# NILAI KROMATIK DAN PEWARNAAN TITIK r-DINAMIS PADA GRAF KHUSUS DAN OPERASI SHAKEL

SKRIPSI

Oleh

Muhammad Dicky Tarmidzi
111810101054

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER
2015

# NILAI KROMATIK DAN PEWARNAAN TITIK r-DINAMIS PADA GRAF KHUSUS DAN OPERASI SHAKEL

SKRIPSI

diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan Program Studi Matematika(S1) dan mencapai gelar Sarjana Sains

Oleh

Muhammad Dicky Tarmidzi
111810101054

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER
2015

## PERSEMBAHAN

Dengan menyebut nama Allah yang Maha Pengasih lagi Maha Penyayang, serta Sholawat atas Nabi Muhammad S.A.W, kupersembahkan suatu kebahagiaan penggalan bait dalam perjalanan hidupku teriring rasa terima kasih kepada:

1. Orang tuaku tercinta dan terkasih : Ayahanda H. Anang Mashudi,. S.Pd dan Ibunda Hj. Musliha serta adikku Khanza Aleyda Tarmidzi, yang senantiasa mengalirkan rasa cinta, kasih sayang dan doa yang tiada pernah putus yang selalu mengiringiku dalam meraih cita-cita;
2. Ibu Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si selaku Dosen Pembimbing Utama dan Prof. Drs. Dafik, M.Sc.,Ph.D. selaku Dosen Pembimbing Anggota yang telah meluangkan waktu, pikiran, dan perhatian dalam penulisan skripsi ini;
3. semua guru dan dosenku yang telah memberikan ilmu dan membimbing dengan penuh kesabaran;
4. sahabat-sahabat terbaikku dalam keluarga besar matematika angkatan 2011 (KRAMAT'11) yang selalu memberi dukungan dan semangat;
5. teman-teman pejuang graf yang selalu berbagi suka maupun duka;
6. almamater tercinta Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;

## MOTTO

"Allah meninggikan orang-orang yang beriman diantara kamu dan orang-orang yang diberi ilmu pengetahuan beberapa derajat."
(QS. Al-Mujadilah: 11) *)

"Tidak ada kata akhir dari petualangan yang bisa dilakukan jika kita mencarinya dengan mata terbuka."
(Jawaharlal Nehru) **)

---

*) Departemen Agama Republik Indonesia. 2004. Al-*Qur′an* dan Terjemahannya. Bandung. CV Penerbit J-ART.

**) www.katakatabijak.com

## HALAMAN PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Muhammad Dicky Tarmidzi

NIM : 111810101054

menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang berjudul: Nilai Kromatik dan Pewarnaan Titik r-Dinamis pada Graf Khusus dan Operasi Shakel adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali jika dalam pengutipan substansi disebutkan sumbernya, dan belum diajukan pada instansi manapun, serta bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa adanya tekanan dan paksaan dari pihak manapun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, Desember 2015

Yang menyatakan,

Muhammad Dicky Tarmidzi

NIM. 111810101054

**SKRIPSI**

# NILAI KROMATIK DAN PEWARNAAN TITIK r-DINAMIS PADA GRAF KHUSUS DAN OPERASI SHAKEL

Oleh

**Muhammad Dicky Tarmidzi**
**NIM 111810101054**

Dosen Pembimbing 1 : Ika Hesti Agustin, S.Si, M.Si
Dosen Pembimbing 2 : Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D.

## PENGESAHAN

Skripsi berjudul "Nilai Kromatik dan Pewarnaan Titik r-Dinamis pada Graf Khusus dan Operasi Shakel" telah diuji dan disahkan oleh Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam pada :

hari :

tanggal :

tempat : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Tim Penguji :

| | |
|---|---|
| Ketua, | Sekretaris, |
| Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si. | Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D. |
| NIP. 19840801 200801 2 006 | NIP. 19680802 199303 1 004 |
| Anggota I, | Anggota II, |
| Kosala Dwidja Purnomo, S.Si., M.Si. | Ahmad Kamsyakawuni, S.Si., M.Kom. |
| NIP. 19690828 199802 1 001 | NIP. 19721129 199802 1 001 |

Mengesahkan
Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Jember,

Prof. Drs. Kusno, DEA., Ph.D.
NIP. 19610108 198602 1 001

## RINGKASAN

**NILAI KROMATIK DAN PEWARNAAN TITIK r-DINAMIS PADA GRAF KHUSUS DAN OPERASI SHAKEL**; Muhammad Dicky Tarmidzi, 111810101054; 2015: 51 halaman; Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Jember.

Teori graf merupakan bagian dari matematika diskrit yang penerapannya masih banyak digunakan dalam kehidupan sehari-hari. Pada tahun 1736 seorang matematikawan dari Swiss bernama Leonard Euler berhasil memecahkan masalah jembatan yang berada di kota Konigsberg. Permasalahan yang muncul pada jembatan Konigsberg adalah kemungkinan bisa atau tidaknya melewati ketujuh jembatan di Konigsberg yang masing-masing tepat satu kali dan kembali lagi ke tempat semula. Euler memecahkan masalah jembatan Konigsberg dengan cara mengilustrasikannya menjadi graf yaitu menggambarkan empat daratan sebagai titik, tujuh jembatan sebagai sisi yang menghubungkan setiap daratan. Dari permasalahan tersebut teori graf berkembang dengan luas.

Salah satu perkembangan topik dari teori graf yang menarik untuk dikaji adalah pewarnaan. Terdapat tiga jenis pewarnaan antara lain pewarnaan titik (*vertex colouring*), pewarnaan sisi (*edge colouring*), dan pewarnaan wilayah (*region colouring*). Penggunaan warna yang berbeda untuk mewarnai semua titik pada graf dimana setiap dua titik yang terhubung diberi warna yang berbeda disebut pewarnaan titik. Dalam pewarnaan titik, tidak hanya memberi warna tetapi juga menghasilkan banyaknya warna minimum yang didapatkan biasanya disebut bilangan kromatik yang dinotasikan dengan $\chi(G)$. Adapun perkembangan dari pewarnaan titik yaitu *r-Dynamic Vertex Coloring* ($\chi_r(G)$) atau yang biasa disebut pewarnaan titik $r$-dinamis.

