SERTIFIKAT

3.9.5/UN32.3/DT/2015

Diberikan Kepada

Misi Devi Milasari

UNIVERSITAS NEGERI JEMBER

Atas partisipasinya sebagai

PEMAKALAH

Dalam Seminar Nasional Matematika dan Pembelajarannya
dengan Tema Peranan Matematika dalam Menumbuhkembangkan Daya Saing dan Karakter Bangsa
yang diselenggarakan oleh Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Negeri Malang Tanggal 5 September 2016

Judul Makalah

Super Labelling (a,d) – H-Antimagic Total Decomposition of Windmill Graph

Malang, 5 September 2016

Dekan FMIPA Universitas Negeri Malang

Dr. Markus Diantoro, M.Si
NIP. 196612211991031001

Ketua Pelaksana

Dr. Erry Hidayanto, M.Si
NIP. 196009061992031004

Pelabelan Super (a,d)-$\mathcal{H}$-Antimagic Total Dekomposisi pada Graf $Windmill$

Misi Devi Milasari[1], Ika Hesti A.[1,3], Dafik[2,3]
[1]Jurusan Matematika FMIPA Universitas Jember
[2]Program Studi Matematika FKIP Universitas Jember
[3]CGANT - Universitas Jember
mysysary@ymail.com, Hestyarin@gmail.com, d.dafik@unej.ac.id

Abstract

Diberikan suatu graf G sedehana, dan tidak berarah. $f(V) = \{1, 2, 3, ..., p\}$ dan $f(E) = \{p + 1, ..., p + q\}$ dikatakan sebagai pelabelan super. Pelabelan super (a,d)-$\mathcal{H}$-antimagic total selimut merupakan suatu graf $G = (V(G), E(G))$ dengan H merupakan subgraf dari G dimana untuk setiap sisinya termuat dalam subgraf H dan G isomorfik dengan H. Suatu graf $G = (V, E)$ dikatakan memuat selimut $\mathcal{H}$=$\{H_1, H_2, \dots, H_k\}$ dengan sifat setiap sisi di G termuat sekurang-kurangnya satu graf H_i yang isomorfik dengan subgraf H untuk suatu $i\epsilon\{1, 2, 3, \dots, k\}$. Pelabelan selimut $\mathcal{H}$-antimagic pada graf G adalah sebuah fungsi bijektif sehingga terdapat jumlahan yang merupakan barisan aritmatika $\{a, a+d, a+2d, \dots, a+(t-1)d\}$. Jika selimut-$\mathcal{H}$ mempunyai sifat setiap sisi dari graf G termuat tepat satu pada graf H_i untuk $i \in \{1, 2, ..., k\}$ maka selimut-$\mathcal{H}$ disebut dekomposisi-$\mathcal{H}$. Pada artikel ini, akan dikaji mengenai keberadaan super (a, d)-WD_5 antimagic total dekomposisi pada graf $Windmill$, yang dinotasikan dengan WD_5^n.

Key Words : *Pelabelan Super, Pelabelan Selimut, Dekomposisi, Graf Windmill.*

Pendahuluan

Teori graf merupakan salah satu cabang ilmu matematika yang lahir pada tahun 1736. Salah satu topik yang dikaji dalam teori graf adalah pelabelan. Terdapat berbagai jenis tipe pelabelan dalam graf, salah satunya adalah pelabelan pelabelan total (*total labeling*). Dari waktu kewaktu pelabelan graf mengelami perkembangan materi, diantaranya pelabelan ajaib, pelabelan anti ajaib, dan pelabelan super. Pelabelan ajaib (*magic*) adalah jika semua sisi mempunyai bobot yang sama sedangkan pelabelan anti ajaib (*antimagic*) mempunyai bobot sisi yang berbeda dan membentuk barisan aritmatika. Pelabelan super adalah pelabelan titik dan sisi dimana label titik kurang dari label sisi. Pelabelan ajaib selanjutnya dikembangkan menjadi pelabelan covering ajaib untuk pertama kali [3]. [4] mengembangkan suatu pelabelan selimut $\mathcal{H}$-antimagic, dengan penjelasan bahwa suatu pelabelan covering H-antimagic pada graf G adalah sebuah fungsi bijektif sehingga terdapat jumlahan yang merupakan barisan aritmatika $a, a + d, a + 2d, ..., a + (t - 1)d$. Hasil-hasil penelitian terkait ini dapat ditemukan di [1, 7].

