SERTIFIKAT

3.9.5/UN32.3/DT/2015

Diberikan Kepada

ARIKA INDAH KRISTIANA

Universitas Negeri Jember

Atas partisipasinya sebagai

PEMAKALAH

Dalam Seminar Nasional Matematika dan Pembelajarannya
dengan Tema Peranan Matematika dalam Menumbuhkembangkan Daya Saing dan Karakter Bangsa
yang diselenggarakan oleh Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Negeri Malang Tanggal 5 September 2015

Judul Makalah

Pelabelan Total Super (a. d)-Sisi Antimagic Pada Graf Shackle Fan 5

Malang, 5 September 2015

Dekan FMIPA Universitas Negeri Malang

Dr. Markus Diantoro, M.Si
NIP. 196612211991031001

Ketua Pelaksana

Dr. Erry Hidayanto, M.Si
NIP. 196609061992031004

Pelabelan Total Super (a, d)-Sisi Antimagic pada Graf Shackle Fan Berorder 5

Arika Indah Kristiana, Dafik
CGANT - University of Jember
Mathematics Education Department - University of Jember
arikakristiana@gmail.com

2010 Mathematics Subject Classification: 05C78

Abstract

Let G be a simple graph of order p and size q. The graph G is called an (a, d)-*edge-antimagic total graph* if there exist a bijection $f : V(G) \cup E(G) \to \{1, 2, \ldots, p + q\}$ such that the edge-weights, $w(uv) = f(u) + f(v) + f(uv), uv \in E(G)$, form an arithmetic sequence with first term a and common difference d. Such a graph is called *super* if the smallest possible labels appear on the vertices. In this paper we study a super edge-antimagicness of generalized shackle of fan of order five, denoted by $gshack(F_5, e, n)$. The result shows that the graph $gshack(F_5, e, n)$ admits a super (a, d)-edge antimagic total labeling for some feasible $d \leq 2$.

Keywords: Super edge antimagic total labeling, generalized shackle, fan of order five.

Pendahuluan

Dalam kehidupan sehari-hari tidak pernah terlepas dari matematika, banyak sekali masalah-masalah dalam kehidupan sehari-hari yang dapat diselesaikan dengan menggunakan matematika. Dengan mengabstraksikan masalah tersebut sebagai masalah yang berkaitan himpunan benda-benda dan relasi pada benda-benda tersebut yang tentunya terkait dengan teorema-teorema yang terkandung dalam matematika. Matematika merupakan salah satu disiplin ilmu yang mendasari ilmu pengetahuan yang lain. Salah satu cabang matematika adalah matematika diskrit dimana didalamnya terdapat teori graf. Pada teori graf terdapat pelabelan dalam graf, salah satunya adalah pelabelan total super (a, d)-sisi antimagic (SEATL), dimana a bobot sisi terkecil dan d nilai beda. Aplikasi graf dapat ditemukan dalam Bloom and Golomb's [7].

Dalam artikel ini fokus pada salah satu topik dalam teori graf yakni pelabelan graf. Pelabelan graf G adalah sebuah pemetaan dari elemen-elemen graf G terhadap bilangan bulat positif. Jika domainnya adalah himpunan titik G maka pelabelannya disebut pelabelan titik (*vertex labeling*), sedangkan jika domainnya adalah himpunan sisi G maka pelabelannya disebut pelabelan sisi (*edge labeling*). Jika domainnya adalah kedua himpunan tersebut maka pelabelannya disebut pelabelan total (*total labeling*). Definisi tentang pelabelan graf dan hasil-hasilnya dapat ditemukan di [3],[4], [6], [11],[12] dan [13].

Dalam artikel ini, akan dibahas tentang pelabelan total super (a, d)-sisi antimagic pada graf Shackle dari graf Fan berorder 5 yang dinotasikan dengan $gshack(F_5, e, n)$.

