The Learning University

SERTIFIKAT

3.6.5/UN32.3/DT/2015

Diberikan Kepada

WURIA NOVITASARI

Universitas Negeri Jember

Atas partisipasinya sebagai

PEMAKALAH

Dalam Seminar Nasional Matematika dan Pembelajarannya
dengan Tema Peranan Matematika dalam Menumbuhkembangkan Daya Saing dan Karakter Bangsa
yang diselenggarakan oleh Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Negeri Malang Tanggal 5 September 2015

Judul Makalah

Super (a, d)-H-Antimagic Total Covering on Shackle of Cycle with Cords

Malang, 5 September 2015

Dekan FMIPA Universitas Negeri Malang

Dr. Markus Diantoro, M.Si
NIP. 196612211991031001

Ketua Pelaksana

Dr. Erry Hidayanto, M.Si
NIP. 196609061992031004

Super (a,d)-H- Antimagic Total Covering on Shackle of Cycle with Cords

W. Novitasari[1,2], Dafik[1,2], Slamin[1,3]
[1]CGANT - University of Jember
[2]Mathematics Education Department - University of Jember
[3]System Information Department - University of Jember
wuria28@gmail.com, d.dafik@unej.ac.id, slamin@unej.ac.id

Abstract

Graph G is a simple, finite and undirected graph. A graph G is called to be an $(a,d)-H$-antimagic total covering if there is a bijective fuction $\lambda : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \ldots, |V(G)| + |E(G)|\}$, such that for all subgraph H' of G isomorphic to H, where $\sum H' = \sum_{v \in V(H')} \lambda(v) + \sum_{e \in E(H')} \lambda(e)$ form an arithmetic sequence $\{a, a+d, a+2d, ..., a+(s-1)d\}$, where a and d are positive integers and s is the number of all subgraphs H' isomorphic to H. Graph G will be called as H-antimagic super graph if $\{\lambda(v)\} v \epsilon V = \{1, \ldots, \mid V \mid\}$. In this paper we will study about the existence of super $(a,d)-H$-antimagic total covering on shackle of cycle with cords denoted by *Shack* (C_6^3, e, n).

Keywords: Super H-antimagic total, shackle of cycle with cords.

Pendahuluan

Graf G adalah graf sederhana, berhingga dan graf tak berarah, untuk lebih detail lihat definisi dasar dari graf, lihat [10]. Teori graf adalah salah satu cabang dari ilmu matematika yang penting namun teori-teorinya dapat diterapkan dalam kehidupan sehari-hari. Salah satu contoh penerapan teori graf adalah pelabelan graf. Pelabelan suatu graf adalah pemetaan bijektif yang memasangkan unsur-unsur graf (titik atau sisi) dengan bilangan bulat positif. Pelabelan graf diperkenalkan Sedl$\acute{a}\check{c}$ek pada tahun 1963 dengan memunculkan ide tentang pelabelan ajaib. Misal $G(V, E)$, selanjutnya disingkat G, adalah graf sederhana dan tak berarah dengan himpunan titiknya adalah $V(G)$ dan himpunan sisinya adalah $E(G)$. Suatu pelabelan dikatakan pelabelan titik jika domain dari fungsi (pemetaan) adalah himpunan titik $V(G)$ dan suatu pelabelan dikatakan pelabelan sisi jika domain dari fungsi (pemetaan) adalah himpunan sisi $E(G)$ serta suatu pelabelan dikatakan pelabelan total jika domain dari fungsi (pemetaan) adalah himpunan titik dan sisi $V(G) \cup E(G)$. Terdapat banyak jenis pelabelan graf yang telah dikembangkan, salah satunya adalah pelabelan anti ajaib.

Pelabelan anti ajaib adalah pengembangan dari pelabelan ajaib yang dilakukan oleh Hartsfield dan Ringel [4]. Mereka mendefinisikan bahwa suatu graf G disebut anti ajaib jika sisi-sisinya dapat dilabeli dengan $1, 2, \ldots, e_G$ sehingga setiap titik mempunyai bobot titik yang berbeda. Gutiérrez dan Lladó [1] memperkenalkan pelabelan total H-ajaib dengan menggunakan konsep selimut-H. Inayah et al.[5] mengembangkan suatu pelabelan selimut $(a,d)-H$-anti ajaib super pada graf G

dengan penjelasan bahwa pelabelan total λ dari $V(G) \cup E(G)$ ke bilangan bulat $\{1, 2, 3, \ldots, \mid V(G) \cup E(G) \mid\}$, untuk setiap subgraf H' dari G yang isomorfik dengan H dimana $\sum H' = \sum_{v \in V(H')} \lambda(v) + \sum_{e \in E(H')} \lambda(e)$ merupakan barisan aritmatika $\{a, a+d, a+2d, ..., a+(s-1)d\}$, dimana a dan d adalah bilangan bulat positif dan s adalah jumlah dari semua subgraf H' yang isomorfik dengan H. Graph G dikatakan graf H-anti ajaib super jika $\{\lambda(v)\} v \epsilon V = \{1, \ldots, \mid V \mid\}$.

