SERTIFIKAT

3.8.5/UN32.3.II/T/2015

Diberikan Kepada

Irma Azizah

Universitas Negeri Jember

Atas partisipasinya sebagai

PEMAKALAH

Dalam Seminar Nasional Matematika dan Pembelajarannya
dengan Tema Peranan Matematika dalam Menumbuhkembangkan Daya Saing dan Karakter Bangsa
yang diselenggarakan oleh Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Negeri Malang Tanggal 5 September 2015

Judul Makalah

Super (a,d) - H-Antimagic Total Covering of Triangular Cycle Ladder Graph and its Application for Cryptosystem

Malang, 5 September 2015

Dekan FMIPA Universitas Negeri Malang

Dr. Markus Diantoro, M.Si
NIP 19661221 199103 1 001

Ketua Pelaksana

Dr. Ery Hidayanto, M.Si
NIP 19620211 198203 1 004

Super (a,d)-$\mathcal{H}$-Antimagic Total Selimut pada Graf Triangular Cycle Ladder untuk Pengembangan *Ciphertext*

Irma Azizah, Dafik
Program Studi Pendidikan Matematika FKIP Universitas Jember
e-mail: irma.azizah@ymail.com, d.dafik@gmail.com

Abstrak

A graph $G(V,E)$ has a $\mathcal{H}$-covering if every edge in E belongs to a subgraph of G isomorphic to $\mathcal{H}$. An (a,d)-$\mathcal{H}$-antimagic total covering is a total labeling λ from $V(G)\cup E(G)$ onto the integers $\{1,2,3,...,|V(G)\cup E(G)|\}$ with the property that, for every subgraph A of G isomorphic to $\mathcal{H}$ the $\sum A = \sum_{v\in V(A)} \lambda(v) + \sum_{e\in E(A)} \lambda(e)$ forms an arithmetic sequence. A graph that admits such a labeling is called an (a,d)-$\mathcal{H}$-antimagic total covering. In addition, if $\{\lambda(v)\}_{v\in V} = \{1,...,|V|\}$, then the graph is called $\mathcal{H}$-super antimagic graph. $\mathcal{H}$-super antimagic graph used by developing of ciphertext. In this paper we study a super (a,d)-$\mathcal{H}$-antimagic total Covering of Triangular Cycle Ladder Graph TCL_n for developing of ciphertext.

Kata Kunci *: $\mathcal{H}$-super antimagic total covering, Triangular Cycle Ladder Graph TCL_n, Ciphertext.*

Pendahuluan

Sebuah graf G adalah graf pohon dengan himpunan titik $V(G)$, himpunan sisi $E(G)$, banyaknya titik $|V(G)| = p$ dan banyak sisi $|E(G)| = q$ [5]. Salah satu topik dalam teori graf yang banyak mendapatkan perhatian adalah pelabelan graf. Pelabelan graf muncul pertama kali pada pertengahan tahun 1960-an [2]. Berdasarkan elemen-elemen yang dilabeli maka pelabelan dibagi kedalam tiga jenis, yaitu pelabelan titik, pelabelan sisi, dan pelabelan total [13]. Pengertian pelabelan titik, pelabelan sisi, dan pelabelan total dapat dilihat pada [13]. Salah satu graf yang menarik adalah graf triangular cycle ladder. Graf triangular cycle ladder merupakan salah satu graf yang merupakan famili dari graf ladder. Graf ini merupakan salah satu contoh graf $Well - Defined$ yang masih belum ditemukan pelabelannya [8]. Terdapat berbagai jenis tipe pelabelan dalam graf, salah satunya adalah pelabelan super (a,d)-$\mathcal{H}$-antimagic total selimut, dimana a bobot sisi terkecil dan d nilai beda [4]. Dalam [9], [10] ditunjukkan bahwa fungsi super (a,d)-$\mathcal{H}$-antimagic total selimut akan diperoleh dengan melabeli titik, sisi, dan kemudian akan diperoleh fungsi titik, fungsi sisi, dan fungsi selimut total. Pada makalah ini, tidak dibahas lebih mendalam tentang pelabelan super (a,d)-$\mathcal{H}$-antimagic total selimut, pembaca dapat membacanya pada [6],[7]. Penemuan penelitian ini digunakan untuk pengembangan *ciphertext*. *Ciphertext* adalah suatu pesan yang telah melalui proses enkripsi atau teks kode [1]. Sedangkan pesan yang diubah dalam bentuk *ciphertext* pada penelitian ini berupa kalimat. Hasil-hasil penelitian terkait ini dapat ditemukan di [3, 12].