Penelitian ini bertujuan untuk mencari bilangan kromatik r-dinamis dan fungsi pewarnaan titik r-dinamis pada graf khusus yang telah ditentukan. Adapun graf yang digunakan pada penelitian ini adalah graf kipas ($F_n$), graf triangular book ($BT_n$), graf tangga tiga siklus ($TCL_n$), graf tangga ($L_n$), shakel graf okta-

hedral ($Shack(j_{4,2}, v = 1, n)$, shakel graf triangular book ($shack(BT_n, v = 1, m)$) dan graf banana tree ($B_{m,4}$). Pada penelitian ini menghasilkan 7 teorema, antara lain:

1. **Teorema 4.1.1** *Misalkan $G$ merupakan graf kipas $F_n$. Jika $n \geq 3$, maka bilangan kromatik $r$-dinamis graf kipas adalah*

$$\chi(G) = \chi_d(G) = 3$$
$$\chi_r(G) = r + 1, r \geq n$$

2. **Teorema 4.1.2** *Misalkan $G$ merupakan graf triangular book $BT_n$. Jika $n \geq 2$, maka bilangan kromatik $r$-dinamis graf triangular book adalah*

$$\chi(G) = \chi_d(G) = 3$$
$$\chi_r(G) = r + 1, n \geq r - 1, r \geq 3$$

3. **Teorema 4.1.3** *Misalkan $G$ merupakan graf tangga tiga siklus ($TCL_n$). Jika $n \geq 1$, maka bilangan kromatik $r$-dinamis graf tangga tiga siklus adalah*

$$\chi(G) = \chi_d(G) = 3$$
$$\chi_3(G) = 4$$
$$\chi_4(G) = 5$$
$$\chi_r(G) = 6, n \geq 2, r \geq 5$$

4. **Teorema 4.1.4** *Misalkan $G$ merupakan graf tangga ($L_n$). Jika $n \geq 2$, maka bilangan kromatik $r$-dinamis graf tangga adalah*

$$\chi(G) = 2$$
$$\chi_r(G) = 4, r \geq 2$$

5. **Teorema 4.1.5** *Misalkan* $G$ *merupakan shakel graf oktahedral* $(Shack(j_{4,2}, v = 1, n)$. *Jika* $n \geq 2$, *maka bilangan kromatik* $r$*-dinamis shakel graf oktahedral adalah*

$$\chi(G) = \chi_d(G) = 3$$
$$\chi_3(G) = 5$$

$$\chi_4(G) = \chi_5(G) = 6$$

$$\chi_r(G) = \begin{cases} r+1, & 6 \leq r \leq 7, \\ 9, & r \geq 8. \end{cases}$$

6. **Teorema 4.1.6** *Misalkan* $G$ *merupakan shakel graf Triangular Book (shack* $(BT_n, v = 1, m))$. *Jika* $n \geq 2$ *dan* $m \geq 2$ , *maka bilangan kromatik* $r$*-dinamis shakel graf Triangular Book adalah*

$$\chi(G) = \chi_d(G) = 3$$

$$\chi_r(G) = \begin{cases} r+1, & 3 \leq r \leq 6, \\ r+1, & r \geq 7, n \geq \lceil \frac{r}{2} \rceil - 1. \end{cases}$$

7. **Teorema 4.1.7** *Misalkan* $G$ *merupakan Banana Tree* $(B_{m,4})$. *Jika* $m \geq 2$ *dan* $n = 4$ , *maka bilangan kromatik* $r$*-dinamis graf Banana Tree adalah*

$$\chi_r(G) = r + 1$$

## KATA PENGANTAR

Puji syukur kehadirat Allah SWT atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul Nilai Kromatik dan Pewarnaan Titik r-Dinamis pada Graf Khusus dan Operasi Shakel. Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan pendidikan strata satu (S1) pada Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih atas bantuan dan bimbingan dalam penyusunan skripsi ini, terutama kepada yang terhormat:

1. Prof. Drs. Kusno, DEA., Ph.D., selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
2. Kosala Dwidja Purnomo S.Si., M.Si., selaku Ketua Jurusan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
3. Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si., selaku Dosen Pembimbing Utama, Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D., selaku Dosen Pembimbing Anggota, Kosala Dwidja Purnomo, S.Si., M.Si., selaku dosen Penguji I dan Ahmad Kamsyakawuni, S.Si., M.Kom., selaku dosen penguji II yang telah meluangkan waktu, pikiran, dan perhatian dalam penulisan skripsi ini;
4. dosen dan karyawan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
5. semua pihak yang telah membantu terselesaikannya skripsi ini.

Semoga bantuan, bimbingan, dan dorongan beliau dicatat sebagai amal baik oleh Allah SWT dan mendapat balasan yang sesuai dari-Nya. Selain itu, penulis juga menerima segala kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan skripsi ini. Akhirnya penulis berharap, semoga skripsi ini dapat bermanfaat.

Jember, Desember 2015

Penulis

# DAFTAR ISI

## DAFTAR GAMBAR

## DAFTAR TABEL

# BAB 1. PENDAHULUAN

## 1.1 Latar Belakang Masalah

Teori graf merupakan bagian dari matematika diskrit yang penerapannya masih banyak digunakan dalam kehidupan sehari-hari. Pada tahun 1736 seorang matematikawan dari Swiss bernama Leonard Euler berhasil memecahkan masalah jembatan yang berada di kota Konigsberg. Permasalahan yang muncul pada jembatan Konigsberg adalah kemungkinan bisa atau tidaknya melewati ketujuh jembatan di Konigsberg yang masing-masing tepat satu kali dan kembali lagi ke tempat semula. Euler memecahkan masalah jembatan Konigsberg dengan cara mengilustrasikannya menjadi graf yaitu menggambarkan empat daratan sebagai titik, tujuh jembatan sebagai sisi yang menghubungkan setiap daratan. Dari permasalahan tersebut teori graf berkembang dengan luas.