[5] Pelabelan selimut dari G adalah $H = \{H_1, H_2, H_3, \ldots, H_k\}$ keluarga subgraf dari G dengan sifat setiap sisi di G termuat pada sekurang-kurangnya satu graf H_i untuk suatu $i\epsilon\{1, 2, \ldots, k\}$. Jika untuk setiap $i\epsilon\{1, 2, \ldots, k\}$, H_i isomorfik dengan suatu subgraf $\mathcal{H}$, maka $\mathcal{H}$ dikatakan selimut-$\mathcal{H}$ dari G. Selanjutnya, jika selimut-$\mathcal{H}$ dari G memiliki sifat yaitu setiap sisi G termuat dalam tepat satu graf H_i untuk suatu $i\epsilon\{1, 2, \ldots, k\}$, maka selimut-$\mathcal{H}$ disebut dekomposisi-$\mathcal{H}$, sehingga G dikatakan memuat dekomposisi-$\mathcal{H}$ atau G terdekomposisi atas $\mathcal{H}$. Beberapa hasil penelitian dari pelabelan selimut super (a, d)-$\mathcal{H}$-antimagic pada graf konektif antara lain [6].

Lemma yang Digunakan

Penentuan batas atas d adalah titik penting yang mengisyaratkan seberapa banyak nilai beda yang mungkin dimiliki oleh amalgamasi graf kipas DF_n dalam pelabelan super antimagic covering. Untuk menentukan nilai batas atas (d), kita perlu mengetahui jumlah titik (p_G) dan jumlah sisi (q_G), jumlah titik (p_H) dan jumlah sisi (q_H) pada subgraf atau selimut (s) amalgamasi graf kipas tunggal maupun gabungannya serta jumlah selimutnya (s).

Lemma 1 *Jika sebuah graf $G(V, E)$ adalah pelabelan super (a, d)-$\mathcal{H}$ antimagic total covering maka*

$$d \leq \frac{(p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H}{s - 1}$$

untuk $s = |H_i|$, $p_G = |V|$, $q_G = |E|$, $p_H = |V(H)|$, $q_H = |E(H)|$

Bukti. $f(V) = 1, 2, 3, .., p_G$ dan $f(E) = p_G + 1, p_G + 2, p_G + 2, .., p_G + q_G$. Misalkan graf (p_G, q_G) mempunyai pelabelan super (a, d)-$\mathcal{H}$ antimagic total dengan fungsi total $f(\text{total}) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, ..., p_G + q_G\}$ maka himpunan bobot sebuah graf adalah $\{a, a + d, a + 2d, \ldots, a(s - 1)d\}$ dimana a merupakan bobot terkecil maka berlaku:

$$\begin{aligned}
1 + 2 + \ldots + p_H + (p_G + 1) + (p_G + 2) + \ldots + (p_G + q_H) &\leq a \\
\frac{p_H}{2}(1 + p_H) + q_H p_G + \frac{q_H}{2}(1 + q_H) &\leq a \\
\frac{p_H}{2} + \frac{p_H^2}{2} + q_H p_G + \frac{q_H}{2} + \frac{q_H^2}{2} &\leq a
\end{aligned}$$

Sedangkan untuk nilai terbesar berlaku:

$$\begin{aligned}
a+(s-1)d &\leq p_G+(p_G-1)+(p_G-2)+...+(p_G-(p_H-1))+(p_G+q_G)\\
&\quad +(p_G+q_G-1)+(p_G+q_G-2)+...+(p_G+q_G-(q_H-1))\\
&= p_Hp_G-\frac{p_H-1}{2}(1+(p_H-1))+q_Hp_G+q_Hq_G\\
&\quad -\frac{q_H-1}{2}(1+(q_H-1))\\
&= p_Hp_G-\frac{p_H-1}{2}(p_H)+q_Hp_G+q_Hq_G-\frac{q_H-1}{2}(q_H)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(s-1)d &\leq p_Hp_G-\frac{p_H-1}{2}(p_H)+q_Hp_G+q_Hq_G-\frac{q_H-1}{2}(q_H)-a\\
&\leq p_Hp_G-\frac{p_H-1}{2}(p_H)+q_Hp_G+q_Hq_G-\frac{q_H-1}{2}(q_H)-\\
&\quad (\frac{p_H}{2}+\frac{p_H^2}{2}+q_Hp_G+\frac{q_H}{2}+\frac{q_H^2}{2})\\
&= p_Hp_G-\frac{p_H^2}{2}+\frac{p_H}{2}+q_Hq_G-\frac{q_H^2}{2}+\frac{q_H}{2}-(\frac{p_H}{2}+\frac{p_H^2}{2}+\frac{q_H}{2}+\frac{q_H^2}{2})\\
&= p_Hp_G+q_Hq_G-p_H^2-q_H^2\\
&= p_Hp_G-p_H^2+q_Hq_G-q_H^2\\
&= (p_G-p_H)p_H+(q_G-q_H)q_H\\
d &\leq \frac{(p_G-p_H)p_H+(q_G-q_H)q_H}{(s-1)}
\end{aligned}$$