Hasil-hasil pelabelan selimut $(a, d) - H$-anti ajaib super yang telah ditemukan, lihat [6] dan [7]. Oleh karena itu, penelitian ini adalah mengembangkan pelabelan selimut $(a, d) - H$-anti ajaib super pada shackle dari graf siklus dengan busur, dinotasikan dengan *Shack* (C_6^3, e, n), dimana $H' = C_6^3$ isomorfik dengan H. *Shack* (C_6^3, e, n) merupakan graf siklus dengan enam titik dan tiga busur yang dihubungkan oleh satu buah sisi. Hasil-hasil penelitian terkait ini dapat ditemukan di [2, 9].

Graf Shackle

Graf shackle dinotasikan dengan $Shack(G, v, n)$ adalah sebuah graf yang dibentuk dari k graf terhubung tak trivial $G_1, G_2, \ldots, G_k$ sehingga G_s and G_t tidak mempunyai titik yang sama untuk setiap $s, t \in [1, n]$ dengan $|s - t| \geq 2$ dan untuk setiap $i \in [i, n-1]$, G_i dan G_{i+1} mempunyai tepat satu titik yang sama, disebut titik penghubung, dan $k-1$ titik penghubung itu semua berbeda, lebih detail lihat [6]. Jika G_i and G_{i+1} mempunyai tepat satu sisi yang sama, maka kita notasikan graf shackle ini sebagai $Shack(G, e, n)$. Berikut adalah contoh dari $Shack(C_6^3, e, 3)$.

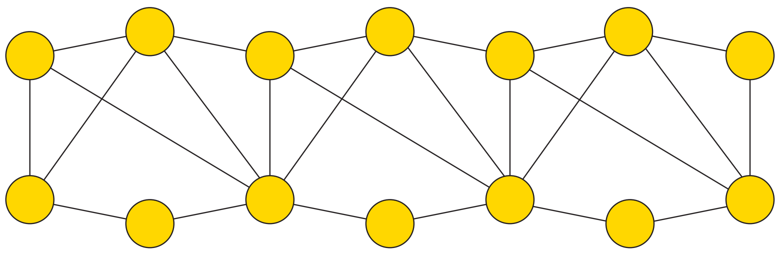

Figure 1: Contoh dari $Shack(C_6^3, e, 3)$.

Lemma yang Digunakan

Lemma sangat berguna dalam menemukan beberapa teorema baru. Sebelum membahas lemma batas atas yang akan digunakan, terlebih dahulu perlu diketahui bahwa *Shack* (C_6^3, e, n) adalah graf dengan titik $V(Shack\ (C_6^3, e, n)) = \{x_{i,j}; 1 \leq i \leq 4, 1 \leq j \leq n\}$ dan sisi $E(Shack\ (C_6^3, e, n)) = \{x_{i,j}x_{i+1,j}; 1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq n\} \cup \{x_{1,j}x_{3,j}; 1 \leq j \leq n\} \cup \{x_{1,j}x_{3,j+1}; 1 \leq j \leq n\} \cup \{x_{2,j}x_{3,j+1}; 1 \leq j \leq n\} \cup \{x_{1,j}x_{2,j+1}; 1 \leq j \leq n\} \cup \{x_{4,j}x_{3,j+1}; 1 \leq j \leq n\}$. Nilai n yang dimaksudkan adalah banyaknya *expand Shack* (C_6^3, e, n) yang terdapat pada *Shack* (C_6^3, e, n) dari samping kiri ke kanan.

Berdasarkan definisi dari graf *Shack* (C_6^3, e, n) dengan n yang berbeda, didapatkan rumusan jumlah titik pada *Shack* (C_6^3, e, n) adalah $p_G = 4n + 2$ dan jumlah sisi pada *Shack* (C_6^3, e, n) adalah $q_G = 8n + 1$. Selimut pada *Shack* (C_6^3, e, n) berupa subgraf dari *Shack* (C_6^3, e, n) yang berupa C_6^3, maka jumlah titik selimut $p_H = 6$ dan jumlah sisi selimut $q_H = 9$ serta rumusan jumlah selimut *Shack* (C_6^3, e, n) adalah s.

Berikut lemma yang digunakan untuk menghitung batas atas d.

Lemma 1 *Jika sebuah graf G (V, E) adalah pelabelan selimut $(a, d) - H$-anti ajaib super, maka $d \leq \frac{(p_G - p_{H'})p_{H'} + (q_G - q_{H'})q_{H'}}{s-1}$ untuk $s = |H'_i|$, $H' \subseteq G$ yang isomorfik dengan H, $p_G = |V(G)|$, $q_G = |E(G)|$, $p_{H'} = |V(H')|$, $q_{H'} = |E(H')|$.*

Bukti: $f(V(G)) = \{1, 2, 3, \ldots, p\}$ dan $f(E(G)) = \{p+1, p+2, \ldots, p+q\}$. Misalkan graf (p_G, q_G) mempunyai pelabelan selimut $(a, d) - H$-anti ajaib super dengan fungsi total $f(V(G) \cup E(G)) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots, p_G + q_G\}$ maka himpunan bobot selimut sebuah graf adalah $\{a, a+d, a+2d, \ldots, a+(s-1)d\}$ dimana a merupakan bobot selimut terkecil. Karena graf G (V, E) adalah $(a, d) - H$-anti ajaib, bobot-H terkecil adalah tidak lebih kecil daripada $1+2+\cdots+p_{H'}+(p_G+1)+(p_G+2)+\cdots+(p_G+q_{H'})$ dan bobot-H' terbesar adalah tidak lebih besar daripada $p_G + p_G - 1 + p_G - 2 + \cdots + (p_G - (p_{H'} - 1)) + (p_G + q_G) + (p_G + q_G - 1) + (p_G + q_G - 2) + \cdots + (p_G + q_G - (q_{H'} - 1))$, sehingga diperoleh:

Untuk nilai terkecil berlaku:

$$\begin{aligned}
1 + 2 + \ldots + p_{H'} + (p_G + 1) + (p_G + 2) + \ldots + (p_G + q_{H'}) &\leq a \\
\frac{p_{H'}}{2}(1 + p_{H'}) + q_{H'}p_G + \frac{q_{H'}}{2}(1 + q_{H'}) &= \\
\frac{p_{H'}}{2} + \frac{p_{H'}^2}{2} + q_{H'}p_G + \frac{q_{H'}}{2} + \frac{q_{H'}^2}{2} &\leq a
\end{aligned}$$

Sedangkan untuk nilai terbesar berlaku:

$$\begin{aligned}
a + (s-1)d &\leq p_G + p_G - 1 + p_G - 2 + ... + (p_G - (p_{H'} - 1)) + (p_G + q_G) \\
&\quad +(p_G + q_G - 1) + (p_G + q_G - 2) + ... + (p_G + q_G - (q_{H'} - 1)) \\
&= p_{H'}p_G - \frac{p_{H'} - 1}{2}(1 + (p_{H'} - 1)) + q_{H'}p_G + q_{H'}q_G \\
&\quad -\frac{q_{H'} - 1}{2}(1 + (q_{H'} - 1)) \\
&= p_{H'}p_G - \frac{p_{H'} - 1}{2}(p_{H'}) + q_{H'}p_G + q_{H'}q_G - \frac{q_{H'} - 1}{2}(q_{H'})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(s-1)d &\leq p_{H'}p_G - \frac{p_{H'} - 1}{2}(p_{H'}) + q_{H'}p_G + q_{H'}q_G - \frac{q_{H'} - 1}{2}(q_{H'}) - a \\
&\leq p_{H'}p_G - \frac{p_{H'} - 1}{2}(p_{H'}) + q_{H'}p_G + q_{H'}q_G - \frac{q_{H'} - 1}{2}(q_{H'}) - \\
&\quad (\frac{p_{H'}}{2} + \frac{p_{H'}^2}{2} + q_{H'}p_G + \frac{q_{H'}}{2} + \frac{q_{H'}^2}{2})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= p_{H'}p_G - \frac{p_{H'}^2}{2} + \frac{p_{H'}}{2} + q_{H'}q_G - \frac{q_{H'}^2}{2} + \frac{q_{H'}}{2} - (\frac{p_{H'}}{2} + \frac{p_{H'}^2}{2} + \frac{q_{H'}}{2} + \frac{q_{H'}^2}{2}) \\
&= p_{H'}p_G + q_{H'}q_G - p_{H'}^2 - q_{H'}^2 \\
&= p_{H'}p_G - p_{H'}^2 + q_{H'}q_G - q_{H'}^2 \\
&= (p_G - p_{H'})p_{H'} + (q_G - q_{H'})q_{H'} \\
d &\leq \frac{(p_G - p_{H'})p_{H'} + (q_G - q_{H'})q_{H'}}{(s-1)}
\end{aligned}$$

Dari persamaan di atas terbukti bahwa batas atas $d \leq \frac{(p_G - p_{H'})p_{H'} + (q_G - q_{H'})q_{H'}}{s-1}$ jika graf G memiliki pelabelan selimut (a,d)-H-anti ajaib super dari berbagai famili graf, lebih detai lihat [3]. □

Batas atas d untuk penelitian ini adalah:

$$\begin{aligned}
d &\leq \frac{(p_G - p_{H'})p_{H'} + (q_G - q_{H'})q_{H'}}{s-1} \\
&\leq \frac{(4n+2-6)6 + (8n+1-9)9}{n-1} \\
&\leq \frac{(4n-4)6 + (8n-8)9}{n-1} \\
&\leq \frac{96n-96}{n-1} \\
&\leq \frac{96(n-1)}{n-1} \\
&\leq 96
\end{aligned}$$

Pelabelan selimut $(a,d)-C_6^3$-anti ajaib super selalu menggunakan bilangan bulat positif, maka nilai $d \geq 0$ dan d adalah bilangan bulat, sehingga $d \, \epsilon \, \{0, 1, 2, 3, \ldots, 96\}$. □

Hasil Penelitian

Hasil penelitian ini didapatkan beberapa teorema terkait dengan pelabelan graf terhadap pelabelan selimut (a,d)-H-anti ajaib super pada $Shack(C_6^3, e, n)$ untuk $n \geq 2$.

Teorema 1 *Ada pelabelan selimut* $(52n+68, 64)-C_6^3$*-anti ajaib super pada* $Shack(C_6^3, e, n)$ *untuk* $n \geq 2$.