Objek kajian yang berupa graf secara umum direpresentasikan oleh titik dan sisi serta himpunan bagian bilangan asli yang disebut label. Pelabelan total selimut-$\mathcal{H}$ diperlukan untuk mendefinisikan suatu graf G yang dikatakan $\mathcal{H}$-ajaib. Selain itu pelabelan total selimut-$\mathcal{H}$ diperlukan untuk pengembangan *ciphertext*. Oleh karena itu, penelitian ini difokuskan pada menginvestigasi bagaimana menentukan super (a, d)-$\mathcal{H}$-antimagic total selimut pada graf Triangular Cycle Ladder TCL_n dimana $n \geq 4$ untuk pengembangan *ciphertext*.

Teorema yang digunakan

Dalam bagian ini disajikan sebuah teorema penting terkait dengan pelabelan graf pada super (a, d)-$\mathcal{H}$-antimagic total selimut of shackle of fan F_4. Teorema tersebut yaitu kardinalitas graf Triangular Cycle Ladder TCL_n untuk $n \geq 4$. Teorema ini memberikan ide bagaimana penelitian ini dikembangkan. Dafik dalam [4] membuktikan sebuah teorema terkait dengan batas atas d untuk super (a, d)-$\mathcal{H}$-antimagic total selimut untuk sebarang graf.

Graf Triangular Cycle Ladder adalah sebuah graf yang dinotasikan dengan TCL_n dimana himpunan titik $V(TCL_n) = \{x_i, y_i, z_j; 1 \leq i \leq n+1; 1 \leq j \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(TCL_n) = \{x_i y_i; 1 \leq i \leq n+1\} \cup \{x_i z_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_i z_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_i y_{i+1}; 1 \leq i \leq n\} \cup \{z_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n\} \cup \{z_i y_{i+1}; 1 \leq i \leq n\}$.

Berdasarkan himpunan titik dan sisi dari graf Triangular Cycle Ladder TCL_n untuk $n \geq 4$, didapatkan rumusan jumlah titik yaitu $p_G = 3n+2$. Sedangkan jumlah sisi pada graf Triangular Cycle Ladder TCL_n untuk $n \geq 4$ adalah $q_G = 6n + 1$. Selain itu, terdapat jumlah titik yang merupakan selimut dari graf Triangular Cycle Ladder TCL_n untuk $n \geq 4$ adalah $p_H = 5$ dan jumlah sisi pada selimut dari graf Triangular Cycle Ladder TCL_n untuk $n \geq 4$ adalah $q_H = 7$, dengan jumlah selimut yang akan diteliti oleh peneliti adalah sejumlah n.

Batas atas d graf Triangular Cycle Ladder TCL_n untuk $n \geq 4$ dapat ditentukan dengan membuktikan teorema berikut:

Theorem 1 *[4] Jika sebuah graf G (V, E) adalah pelabelan selimut $(a, d) - \mathcal{H}$-antimagic super, maka $d \leq \frac{(p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H}{s-1}$ untuk $s = |\mathcal{H}_{\rangle}|$, $H \subseteq G$ yang isomorfik dengan $\mathcal{H}$, $p_G = |V(G)|$, $q_G = |E(G)|$, $p_H = |V(H)|$, $q_H = |E(H)|$.*