Dari persamaan diatas terbukti bahwa batas atas $d \leq \frac{(p_G-p_H)p_H+(q_G-q_H)q_H}{s-1}$ jika graf G memiliki super (a,d)-$\mathcal{H}$-antimagic total covering dari berbagai famili graf [2]. □

Diketahui jumlah titik $p_G = 4n+1$ dan sisi $q_G = 10n$, sedangkan jumlah titik selimut adalah $p_H = 5$ dan jumlah sisi selimut adalah $q_H = 10$ dengan jumlah selimut $s = n$. Batas atas nilai beda d dapat di cari dengan enggunakan lemma 1, sehingga diperoleh hasil :

$$\begin{aligned}
d &\leq \frac{(p_G-p_H)p_H+(q_G-q_H)q_H}{s-1}\\
&= \frac{(4n+1-5)5+(10n-10)10}{n-1}\\
&= 120
\end{aligned}$$

Didapatkan $d \leq 120$, dan pada pelabelan $\mathcal{SHAT}$ menggunakan bilangan bulat positif maka nilai $d \geq 0$, sehingga $d \in \{0,1,2,3,\ldots,119,120\}$.

Hasil Penelitian

Hasil dari penelitian ini didapatkan 20 teorema, beberapa hasilnya antara lain.

◇ **Teorema 1** *Ada pelabelan super* $(98n + 22, 0)$-WD_5 *antimagic total dekomposisi pada graf* windmill WD_5^n *untuk* $n \geq 2$.

Bukti. Labeli titik graf windmill WD_v^n dengan fungsi bijektif f_1 sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f_1(A) &= 1 \\ f_1(x_i) &= i+1, \text{untuk}\, 1 \leq i \leq n \\ f_1(y_i) &= 2n-i+2, \text{untuk } 1 \leq i \leq n \\ f_1(z_i) &= 2n+i+1, \text{untuk } 1 \leq i \leq n \\ f_1(p_i) &= 4n-i+2, \text{untuk } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Fungsi f_1 adalah fungsi bijektif yang memetakan WD_5^n ke himpunan bilangan bulat $f(V) = \{1, 2, 3, .., 4n+1\}$. Didefinisikan w_{f_1} sebagai bobot dari pelabelan total dekomposisi pada graf *windmill* dimana bobot dekomposisi tersebut adalah $\mathcal{H}$=WD_5 sebagai dekomposisinya, Maka fungsi bijektif w_{f_1} dapat ditentukan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} w_{f_1} &= f_1(A) + f_1(x_i) + f_1(y_i) + f_1(z_i) + f_1(p_i) \\ &= (1) + (i+1) + (2n-i+2) + (2n+i+1) + (4n-i+2) \\ &= 8n+7, \text{ untuk}\, 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Labeli sisi graf *windmill* WD_5^n dengan fungsi bijektif f_1 dengan label sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f_1(Ax_i) &= 4n+i+1, \text{untuk } 1 \leq i \leq n \\ f_1(x_iz_i) &= 6n-i+2, \text{untuk } 1 \leq i \leq n \\ f_1(x_ip_i) &= 6n+i+1, \text{untuk } 1 \leq i \leq n \\ f_1(x_iy_i) &= 8n-i+2, \text{untuk } 1 \leq i \leq n \\ f_1(y_iz_i) &= 8n+i+1, \text{untuk } 1 \leq i \leq n \\ f_1(y_ip_i) &= 10n-i+2, \text{untuk } 1 \leq i \leq n \\ f_1(Ay_i) &= 10n+i+1, \text{untuk } 1 \leq i \leq n \\ f_1(Ap_i) &= 12n-i+2, \text{untuk } 1 \leq i \leq n \\ f_1(Az_i) &= 12n+i+1, \text{untuk } 1 \leq i \leq n \\ f_1(z_ip_i) &= 14n-i+2, \text{untuk } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