Bukti. Labeli titik $Shack(C_6^3, e, n)$ dengan fungsi bijektif f_1 sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
f_1(x_{i,j}) &= 4j + i - 5, \text{ untuk } i = 2, 3, \ 1 \leq j \leq n \\
f_1(x_{i,j}) &= 4j + \frac{i+2}{3} - 2, \text{ untuk } i = 1, 4, \ 1 \leq j \leq n
\end{aligned}$$

f_1 adalah fungsi bijektif yang memetakan $f_1 : V(Shack(C_6^3, e, n)) \cup E(Shack(C_6^3, e, n)) \rightarrow \{1, 2, 3, \ldots, 12n+3\}$. Jika w_{f_1} didefinisikan sebagai bobot titik selimut dari pelabelan total selimut pada *Shack* $(C_6^3, e, 3)$ dimana bobot titik selimut tersebut diperoleh dari penjumlahan 6 label titik dari C_6^3 yang menjadi selimut pada *Shack* $(C_6^3, e, 3)$, maka fungsi bijektif w_{f_1} dapat ditentukan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
w_{f_1} &= \bigcup_{i=2,3} (f_1(x_{i,j})) + \bigcup_{i=1,4} (f_1(x_{i,j})) + \bigcup_{i=2,3} (f_1(x_{i,j+1})) \\
&= \bigcup_{i=2,3} (4j + i - 5) + \bigcup_{i=1,4} (4j + \frac{i+2}{3} - 2) + \bigcup_{i=2,3} (4(j+1) + i - 5) \\
&= \bigcup_{i=1,4} (4j + \frac{i+2}{3} - 2) + \bigcup_{i=2,3} (4j + i - 5 + 4(j+1) + i - 5) \\
&= \bigcup_{i=1,4} (4j + \frac{i+2}{3} - 2) + \bigcup_{i=2,3} (8j + 2i - 6)
\end{aligned}$$

Labeli sisi $Shack(C_6^3, e, n)$ dengan fungsi bijektif f_1 sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
f_1(x_{i,j}x_{i+1,j}) &= 4n - i + 8j - 3, \text{ untuk } i = 1, 2, 1 \leq j \leq n \\
f_1(x_{3,j}x_{4,j}) &= 12n - 8j + 5, \text{ untuk } 1 \leq j \leq n \\
f_1(x_{1,j}x_{3,j}) &= 4n + 8j - 2, \text{ untuk } 1 \leq j \leq n \\
f_1(x_{1,j}x_{2,j+1}) &= 12n - 8j + 7, \text{ untuk } 1 \leq j \leq n \\
f_1(x_{2,j}x_{3,j+1}) &= 4n + 8j, \text{ untuk } 1 \leq j \leq n \\
f_1(x_{1,j}x_{3,j+1}) &= 4n + 8j + 1, \text{ untuk } 1 \leq j \leq n \\
f_1(x_{4,j}x_{3,j+1}) &= 4n + 8j + 2, \text{ untuk } 1 \leq j \leq n
\end{aligned}$$

Jika W_{f_1} didefinisikan sebagai bobot total selimut pada *Shack* (C_6^3, e, n) berdasarkan penjumlahan bobot titik selimut dengan label sisinya maka W_{f_1} dapat diperoleh dengan merumuskan jumlah bobot titik selimut w_{f_1} dan rumus label sisi f_1 dengan syarat batas i dan j yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
W_{f_1} &= w_{f_1} + \bigcup_{i=1,2} (f_1(x_{i,j}x_{i+1,j})) + f_1(x_{3,j}x_{4,j}) + f_1(x_{1,j}x_{3,j}) + f_1(x_{1,j}x_{2,j+1}) + \\
&\quad f_1(x_{2,j}x_{3,j+1}) + f_1(x_{1,j}x_{3,j+1}) + f_1(x_{4,j}x_{3,j+1}) f_2(x_{2,j}x_{3,j}) \\
&= \bigcup_{i=1,4} (4j + \frac{i+2}{3} - 2) + \bigcup_{i=2,3} (8j + 2i - 6) + \bigcup_{i=1,2} (4n - i + 8j - 3) + (44n \\
&\quad +24j + 16)
\end{aligned}$$

Dengan demikian barisan aritmatika dari $W_{f_1} = \{52n+68, 52n+132, \ldots, 116n+4\}$. Karena $U_n = a + (n-1)b = 52n + 68 + (n-1)64 = 116n + 4$ maka terbuktilah bahwa ada pelabelan selimut $(52n+68, 64)$-C_6^3-anti ajaib super pada *Shack* (C_6^3, e, n) untuk $n \geq 2$. $\square$

Teorema 2 *Ada pelabelan selimut* $(60n{+}60, 48){-}C_6^3$*-anti ajaib super pada* $Shack(C_6^3, e, n)$ *untuk* $n \geq 2$.