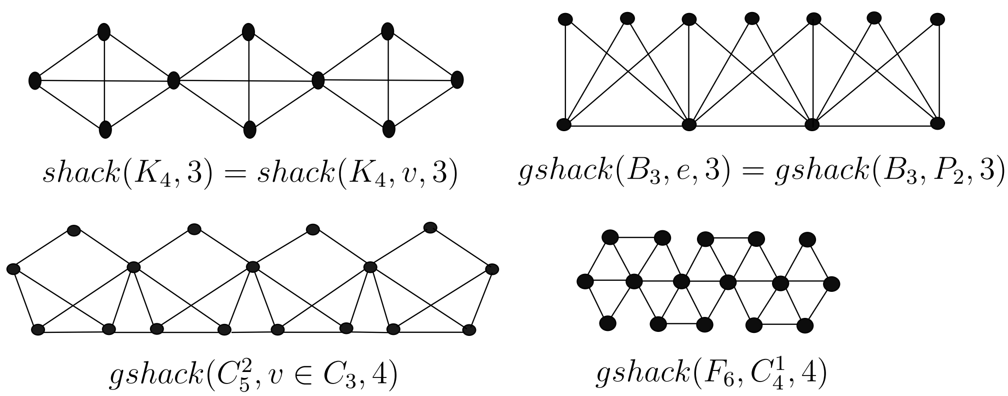

Figure 1: The example of generalized shcakles.

Beberapa Lemma Penting

Dalam bagian ini akan disajikan sebuah lema dan preposisi yang sangat berguna dalam kajian selanjutnya. Lema tentang sarat perlu untuk sebuah graph memenuhi sifat pelabelan super (a, d)-sisi antimagic total dibuktikan oleh Sugeng, *et.al* in [17], kemudian sebuah preposisi yang baik diajukan oleh Bača, *et.al* in [1] menjelaskan tentang kaitan antara EAVL dan SEATL.

Lemma 1 *[17]* Jika sebuah graf (p, q) adalah pelabelan total super (a, d)-sisi antimagic maka $d \leq \frac{2p+q-5}{q-1}$.

Bukti. Misalkan graf (p, q) mempunyai pelabelan total super (a, d)-sisi antimagic dengan $f : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \ldots, p + q\}$ dan bobot sisi $\{a, a + d, a + 2d, \ldots, a + (q - 1)d\}$. Nilai minimum yang mungkin dari bobot sisi terkecil adalah dengan menjumlahkan dua label titik terkecil (1 dan 2) dengan satu label sisi terkecil $(p+1)$, sehingga diperoleh: $1+(p+1)+2 = p+4$. Jika himpunan bobot sisi sebuah graf adalah $\{a, a + d, a + 2d, ..., a + (q - 1)d\}$ dimana a merupakan bobot sisi terkecil, maka dapat ditulis $p + 4 \leq a$. Sedangkan pada sisi yang lain, nilai maksimum yang mungkin dari bobot sisi terbesar adalah dengan menjumlahkan dua label titik terbesar ($(p - 1)$ dan p) dengan satu label sisi terbesar $(p + q)$, sehingga diperoleh: $(p - 1) + (p + q) + p = 3p + q - 1$. Dari sifat bobot SEATL yang menyatakan bahwa $a + (q - 1)d$ adalah suku terbesar, maka diperoleh: $d \leq \frac{2p+q-5}{q-1}$. □

Proposition 1 *[1] If G has an (a, d)-edge antimagic vertex labeling then G has super $(a+|V|+1, d+1)$-edge antimagic total labeling and super $(a+|V|+|E|, d-1)$-edge antimagic total labeling.*

Hasil Penelitian

Grag shackle fan dengan order 5 yang dinotasikan dengan $gshack(F_5^2, e, n)$, adalah graf terhubung yang mempunyai himpunan titik $V = \{x_{ij}, y_i, z_i, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq 2\}$ dan $E = \{x_{i1}x_{i2}, 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_{i1}y_i, 1 \leq i \leq n+1\} \cup \{x_{i2}x_{(i+1)1}, 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_iz_i, 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_{(i+1)1}z_i, 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_(i+1)z_i, 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_{i2}z_i, 1 \leq i \leq n\}$. dengan $|V(gshack(F_5, e, n))| = p = 4n + 2$ dan $|E(gshack(F_5, e, n))| = q = 8n + 1$. dengan demikian graf $gshack(F_5, e, n)$ terdapat pelabelan total (a, d)-sisi antimagic untuk $p = 4n+2$ dan $q = 8n+1$, sesuai dengan Lemma 1 maka batas atas dari nilai d adalah ≤ 2 atau $d \in \{0, 1, 2\}$.

Diawali dengan pelabelan titik pada graf $gshack(F_5, e, n)$ disajikan pada Teorema 1 berikut.