Salah satu perkembangan topik dari teori graf yang menarik untuk dikaji adalah pewarnaan. Terdapat tiga jenis pewarnaan antara lain pewarnaan titik (*vertex colouring*), pewarnaan sisi (*edge colouring*), dan pewarnaan wilayah (*region colouring*). Penggunaan warna yang berbeda untuk mewarnai semua titik pada graf dimana setiap dua titik yang terhubung diberi warna yang berbeda disebut pewarnaan titik. Dalam pewarnaan titik, tidak hanya memberi warna tetapi juga menghasilkan banyaknya warna minimum yang didapatkan biasanya disebut bilangan kromatik yang dinotasikan dengan $\chi(G)$. Adapun perkembangan dari pewarnaan titik yaitu *r-Dynamic Vertex Coloring* ($\chi_r(G)$) atau yang biasa disebut pewarnaan titik $r$-dinamis.

Tahun 2013, Lu mengkaji penelitian pewarnaan titik pada graf bipartit dan pada tahun yang sama Ardiyansyah melakukan penelitian terhadap bilangan kromatik hasil amalgamasi dua buah graf. Kaiser (2014) mengkaji pewarnaan titik pada graf pesawat (*Plane Graph*). Harsya *et al* (2014) meneliti mengembangkan pewarnaan titik pada operasi graf sikel dengan graf lintasan. Irwanto (2014) juga menentukan bilangan kromatik pada graf roda untuk $n \geq 5$, graf helm $F_n$ dengan

$n \geq 4$, graf anti prisma $H_m$ untuk $m \geq 4$, graf prisma untuk $H_n$ $n \geq 4$, dan graf kipas $F_n$ untuk $n \geq 4$. Penelitian terbaru dilakukan oleh Wulandari *et al* (2015) yang menganalisis *r-Dynamic Vertex Coloring* pada hasil operasi graf khusus.

Berdasarkan penelitian yang dilakukan oleh peneliti sebelumnya, maka penulis akan meneliti lebih lanjut mengenai pewarnaan titik $r$-dinamis pada graf khusus. Adapun proses penelitian yang dilakukan adalah untuk mencari bilangan kromatik titik dinamis pada graf khusus sehingga diperoleh pewarnaan titik $r$-dinamis.

## 1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah dalam penulisan tugas akhir ini menurut latar belakang diatas antara lain:

a. bagaimana menentukan kardinalitas titik dan sisi pada shakel graf oktahedral dan shakel graf triangular book?

b. bagaimana menentukan bilangan kromatik $r$-dinamis pada graf kipas, graf triangular book, graf tangga, graf tangga tiga siklus, shakel graf oktahedral, shakel graf triangular book dan graf banana tree?

c. bagaimana menentukan fungsi pewarnaan titik $r$-dinamis pada graf kipas, graf triangular book, graf tangga, graf tangga tiga siklus, shakel graf oktahedral, shakel graf triangular book dan graf banana tree?

## 1.3 Batasan Masalah

Graf yang digunakan dalam penulisan tugas akhir ini adalah graf sederhana, tidak berarah dan konektif. Adapun graf lainnya tidak digunakan dalam penelitian ini.

## 1.4 Tujuan Penelitian

Sesuai dengan rumusan masalah dan latar belakang diatas, maka tujuan pada penelitian ini antara lain:

a. menentukan kardinalitas titik dan sisi pada shakel graf oktahedral dan shakel graf triangular book;

b. menentukan bilangan kromatik $r$-dinamis pada graf kipas, graf triangular book, graf tangga, graf tangga tiga siklus, shakel graf oktahedral, shakel graf triangular book dan graf banana tree;

c. menentukan fungsi pewarnaan titik $r$-dinamis pada graf kipas, graf triangular book, graf tangga, graf tangga tiga siklus, shakel graf oktahedral, shakel graf triangular book dan graf banana tree.

## 1.5 Manfaat

Manfaat yang diharapkan dari penulisan tugas akhir ini antara lain:

a. meningkatkan pemahaman teori graf mengenai graf kipas, graf triangular book, graf tangga, graf tangga tiga siklus, shakel graf oktahedral, shakel graf triangular book dan graf banana tree;

b. meningkatkan pengetahuan baru dalam ruang lingkup pewarnaan titik pada graf kipas, graf triangular book, graf tangga, graf tangga tiga siklus, shakel graf oktahedral, shakel graf triangular book dan graf banana tree;

c. memberi motivasi pada peneliti lain untuk memperluas penelitian tentang pewarnaan titik $r$-dinamis pada graf kipas, graf triangular book, graf tangga, graf tangga tiga siklus, shakel graf oktahedral, shakel graf triangular book dan graf banana tree;

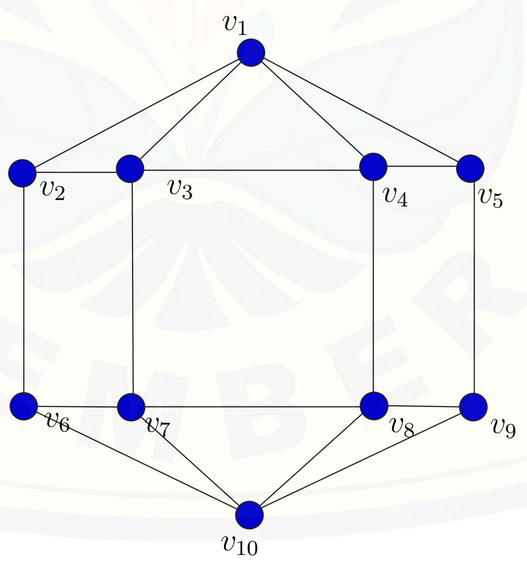
d. hasil dari penelitian ini diharapkan dapat digunakan sebagai pengembangan ilmu dan aplikasi dalam masalah pewarnaan titik.

# BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

## 2.1 Konsep Dasar dan Terminologi Graf

Graf G adalah pasangan *(V;E)* dimana $V$ adalah himpunan tak kosong yang anggotanya disebut himpunan titik (*vertex* ) dan $E$ adalah himpunan yang anggotanya tak berurut dari verteks V yang disebut himpunan sisi (*edges*). Definisi graf diatas menyatakan bahwa $V$ tidak boleh kosong, sedangkan $E$ boleh kosong. Jadi sebuah graf dimungkinkan tidak mempunyai sisi, tetapi harus memiliki titik minimal satu (Slamin, 2009).