Bukti. Labeli titik $Shack$ (C_6^3, e, n) yang terdapat pada teorema 1 ke dalam teorema 2 dengan fungsi bijektif f_2 maka $f_2(x_{i,j}) = f_1(x_{i,j})$ sehingga $w_{f_2} = w_{f_1} = \bigcup_{i=1,4}(4j + \frac{i+2}{3} - 2) + \bigcup_{i=2,3}(8j + 2i - 6)$, untuk $1 \leq j \leq n$. Labeli sisi $Shack$ (C_6^3, e, n) yang terdapat pada teorema 1 ke dalam teorema 2 dengan fungsi bijektif f_2 dimana $f_2 = f_1$, maka label sisinya: $f_2(x_{i,j}x_{i+1,j}) = f_1(x_{i,j}x_{i+1,j}), f_2(x_{3,j}x_{4,j}) = f_1(x_{3,j}x_{4,j}), f_2(x_{1,j}x_{3,j}) = f_1(x_{1,j}x_{3,j}), f_2(x_{1,j}x_{2,j+1}) = f_1(x_{1,j}x_{2,j+1}), f_2(x_{2,j}x_{3,j+1}) = f_1(x_{2,j}x_{3,j+1})$, dan

$$\begin{aligned} f_2(x_{4,j}x_{3,j+1}) &= 4n + 8j + 1, \text{ untuk } 1 \leq j \leq n, \\ f_2(x_{1,j}x_{3,j+1}) &= 12n - 8j + 10, \text{ untuk } 1 \leq j \leq n. \end{aligned}$$

f_2 adalah fungsi bijektif yang memetakan $f_2 : V(Shack(C_6^3, e, n)) \cup E(Shack(C_6^3, e, n)) \rightarrow \{1, 2, 3, \ldots, 12n + 3\}$. Jika W_{f_2} didefinisikan sebagai bobot total selimut pada $Shack$ (C_6^3, e, n) berdasarkan penjumlahan bobot titik selimut dengan label sisinya maka W_{f_2} dapat diperoleh dengan merumuskan jumlah bobot titik selimut w_{f_2} dan rumus label sisi f_2 dengan syarat batas i dan j yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} W_{f_2} &= w_{f_2} + \bigcup_{i=1,2}(f_2(x_{i,j}x_{i+1,j})) + f_2(x_{3,j}x_{4,j}) + f_2(x_{1,j}x_{3,j}) + f_2(x_{1,j}x_{2,j+1}) + \\ &\quad f_2(x_{2,j}x_{3,j+1}) + f_2(x_{4,j}x_{3,j+1}) + f_2(x_{1,j}x_{3,j+1}) + f_2(x_{2,j}x_{3,j}) \\ &= \bigcup_{i=1,4}(4j + \frac{i+2}{3} - 2) + \bigcup_{i=2,3}(8j + 2i - 6) + \bigcup_{i=1,2}(4n - i + 8j - 3) + (52n \\ &\quad +8j + 24). \end{aligned}$$

Dengan demikian barisan aritmatika dari $W_{f_2} = \{60n{+}60, 60n{+}108, \ldots, 108n{+}12\}$. Karena $U_n = a + (n-1)b = 60n + 60 + (n-1)48 = 108n + 12$ maka terbuktilah bahwa ada pelabelan selimut $(60n + 60, 48)$-C_6^3-anti ajaib super pada shackle dari graf C_6^3 yang dinotasikan dengan $Shack$ (C_6^3, e, n) untuk $n \geq 2$. □

Teorema 3 *Ada pelabelan selimut* $(58n{+}76, 31){-}C_6^3$*-anti ajaib super pada* $Shack(C_6^3, e, n)$ *untuk* $n \geq 2$.

Bukti. Labeli titik $Shack$ (C_6^3, e, n) yang terdapat pada teorema 1 ke dalam teorema 3 dengan fungsi bijektif f_3 maka $f_3(x_{i,j}) = f_1(x_{i,j})$ sehingga $w_{f_3} = w_{f_1} = \bigcup_{i=1,4}(4j + \frac{i+2}{3} - 2) + \bigcup_{i=2,3}(8j + 2i - 6)$, untuk $1 \leq j \leq n$. Labeli sisi $Shack$ (C_6^3, e, n) dengan fungsi bijektif f_3 sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f_3(x_{i,j}x_{i+1,j}) &= 4n - 4i + j + 10, \text{ untuk } i = 1, 2, 1 \leq j \leq n \\ f_3(x_{3,j}x_{4,j}) &= 6n - j + 7, \text{ untuk } 1 \leq j \leq n \\ f_3(x_{1,j}x_{3,j}) &= 6n + j + 6, \text{ untuk } 1 \leq j \leq n \\ f_3(x_{2,j}x_{3,j+1}) &= 7n + j + 6, \text{ untuk } 1 \leq j \leq n \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f_3(x_{1,j}x_{2,j+1}) &= 8n+j+6, \text{ untuk } 1 \le j \le n\\
f_3(x_{1,j}x_{3,j+1}) &= 9n+j+6, \text{ untuk } 1 \le j \le n\\
f_3(x_{4,j}x_{3,j+1}) &= 10n+j+6, \text{ untuk } 1 \le j \le n
\end{aligned}
$$