Theorem 1 *Graf $gshack(F_5, e, n)$ memiliki pelabelan titik $(3, 1)$ sisi antimagic untuk $n \geq 1$*

Bukti. Didefinisikan label titik $f_1 : V(gshack(F_5, e, n)) \to \{1, 2, \ldots, 3n + 2\}$ untuk $1 \leq i \leq n$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f_1(y_i) &= 4i - 3,\ 1 \leq i \leq n+1 \\ f_1(x_{ij}) &= 4i + 2j - 4,\ 1 \leq i \leq n+1,\ j = 1, 2 \\ f_1(z_i) &= 4i - 1,\ 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Label titik f_1 merupakan fungsi bijektif, sedangkan bobot sisi dari $gshack(F_5, e, n)$ untuk $1 \leq i \leq n$, adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned} w^1_{f_1}(x_{i1}y_i) &= 8i - 5,\ \text{untuk } 1 \leq i \leq n+1 \\ w^2_{f_1}(y_iz_i) &= 8i - 4,\ \text{untuk } 1 \leq i \leq n \\ w^3_{f_1}(x_{ij}z_i) &= 8i + 2j - 5,\ \text{untuk } 1 \leq i \leq n,\ j = 1, 2 \\ w^4_{f_1}(x_{i1}x_{i2}) &= 8i - 2,\ \text{untuk } 1 \leq i \leq n \\ w^5_{f_1}(y_{(i+1)}z_i) &= 8i,\ \text{untuk } 1 \leq i \leq n \\ w^6_{f_1}(x_{(i+1)1}z_i) &= 8i + 1,\ \text{untuk } 1 \leq i \leq n \\ w^7_{f_1}(x_{i2}x_{(i+1)1}) &= 8i + 2,\ \text{untuk } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Berdasarkan bobot sisi EAV ini, bobot sisi terkecil pertama terletak pada $w^1_{f_1}(x_{i1}y_i)$ untuk $i = 1$, bobot sisi terkecil kedua terletak pada $w^2_{f_1}(y_iz_i)$ dan seterusnya yang dapat ditulisan dengan himpunan $\bigcup_{k=1}^{7} w^k_{f_1}$ $=\{3, , 4, 5 \ldots, 8n + 3\}$. Atau dapat dituliskan sebagai pelabelan titik $(3, 1)$-sisi antimagic. □

Dengan menggunakan Teorema 1 dan Preposisi 1, diperoleh Teorema 2 untuk $d = 0$.

Theorem 2 *Graf $gshack(F_5, e, n)$ memiliki pelabelan super* $(12n + 3, 0)$-*sisi antimagic total untuk* $n \geq 1$.

Dengan juga, dengan menggunakan Teorema 1 dan Preposisi 1, diperoleh teorema untuk $d = 2$. Namun berikut ini disajikan bukti dan fungsi bijektifnya untuk mempermudah pembaca melabeli grafnya.

Theorem 3 *Graf gshack*(F_5, e, n) *memiliki pelabelan super* $(4n+6, 2)$*-sisi antimagic total untuk* $n \geq 1$.

Bukti. Didefinisikan label titik dari graf $gshack(F_5, e, n)$: $f_2(x_{ij}) = f_1(x_{ij})$, $f_2(y_i) = f_1(y_i)$ dan $f_2(z_i) = f_1(z_i)$ untuk $1 \leq i \leq n$, dan juga didefinisikan label sisi sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
f_2(x_{i1}y_i) &= 4n + 8i - 5, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n+1 \\
f_2(y_i z_i) &= 4n + 8i - 4, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
f_2(x_{ij} z_i) &= 4n + 8i + 2j - 5, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, \ j = 1, 2 \\
f_2(x_{i1}x_{i2}) &= 4n + 8i - 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
f_2(y_{(i+1)} z_i) &= 4n + 8i, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
f_2(x_{(i+1)1} z_i) &= 4n + 8i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
f_2(x_{i2}x_{(i+1)1}) &= 4n + 8i + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n
\end{aligned}
$$

