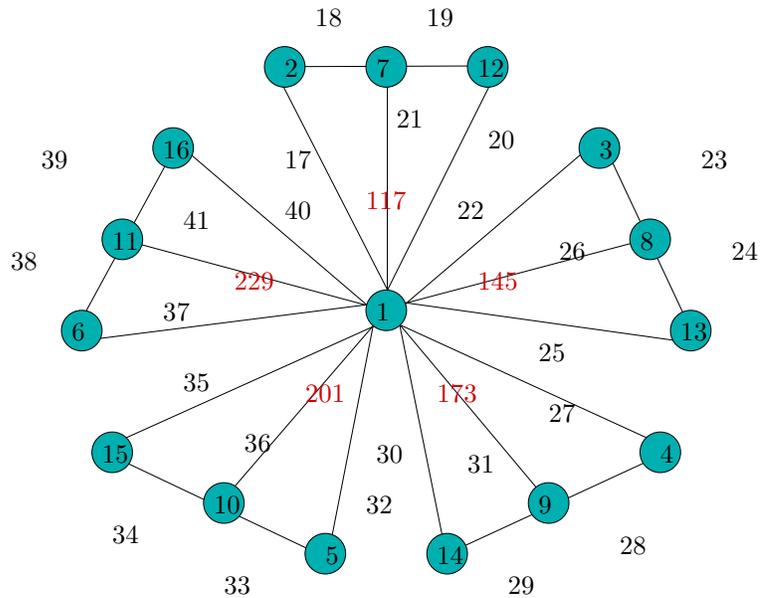
Jika $W_{f_{15}}$ didefinisikan sebagai bobot total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas berdasarkan penjumlahan bobot dekomposisi dengan label sisinya maka $w_{f_{15}}$ dan fungsi label sisi dengan syarat batas i yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} W_{f_{15}} &= w_{f_{15}} + f_{15}(px_i) + f_{15}(x_iy_i) + f_{15}(y_iz_i) + f_{15}(pz_i) + f_{15}(py_i) \\ &= 18n + 28i - 1, \text{ jika } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Dengan demikian maka didapatkan himpunan bobot total dekomposisi $W_{f_{15}} = \{18n+27, 18n+55, \dots, 46n-1\}$. Sehingga terbukti bahwa amalgamasi pada graf kipas F_3^n memiliki super $(18n+27, 28)$ - F_3 antimagic total dekomposisi untuk $n \geq 2$. □

Gambar 5.25 merupakan contoh super $(18n+27, 28)$ - F_3 antimagic total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas F_3^5

Pada teorema berikutnya akan dibuktikan super (a, d) - \mathcal{H} antimagic total dekomposisi pada amalgamsi graf kipas F_3^n dengan nilai $d=30$ dengan syarat berlaku untuk $n \geq 2$. Teorema dibawah ini menggunakan label titik yang sama seperti pada teorema 5.2.6 $f_{16}=f_6$ dan label sisi yang sama seperti teorema 5.2.13 $f_{16}=f_{13}$.



Gambar 5.25 Super $(18n + 27, 28) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada F_3^5

◇ **Teorema 5.2.16.** *Ada pelabelan super $(20n - 25, 30)$ - F_3 antimagic total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas F_3^n untuk $n \geq 2$.*

Bukti. Untuk melabeli titik amalgamasi graf kipas (F_3^n) gunakan label titik yang terdapat pada teorema 5.2.6 ke dalam teorema 5.2.16 dimana $f_{16} = f_6$. Sehingga $f_{16}(p) = f_6(p)$, $f_{16}(x_i) = f_6(x_i)$, $f_{16}(y_i) = f_6(y_i)$, $f_{16}(z_i) = f_6(z_i)$. Dengan demikian maka bobot dekomposisi dari pelabelan total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas yang didefinisikan dengan $w_{f_{16}} = w_{f_6} = 5n + 5i$.

Untuk melabeli sisi amalgamasi graf kipas F_3^n gunakan label sisi yang terdapat pada teorema 5.2.13 ke dalam teorema 5.2.16 dimana $f_{16} = f_{13}$. Sehingga $f_{16}(px_i) = f_{13}(px_i)$, $f_{16}(x_iy_i) = f_{13}(x_iy_i)$, $f_{16}(y_iz_i) = f_{13}(y_iz_i)$, $f_{16}(pz_i) = f_{13}(pz_i)$, $f_{16}(py_i) = f_{13}(py_i)$.