f_3 adalah fungsi bijektif yang memetakan $f_3 : V(Shack(C_6^3, e, n)) \cup E(Shack(C_6^3, e, n)) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, 12n + 3\}$. Jika W_{f_3} didefinisikan sebagai bobot total selimut pada $Shack$ (C_6^3, e, n) berdasarkan penjumlahan bobot titik selimut dengan label sisinya maka W_{f_3} dapat diperoleh dengan merumuskan jumlah bobot titik selimut w_{f_3} dan rumus label sisi f_3 dengan syarat batas i dan j yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
W_{f_3} &= w_{f_3} + \bigcup_{i=1,2} (f_3(x_{i,j}x_{i+1,j})) + f_3(x_{3,j}x_{4,j}) + f_3(x_{1,j}x_{3,j}) + f_3(x_{2,j}x_{3,j+1}) +\\
&\quad f_3(x_{1,j}x_{2,j+1}) + f_3(x_{1,j}x_{3,j+1}) + f_3(x_{4,j}x_{3,j+1}) + f_3(x_{2,j}x_{3,j})\\
&= \bigcup_{i=1,4} (4j + \frac{i+2}{3} - 2) + \bigcup_{i=2,3} (8j + 2i - 6) + \bigcup_{i=1,2} (4n - 4i + j + 10) + (50n\\
&\quad +5j + 40).
\end{aligned}
$$

Dengan demikian barisan aritmatika dari $W_{f_3} = \{58n + 76, 58n + 107, \dots, 89n + 45\}$. Karena $U_n = a + (n-1)b = 58n + 76 + (n-1)31 = 89n + 45$ maka terbuktilah bahwa ada pelabelan selimut $(58n + 76, 31)$-C_6^3-anti ajaib super pada shackle dari graf C_6^3 yang dinotasikan dengan $Shack$ (C_6^3, e, n) untuk $n \ge 2$. □

Teorema 4 *Ada pelabelan selimut* $(64n+68, 21)-C_6^3$*-anti ajaib super pada* $Shack(C_6^3, e, n)$ *untuk* $n \ge 2$.

Bukti. Labeli titik $Shack$ (C_6^3, e, n) yang terdapat pada teorema 1 ke dalam teorema 4 dengan fungsi bijektif f_4 maka $f_4(x_{i,j}) = f_1(x_{i,j})$ sehingga $w_{f_4} = w_{f_1} = \bigcup_{i=1,4}(4j + \frac{i+2}{3} - 2) + \bigcup_{i=2,3}(8j + 2i - 6)$, untuk $1 \le j \le n$. Labeli sisi $Shack$ (C_6^3, e, n) dengan fungsi bijektif f_4 sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
f_4(x_{2,j}x_{3,j}) &= 4n+j+2, \text{ untuk } 1 \le j \le n\\
f_4(x_{i,j}x_{i+1,j}) &= 6n-j+\frac{3i+3}{2}+1, \text{ untuk } i = 1,3, 1 \le j \le n\\
f_4(x_{1,j}x_{3,j}) &= 7n-j+7, \text{ untuk } 1 \le j \le n\\
f_4(x_{2,j}x_{3,j+1}) &= 8n-j+7, \text{ untuk } 1 \le j \le n\\
f_4(x_{1,j}x_{2,j+1}) &= 9n-j+7, \text{ untuk } 1 \le j \le n\\
f_4(x_{1,j}x_{3,j+1}) &= 10n-j+7, \text{ untuk } 1 \le j \le n\\
f_4(x_{4,j}x_{3,j+1}) &= 10n+j+6, \text{ untuk } 1 \le j \le n
\end{aligned}
$$

f_4 adalah fungsi bijektif yang memetakan $f_4 : V(Shack(C_6^3, e, n)) \cup E(Shack(C_6^3, e, n)) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, 12n + 3\}$. Jika W_{f_4} didefinisikan sebagai bobot total selimut pada $Shack$ (C_6^3, e, n) berdasarkan penjumlahan bobot titik selimut dengan label sisinya maka W_{f_4} dapat diperoleh dengan merumuskan jumlah bobot titik selimut w_{f_4} dan rumus label sisi f_4 dengan syarat batas i dan j yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} W_{f_4} &= w_{f_4} + \bigcup_{i=1,3} (f_4(x_{i,j}x_{i+1,j})) + f_4(x_{2,j}x_{3,j}) + f_4(x_{1,j}x_{3,j}) + f_4(x_{2,j}x_{3,j+1}) + \\ & \quad f_4(x_{1,j}x_{2,j+1}) + f_4(x_{1,j}x_{3,j+1}) + f_4(x_{4,j}x_{3,j+1}) + f_4(x_{2,j}x_{3,j}) \\ &= \bigcup_{i=1,4} (4j + \frac{i+2}{3} - 2) + \bigcup_{i=2,3} (8j + 2i - 6) + \bigcup_{i=1,3} (6n - j + \frac{3i+3}{2} + 1) + \\ & \quad (44n - j + 39). \end{aligned}$$

Dengan demikian barisan aritmatika dari $W_{f_4} = \{64n + 68, 64n + 89, \ldots, 85n + 47\}$. Karena $U_n = a + (n-1)b = 64n + 68 + (n-1)21 = 85n + 47$ maka terbuktilah bahwa ada pelabelan selimut $(64n + 68, 21)$-C_6^3-anti ajaib super pada shackle dari graf C_6^3 yang dinotasikan dengan $Shack$ (C_6^3, e, n) untuk $n \geq 2$. □

Teorema 5 *Ada pelabelan selimut* $(61n+79, 19)-C_6^3$*-anti ajaib super pada* $Shack(C_6^3, e, n)$ *untuk* $n \geq 2$.