Misal graf $G$ mempunyai titik $u$ dan $v$. Jarak dari titik $u$ ke titik $v$ dinotasikan dengan *dist(u,v)* adalah panjang lintasan terpendek dari titik $u$ ke titik $v$. Diameter dari sebuah graf $G$ adalah jarak maksimum dari sebarang dua titik yang dinotasikan dengan $diamG = max\{e(v) : v \in V\}$. Girth adalah panjang dari sikel terpendek di $G$. Pada Gambar 2.1, graf $G$ mempunyai diameter 3, misal titik $v_1$ ke titik $v_{10}$ sedangkan girth dari graf $G$ pada Gambar 2.1 adalah 3.




Gambar 2.1 Contoh graf $G$ dengan $|V(G)| = 10$ dan $|E(G)| = 18$

Titik $u$ pada graf $G$ dikatakan bertetangga (*adjacent*) pada $v$, jika terdapat sisi $e$ diantara $u$ dan $v$ ditulis $e = uv$. Dengan kata lain, $u$ dan $v$ bersisian (*incident*) dengan sisi $e$. Gambar 2.1 menunjukkan titik $v_1$ bertetangga dengan titik $v_2$, $v_3$, $v_4$, $v_5$. Titik $v_1$ bersisian (*incident*) dengan sisi $v_1v_2$, $v_1v_3$, $v_1v_4$, $v_1v_5$. Jalan (*walk*) pada suatu graf dapat dituliskan $A_1e_1A_2e_2A_2....A_{n-1}\ e_{n-1}A_n$ adalah barisan titik dan sisi terhingga dan bergantian dari titik-titik dan sisi-sisi dalam suatu graf dengan ketentuan tiap sisi $e_i$ menempel pada $A_i$ dan $A_j$ dan jika $e_i$ bukan merupakan sebuah *loop* (Hartsfield dan Ringel, 1990). *Loop* adalah sebuah sisi yang menghubungkan sebuah titik dengan dirinya sendiri. Jika ada dua buah sisi atau lebih yang mempunyai dua titik yang sama disebut sisi *multiple*(*multiple edges*). Graf yang tidak mempunyai sisi *multiple* dan *loop* disebut graf sederhana. *Multigraph* merupakan graf yang mempunyai sisi *multiple* tetapi tidak mempunyai *loop*. *Pseudograph* merupakan graf yang mempunyai sisi *loop* dan *multiple*.

Derajat (*degree*) sebuah titik $v$ pada graf $G$ adalah banyaknya sisi yang bersisian (*incident*) pada $v$, atau jumlah sisi yang memuat $v$ adalah titik ujung. Jika $v$ mempunyai derajat 0 artinya tidak mempunyai tetangga dengan titik yang lain, maka titik $v$ disebut titik terisolasi (*isolated vertex*). Titik dengan derajat satu disebut titik akhir (*end vertex*) atau daun (*leaf*) sedangkan titik pada graf $G$ yang mempunyai derajat sama $d$ disebut graf regular. Derajat terkecil dari suatu graf $G$ ($\delta(G)$) adalah derajat terkecil yang dimiliki suatu titik diantara titik-titik lain sedangkan derajat terbesar dari suatu graf $G$ ($\Delta(G)$) adalah derajat terbesar yang dimiliki suatu titik diantara titik-titik yang lain. Pada Gambar 2.1 memiliki derajat terkecil $\delta(G)$=3 yaitu titik $v_2$,$v_5$,$v_6$,$v_9$ dan untuk derajat terbesar $\Delta(G)$=4 yaitu titik $v_1$,$v_3$,$v_4$,$v_7$,$v_8$,$v_{10}$. Matriks ketetanggan (*adjacency matrix*) dari graf $G$ adalah matriks persegi berukuran $n$ x $n$ dinotasikan $A = [aij]$, untuk hal ini berlaku $[a_{ij}]$ bernilai 1 jika titik $i$ dan $j$ bertetangga dan $[a_{ij}]$ bernilai 0 jika titik $i$ dan $j$ tidak bertetangga.

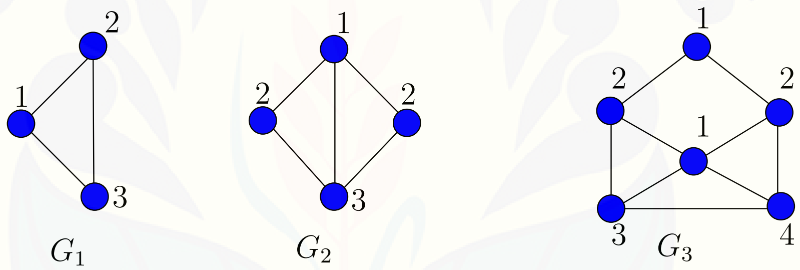
## 2.2 Pewarnaan Graf

Pewarnaan graf merupakan suatu bentuk pelabelan graf, yaitu dengan memberikan warna pada elemen graf. Terdapat tiga macam persoalan pewarnaan graf, meliputi pewarnaan titik (*vertex colouring*), pewarnaan sisi (*edge colouring*), dan pewarnaan wilayah (*region colouring*).

### 2.2.1 Pewarnaan Titik (*Vertex Colouring*)

Pewarnaan titik pada graf $G$ adalah memberikan warna berbeda pada setiap titik yang bertetangga sehingga tidak ada dua titik yang bertetangga dengan warna yang sama. Bilangan kromatik (*chromatic number*) dari graf $G$ $(\chi(G))$ adalah bilangan $k$ terkecil atau minimum pada graf $G$ sehingga dua titik yang bertetangga mempunyai warna yang berbeda. Apabila suatu graf $G$ dapat diwarnai dengan $k$ minimal dari $n$ warna, maka $G$ mempunyai bilangan kromatik $n(\chi(G) = n)$. Lihat Gambar 2.2.