W_{f_1} didefinisikan sebagai bobot total dekomposisi pada graf *windmill* berdasarkan penjumlahan bobot dekomposisi dengan label sisinya maka w_{f_1} dan fungsi label sisi dengan syarat batas i yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} W_{f_1} &= w_{f_1} + f_1(Ax_i) + f_1(x_iz_i) + f_1(x_ip_i) + f_1(x_iy_i) + f_1(y_iz_i) + \\ &\quad f_1(y_ip_i) + f_1(Ay_i) + f_1(Ap_i) + f_1(Az_i) + f_1(z_ip_i) \\ &= 98n + 22, \text{ untuk } 1 \le i \le n \end{aligned}$$

Dengan demikian maka didapatkan himpunan bobot total dekomposisi $W_{f_1} = \{98n + 22, 98n + 22, \ldots, 98n + 22\}$. Sehingga terbukti bahwa pada graf *windmill* WD_5^n memiliki super $(98n+22, 0) - WD_5$ antimagic total dekomposisi untuk $n \ge 2$. □

◇ **Teorema 2** *Ada pelabelan super* $(95n + 25, 6)$-WD_5 *antimagic total dekomposisi pada graf* windmill WD_5^n *untuk* $n \ge 2$.

Bukti. Labeli titik graf *windmill* WD_5^n dengan fungsi bijektif f_2 sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f_2(A) &= f_1(A) \\ f_2(x_i) &= f_1(x_i), \text{untuk } 1 \le i \le n \\ f_2(y_i) &= n + i + 1, \text{untuk } 1 \le i \le n \\ f_2(z_i) &= f_1(z_i), \text{untuk } 1 \le i \le n \\ f_2(p_i) &= f_1(p_i), \text{untuk } 1 \le i \le n \end{aligned}$$

Fungsi f_2 adalah fungsi bijektif yang memetakan WD_5^n ke himpunan bilangan bulat $f(V) = \{1, 2, 3, .., 4n + 1\}$. Didefinisikan w_{f_2} sebagai bobot dari pelabelan total dekomposisi pada graf *windmill* dimana bobot dekomposisi tersebut adalah $\mathcal{H}$=WD_5 sebagai dekomposisinya, Maka fungsi bijektif w_{f_2} dapat ditentukan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} w_{f_2} &= f_2(A) + f_2(x_i) + f_2(y_i) + f_2(z_i) + f_2(p_i) \\ &= (1) + (i + 1) + (n + i + 1) + (2n + i + 1) \\ &\quad +(4n - i + 2) \\ &= 7n + 2i + 6, \text{ untuk } 1 \le i \le n \end{aligned}$$

Labeli sisi graf windmill WD_5^n dengan fungsi bijektif f_2 sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
f_2(Ax_i) &= 4n+2i, \text{untuk } 1 \leq i \leq n \\
f_2(x_iz_i) &= 4n+2i+1, \text{untuk } 1 \leq i \leq n \\
f_2(x_ip_i) &= 8n-2i+2, \text{untuk } 1 \leq i \leq n \\
f_2(x_iy_i) &= 8n-2i+3, \text{untuk } 1 \leq i \leq n \\
f_2(y_iz_i) &= 8n+2i, \text{untuk } 1 \leq i \leq n \\
f_2(y_ip_i) &= 8n+2i+1, \text{untuk } 1 \leq i \leq n \\
f_2(Ay_i) &= 12n-2i+2, \text{untuk } 1 \leq i \leq n \\
f_2(Ap_i) &= 12n-2i+3, \text{untuk } 1 \leq i \leq n \\
f_2(Az_i) &= 12n+2i, \text{untuk } 1 \leq i \leq n \\
f_2(z_ip_i) &= 12n+2i+1, \text{untuk } 1 \leq i \leq n
\end{aligned}
$$