Bukti. Labeli titik $Shack$ (C_6^3, e, n) yang terdapat pada teorema 1 ke dalam teorema 5 dengan fungsi bijektif f_5 maka $f_5(x_{i,j}) = f_1(x_{i,j})$ sehingga $w_{f_5} = w_{f_1} = \bigcup_{i=1,4}(4j + \frac{i+2}{3} - 2) + \bigcup_{i=2,3}(8j + 2i - 6)$, untuk $1 \leq j \leq n$. Labeli sisi $Shack$ (C_6^3, e, n) yang terdapat pada teorema 4 ke dalam teorema 5 dengan fungsi bijektif f_5 dimana $f_5 = f_4$, maka label sisinya: $f_5(x_{4,j}x_{3,j+1}) = f_4(x_{4,j}x_{3,j+1})$, dan

$$\begin{aligned} f_5(x_{2,j}x_{3,j}) &= 4n + j + 2, \text{ untuk } 1 \leq j \leq n \\ f_5(x_{i,j}x_{i+1,j}) &= 6n + 3i - j + 1, \text{ untuk } i = 1, 3, 1 \leq j \leq n \\ f_5(x_{1,j}x_{3,j}) &= 7n - j + 4, \text{ untuk } 1 \leq j \leq n \\ f_5(x_{2,j}x_{3,j+1}) &= 7n - j + 10, \text{ untuk } 1 \leq j \leq n \\ f_5(x_{1,j}x_{2,j+1}) &= 8n - j + 10, \text{ untuk } 1 \leq j \leq n \\ f_5(x_{1,j}x_{3,j+1}) &= 9n - j + 10, \text{ untuk } 1 \leq j \leq n \end{aligned}$$

f_5 adalah fungsi bijektif yang memetakan $f_5 : V(Shack(C_6^3, e, n)) \cup E(Shack(C_6^3, e, n)) \to \{1, 2, 3, \ldots, 12n + 3\}$. Jika W_{f_5} didefinisikan sebagai bobot total selimut pada $Shack$ (C_6^3, e, n) berdasarkan penjumlahan bobot titik selimut dengan label sisinya maka W_{f_5} dapat diperoleh dengan merumuskan jumlah bobot titik selimut w_{f_5} dan rumus label sisi f_5 dengan syarat batas i dan j yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} W_{f_5} &= w_{f_5} + \bigcup_{i=1,3} (f_5(x_{i,j}x_{i+1,j})) + f_5(x_{2,j}x_{3,j}) + f_5(x_{1,j}x_{3,j}) + f_5(x_{2,j}x_{3,j+1}) + \\ & \quad f_5(x_{1,j}x_{2,j+1}) + f_5(x_{1,j}x_{3,j+1}) + f_5(x_{4,j}x_{3,j+1}) + f_5(x_{2,j}x_{3,j}) \\ &= \bigcup_{i=1,4} (4j + \frac{i+2}{3} - 2) + \bigcup_{i=2,3} (8j + 2i - 6) + \bigcup_{i=1,3} (6n + 3i - j + 1) + (49n \\ & \quad -3j + 49) \end{aligned}$$

Dengan demikian barisan aritmatika dari $W_{f_5} = \{61n+79, 61n+98, \ldots, 80n+60\}$. Karena $U_n = a+(n-1)b = 61n+79+(n-1)19 = 80n+60$ maka terbuktilah bahwa ada pelabelan selimut $(61n+79, 19)$-C_6^3-anti ajaib super pada shackle dari graf C_6^3 yang dinotasikan dengan *Shack* (C_6^3, e, n) untuk $n \geq 2$. $\square$

Teorema 6 *Ada pelabelan selimut* $(76n+44, 16)-C_6^3$*-anti ajaib super pada* $Shack(C_6^3, e, n)$ *untuk* $n \geq 2$.

Bukti. Labeli titik *Shack* (C_6^3, e, n) yang terdapat pada teorema 1 ke dalam teorema 6 dengan fungsi bijektif f_6 maka $f_6(x_{i,j}) = f_1(x_{i,j})$ sehingga $w_{f_6} = w_{f_1} = \bigcup_{i=1,4}(4j + \frac{i+2}{3} - 2) + \bigcup_{i=2,3}(8j + 2i - 6)$, untuk $1 \leq j \leq n$. Labeli sisi *Shack* (C_6^3, e, n) yang terdapat pada teorema 1 dan teorema 2 ke dalam teorema 6 dengan fungsi bijektif f_6 dimana $f_6 = f_1$ dan $f_6 = f_2$, maka label sisinya: $f_6(x_{3,j}x_{4,j}) = f_1(x_{3,j}x_{4,j}), f_6(x_{1,j}x_{2,j+1}) = f_1(x_{1,j}x_{2,j+1}), f_6(x_{2,j}x_{3,j+1}) = f_1(x_{2,j}x_{3,j+1}), f_6(x_{1,j}x_{3,j+1}) = f_2(x_{1,j}x_{3,j+1})$, dan

$$
\begin{aligned}
f_6(x_{i,j}x_{i+1,j}) &= 4n - 3i + 8j + 1, \text{ untuk } i = 1, 2, 1 \leq j \leq n \\
f_6(x_{i,j}x_{3,j}) &= 12n - 8j + 4, \text{ untuk } 1 \leq j \leq n \\
f_6(x_{4,j}x_{3,j+1}) &= 12n - 8j + 9, \text{ untuk } 1 \leq j \leq n
\end{aligned}
$$