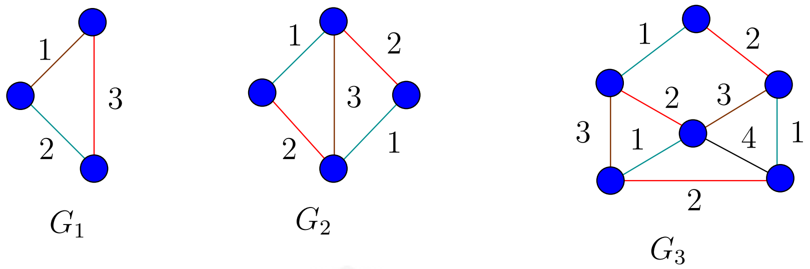
◊ **Teorema 2.2.1.** *Jika $G$ adalah sebuah graf khusus dengan $p$ titik dan $q$ sisi dan $G$ mempunyai bilangan kromatik $\chi$ maka hubungannya $(\chi - 1)p \leq 2q$ (Ringel, 1994:26).*




Gambar 2.2 Contoh Pewarnaan Titik

### 2.2.2 Pewarnaan Sisi (*Edge Colouring*)

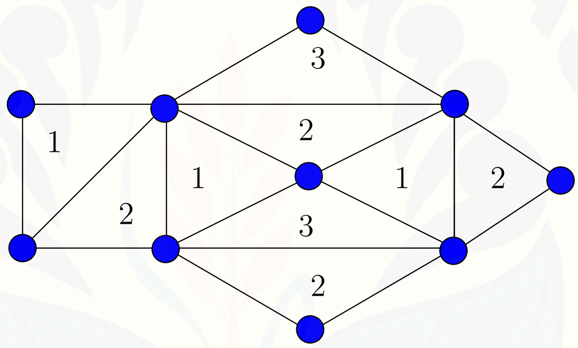
Suatu pewarnaan sisi-$k$ untuk graf $G$ adalah suatu penggunaan sebagian atau semua $k$ warna untuk mewarnai semua sisi di $G$ sehingga setiap pasang sisi yang mempunyai titik persekutuan diberi warna yang berbeda (Budayasa, 2007). Jika $G$ mempunyai pewarnaan sisi-$k$, maka dikatakan sisi-sisi di $G$ diwarnai dengan $k$ warna seperti pada Gambar 2.3.




Gambar 2.3 Contoh Pewarnaan Sisi

### 2.2.3 Pewarnaan Wilayah (*Region Colouring*)

Pewarnaan wilayah adalah pemetaan warna pada setiap wilayah pada graf sehingga wilayah yang bertetangga tidak memiliki warna yang sama. Biasanya sering dipakai untuk mewarnai peta. Contoh pewarnaan wilayah dapat dilihat pada Gambar 2.4.




Gambar 2.4 Contoh Pewarnaan Wilayah

## 2.3 Pewarnaan Titik $r$-dinamis

Menurut Lai dan Montgomery (2012) menyatakan sebuah $k$-pewarnaan titik disebut pewarnaan titik dinamis jika untuk setiap titik $v \in V(G)$ dengan $d(v) \geq 2$. Suatu gaf $G$ memiliki himpunan titik $V = V(G)$, himpunan sisi $E = E(G)$, dan $n$ menyatakan banyaknya titik, yaitu $|V|$. Himpunan ketetanggaan suatu titik $v$, dinotasikan dengan $N(v)$, merupakan himpunan titik-titik yang bertetangga dengan titik $v$. Derajat dari suatu titik $v$ dinotasikan dengan $d(v)$, derajat titik yang minimum pada graf $G$ dinotasikan dengan $\delta = \delta(G)$, dan derajat titik yang maksimum pada graf $G$ dinotasikan dengan $\triangle{=}\triangle\ (G)$. Titik yang saling ber-

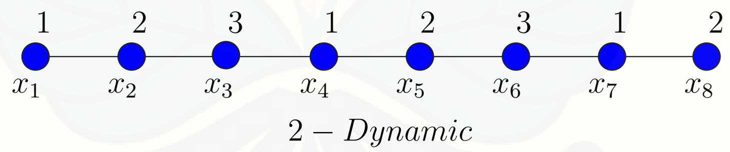
| $v$ | $c(v)$ | $\|c(N(v))\|$ | $r$ | $d(v)$ | $\min\{r, d(v)\}$ | $\|c(N(v))\| \geq \min\{r, d(v)\}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 1 | **1** | 2 | 1 | **1** | **YA** |
| $x_2$ | 2 | **2** | 2 | 2 | **2** | **YA** |
| $x_3$ | 3 | **2** | 2 | 2 | **2** | **YA** |
| $x_4$ | 1 | **2** | 2 | 2 | **2** | **YA** |
| $x_5$ | 2 | **2** | 2 | 2 | **2** | **YA** |
| $x_6$ | 3 | **2** | 2 | 2 | **2** | **YA** |
| $x_7$ | 1 | **2** | 2 | 2 | **2** | **YA** |
| $x_8$ | 2 | **1** | 2 | 1 | **1** | **YA** |

Tabel 2.1 Pewarnaan titik 2-dinamis graf $P_8$

tetangga mempunyai paling sedikit 2 warna. Pewarnaan $r$-dinamis pada suatu graf $G$ didefinisikan sebagai pemetaan $c$ dari $V$ ke himpunan warna sedemikian hingga memenuhi kondisi berikut:

1. jika $uv \in E(G)$ maka $c(u) \neq c(v)$, dan
2. $\forall v \in V(G), |c(N(v))| \geq \min\{r, d(v)\}$.

Jumlah warna *r-dynamic* dari graf $G$ dinotasikan $\chi_r(G)$ merupakan warna minimum $k$. Bilangan terkecil $k$ dari $k$-pewarnaan titik graf $G$ disebut bilangan kromatik dinamis graf $G$ yang dinotasikan $\chi_r(G)$. Lebih jelasnya dapat ditunjukkan pada Gambar 2.5.