Proof. $f(V) = \{1, 2, 3, \ldots, p\}$ dan $f(E) = \{p+1, p+2, \ldots, p+q\}$. Misalkan graf (p_G, q_G) mempunyai pelabelan selimut $(a, d) - \mathcal{H}$ antimagic super dengan fungsi total $f(V \cup E) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots, p+q\}$ maka himpunan bobot selimut sebuah graf adalah $\{a, a+d, a+2d, \ldots, a+(s-1)d\}$ dimana a merupakan bobot selimut terkecil. Karena graf G (V,E) adalah $(a,d)-\mathcal{H}$-antimagic, bobot-$\mathcal{H}$ terkecil adalah tidak lebih kecil daripada $1+2+\cdots+p_H+(p_G+1)+(p_G+2)+\cdots+(p_G+q_H)$ dan bobot-$\mathcal{H}$ terbesar adalah tidak lebih besar daripada $p_G+p_G-1+p_G-2+\cdots+(p_G-(p_H-1))+(p_G+q_G)+(p_G+q_G-1)+(p_G+q_G-2)+\cdots+(p_G+q_G-(q_H-1))$, sehingga diperoleh:

untuk nilai terkecil berlaku:

$$\begin{aligned}
1+2+\ldots+p_H+(p_G+1)+(p_G+2)+\ldots+(p_G+q_H) &\leq a\\
\frac{p_H}{2}(1+p_H)+q_Hp_G+\frac{q_H}{2}(1+q_H) &=\\
\frac{p_H}{2}+\frac{p_H^2}{2}+q_Hp_G+\frac{q_H}{2}+\frac{q_H^2}{2} &\leq a
\end{aligned}$$

Sedangkan untuk nilai terbesar berlaku:

$$\begin{aligned}
a+(s-1)d &\leq p_G+p_G-1+p_G-2+...+(p_G-(p_H-1))+(p_G+q_G)\\
&\quad +(p_G+q_G-1)+(p_G+q_G-2)+...+(p_G+q_G-(q_H-1))\\
&= p_Hp_G-\frac{p_H-1}{2}(1+(p_H-1))+q_Hp_G+q_Hq_G\\
&\quad -\frac{q_H-1}{2}(1+(q_H-1))\\
&= p_Hp_G-\frac{p_H-1}{2}(p_H)+q_Hp_G+q_Hq_G-\frac{q_H-1}{2}(q_H)\\
(s-1)d &\leq p_Hp_G-\frac{p_H-1}{2}(p_H)+q_Hp_G+q_Hq_G-\frac{q_H-1}{2}(q_H)-a
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq p_Hp_G-\frac{p_H-1}{2}(p_H)+q_Hp_G+q_Hq_G-\frac{q_H-1}{2}(q_H)-\\
&\quad (\frac{p_H}{2}+\frac{p_H^2}{2}+q_Hp_G+\frac{q_H}{2}+\frac{q_H^2}{2})\\
&= p_Hp_G-\frac{p_H^2}{2}+\frac{p_H}{2}+q_Hq_G-\frac{q_H^2}{2}+\frac{q_H}{2}-(\frac{p_H}{2}+\frac{p_H^2}{2}+\frac{q_H}{2}+\frac{q_H^2}{2})\\
&= p_Hp_G+q_Hq_G-p_H^2-q_H^2\\
&= p_Hp_G-p_H^2+q_Hq_G-q_H^2\\
&= (p_G-p_H)p_H+(q_G-q_H)q_H\\
d &\leq \frac{(p_G-p_H)p_H+(q_G-q_H)q_H}{(s-1)}
\end{aligned}$$

Dari persamaan di atas terbukti bahwa batas atas $d \leq \frac{(p_G-p_H)p_H+(q_G-q_H)q_H}{s-1}$ jika graf G memiliki pelabelan selimut (a,d)-$\mathcal{H}$-antimagic super dari berbagai famili graf. (Dafik, 2014) □