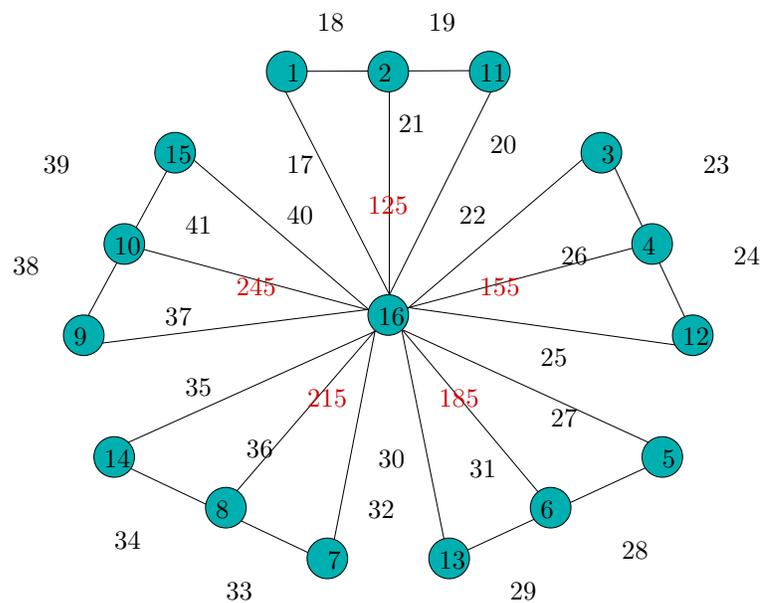
Jika $W_{f_{16}}$ didefinisikan sebagai bobot total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas berdasarkan penjumlahan bobot dekomposisi dengan label sisinya maka $w_{f_{16}}$ dan fungsi label sisi dengan syarat batas i yang bersesuaian, sehingga dapat

dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} W_{f_{16}} &= w_{f_{16}} + f_{16}(px_i) + f_{16}(x_iy_i) + f_{16}(y_iz_i) + f_{16}(pz_i) + f_{16}(py_i) \\ &= 20n + 30i - 5, \text{ jika } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Dengan demikian maka didapatkan himpunan bobot total dekomposisi $W_{f_{16}} = \{20n + 25, 20n + 55, \dots, 50n - 5\}$. Sehingga terbukti bahwa amalgamasi pada graf kipas F_3^n memiliki super $(20n+25, 30) - F_3$ antimagic total dekomposisi untuk $n \geq 2$. \square

Gambar 5.26 merupakan contoh super $(20n + 25, 30) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas F_3^5



Gambar 5.26 Super $(20n + 25, 30) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada F_3^5

Pada teorema berikutnya akan dibuktikan super $(a, d) - \mathcal{H}$ antimagic total dekomposisi pada amalgamsi graf kipas F_3^n dengan nilai $d=34$ dengan syarat berlaku untuk $n \geq 2$. Teorema dibawah ini menggunakan label titik yang sama seperti pada teorema 5.2.8 $f_{17}=f_8$ dan label sisi yang sama seperti teorema 5.2.13 $f_{17}=f_{13}$.

◇ **Teorema 5.2.17.** *Ada pelabelan super $(15n + 30, 34)$ - F_3 antimagic total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas F_3^n untuk $n \geq 2$.*

Bukti. Untuk melabeli titik amalgamasi graf kipas F_3^n gunakan label titik yang terdapat pada teorema 5.2.8 ke dalam teorema 5.2.17 dimana $f_{17}=f_8$. Sehingga $f_{17}(p)=f_8(p)$, $f_{17}(x_i)=f_8(x_i)$, $f_{17}(y_i)=f_8(y_i)$, $f_{17}(z_i)=f_8(z_i)$. Dengan demikian maka bobot dekomposisi dari pelabelan total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas yang didefinisikan dengan $w_{f_{17}}=w_{f_8}=9i + 1$.

Untuk melabeli sisi amalgamasi graf kipas F_3^n gunakan label sisi yang terdapat pada teorema 5.2.13 ke dalam teorema 5.2.17 dimana $f_{17}=f_{13}$. Sehingga $f_{17}(px_i)=f_{13}(px_i)$, $f_{17}(x_iy_i)=f_{13}(x_iy_i)$, $f_{17}(y_iz_i)=f_{13}(y_iz_i)$, $f_{17}(pz_i)=f_{13}(pz_i)$, $f_{17}(py_i)=f_{13}(py_i)$. Jika $W_{f_{17}}$ didefinisikan sebagai bobot total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas berdasarkan penjumlahan bobot dekomposisi dengan label sisinya maka $w_{f_{17}}$ dan fungsi label sisi dengan syarat batas i yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

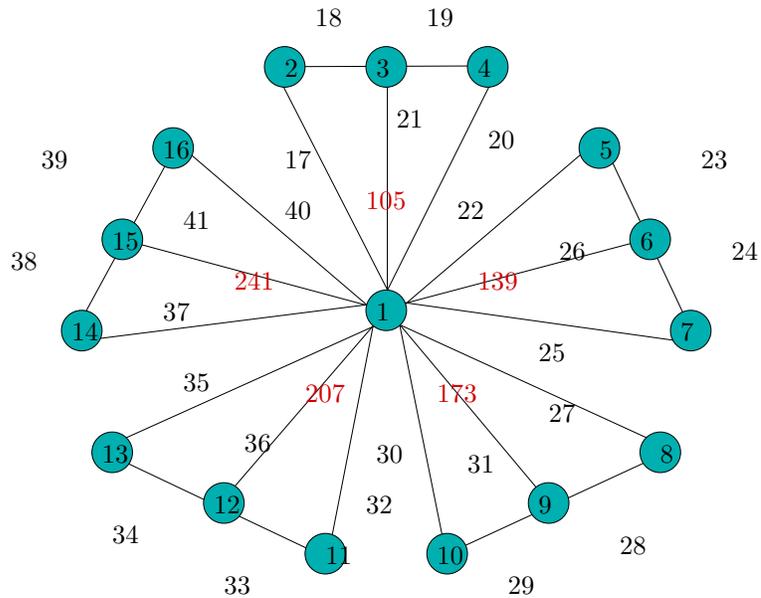
$$\begin{aligned} W_{f_{17}} &= w_{f_{17}} + f_{17}(px_i) + f_{17}(x_iy_i) + f_{17}(y_iz_i) + f_{17}(pz_i) + f_{17}(py_i) \\ &= 15n + 34i - 4, \text{ jika } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Dengan demikian maka didapatkan himpunan bobot total dekomposisi $W_{f_{17}} = \{15n + 30, 15n + 64, \dots, 49n - 4\}$. Sehingga terbukti bahwa amalgamasi pada graf kipas F_3^n memiliki super $(15n + 30, 34) - F_3$ antimagic total dekomposisi untuk $n \geq 2$. □