Pelabelan total f_2 adalah fungsi bijektif dari $V(gshack(F_5, e, n)) \cup E(gshack(F_5^e, n)) \rightarrow \{1, 2, \ldots, p+q\}$. Bobot total dari $gshack(F_5, e, n)$, dapat disajikan sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
W^1_{f_2}(x_{i1}y_i) &= w^1_{f_1} x_{i1}y_i) + f_2(x_{i1}y_i) = 16i + 4n - 10, \text{ for } 1 \leq i \leq n \\
W^2_{f_2}(y_i z_i) &= w^2_{f_1}(y_i z_i) + f_2(y_i z_i) = 16i + 4n - 8, \text{ for } 1 \leq i \leq n \\
W^3_{f_2}(x_{ij} z_i) &= w^3_{f_1}(x_{ij} z_i) + f_2(x_{ij} z_i) = 16i + 4j + 4n - 10, \text{ for } 1 \leq i \leq n \\
W^4_{f_2}(x_{i1}x_{i2}) &= w^4_{f_1}(x_{i1}x_{i2}) + f_2(x_{i1}x_{i2}) = 16i + 4n - 4, \text{ for } 1 \leq i \leq n \\
W^5_{f_2}(y_{(i+1)} z_i) &= w^5_{f_1}(y_{(i+1)} z_i) + f_2(y_{(i+1)} z_i) = 16i + 4n, \text{ for } 1 \leq i \leq n \\
W^6_{f_2}(x_{(i+1)1} z_i) &= w^6_{f_1}(x_{(i+1)1} z_i) + f_2(x_{(i+1)1} z_i) = 16i + 4n + 2, \text{ for } 1 \leq i \leq n \\
W^7_{f_2}(x_{i2}x_{(i+1)1}) &= w^7_{f_1}(x_{i2}x_{(i+1)1}) + f_2(x_{i2}x_{(i+1)1}) = 16i + 4n + 3, \text{ for } 1 \leq i \leq n
\end{aligned}
$$

Dengan demikian dapat dituliskan dalam himpunan $\bigcup_{k=1}^{7} W^k_{f_2} = \{4n+6, \ldots, 20n+6\}$, maka ada pelabelan total super $(4n+6, 2)$-sisi antimagic pada graf $gshack(F_5, e, n)$ untuk $n \geq 1$. $\square$

Theorem 4 *Graf gshack*(F_5, e, n) *memiliki pelabelan super* $(8n+6, 1)$*-sisi antimagic total untuk* $n \geq 1$.

Bukti. Didefinisikan label titik dari graf $gshack(F_5, e, n)$: $f_3(x_{ij}) = f_1(x_{ij})$, $f_3(y_i) = f_1(y_i)$ dan $f_3(z_i) = f_1(z_i)$ untuk $1 \leq i \leq n$, dan juga didefinisikan label sisi sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
f_3(x_{i1}y_i) &= 8n - 4i + 7, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n+1 \\
f_3(x_{(i+1)1}z_i) &= 8n - 4i + 4, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
f_3(x_{ij}z_i) &= 8n - 4i - j + 7, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, \; j = 1, 2 \\
f_3(x_{i2}x_{(i+1)1}) &= 12n - 4i + 4, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
f_3(y_{(i+1)}z_i) &= 12n - 4i + 5, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
f_3(x_{i1}x_{i2}) &= 12n - 4i + 6, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
f_3(y_i z_i) &= 12n - 4i + 7, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n
\end{aligned}$$

Pelabelan total f_3 adalah fungsi bijektif dari $V(gshack(F_5, e, n)) \cup E(gshack(F_5^e, n))$ pada $\{1, 2, \ldots, p+q\}$. Bobot total dari $gshack(F_5, e, n)$, dapat disajikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
W^1_{f_3}(x_{i1}y_i) &= w^1_{f_1}(x_{i1}y_i) + f_3(x_{i1}y_i) = 8n + 4i + 2, \text{ for } 1 \leq i \leq n \\
W^2_{f_3}(x_{(i+1)1}z_i) &= w^2_{f_1}(x_{(i+1)1}z_i) + f_3(x_{(i+1)1}z_i) = 8n + 4i + 5, \text{ for } 1 \leq i \leq n \\
W^3_{f_3}(x_{ij}z_i) &= w^3_{f_1}(x_{ij}z_i) + f_3(x_{ij}z_i) = 8n + 4i + j + 2, \text{ for } 1 \leq i \leq n \\
W^4_{f_3}(x_{i2}x_{(i+1)1}) &= w^4_{f_1}(x_{i2}x_{(i+1)1}) + f_3(x_{i2}x_{(i+1)1}) = 12n + 4i + 6, \text{ for } 1 \leq i \leq n \\
W^5_{f_3}(y_{(i+1)}z_i) &= w^5_{f_1}(y_{(i+1)}z_i) + f_3(y_{(i+1)}z_i)) = 12n + 4i + 5, \text{ for } 1 \leq i \leq n \\
W^6_{f_3}(x_{i1}x_{i2}) &= w^6_{f_1}(x_{i1}x_{i2}) + f_3(x_(x_{i1}x_{i2}) = 12n + 4i + 4, \text{ for } 1 \leq i \leq n \\
W^7_{f_3}(y_i z_i) &= w^7_{f_1}(y_i z_i) + f_3(y_i z_i) = 8n + 4i + 7, \text{ for } 1 \leq i \leq n
\end{aligned}$$