f_6 adalah fungsi bijektif yang memetakan $f_6 : V(Shack(C_6^3, e, n)) \cup E(Shack(C_6^3, e, n)) \rightarrow \{1, 2, 3, \ldots, 12n+3\}$. Jika W_{f_6} didefinisikan sebagai bobot total selimut pada *Shack* (C_6^3, e, n) berdasarkan penjumlahan bobot titik selimut dengan label sisinya maka W_{f_6} dapat diperoleh dengan merumuskan jumlah bobot titik selimut w_{f_6} dan rumus label sisi f_6 dengan syarat batas i dan j yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
W_{f_6} &= w_{f_6} + \bigcup_{i=1,2}(f_6(x_{i,j}x_{i+1,j})) + f_6(x_{1,j}x_{3,j}) + f_6(x_{3,j}x_{4,j}) + f_6(x_{1,j}x_{2,j+1}) + \\
&\quad f_6(x_{2,j}x_{3,j+1}) + f_6(x_{4,j}x_{3,j+1}) + f_6(x_{1,j}x_{3,j+1}) + f_6(x_{2,j}x_{3,j}) \\
&= \bigcup_{i=1,4}(4j + \frac{i+2}{3} - 2) + \bigcup_{i=2,3}(8j + 2i - 6) + \bigcup_{i=1,2}(4n - 3i + 8j + 1) + (68n \\
&\quad -24j + 38)
\end{aligned}
$$

Dengan demikian barisan aritmatika dari $W_{f_6} = \{76n+44, 76n+60, \ldots, 92n+28\}$. Karena $U_n = a+(n-1)b = 76n+44+(n-1)16 = 92n+28$ maka terbuktilah bahwa ada pelabelan selimut $(76n+44, 16)$-C_6^3-anti ajaib super pada shackle dari graf C_6^3 yang dinotasikan dengan *Shack* (C_6^3, e, n) untuk $n \geq 2$. $\square$

Kesimpulan

Pada penelitian ini ditunjukkan bahwa graf *Shack* (C_6^3, e, n) dengan $n \geq 2$ memiliki pelabelan selimut (a, d)-H-anti ajaib super untuk $d = \{0, 1, 2, \ldots 96\}$. Hasil penelitian ini dibuktikan bahwa graf *Shack* (C_6^3, e, n) terdapat fungsi bijektif pelabelan selimut $(52n+68, 64), (60n+60, 48), (58n+76, 31), (64n+68, 21), (61n+79, 19), (76n+44, 16)$-$C_6^3$-anti ajaib super untuk $n \geq 2$.

Pada penelitian ini ditemukan $d \in \{64, 48, 31, 21, 19, 16\}$ sehingga masih tersisa d yang lain yang belum diketemukan. Oleh karena itu, peneliti mengajukan masalah terbuka berikut:

Masalah Terbuka 1 *Tentukan apakah graf Shack (C_6^3, e, n) memiliki pelabelan selimut $(a, d) - H$-anti ajaib super selain $d \in \{64, 48, 31, 21, 19, 16\}$ untuk $n \geq 2$.*

References

[1] A. Gutiérrez, and A. Lladó, Magic Coverings, *J. Combin. Math. Combin. Comput* **55** (2005), 43-46.

[2] AK Purnapraja, R Hidayat, Cycle-Super Antimagicness of Connected and Disconnected Tensor Product of Graphs, *Procedia Computer Science*, **74**, (2015), 9399

[3] Dafik. 2014. *Batas Atas d dari Sebuah Graf yang Memiliki Super $(a, d) - \mathcal{H}$-Antimagic Covering*. Working Paper, FKIP UNEJ.

[4] Hartsfield, N. and Ringel, G. 1990. *Pearls in Graph Theory*. Boston-San Diego-NewYork-London: Academic Press.

[5] N. Inayah, A.N.M. Salman and R. Simanjuntak, On $(a, d) - H$-antimagic coverings of graphs, *J. Combin. Math. Combin. Comput.* **71** (2009), 273281.

[6] N. Inayah, R. Simanjuntak, A. N. M. Salman, Super $(a, d) - H$-antimagic total labelings for shackles of a connected graph H, *The Australasian Journal of Combinatorics*, **57** (2013), 127138.

[7] Karyanti. 2012. *Pelabelan Selimut (a,d)-H-Anti Ajaib Super pada Graf Fan, Sun, dan Generalized Petersen*. Tidak dipublikasikan (Skripsi). Surakarta: Universitas Sebelas Maret.

[8] Sedláček. 1963. *Problem 27 in Theory of Graphs and Its Applications. Proceeding of the Symposium held in Smolenice Praha* 163, 163-167.

[9] Sherly Citra Wuni, Ika Hesti Agustin, Dafik, Super (a,d)-H-Antimagic Total Covering pada Graf Semi Windmill, *Prosiding Seminar Nasional Matematika 2014* **Vol 1, No 1** (2014), 161–168

[10] Slamin. 2009. *Desain Jaringan: Pendekatan Teori Graf*. Jember: Jember University Press.