Gambar 5.27 merupakan contoh super $(15n + 30, 34) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas F_3^5

5.3 Pelabelan Super (a, d) - \mathcal{H} Antimagic Total Dekomposisi pada Amalgamasi Graf Kipas Diskonektif

Selanjutnya peneliti melakukan penelitian untuk gabungan saling lepas pada amalgamasi graf kipas. Penelitian ini merupakan pengembangan dari pada amalgamasi graf kipas tunggal. Gabungan pada Amalgamasi Graf Kipas didefinisikan



Gambar 5.27 Super $(15n + 30, 34) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada F_3^5

sebagai pada amalgamasi graf kipas dengan salinan sebanyak m . Gabungan pada amalgamasi graf kipas (mF_3^n) didefinisikan sebagai $V(mF_3^n) = \{p^j, x_i^j, y_i^j, z_i^j : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ dan sisi $E(mF_3^n) = \{p^j x_i^j, p^j y_i^j, p^j z_i^j, x_i^j y_i^j, y_i^j z_i^j : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$.

Sama seperti pada amalgamasi graf kipas tunggal, untuk menentukan batas atas d pada gabungan saling lepas amalgamasi graf kipas, perlu diketahui pula kardinalitas jumlah titik (p_G) dan jumlah sisi (q_G) pada gabungan saling lepas amalgamasi graf kipas. Jumlah titik dan jumlah sisi pada (mF_3^n) dapat ditentukan terlebih dahulu dengan mencermati definisi gabungan saling lepas pada suatu graf. Gabungan saling lepas pada amalgamasi graf kipas yang dinotasikan dengan (mF_3^n) didefinisikan sebagai gabungan saling lepas dari m buah salinan amalgamasi graf kipas dengan $1 \leq j \leq m$, ditulis : $1F_3^n \cup 2F_3^n \cup 3F_3^n \cup \dots \cup mF_3^n$. Sehingga jumlah titik amalgamasi graf kipas mF_3^n adalah m kali jumlah titik graf F_3^n dapat dituliskan dengan $p_G = m(3n + 1) = 3nm + m$ dan jumlah sisi graf F_3^n adalah m kali jumlah sisi graf F_3^n dapat dituliskan dengan $q_G = m(5n) = 5nm$. Sedangkan jumlah titik pada dekomposisi amalgamasi graf kipas mF_3^n adalah m kali jumlah titik pada dekomposisi amalgamasi graf kipas

F_3^n , yaitu $p_H = m(4) = 4m$ dan jumlah sisi pada dekomposisi amalgamasi graf kipas mF_3^n adalah m kali jumlah sisi pada dekomposisi amalgamasi graf kipas F_3^n , dapat ditulis dengan $q_H = m(5) = 5m$. Jumlah dekomposisi amalgamasi graf kipas mF_3^n adalah m kali jumlah dekomposisi amalgamasi graf kipas tunggal F_3^n , dapat dituliskan $s = m(n) = nm$.

Batas atas d gabungan saling lepas pada amalgamasi graf kipas mF_3^n juga dapat ditentukan dengan menggunakan Lemma 5.2.1. Diketahui jumlah titik pada graf mF_3^n adalah $p_G = 3nm + m$ dan jumlah sisi $q_G = 5nm$. Sedangkan jumlah titik pada dekomposisi amalgamasi graf kipas mF_3^n adalah $p_H = 4m$ dan jumlah sisi pada dekomposisi amalgamasi graf kipas $q_H = 5m$ dengan jumlah selimut mF_3^n adalah $s = nm$ untuk m adalah jumlah salinan amalgamasi graf kipas dari atas ke bawah dan n adalah banyaknya *expand* graf amalgamasi kipas. Dengan demikian batas atas nilai beda d tersebut adalah:

$$\begin{aligned}
d &\leq \frac{(p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H}{s - m} \\
&= \frac{(3nm + m - 4m)4m + (5nm - 5m)5m}{(n - 1)m} \\
&= \frac{(3nm - 3)4m + (5nm - 5m)5m}{nm - m} \\
&= \frac{12nm^2 - 12m^2 + 25nm^2 - 25m^2}{nm - m} \\
&= \frac{37nm^2 - 37m^2}{nm - m} \\
&= \frac{37m(nm - m)}{nm - m} \\
&\leq 37m
\end{aligned}$$

Sesuai dengan pelabelan *SHATD* pada amalgamasi graf kipas tunggal, gabungan saling lepas amalgamasi graf kipas juga menggunakan bilangan bulat positif, sehingga nilai $d \geq 0$ dan d adalah bilangan bulat. Sehingga dapat disimpulkan $d \in \{0, 1, 2, 3, \dots, 37m\}$. Selanjutnya akan ditentukan fungsi bijektif super (a, d) - \mathcal{H} antimagic total dekomposisi sesuai dengan nilai d yang telah ditetapkan.