W_{f_2} didefinisikan sebagai bobot total dekomposisi pada graf *windmill* berdasarkan penjumlahan bobot dekomposisi dengan label sisinya maka w_{f_4} dan fungsi label sisi dengan syarat batas i yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
W_{f_2} &= w_{f_2} + f_2(Ax_i) + f_2(x_iz_i) + f_2(x_ip_i) + f_2(x_iy_i) + f_2(y_iz_i) \\
&\quad + f_2(y_ip_i) + f_2(Ay_i) + f_2(Ap_i) + f_2(Az_i) + f_2(z_ip_i) \\
&= 95n + 6i + 19, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n
\end{aligned}
$$

Dengan demikian maka didapatkan himpunan bobot total dekomposisi $W_{f_2} = \{95n+25, 95n+31, \ldots, 101n+19\}$. Sehingga terbukti bahwa pada graf *windmill* WD_5^n memiliki super $(95n+25, 6) - WD_5$ antimagic total dekomposisi untuk $n \geq 2$. □

◇ **Teorema 3** *Ada pelabelan super* $(91n+29, 14)$-WD_5 *antimagic total dekomposisi pada graf* windmill WD_5^n *untuk* $n \geq 2$.

Bukti. pelabelan titik graf *windmill* WD_5^n dengan fungsi bijektif WD_5 sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
f_3(A) &= f_1(A) \\
f_3(x_i) &= f_1(x_i), \text{untuk } 1 \leq i \leq n \\
f_3(y_i) &= f_2(y_i), \text{untuk } 1 \leq i \leq n \\
f_3(z_i) &= f_1(z_i), \text{untuk } 1 \leq i \leq n \\
f_3(p_i) &= 3n+i+1, \text{untuk } 1 \leq i \leq n
\end{aligned}
$$

Fungsi f_3 adalah fungsi bijektif yang memetakan WD_5^n ke himpunan bilangan bulat $f(V) = \{1, 2, 3, .., 4n + 1\}$. Didefinisikan w_{f_1} sebagai bobot dari pelabelan total dekomposisi pada graf *windmill* dimana bobot dekomposisi tersebut adalah $\mathcal{H}$=WD_5 sebagai dekomposisinya, Maka fungsi bijektif w_{f_3} dapat ditentukan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} w_{f_1} &= f_1(A) + f_1(x_i) + f_1(y_i) + f_1(z_i) + f_1(p_i) \\ &= (1) + (i + 1) + (n + i + 1) + (2n + i + 1) + (3n + i + 1) \\ &= 6n + 4i + 5, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Labeli sisi graf windmill WD_5^n dengan fungsi bijektif f_3 sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f_3(Ax_i) &= 4n + i + 1, \text{untuk } 1 \leq i \leq n \\ f_3(x_iz_i) &= 5n + i + 1, \text{untuk } 1 \leq i \leq n \\ f_3(x_ip_i) &= 6n + i + 1, \text{untuk } 1 \leq i \leq n \\ f_3(x_iy_i) &= 7n + i + 1, \text{untuk } 1 \leq i \leq n \\ f_3(y_iz_i) &= 8n + i + 1, \text{untuk } 1 \leq i \leq n \\ f_3(y_ip_i) &= 9n + i + 1, \text{untuk } 1 \leq i \leq n \\ f_3(Ay_i) &= 10n + i + 1, \text{untuk } 1 \leq i \leq n \\ f_3(Ap_i) &= 11n + i + 1, \text{untuk } 1 \leq i \leq n \\ f_3(Az_i) &= 12n + i + 1, \text{untuk } 1 \leq i \leq n \\ f_3(z_ip_i) &= 13n + i + 1, \text{untuk } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

W_{f_3} didefinisikan sebagai bobot total dekomposisi pada graf *windmill* berdasarkan penjumlahan bobot dekomposisi dengan label sisinya maka w_{f_4} dan fungsi label sisi dengan syarat batas i yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} W_{f_3} &= w_{f_3} + f_3(Ax_i) + f_3(x_iz_i) + f_3(x_ip_i) + f_3(x_iy_i) + f_3(y_iz_i) \\ &\quad + f_3(y_ip_i) + f_3(Ay_i) + f_3(Ap_i) + f_3(Az_i) + f_3(z_ip_i) \\ &= 91n + 14i + 15, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Dengan demikian maka didapatkan himpunan bobot total dekomposisi $W_{f_3} = \{91n+29, 91n+43, \ldots, 105n+15\}$. Sehingga terbukti bahwa pada graf *windmill* WD_5^n memiliki super $(91n + 29, 14) - WD_5$ antimagic total dekomposisi untuk $n \geq 2$. $\square$

$\diamond$ **Teorema 4** *Ada pelabelan super* $(88n + 32, 20)$-WD_5 *antimagic total dekomposisi pada graf* windmill WD_5^n *untuk* $n \geq 2$.