Dengan demikian dapat dituliskan dalam himpunan $\bigcup_{k=1}^{7} W^k_{f_3} = \{8n+6, \ldots, 16n+6\}$, maka ada pelabelan total super $(8n+6, 2)$-sisi antimagic pada graf $gshack(F_5, e, n)$ untuk $n \geq 1$. □

Kesimpulan

Berdasarkan penelitian diatas, graf shackel dari graf fan order 5 yang dinotasikan dengan $gshack(F_5, e, n)$ memiliki pelabelan total super (a, d)-sisi antimagic untuk $d \in \{0, 1, 2\}$ dan $n \geq 1$.

Ucapan Terimakasih

Pada kesempatan ini peneliti menyampaikan terimakasih pada Research Group yang menaungi penelitian ini yaitu CGANT (Combinatorics, Graph Theory and Network Topology) Universitas Jember.

References

[1] M. Bača, Antoni Muntaner-Batle, Andrea Semanečova Feňovčíková, On super $(a, 2)$-edge-antimagic total labeling of Disconnected Graphs, *Ars Combinatoria*, **113** (2014) 129-137.

[2] M. Bača, P. Kovář, A. S.Feňovčíková, M.K. Shafiq, On super $(a, 1)$-edge-antimagic total labelings of regular graphs, *Discrete Math.*, **310** (2010), 1408-1412.

[3] M. Bača, Y. Lin, M. Miller and R. Simanjuntak, New constructions of magic and antimagic graph labelings, *Utilitas Math.* **60** (2001), 229–239.

[4] M. Bača, On connection between α-labelings and edge-antimagic labelings of disconnected graphs, *Ars Combin.*, **101** (2011), 97-107.

[5] M. Bača, L. Brankovic, Edge-antimagicness for a class of disconnected graphs, *Ars Combin.*, **97A** (2010), 145-152.

[6] Bača, M., Dafik, Miller, M., and Ryan, J, *Antimagic Labeling of Disjoint Union of s-Crowns*, Utilitas Mathematica (2009), 79:193–205.

[7] G.S. Bloom and S.W. Golomb, Applications of numbered undirected graphs, Proc. IEEE, 65 (1977), 562-570.

[8] R. Bodendiek and G. Walther, (a, d)-antimagic parachutes II, *Ars Combin.*, 46 (1997), 33–63.

[9] Dafik, M. Miller, J. Ryan and M. Bača, Antimagic labeling of the union of stars, *Australasian Journal of Combinatorics*, **42** (2008), 4909-4915.

[10] Dafik, M. Miller, J. Ryan and M. Bača, Super edge-antimagic total labelings of $mK_{n,n,n}$, *Ars Combinatoria* , **101** (2011), 35-44

[11] H. Enomoto, A.S. Lladó, T. Nakamigawa and G. Ringel, Super edge-magic graphs, *SUT J. Math.* **34** (1998), 105–109.

[12] R.M. Figueroa-Centeno, R. Ichishima and F.A. Muntaner-Batle, The place of super edge-magic labelings among other classes of labelings, *Discrete Math.* **231** (2001), 153–168.

[13] A. Kotzig and A. Rosa, Magic valuations of finite graphs, *Canad. Math. Bull.* **13** (1970), 451–461.

[14] M.J. Lee, C. Lin, W.H. Tsai, On antimagic labeling for power of cycles, *Ars Combin.*, **98** (2011), 161-165.

[15] A.N.M. Salman, A.A.G. Ngurah, N. Izzti, On super edge-magic total labelings of a subdivision of a star S_n, *Util. Math.* **81** (2010), 275-284.

[16] R. Simanjuntak, F. Bertault, M. Miller, Two new (a, d)-antimagic graph labelings, in: Proc. of Eleventh Australasian Workshop on Combinatorial Algorithms, 11 (2000), 179-189.

[17] K.A. Sugeng, M. Miller, M. Bača, Super edge-antimagic total labelings, *Util. Math.*, **71** (2006), 131-141.