Sehingga batas atas d untuk penelitian ini adalah :

$$\begin{aligned} d &\le \frac{(p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H}{s-1} \\ &\le \frac{(3n+2-5)5 + (6n+1-7)7}{n-1} \\ &\le \frac{(3n-3)5 + (6n-6)7}{n-1} \\ &\le \frac{57n-57}{n-1} \\ &\le \frac{57(n-1)}{n-1} \\ &\le 57 \end{aligned}$$

Hasil Penelitian

Hasil penelitian ini didapatkan beberapa teorema terkait dengan pelabelan graf terhadap super (a, d)-$\mathcal{H}$-antimagic total covering untuk graf shackle kipas F_n untuk $n \ge 4$. Seperti yang telah dibahas sebelumnya bahwa penelitian ini dikembangkan melalui pengambilan salah satu contoh graf kipas yaitu graf shackle F_n untuk $n \ge 4$. Berikut ini adalah teorema-teorema yang didapatkan dari penelitian ini.

◇ **Teorema 1** *Ada pelabelan selimut* $(42n + 48, 3) - F_4$*-antimagic super pada graf Triangular Cycle Ladder yang dinotasikan dengan* TCL_n *untuk* $n \ge 4$.

Proof. Labeli titik TCL_n dengan fungsi bijektif f_1 dengan label sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f_1(x_i) &= 3i-1, \text{ untuk } i = bilanganganjil, 1 \le i \le n+1 \\ f_1(x_i) &= 3i-2, \text{ untuk } i = bilangangenap, 1 \le i \le n \\ f_1(y_i) &= 3i-2, \text{ untuk } i = bilanganganjil, 1 \le i \le n+1 \\ f_1(y_i) &= 3i-1, \text{ untuk } i = bilangangenap, 1 \le i \le n \\ f_1(z_i) &= 3i, \text{ untuk } 1 \le i \le n \end{aligned}$$

f_1 adalah fungsi bijektif yang memetakan TCL_n ke himpunan bilangan bulat $\{1, 2, \ldots, 3n+2\}$. Jika w_{f_1} didefinisikan sebagai bobot titik selimut dari pelabelan selimut total pada TCL_n dimana bobot titik selimut tersebut diperoleh dari penjumlahan 5 label titik dari F_4 yang menjadi selimut pada TCL_n, maka fungsi bijektif w_{f_1} dapat ditentukan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
w_{f_1} &= \bigcup_{i=ganjil} (f_1(x_i)) + \bigcup_{i=genap} (f_1(x_i)) + \bigcup_{i=ganjil} (f_1(y_i)) + \bigcup_{i=genap} (f_1(y_i)) + f_1(z_i) \\
&= \bigcup_{i=ganjil} (3i-1) + \bigcup_{i=genap} (3i-2) + \bigcup_{i=ganjil} (3i-2) + \bigcup_{i=genap} (3i-1) + 3i \\
&= \bigcup_{i=ganjil} (3i-1+3i-2) + \bigcup_{i=genap} (3i-2+3i-1) + 3i \\
&= \bigcup_{i=ganjil} (6i-3) + \bigcup_{i=genap} (6i-3) + 3i
\end{aligned}$$

Himpunan bobot titik selimut di atas adalah $w_{f_1} = \{15, 30, 45, \dots, 15n\}$ membentuk barisan aritmatika dengan $d = 15$. Karena $U_n = a + (n-1)b = 15 + (n-1)15 = 15n$ maka terbukti bahwa fungsi bobot selimut $w_{f_1} = 15i$. Selanjutnya untuk membentuk selimut total, diperlukan label sisi. Labeli sisi TCL_n dengan fungsi bijektif f_1 yang dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
f_1(x_{i+1}z_i) &= 5n-2i+4, \text{ untuk } 1 \le i \le n \\
f_1(x_iy_i) &= 5n-2i+5, \text{ untuk } 1 \le i \le n+1 \\
f_1(x_iz_i) &= 5n-2i+12, \text{ untuk } 1 \le i \le n \\
f_1(y_iz_i) &= 5n-2i+13, \text{ untuk } 1 \le i \le n \\
f_1(y_{i+1}z_i) &= 7n-i+8, \text{ untuk } 1 \le i \le n \\
f_1(y_iy_{i+1}) &= 7n-i+12, \text{ untuk } 1 \le i \le n
\end{aligned}$$