Bukti. Labeli titik graf *windmill* WD_5^n dengan menggunakan label titik yang terdapat pada teorema 1 kedalam teorema 4 dimana f_4=f_1, sehingga $f_4(A)$=$f_1(A)$, $f_4(x_i)$=$f_1(x_i)$, $f_4(y_i)$=$f_1(y_i)$, $f_4(z_i)$=$f_1(z_i)$, $f_4(p_i)$=$f_1(p_i)$. Dengan demikian maka bobot $w_{f_4} = 8n + 7$.

Gunakan label sisi yang terdapat pada teorema 2 kedalam teorema 4 untuk melabeli sisi graf dimana f_4=f_2 sehingga $f_4(Ax_i)$=$f_2(Ax_i)$, $f_4(x_iz_i)$=$f_2(x_iz_i)$, $f_4(x_ip_i)$=$f_2(x_ip_i)$, $f_4(x_iy_i)$=$f_2(x_iy_i)$, $f_4(y_iz_i)$=$f_2(y_iz_i)$ $f_4(y_ip_i)$=$f_2(y_ip_i)$, $f_4(Ay_i)$ =$f_2(Ay_i)$, $f_4(Ap_i)$=$f_2(Ap_i)$, $f_4(Az_i)$=$f_2(Az_i)$, $f_4(z_ip_i)$=$f_2(z_ip_i)$.

W_{f_4} didefinisikan sebagai bobot total dekomposisi pada graf *windmill* berdasarkan penjumlahan bobot dekomposisi dengan label sisinya maka w_{f_4} dan fungsi label sisi dengan syarat batas i yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} W_{f_4} &= w_{f_4} + f_4(Ax_i) + f_4(x_iz_i) + f_4(x_ip_i) + f_4(x_iy_i) + f_4(y_iz_i) \\ &\quad + f_4(y_ip_i) + f_4(Ay_i) + f_4(Ap_i) + f_4(Az_i) + f_4(z_ip_i) \\ &= 88n + 20i + 12, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Dengan demikian maka didapatkan himpunan bobot total dekomposisi $W_{f_4} = \{88n+32, 88n+52, \ldots, 108n+12\}$.. Sehingga terbukti bahwa pada graf *windmill* WD_5^n memiliki super $(88n + 32, 20) - WD_5$ antimagic total dekomposisi untuk $n \geq 2$. □

$\diamond$ **Teorema 5** *Ada pelabelan super* $(86n + 34, 24)$-WD_5 *antimagic total dekomposisi pada graf* windmill WD_5^n *untuk* $n \geq 2$.

Bukti. Labeli titik graf *windmill* WD_5^n dengan menggunakan label titik yang terdapat pada teorema 3 kedalam teorema 5 dimana f_5=f_3, sehingga $f_5(A)$=$f_3(A)$, $f_5(x_i)$=$f_3(x_i)$, $f_5(y_i)$=$f_3(y_i)$, $f_5(z_i)$=$f_3(z_i)$, $f_5(p_i)$=$f_3(p_i)$. Dengan demikian maka bobot $w_{f_5} = 6n + 4i + 5$.

Gunakan label sisi yang terdapat pada teorema 2 kedalam teorema 5 untuk melabeli sisi graf dimana f_5=f_2 sehingga $f_5(Ax_i)$=$f_2(Ax_i)$, $f_5(x_iz_i)$=$f_2(x_iz_i)$, $f_5(x_ip_i)$=$f_2(x_ip_i)$, $f_5(x_iy_i)$=$f_2(x_iy_i)$, $f_5(y_iz_i)$=$f_2(y_iz_i)$ $f_5(y_ip_i)$=$f_2(y_ip_i)$, $f_5(Ay_i)$ =$f_2(Ay_i)$, $f_5(Ap_i)$=$f_2(Ap_i)$, $f_5(Az_i)$=$f_2(Az_i)$, $f_5(z_ip_i)$=$f_2(z_ip_i)$.