Sama seperti pada amalgamasi graf kipas tunggal, metode yang digunakan dalam menemukan pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} antimagic total dekomposisi pada gabungan saling lepas amalgamasi graf kipas mF_3^n terdiri dari beberapa langkah yang diawali dengan menggunakan pendeteksian pola (*pattern recognition*) untuk menentukan pelabelan yang berlaku sampai dengan batas i, j yang telah ditemukan. Kemudian untuk menentukan pola secara umum digunakan fungsi-fungsi dalam barisan aritmatika untuk menentukan fungsi bijektifnya. Setelah fungsi bijektif diketahui maka harus dibuktikan secara deduktif matematik untuk membuktikan kebenaran dari teorema-teorema tersebut.

Perlu diketahui bahwa teorema dalam penelitian ini adalah bukan teorema yang biimplikatif atau karakteristik sehingga pembuktiannya hanya dilakukan satu arah. Dari hasil penggabungan pola melalui *pattern recognition* dan konsep barisan aritmatika, maka diperoleh teorema dan akibat sebagai berikut. Teorema yang ditemukan dalam penelitian ini tidak bersifat tunggal (berkenaan dengan sifat ketunggalan) melainkan hanya bersifat keberadaan (*existence but not unique*).

Untuk menentukan pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} antimagic total dekomposisi pada gabungan amalgamasi graf kipas mF_3^n . Terlebih dahulu harus diketahui batas atas nilai d untuk gabungan graf sebanyak m amalgamasi graf kipas, dengan menggunakan rumus yang telah ada.

◇ **Teorema 5.3.1.** *Ada gabungan saling lepas amalgamasi graf kipas mF_3^n memiliki super $(30nm + \frac{17m+13}{2}, 4) - F_3$ antimagic total dekomposisi untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 3$ dimana m ganjil.*

Bukti. Labeli titik gabungan saling lepas amalgamasi graf kipas mF_3^n dengan

fungsi bijektif f_{18} sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
f_{18}(p) &= j, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \\
f_{18}(x_i^j) &= 3mi + j - 2m, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \\
f_{18}(y_i^j) &= 3mi - 2j + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq \frac{m-1}{2} \\
f_{18}(y_i^j) &= m + 3mi - 2j + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, \frac{m+1}{2} \leq j \leq m \\
f_{18}(z_i^j) &= \frac{7m+1}{2} + j + 3mi - 3m, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq \frac{m-1}{2} \\
f_{18}(z_i^j) &= \frac{5m+1}{2} + j + 3mi - 3m, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, \frac{m+1}{2} \leq j \leq m
\end{aligned}$$

Dapat dilihat bahwa f_{18} adalah fungsi bijektif yang memetakan mF_3^n ke himpunan bilangan bulat $f(V) = \{1, 2, 3, \dots, 3nm + m\}$. Jika $w_{f_{18}}$ didefinisikan sebagai bobot dekomposisi dari pelabelan total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas dimana bobot dekomposisi tersebut adalah $\mathcal{H}=F_3$ sebagai dekomposisinya, maka fungsi bijektif $w_{f_{18}}$ dapat ditentukan sebagai berikut:

$$w_{f_{18}} = j + 9mi + \left(\frac{-3m+3}{2}\right); 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$$

Labeli sisi gabungan saling lepas amalgamasi graf kipas (mF_3^n) dengan fungsi bijektif f_{18} sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
f_{18}(p^j y_i^j) &= 4nm + j - mi + m, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \\
f_{18}(p^j z_i^j) &= 5nm + j - mi + m, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \\
f_{18}(p^j x_i^j) &= 6nm + j - mi + m, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \\
f_{18}(x_i^j y_i^j) &= 7nm + j - mi + m, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \\
f_{18}(y_i^j z_i^j) &= 8nm + 2m - mi - j + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m
\end{aligned}$$

Misalkan $W_{f_{18}}$ didefinisikan sebagai bobot total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas berdasarkan penjumlahan bobot dekomposisi dengan label sisinya maka $w_{f_{18}}$ dan fungsi label sisi dengan syarat batas i dan j yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$W_{f_{18}} = 30nm + 4j + 4mi + \frac{9m+5}{2}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$$

Dengan demikian maka didapatkan himpunan bobot total dekomposisi $W_{f_{18}} = \{30nm + \frac{17m+13}{2}, 30nm + \frac{17m+21}{2}, \dots, 34nm + \frac{17m+5}{2}\}$. Sehingga terbukti bahwa gabungan saling lepas amalgamasi pada graf kipas (mF_3^n) memiliki super $(30nm + \frac{17m+13}{2}, 4) - F_3$ antimagic total dekomposisi untuk $n \geq 2$, $m \geq 3$ dan m ganjil. \square

Gambar 5.28 merupakan contoh super $(30nm + \frac{17m+13}{2}, 4) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada gabungan amalgamasi graf kipas $5F_3^5$.