Jika W_{f_1} didefinisikan sebagai bobot selimut total pada TCL_n berdasarkan penjumlahan bobot titik selimut dengan label sisinya maka W_{f_1} dapat diperoleh dengan merumuskan jumlah bobot titik selimut w_{f_1} dan rumus label sisi f_1 dengan syarat batas i dan j yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$W_{f_1} = w_{f_1} + f_1(x_{i+1}z_i) + f_1(x_iy_i) + f_1(x_iz_i) + f_1(y_iz_i) + f_1(y_{i+1}z_i) + f_1(y_iy_{i+1})$$

$$\begin{aligned}
&= \bigcup_{i=ganjil} (6i-3) + \bigcup_{i=genap} (6i-3) + 3i + 5n - 2i + 4 + 5n - 2i + 5 + 5n - 2i \\
&\quad +12 + 5n - 2i + 13 + 7n - i + 8 + 7n - i + 12 \\
&= \bigcup_{i=ganjil} (6i-3) + \bigcup_{i=genap} (6i-3) + 34n - 7i + 44
\end{aligned}$$

Dengan demikian barisan aritmatika dari $W_{f_1} = \{42n+48, 42n+51, \dots, 45n+45\}$. Karena $U_n = a + (n-1)b = 42n + 48 + (n-1)3 = 45n + 45$ maka terbuktilah bahwa ada pelabelan selimut $(42n+48, 3)-F_4$-antimagic super pada graf Triangular Cycle Ladder yang dinotasikan dengan TCL_n untuk $n \geq 4$. □

◇ **Teorema 2** *Ada pelabelan selimut* $(39n + 51, 8) - F_4$*-antimagic super pada graf Triangular Cycle Ladder yang dinotasikan dengan* TCL_n *untuk* $n \geq 4$.

Proof. Labeli titik TCL_n yang terdapat pada teorema 1 ke dalam teorema 2 dengan fungsi bijektif $f_1(x_i)$, $f_1(y_i)$, dan $f_1(z_i)$ maka $f_2(x_i) = f_1(x_i)$, $f_2(y_i) = f_1(y_i)$, $f_2(z_i) = f_1(z_i)$ sehingga $w_{f_2} = w_{f_1} = \bigcup_{i=ganjil}(6i-3) + \bigcup_{i=genap}(6i-3) + 3i$, untuk $1 \leq i \leq n$. Labeli sisi TCL_n dengan fungsi bijektif f_1 yang dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
f_2(x_iy_i) &= 3n - i + 8, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n+1 \\
f_2(x_{i+1}z_i) &= 3n - i + 12, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
f_2(y_{i+1}z_i) &= 3n - i + 16, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
f_2(y_iy_{i+1}) &= 3n - i + 20, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
f_2(x_iz_i) &= 3n - i + 24, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
f_2(y_iz_i) &= 3n - i + 28, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n
\end{aligned}$$

Jika W_{f_2} didefinisikan sebagai bobot selimut total pada TCL_n berdasarkan penjumlahan bobot titik selimut dengan label sisinya maka W_{f_2} dapat diperoleh dengan merumuskan jumlah bobot titik selimut w_{f_2} dan rumus label sisi f_2 dengan syarat batas i yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
W_{f_2} &= w_{f_2} + f_2(x_iy_i) + f_2(x_{i+1}z_i) + f_2(y_{i+1}z_i) + f_2(y_iy_{i+1}) + f_2(x_iz_i) + f_2(y_iz_i) \\
&= \bigcup_{i=ganjil}(6i-3) + \bigcup_{i=genap}(6i-3) + 3i + 3n - i + 8 + 3n - i + 12 + 3n - i + \\
&\quad 16 + 3n - i + 20 + 3n - i + 24 + 3n - i + 28 \\
&= \bigcup_{i=ganjil}(6i-3) + \bigcup_{i=genap}(6i-3) + 18n - 3i + 128
\end{aligned}$$