W_{f_5} didefinisikan sebagai bobot total dekomposisi pada graf *windmill* berdasarkan penjumlahan bobot dekomposisi dengan label sisinya maka w_{f_5} dan fungsi label sisi dengan syarat batas i yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} W_{f_5} &= w_{f_5} + f_5(Ax_i) + f_5(x_iz_i) + f_5(x_ip_i) + f_5(x_iy_i) + f_5(y_iz_i) \\ &\quad + f_5(y_ip_i) + f_5(Ay_i) + f_5(Ap_i) + f_5(Az_i) + f_5(z_ip_i) \\ &= 86n + 24i + 10, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Dengan demikian maka didapatkan himpunan bobot total dekomposisi $W_{f_5} = \{86n+34, 86n+58, \ldots, 110n+10\}$. Sehingga terbukti bahwa pada graf *windmill* WD_5^n memiliki super $(88n + 32, 24) - WD_5$ antimagic total dekomposisi untuk $n \geq 2$. □

◇ **Teorema 6** *Ada pelabelan super* $(73n + 47, 50)$-WD_5 *antimagic total dekomposisi pada graf* windmill WD_5^n *untuk* $n \geq 2$.

Bukti. Labeli titik graf *windmill* WD_5^n dengan menggunakan label titik yang terdapat pada teorema 3 kedalam teorema 6 dimana f_6=f_1, sehingga $f_6(A)$=$f_1(A)$, $f_6(x_i)$=$f_1(x_i)$, $f_6(y_i)$=$f_1(y_i)$, $f_6(z_i)$=$f_1(z_i)$, $f_6(p_i)$=$f_1(p_i)$. Dengan demikian maka bobot $w_{f_6} = 4n + 7$.
Labeli sisi graf windmill WD_5^n dengan fungsi bijektif f_{13} sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f_6(Ax_i) &= 4n + 5i - 3, \text{untuk } 1 \leq i \leq n \\ f_6(x_iz_i) &= 4n + 5i - 2, \text{untuk } 1 \leq i \leq n \\ f_6(x_ip_i) &= 4n + 5i - 1, \text{untuk } 1 \leq i \leq n \\ f_6(x_iy_i) &= 4n + 5i, \text{untuk } 1 \leq i \leq n \\ f_6(y_iz_i) &= 4n + 5i + 1, \text{untuk } 1 \leq i \leq n \\ f_6(y_ip_i) &= 9n + 5i - 3, \text{untuk } 1 \leq i \leq n \\ f_6(Ay_i) &= 9n + 5i - 2, \text{untuk } 1 \leq i \leq n \\ f_6(Ap_i) &= 9n + 5i - 1, \text{untuk } 1 \leq i \leq n \\ f_6(Az_i) &= 9n + 5i, \text{untuk } 1 \leq i \leq n \\ f_6(z_ip_i) &= 9n + 5i + 1, \text{untuk } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

W_{f_6} didefinisikan sebagai bobot total dekomposisi pada graf *windmill* berdasarkan penjumlahan bobot dekomposisi dengan label sisinya maka w_{f_6} dan fungsi label sisi dengan syarat batas i yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} W_{f_6} &= w_{f_6} + f_7(Ax_i) + f_6(x_iz_i) + f_6(x_ip_i) + f_6(x_iy_i) + f_6(y_iz_i) \\ &\quad + f_6(y_ip_i) + f_6(Ay_i) + f_6(Ap_i) + f_6(Az_i) + f_6(z_ip_i) \\ &= 73n + 50i - 3, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Dengan demikian maka didapatkan himpunan bobot total dekomposisi $W_{f_6} = \{73n + 47, 73n + 97, \ldots, 123n - 3\}$. Sehingga terbukti bahwa pada graf *windmill* WD_5^n memiliki super $(73n + 47, 50) - WD_5$ antimagic total dekomposisi untuk $n \geq 2$. □

◇ **Teorema 7** *Ada pelabelan super* $(71n + 49, 54)$-WD_5 *antimagic total dekomposisi pada graf* windmill WD_5^n *untuk* $n \geq 2$.