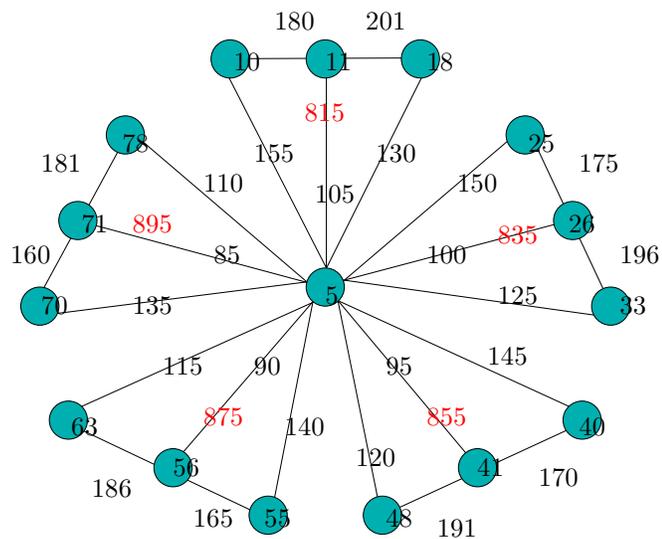
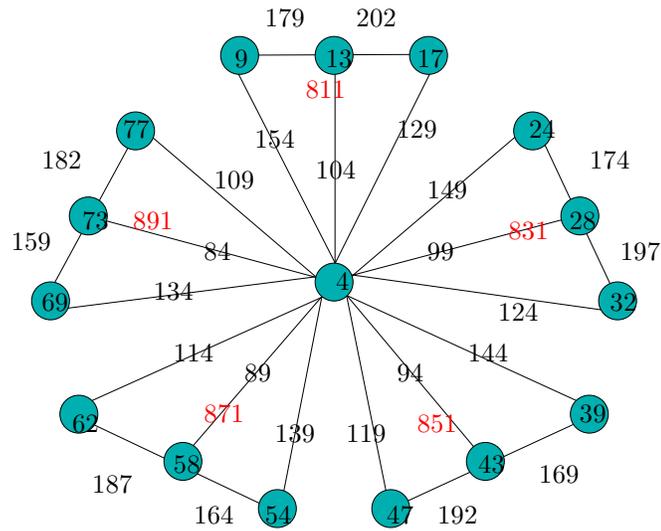
Pada teorema diatas hanya berlaku untuk m salinan bernilai ganjil dimana $m=3, 5, 7$ dan seterusnya. Pembuktian teorema selanjutnya juga berlaku syarat yang sama yaitu $n \geq 2$ dan m salinan bernilai ganjil dimulai dari 3.

\diamond **Teorema 5.3.2.** *Ada gabungan saling lepas amalgamasi graf kipas (mF_3^n) memiliki super $(29nm + \frac{17m+15}{2}, 6) - F_3$ antimagic total dekomposisi untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 3$ dimana m salinan bernilai ganjil.*

Bukti. Untuk melabeli titik gabungan saling lepas amalgamasi graf kipas mF_3^n gunakan label titik yang terdapat pada teorema 5.3.1 ke dalam teorema 5.3.2 dimana $f_{19}=f_{18}$. Sehingga $f_{19}(p^j)=f_{18}(p^j)$, $f_{19}(x_i^j)=f_{18}(x_i^j)$, $f_{19}(y_i^j)=f_{18}(y_i^j)$, $f_{19}(z_i^j)=f_{18}(z_i^j)$. Dengan demikian maka bobot dekomposisi dari pelabelan total dekomposisi pada gabungan saling lepas amalgamasi graf kipas yang didefinisikan dengan $w_{f_{19}}=w_{f_{18}}= j + 9mi + (\frac{-3m+3}{2})$.

Labeli sisi gabungan saling lepas amalgamasi graf kipas (mF_3^n) dengan fungsi bijektif f_{19} sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f_{19}(p^j y_i^j) &= 4nm + j - mi + m, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \\ f_{19}(p^j z_i^j) &= 5nm + j - mi + m, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \\ f_{19}(p^j x_i^j) &= 6nm + j - mi + m, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \\ f_{19}(x_i^j y_i^j) &= 7nm + j - mi + m, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \\ f_{19}(y_i^j z_i^j) &= 7nm + j - mi, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \end{aligned}$$