Dengan demikian barisan aritmatika dari $W_{f_2} = \{39n + 51, 39n + 59, \ldots, 47n + 43\}$. Karena $U_n = a + (n-1)b = 39n + 51 + (n-1)8 = 47n + 43$ maka terbuktilah bahwa ada pelabelan selimut $(39n+51, 8)-F_4$-antimagic super pada graf Triangular Cycle Ladder yang dinotasikan dengan TCL_n untuk $n \geq 4$. □

◇ **Teorema 3** *Ada pelabelan selimut* $(51n - 63, 27) - F_4$*-antimagic super pada graf Triangular Cycle Ladder yang dinotasikan dengan* TCL_n *untuk* $n \geq 4$.

Proof. Labeli titik TCL_n yang terdapat pada teorema 1 ke dalam teorema 3 dengan fungsi bijektif $f_1(x_i)$, $f_1(y_i)$, dan $f_1(z_i)$ maka $f_3(x_i) = f_1(x_i)$, $f_3(y_i) = f_1(y_i)$, $f_3(z_i) = f_1(z_i)$ sehingga $w_{f_3} = w_{f_1} = \bigcup_{i=ganjil}(6i-3) + \bigcup_{i=genap}(6i-3)+3i$, untuk $1 \le i \le n$. Labeli sisi TCL_n dengan fungsi bijektif f_3 yang dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
f_3(x_iy_i) &= 6n-6i+15, \text{ untuk } 1 \le i \le n+1\\
f_3(y_iy_{i+1}) &= 6n-6i+18, \text{ untuk } 1 \le i \le n\\
f_3(x_iz_i) &= 12n-6i+19, \text{ untuk } i = ganjil, 1 \le i \le n\\
f_3(x_iz_i) &= 12n-6i+20, \text{ untuk } i = genap, 1 \le i \le n\\
f_3(y_iz_i) &= 3n-6i+32, \text{ untuk } i = ganjil, 1 \le i \le n\\
f_3(y_iz_i) &= 3n-6i+31, \text{ untuk } i = genap, 1 \le i \le n\\
f_3(x_{i+1}z_i) &= 3n-6i+29, \text{ untuk } i = ganjil, 1 \le i \le n\\
f_3(x_{i+1}z_i) &= 3n-6i+28, \text{ untuk } i = genap, 1 \le i \le n\\
f_3(y_{i+1}z_i) &= 3n-6i+28, \text{ untuk } i = ganjil, 1 \le i \le n\\
f_3(y_{i+1}z_i) &= 3n-6i+29, \text{ untuk } i = genap, 1 \le i \le n
\end{aligned}$$