Gambar 2.5 Contoh Pewarnaan Titik $r$-dinamis

$\Diamond$ **Teorema 2.3.1.** $\chi_r(G) \geq \min\{\triangle(G), r\} + 1$ *(Jahanbekam, S., dkk: 2014).*

## 2.4 Fungsi

Fungsi ("$f$") merupakan sebuah pemetaan. Fungsi "$f$" dari himpunan $A$ ke himpunan $B$, ditulis dengan notasi $f : A \rightarrow B$, adalah aturan korespondensi yang menghubungkan setiap $x \in A$ dengan tepat satu anggota B. Himpunan

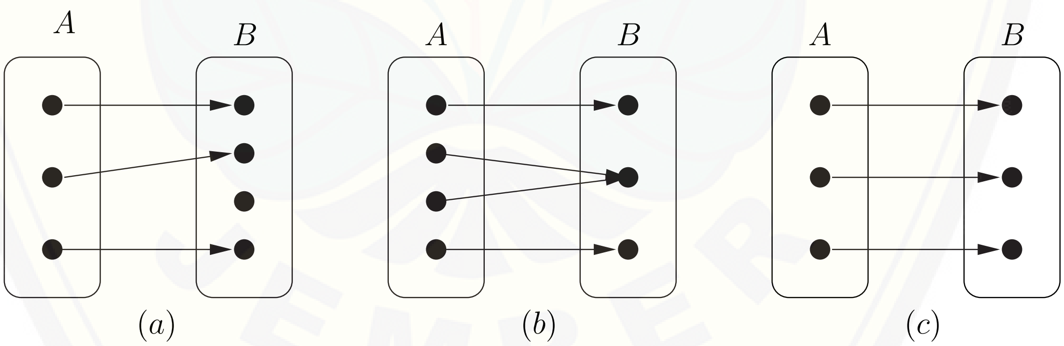
$A$ yaitu himpunan yang memuat elemen pertama dari elemen-elemen dalam $f$, disebut *domain* $f$ dan dapat dinyatakan sebagai $D_f$. Himpunan $B$ yaitu himpunan yang memuat elemen kedua dari elemen-elemen dalam $f$, disebut *range* $f$ dan dinyatakan sebagai $R_f$. Notasi : $f : A \to B$ menunjukkan bahwa $f$ merupakan fungsi dari $A$ ke $B$, yang sering juga dibaca "$f$ adalah pemetaan dari $A$ ke $B$", atau "$f$ memetakan $A$ ke $B$". Jika $(a, b)$ anggota dari $f$, maka $b = f(a)$ untuk $(a, b) \in f$. Fungsi dapat digolongkan menjadi 3 golongan sebagai berikut :

1. Fungsi satu-satu (injektif) adalah sebuah pemetaan pada setiap elemen di daerah kodomain yang berpasangan mempunyai pasangan elemen tepat satu di daerah domain, $\forall$ $a_1$ dan $a_2 \in$ A, $a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$.

2. Fungsi f: A $\to$ B disebut fungsi kepada atau fungsi surjektif $\Leftrightarrow \forall$ $b \in$ B ,$\exists$ $a \in$ A $\Rightarrow f(a) = b$. Dengan kata lain, suatu kodomain fungsi surjektif sama dengan kisarannya (range).

3. Fungsi f: A $\to$ B disebut fungsi bijektif apabila fungsi tersebut merupakan fungsi injektif sekaligus surjektif.

Gambar 2.6 menunjukkan fungsi injektif, surjektif dan bijektif.

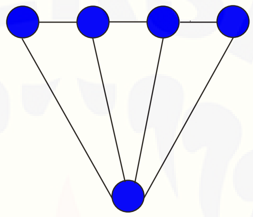



Gambar 2.6 (a) fungsi injektif, (b) fungsi surjektif dan (c) fungsi bijektif

## 2.5 Graf Khusus

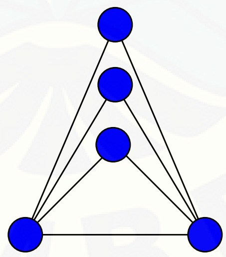
Graf khusus adalah graf yang memiliki keunikan dan karakteristik. Keunikan dari graf khusus yaitu tidak isomorfis dengan graf yang lainnya. Karakteristik bentuknya memperluas order $n$ tetapi simetris. Berikut ini terdapat beberapa contoh dari graf khusus.

1. Graf Kipas *(Fan Graph)*
   Graf kipas memiliki himpunan titik $V(F_n) = \{A, x_i; 0 \leq i \leq n-1\}$ dan himpunan sisi $E(F_n) = \{Ax_i; 0 \leq i \leq n-1\} \cup \{y_iy_{i+1}; 0 \leq i \leq n-2\}$. Dengan demikian, $|V(F_n)| = n+1$ dan $|E(F_n)| = 2n-1$ dengan $n \geq 3$.



Gambar 2.7 Graf Kipas $F_4$

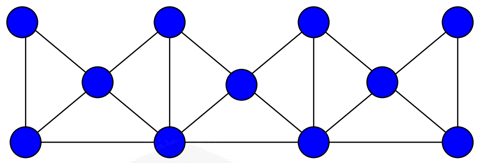
2. Graf Buku Segitiga *(Triangular Book Graph)*
   Graf triangular book memiliki himpunan titik $V(BT_n) = \{x, y, z_i; 0 \leq i \leq n-1\}$ dan himpunan sisi $E(BT_n) = \{xy \cup \{xz_i; 0 \leq i \leq n-1\} \cup \{yz_i; 0 \leq i \leq n-1\}$. Dengan demikian, $p = |V(BT_n)| = n+2, q = |E(BT_n)| = 2n+1$



Gambar 2.8 Graf Triangular Book $BT_3$

3. Graf Tangga Tiga Siklus *(Triangular Cycle Ladder Graph)*
   Graf tangga tiga siklus memiliki himpunan titik $V(TCL_n) = \{x_i, y_j, z_j; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq n+1\}$ dan himpunan sisi $E(TCL_n) = \{y_jz_j; 1 \leq j \leq$