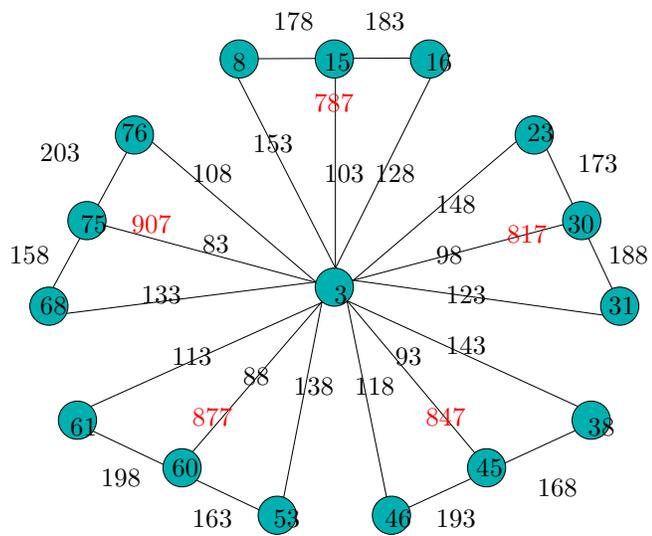
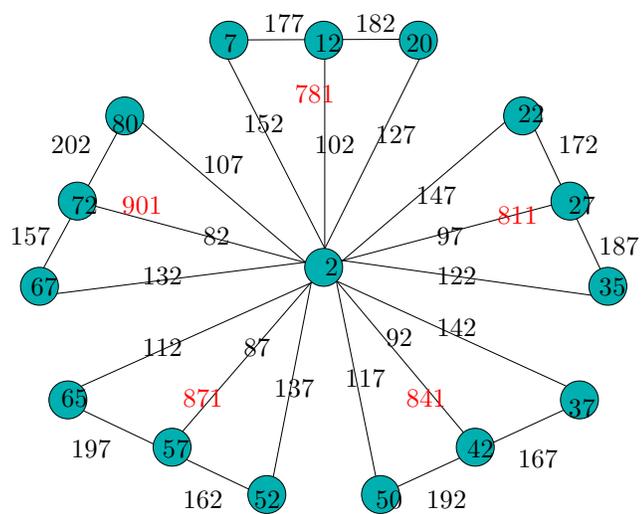
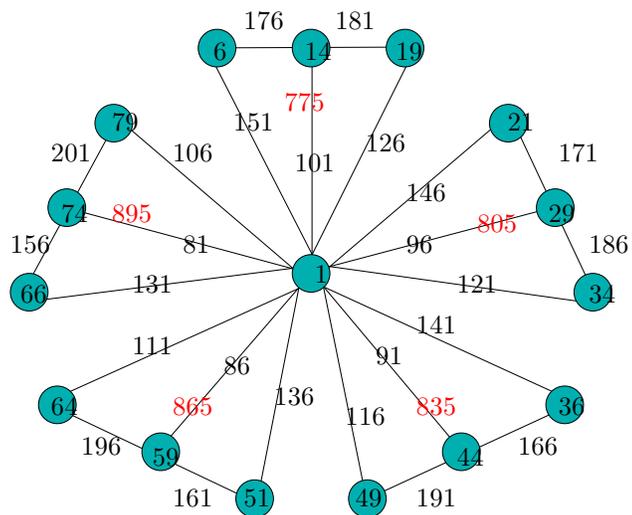
Gambar 5.28 Super $(30nm + \frac{17m+13}{2}, 4) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada gabungan saling lepas $5F_3^5$

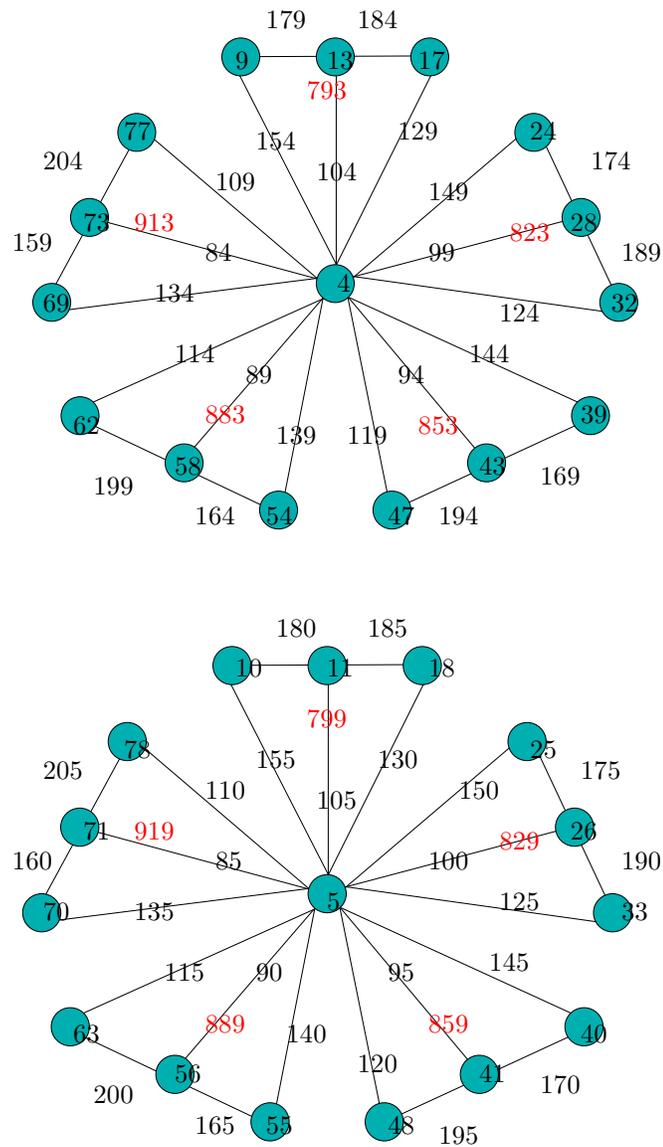
Misalkan $W_{f_{19}}$ didefinisikan sebagai bobot total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas berdasarkan penjumlahan bobot dekomposisi dengan label sisinya maka $w_{f_{19}}$ dan fungsi label sisi dengan syarat batas i dan j yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$W_{f_{19}} = 29nm + 6mi + 6j^{\frac{+5m+3}{2}}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$$