Jika W_{f_3} didefinisikan sebagai bobot selimut total pada TCL_n berdasarkan penjumlahan bobot titik selimut dengan label sisinya maka W_{f_3} dapat diperoleh dengan merumuskan jumlah bobot titik selimut w_{f_3} dan rumus label sisi f_3 dengan syarat batas i yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
W_{f_3} &= w_{f_3} + f_3(x_iy_i) + f_3(y_iy_{i+1}) + \bigcup_{i=ganjil}(f_3(x_iz_i)) + \bigcup_{i=genap}(f_3(x_iz_i)) +\\
&\quad \bigcup_{i=ganjil}(f_3(y_iz_i)) + \bigcup_{i=genap}(f_3(y_iz_i)) + \bigcup_{i=ganjil}(f_3(x_{i+1}z_i)) +\\
&\quad \bigcup_{i=genap}(f_3(x_{i+1}z_i)) + \bigcup_{i=ganjil}(f_3(y_{i+1}z_i)) + \bigcup_{i=ganjil}(f_3(y_{i+1}z_i))\\
&= \bigcup_{i=ganjil}(6i-3) + \bigcup_{i=genap}(6i-3)+3i+6n-6i+15+6n-6i+18+\\
&\quad \bigcup_{i=ganjil}(12n-6i+19) + \bigcup_{i=genap}(12n-6i+20) + \bigcup_{i=ganjil}(3n-6i+32) +\\
&\quad \bigcup_{i=genap}(3n-6i+31) + \bigcup_{i=ganjil}(3n-6i+29) + \bigcup_{i=genap}(3n-6i+28) +\\
&\quad \bigcup_{i=ganjil}(3n-6i+28) + \bigcup_{i=genap}(3n-6i+29)
\end{aligned}$$

Dengan demikian barisan aritmatika dari $W_{f_8} = \{51n+63, 51n+63, \ldots, 78n+36\}$. Karena $U_n = a+(n-1)b = 51n+63+(n-1)27 = 78n+36$ maka terbuktilah bahwa ada pelabelan selimut $(51n + 63, 27) - F_4$-antimagic super pada graf Triangular Cycle Ladder yang dinotasikan dengan TCL_n untuk $n \geq 4$.

◇ **Teorema 4** *Ada pelabelan selimut* $(51n - 63, 27) - F_4$*-antimagic super pada graf* TCL_n *dimana* $n \geq 4$ *untuk pengembangan ciphertext dengan pesan berupa kalimat "Perubahan PIN sudah diproses, PIN baru anda adalah cantik" menjadi ciphertext: slvuwywyasfamuyyhyfsvhmlmsfawyvuyayyyyygyweyavfi.*

Proof. Berdasarkan pelabelan selimut $(51n - 63, 27) - F_4$-antimagic super pada graf TCL_n dimana $n \geq 4$, Kemudian didata huruf dan angka yang digunakan dalam pesan di atas yaitu a, b, c, d, e, h, i, k, l, n, o, p, r, s, t, u (spasi dan tanda baca diabaikan). Setelah itu, membentuk diagram pohon (tree diagram) yang berakar di label 1, kemudian dilengkapi label sisinya sedemikian hingga total selimutnya membentuk barisan aritmatika.

Selanjutnya letakkan huruf-huruf yang digunakan sesuai urutan abjad, dan urutkan label sisinya, kemudian pesan rahasia dipecahkan dengan menerapkan teknik kriptosistem modulo 26 terhadap masing-masing hurufnya sehingga menjadi a= mod(4846,26)=10, b= mod(4744,26)=12, c= mod(484542,26)=6, d= mod(474340,
26)=22, e= mod(48454137,26)=17, h= mod(48453936,26)=24, i= mod(484541383
5,26)=15, k= mod(4845393432,26)=22, l= mod(4845393330,26)=24, n= mod(484
539343128,26)=22, o= mod(484539332925,26)=11, p= mod(484539332724,26)=18,
r= mod(48453933292623,26)=1, s= mod(48453933272220,26)=8, t= mod(484539
33272219,26)=7, u= mod(48453933272118,26)=10.

Kemudian dikombinasikan dengan label titik terakhir untuk menghindari terjadinya kesamaan bilangan diantara dua *ciphertext*, sehingga menjadi a=310, b=412, c=56, d=622, e=817, h=724, i=915, k=1022, l=1124, n=1222, o=1411, p=1318, r=151, s=168, t=177, u=1710. Kemudian kombinasi titik dan sisi ini diubah dalam bentuk modulo 26 lagi sehingga diperoleh *ciphertext* yaitu a= y, b= w, c= e, d= y, e= l, h= w, i= f, k= i, l= g, n= a, o= h, p= s, r= v, s= m, t= v, u= u. Dengan proses substitusi pesan kedalam *ciphertext* tanpa spasi dan tanda baca, maka *ciphertext* pesan menjadi: slvuwywyasfamuyyhyfsvhmlms-fawyvuyayyyyygyweyavfi.