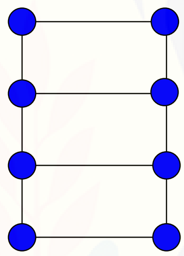
$n+1\} \cup \{y_j y_{j+1}; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_i y_i; x_i z_i; x_i y_{i+1}; x_i z_{i+1}; 1 \leq i \leq n\}$. Dengan demikian, $|V(TCL_n)| = 3n+2$ dan $|E(TCL_n)| = 6n+1$



Gambar 2.9 Graf Tangga Tiga Siklus $TCL_2$

4. Graf Tangga *(Ladder Graph)*

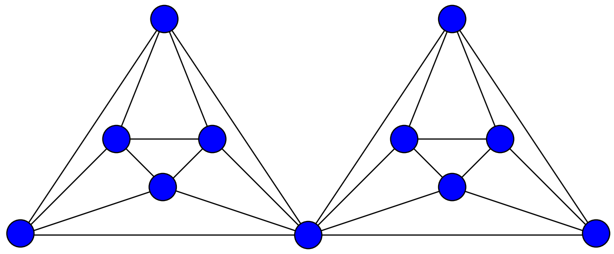
   Graf tangga (*ladder graph*) memiliki himpunan titik $V(L_n) = \{x_i, y_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(L_n) = \{x_i y_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_i y_{i+1}; 1 \leq i \leq n\}$. Dengan demikian, $|V(L_n)| = 2n$ dan $|E(L_n)| = n + 2(n-1)$



Gambar 2.10 Graf Tangga $L_3$

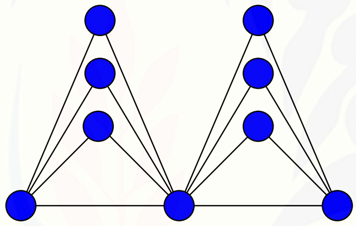
5. Shakel Graf Oktahedral *(Shackle Octahedral Graph)*

   Shakel graf oktahedral ($Shack(j_{4,2}, v = 1, n)$) memiliki himpunan titik $V$ ($Shack(j_{4,2}, v = 1, n)) = \{x_i, y_j^k, z_j; 1 \leq i \leq n+1; 1 \leq j \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(Shack(j_{4,2}, v = 1, n)) = \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_i z_j; x_{i+1} z_j; x_i y_j^1; x_i y_j^3;$ $x_{i+1} y_j^1; x_{i+1} y_j^2; i = j; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_j^1 y_j^2; y_j^2 y_j^3; y_j^1 y_j^3;$ $y_j^2 z_j; y_j^3 z_j; i = j; 1 \leq i \leq n\}$. Dengan demikian, $|V(Shack(j_{4,2}, v = 1, n))| = 5n+1$ dan $|E(Shack(j_{4,2}, v = 1, n))| = 12n$. Contoh dari Shakel graf oktahedral dapat dilihat pada Gambar 2.11.



Gambar 2.11 Shakel Graf Oktahedral $Shack(j_{4,2}, v = 1, 2)$

6. Shakel Graf Triangular Book $(Shakle(BT_n, v, m))$
   Shakel Graf Triangular Book memiliki himpunan titik $V(Shakle(BT_n, v, m) = \{x_i, y_i^j; 1 \leq i \leq m+1; 1 \leq j \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(Shakle(BT_n, v, m) = \{x_i x_{i+1}; 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_i y_i^j; 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n\} \cup \{x_{i+1} y_i^j; 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n\}$. Dengan demikian, $|V(Shakle(BT_n, v, m))| = m(n+1)+1$ dan $|E(Shakle(BT_n, v, m))| = m(2n+1)$

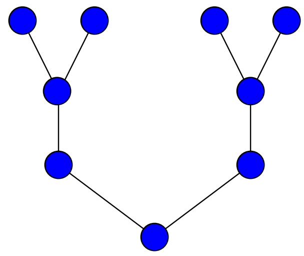


Gambar 2.12 Shakel Graf Triangular Book $Shakle(BT_3, v, 2)$

7. Graf Banana Tree $(B_{m,4})$
   Graf Banana Tree memiliki himpunan titik $V(B_{m,4}) = \{A, x_i, y_i, y_i^j; 1 \leq i \leq m-1; 1 \leq j \leq 2\}$ dan himpunan sisi $E(B_{m,4}) = \{Ax_i; x_i y_i; y_i y_i^1; y_i y_i^2; 1 \leq j \leq m-1\}$. Dengan demikian, $|V(B_{m,4})| = 4m+1$ dan $|E(B_{m,4})| = 4m$.

## 2.6 Aplikasi Graf

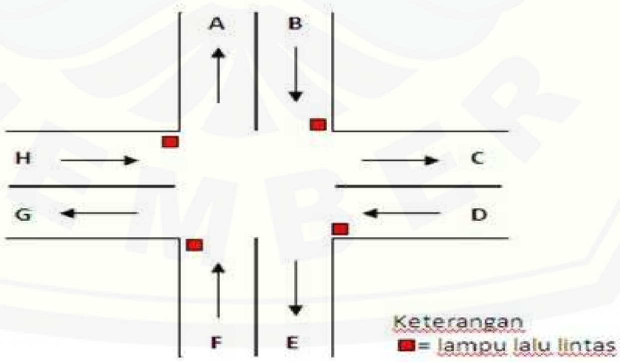
Teori graf berperan penting dalam menyelesaikan permasalahan dalam kehidupan sehari-hari. Berbagai macam permasalahan sulit dipecahkan menggunakan perhitungan dan pertimbangan biasa. Graf dapat membantu memodelkan masalah kemudian dideskripsikan dan digambarkan secara jelas. Penyelesaian dalam graf dapat dilakukan dengan mengubah objek diskrit menjadi titik-titik