Dengan demikian maka didapatkan himpunan bobot total dekomposisi $W_{f_{19}} = \{29nm + \frac{+17m+15}{2}, 29nm + \frac{+17m+27}{2}, \dots, 35nm + \frac{+17m+3}{2}\}$. Sehingga terbukti bahwa gabungan saling lepas amalgamasi pada graf kipas mF_3^n memiliki super $(29nm + \frac{+17m+15}{2}, 6) - F_3$ antimagic total dekomposisi untuk $n \geq 2$, $m \geq 3$ dan m ganjil. \square

Gambar 5.29 merupakan contoh super $(29nm + \frac{+17m+15}{2}, 6) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada gabungan amalgamasi graf kipas $5F_3^5$.





Gambar 5.29 Super $(29nm + \frac{17m+15}{2}, 6) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada gabungan saling lepas $5F_3^5$

BAB 6. KESIMPULAN DAN SARAN

6.1 Kesimpulan

Dalam penelitian awal ini dapat disimpulkan bahwa:

1. Graf semi parasut tunggal SP_{2n-1} memiliki batas atas $d < 3$ atau $d = 0, 1, 2$ dan pada gabungannya mSP_{2n-1} memiliki batas $d < 3$ atau $d = 0, 1, 2$. Graf semi parasut tunggal SP_{2n-1} memiliki fungsi bijektif pelabelan super yaitu $(5n + 2, 0)$, $(2n + 2i + 2, 2)$ dan $(\frac{7n+6}{2}, 1)$ untuk $n \geq 2$. Sedangkan pada gabungannya mSP_{2n-1} terdapat fungsi bijektif pelabelan super yaitu $(\frac{10nm+m+3}{2}, 0)$, $(\frac{4nm+3m+5}{2}, 2)$ untuk $m \geq 3$, m ganjil dan $n \geq 2$, $(\frac{14nm+4m+8}{4}, 1)$ untuk $m \geq 3$, $m \equiv 1 \pmod{4}$ dan $n \geq 2$, n genap.
2. Amalgamasi graf kipas F_3^n memiliki pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} antimagic total dekomposisi untuk $d = \{0, 1, 2, \dots, 36, 37\}$. Amalgamasi graf kipas F_3^n terdapat fungsi bijektif pelabelan super $(32n + 13, 0)$, $(31n + 14, 2)$, $(310n + 15, 4)$, $(29n + 16, 6)$, $(28n + 17, 8)$, $(30n + 15, 10)$, $(26n + 19, 12)$, $(25n + 20, 14)$, $(24n + 21, 16)$, $(23n + 22, 18)$, $(22n + 23, 20)$, $(21n + 24, 22)$, $(20n + 25, 24)$, $(19n + 26, 26)$, $(18n + 27, 28)$, $(20n + 25, 30)$, $(15n + 30, 34)$ - F_3 antimagic total dekomposisi untuk $n \geq 2$. Gabungan saling lepas amalgamasi graf kipas mF_3^n memiliki pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} total dekomposisi untuk $d = \{0, 1, 2, \dots, 37m\}$. Hasil penelitian ini dibuktikan bahwa Gabungan saling lepas amalgamasi graf kipas terdapat fungsi bijektif pelabelan super $(30nm + \frac{17m+13}{2}, 4)$, $(29nm + \frac{17m+15}{2}, 6)$ - F_3 antimagic total dekomposisi untuk $n \geq 2$, $m \geq 3$ dan m ganjil.

6.2 Saran

Pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic pada graf semi parasut dan super (a, d) - H - antimagic pada amalgamasi graf kipas tidak semuanya ditemukan. Beberapa nilai d terkait masih ada yang terbuka untuk dilakukan penelitian. Oleh

karena itu peneliti mengajukan masalah terbuka berikut untuk dikerjakan paneliti berikutnya.

1. Temukan pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic pada graf semi parasut SP_{2n-1} , dengan $n \geq 2$ n ganjil untuk $d = 1$.
2. Temukan pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic pada gabungan graf semi parasut mSP_{2n-1} , dengan $n \geq 2$; $m \equiv 3 \pmod{4}$, untuk $d = 1$.
3. Temukan pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic pada gabungan graf semi parasut mSP_{2n-1} , dengan $n \geq 2$; m genap untuk $d = 0$, $d = 1$ dan $d = 2$.
4. Temukan pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} antimagic total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas F_3^n , dengan $n \geq 2$ untuk $d \in \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 32, 33, 35, 36, 37\}$. Serta untuk pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} antimagic total dekomposisi pada gabungan saling lepas amalgamasi graf kipas, dengan $n \geq 2$ dan $m \geq 3$ dimana m bilangan ganjil untuk $d \leq 37$ kecuali $d \in \{4, 6\}$.