Kesimpulan

Pada makalah ini telah terbukti bahwa

- Ada pelabelan selimut $(42n + 48, 3) - F_4$-antimagic super pada graf Triangular Cycle Ladder yang dinotasikan dengan TCL_n untuk $n \geq 4$.

- Ada pelabelan selimut $(39n + 51, 8) - F_4$-antimagic super pada graf Triangular Cycle Ladder yang dinotasikan dengan TCL_n untuk $n \geq 4$.
- Ada pelabelan selimut $(51n - 63, 27) - F_4$-antimagic super pada graf Triangular Cycle Ladder yang dinotasikan dengan TCL_n untuk $n \geq 4$.
- Ada pelabelan selimut $(51n-63, 27)-F_4$-antimagic super pada graf TCL_n dimana $n \geq 4$ untuk pengembangan ciphertext dengan pesan berupa kalimat "Perubahan PIN sudah diproses, PIN baru anda adalah cantik" menjadi ciphertext: slvuwywyasfamuyyhyfsvhmlmsfawyvuyayyyyygyweyavfi.

References

[1] Ariyus, Dony. 2008. *Pengantar Ilmu Kriptografi*. Yogyakarta: Andi Yogyakarta.

[2] A, Rosa. 1967. On Certain Valuations of the Vertices of a Graph. In Theory of Graphs (Proc. Int. Symposium, Rome, July 1966), Gordon and Breach, N.Y. and Dunod Paris 349-355.

[3] AK Purnapraja, R Hidayat, Cycle-Super Antimagicness of Connected and Disconnected Tensor Product of Graphs, *Procedia Computer Science*, **74**, (2015), 9399

[4] Dafik, M. Miller, J. Ryan, M. Bača. 2009. Discrete Mathematics, On Super $(a, d)-$edge$-$Antimagic Total Labeling of Disconnected Graphs, 309, 4909-4915.

[5] Dafik. 2013. Antimagic Total Labeling of Disjoint Union of Disconnected Graphs. CSS Jember.

[6] Guti, Errez. 2005. Super (a,d) Antimagic Total Covering of G. England.

[7] Inayah, N. 2013. Pelabelan (a,d)-H-Anti Ajaib pada Beberapa Kelas Graf. Tidak dipublikasikan (Skripsi). Bandung, Institut Teknologi Bandung.

[8] Karyanti. 2012. Pelabelan Selimut(a, d)-H-Anti Ajaib Super pada Graf Fan, Sun, dan Generalized Petersen. Tidak dipublikasikan (Skripsi). Surakarta: Universitas Sebelas Maret.

[9] Liado, A. 2005. Super (a,d) Antimagic total Covering of G. Combin, Vol.55: 451-461.

[10] M. Bača, Yoquing Lin, dan Andrea. 2009. Note on Super Antimagicness of Disconnection Graphs (Fan), AKCE J. Graphs. Combin., 6, 47-55.

[11] Maryati, T. K., Salman, A., Baskoro, E. T., Ryan, J. Miller, M. 2010. On *H* Supermagic Labellings for Certain Shackles and Amalgamations of A Connected Graph Antimagic Total Labelings For Shackles of A Connected Graph. Utilitas Math 83, 333-342.

[12] Sherly Citra Wuni, Ika Hesti Agustin, Dafik, Super (a,d)-H-Antimagic Total Covering pada Graf Semi Windmill, *Prosiding Seminar Nasional Matematika 2014* **Vol 1, No 1** (2014), 161–168

[13] Sugeng, Kiki Ariyanti. 2005. Magic and Antimagic Labeling of Graphs, Diss., University of Ballarat.