Bukti. Labeli titik graf *windmill* WD_5^n dengan menggunakan label titik yang terdapat pada teorema 3 kedalam teorema 7 dimana f_7=f_3, sehingga $f_7(A)$=$f_3(A)$, $f_7(x_i)$=$f_3(x_i)$, $f_7(y_i)$=$f_3(y_i)$, $f_7(z_i)$=$f_3(z_i)$, $f_7(p_i)$=$f_3(p_i)$. Dengan demikian maka bobot $w_{f_7} = 6n + 4i + 5$.

Gunakan label sisi yang terdapat pada teorema 2 kedalam teorema 6 untuk melabeli sisi graf dimana f_4=f_2 sehingga $f_7(Ax_i)$=$f_6(Ax_i)$, $f_7(x_iz_i)$=$f_6(x_iz_i)$, $f_7(x_ip_i)$=$f_6(x_ip_i)$, $f_7(x_iy_i)$=$f_6(x_iy_i)$, $f_7(y_iz_i)$=$f_6(y_iz_i)$ $f_7(y_ip_i)$=$f_6(y_ip_i)$, $f_7(Ay_i)$ =$f_6(Ay_i)$, $f_7(Ap_i)$=$f_6(Ap_i)$, $f_7(Az_i)$=$f_6(Az_i)$, $f_7(z_ip_i)$=$f_6(z_ip_i)$.

W_{f_7} didefinisikan sebagai bobot total dekomposisi pada graf *windmill* berdasarkan penjumlahan bobot dekomposisi dengan label sisinya maka w_{f_7} dan fungsi label sisi dengan syarat batas i yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} W_{f_7} &= w_{f_7} + f_7(Ax_i) + f_7(x_iz_i) + f_7(x_ip_i) + f_7(x_iy_i) + f_7(y_iz_i) \\ &\quad + f_7(y_ip_i) + f_7(Ay_i) + f_7(Ap_i) + f_7(Az_i) + f_5(z_ip_i) \\ &= 71n + 54i - 5, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Dengan demikian maka didapatkan himpunan bobot total dekomposisi $W_{f_7} = \{71n+49, 71n+104, \ldots, 125n-5\}$. Sehingga terbukti bahwa pada graf *windmill* WD_5^n memiliki super $(71n + 49, 54) - WD_5$ antimagic total dekomposisi untuk $n \geq 2$. □

Kesimpulan

Pelabelan super (a, d)-$\mathcal{H}$-antimagic total dekomposisi pada graf *windmill* Konektif memiliki pelabelan super (a, d)-$\mathcal{H}$ antimagic total covering untuk $d = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 120\}$. Hasil penelitian ini dibuktikan pada teorema bahwa graf *windmill* WD_5^n terdapat fungsi bijektif pelabelan super $(98n + 22, 0) - WD_5$, $(95n + 25, 6) - WD_5$, $(91n + 29, 14) - WD_5$, $(88n + 32, 20) - WD_5$, $(86n + 34, 24) - WD_5$, $(73n + 47, 50) - WD_5$, $(71n + 49, 54) - WD_5$, untuk $n \geq 2$

References

[1] AK Purnapraja, R Hidayat, Cycle-Super Antimagicness of Connected and Disconnected Tensor Product of Graphs, *Procedia Computer Science*, **74**, (2015), 9399

[2] Dafik. (2007). *Structural Properties and Labeling of Graph*

[3] Gutierrez and Llado, *Magic Coverings*, Of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing, 55, 451-461, (2005)

[4] Inayah, N. (2013). Pelabelan $(a, d) - H$-Anti Ajaib Pada Beberapa Kelas Graf

[5] Pudyaningrum, P. R. H., Agustin, I. H., and Dafik (2014). Pengembangan total selimut super $(a, d) - H$-antimagic pada graf shackle triangular book. *Prosiding Semnas Pendidikan Matematika Ahmad Dahlan*

[6] Rosyidah, K. dan Dafik, D. (2014) Super (a, d)-H Total Decomposition of Graf Helm. *Prosiding Seminar Matematika dan Pendidikan Matematika, 1287=1295.*

[7] Sherly Citra Wuni, Ika Hesti Agustin, Dafik, Super (a,d)-H-Antimagic Total Covering pada Graf Semi Windmill, *Prosiding Seminar Nasional Matematika 2014* **Vol 1, No 1** (2014), 161–168