DAFTAR PUSTAKA

- Adawiyah, R. 2014. *Pelabelan Total Super(a, d)-Sisi Antimagic pada Graf Lam-pion.*(vol.6 No 1).
- Albirri, E.R 2014. *Pelabelan Total Super(a, d)-Sisi Antimagic pada Graf Rantai Pentagon.*(vol.6 No 1).
- Dafik. 2007. *Structural Properties and Labeling of Graph.* Australia : Tidak dipublikasikan (Tesis).
- Dafik, A. Fajriatin dan K. Miladiyah, *Super Antimagicness of a Well-Defined Graph, Saintifka.*14(2012), 106-116.
- Dafik, Mirka Miller dan Joe Ryan. 2011. *Super Edge-Antimagic Total Labeling of $mK_n, n, n.$* (Combin, vol.101 No 1 hal 97-107).
- Hadi,D,A. 2014. *Pelabelan Total Super(a, d)-Sisi Antimagic pada Graf Ulat Su-tra.*(vol.6 No 1).
- J.A. Gallian. 2013. *A Dinamic Survey Of Graph Labeling.*Jember: Gallian Survey.124-128.
- Lee, Ming-ju. 2013. *Super (a,1)-edge Antimagic Total Labelings Of Subdifti on Of Stars.* .Miaoli: Jen-Teh Junior Collage Of Madicine.1-10.
- Lipschutz, S. 2002. *Matematika Diskrit .* Jakarta : Salemba Teknika.
- M. Baca, Y. Lin, Semaničová dan Feñovčíková. 2009. *Note On Super Antimagic-ness of Disconnected Graphs.*(Combin, vol.6 No 1 hal 47-55).
- M, Muhlisatul. 2014. *Pelabelan Total Super (a, d)-Sisi Antimagic pada Graf Tri-bun.*(vol.6 No 1).
- Acharya, B.D. dan Hegde, S.M., Strongly indexable graphs, *Discrete Math.*, **93** (1991) 275–299.
- Bača, M. dan Barrientos, C., On super edge-antimagic total labelings of mK_n , (2007), to appear
- Bača, M. dan Brankovic, L., Edge-antimagicness for a class of disconnected graphs, *Ars Combin.*, (2007), to appear.

- Bača, M., Lin, Y., Miller, M. dan Simanjuntak, R., New constructions of magic dan antimagic graph labelings, *Utilitas Math.*, **60** (2001) 229–239.
- Bloom, G.S. dan Golomb, S.W., Applications of numbered undirected graphs, *Proc. IEEE*, **65** (1977) 562–570.
- Bloom, G.S. dan Golomb, S.W., Numbered complete graphs, unusual rules dan assorted applications, *In: Theory dan Applications of Graphs, Lecture Notes in Math.*, **642**, Springer-Verlag, New York (1978) 53–65.
- Bodendiek, R. dan Walther, G., On number theoretical methods in graph labelings, *Res. Exp. Math.*, **21** (1995) 3–25.
- Dafik, Miller, M., Ryan, J. and Bača, M., On super (a, d) -edge antimagic total labeling of disconnected graphs, *Discrete Math.*, (2007), in press.
- Dafik, Miller, M., Ryan, J. and Bača, M., Super edge-antimagic total labelings of $mK_{n,n,n}$, *Ars Combin.*, (2008), in press.
- Figueroa-Centeno, R.M., Ichishima, R. dan Muntaner-Batle, F.A., The place of super edge-magic labelings among other classes of labelings, *Discrete Math.*, **231** (2001), 153–168.
- Gallian, J., A dynamic survey of graph labeling, *Electronic J. of Combin.*, **14** (2007) #DS6.
- Hartsfield, N. dan Ringel, G., Supermagic dan antimagic graphs, *J. Rec. Math.*, **21** (1989) 107–115.
- Kotzig, A. dan Rosa, A., Magic valuations of finite graphs, *Canad. Math. Bull.*, **13** (1970) 451–461.
- Kotzig, A. dan Rosa, A., Magic valuations of complete graphs, *Publ. CRM*, **175** (1972).
- Nicholas, T., Somasundaram, S. dan Vilfred, V., On (a, d) -antimagic special trees, unicyclic graphs dan complete bipartite graphs, *Ars Combin.*, **70** (2004) 207–220.
- Rosa, A., On certain valuations of the vertices of a graph, *Theory of Graphs (Internat. Symposium, Rome, July 1966)*, Gordon dan Breach, N.Y. dan Dunod Paris, (1967) 349–355.

- Sedláček, J., Problem 27, In: *Theory dan Its Applications, Proc. Symp. Smolenice*, June (1963) 163–169.
- Simanjuntak, R., Bertault, F. dan Miller, M., Two new (a, d) -antimagic graph labelings, *Proc. of Eleventh Australian Workshop of Combinatorial Algorithm*, (2000) 179–189.
- Stewart, B.M., Magic graphs, *Canad. J. Math.*, **18** (1966) 1031–1056.
- Sudarsana, I.W., Ismaimuza, D., Baskoro, E. T. dan Assiyatun, H., On super (a, d) - edge antimagic total labeling of disconnected graphs, *J. Combin. Mathematics Combin. Comput.*, **55** (2005) 149-158.
- Sugeng, K.A., *Magic dan antimagic labeling of graphs*, PhD Thesis, ITMS-University of Ballarat, Australia (2005).
- Sugeng, K.A. dan Miller, M., Relationships between adjacency matrices dan super (a, d) -edge-antimagic total graphs, *J. Combin. Math. Combin. Comput.*, **55** (2005) 71–82.