Gambar 2.13 Banana Tree $B_{2,4}$

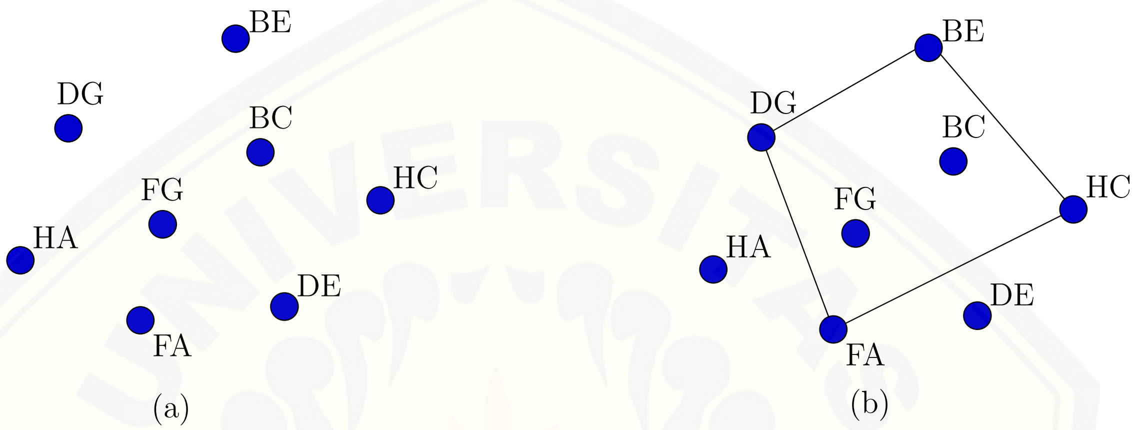
yang kemudian dihubungkan dengan sisi untuk menggambarkan permasalahan. Salah satu contoh aplikasi graf adalah pengaturan lampu lalu lintas. Lampu lalu lintas merupakan lampu yang mengendalikan arus lalu lintas yang terpasang di persimpangan jalan, tempat penyeberangan pejalan kaki (*zebra cross*), dan tempat arus lalu lintas lainnya. Lampu ini yang menandakan kapan kendaraan harus berjalan dan berhenti secara bergantian dari berbagai arah lalu lintas. Pengaturan lalu lintas di persimpangan jalan dimaksudkan untuk mengatur pergerakan kendaraan pada masing-masing kelompok pergerakan kendaraan agar dapat bergerak secara bergantian sehingga tidak saling mengganggu antar arus yang ada.

Lampu lalu lintas telah diadopsi hampir semua kota di dunia. Lampu ini menggunakan warna yang diakui secara universal, untuk menandakan berhenti adalah warna merah, hati-hati yang ditandai dengan warna kuning, dan hijau yang berarti dapat berjalan, seperti pada gambar 2.14 pengaturan lalu lintas pada perempatan jalan



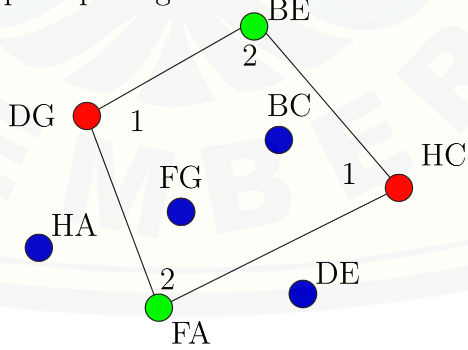

Gambar 2.14 Perempatan Jalan

Pada Gambar diatas, Jalur yang bisa digunakan untuk melintas dari arah B yaitu C dan E, arah D yaitu E dan G, arah F yaitu G dan A dan arah H yaitu A dan C. Setelah mengetahui arah yang dapat dilewati kemudian membuat titik-titik sebagai tanda dari semua jalur yang bisa dilewati dalam perempatan jalan seperti pada Gambar (a). Pada Gambar (b) mengilustrasikan sisi untuk menghubungkan 2 titik yang saling melintas atau berseberangan (Nugroho,2013).




Gambar 2.15 (a) Titik-titik dari Jalur Jalan, (b) Graf Jalur Jalan

Pemberian warna pada masing-masing titik dengan beberapa ketentuan antara lain menggunakan jumlah warna sedikit mungkin, titik yang bertetanggaan (terhubung dengan sisi) tidak boleh berwarna sama, memberi warna yang sama pada titik yang tidak terhubung secara langsung, titik yang tidak terhubung dengan sisi (titik terpencil) berarti jalur tersebut boleh berlaku lampu lalu lintas berwarna hijau terus seperti pada gambar dibawah ini :




Gambar 2.16 Pewarnaan pada Titik

Berdasarkan Gambar 2.16 dapat dikelompokkan titik-titik sesuai dengan kesamaan warna. Warna merah yaitu jalur DG dan HC sedangkan warna hijau yaitu jalur BE dan FA sehingga dari pengelompokan warna titik tersebut didapatkan 2 kondisi pengaturan lalu lintas seperti yang tertera pada tabel dibawah ini :

Tabel 2.2: Kondisi Lampu Lalu Lintas

| Kondisi | Lampu Merah | Lampu Hijau |
|---|---|---|
| 1 | DG, HC | BE, FA, BC, DE, FG, HA |
| 2 | BE, FA | DG, HC, BC, DE, FG, HA |

## 2.7 Hasil-Hasil Pewarnaan Titik

Pada penelitian sebelumnya didapatkan beberapa hasil pewarnaan titik $r$-dinamis yang dapat digunakan sebagai rujukan penelitian ini. Adapun beberapa hasil penelitian terdahulu bisa dilihat pada Tabel 2.3.

Tabel 2.3: Hasil Pewarnaan Titik r-dinamis Penelitian Terdahulu

| Graf | Bilangan kromatik r-dinamis | Keterangan |
|---|---|---|
| $P_2 \otimes C_n$ , $n$ ganjil | $\chi(G) = 6$ | Harsya, dkk 2014 |
| $P_2 \otimes C_n$ , $n$ genap | $\chi(G) = 4$ | Harsya dkk 2014 |
| $P_3 \odot C_n$, $n$ ganjil | $\chi(G) = 6$ | Harsya dkk 2014 |

| Graf | Bilangan kromatik r-dinamis | Keterangan |
|---|---|---|
| *Graf Cycle*$(C_6)$ | $\chi(G) = 2$ | Sesa, J. 2014 |
| *Graf Kipas*$(F_n)$, $n \geq 4$ | $\chi(G) = 3$ | Irwanto, dkk 2014 |
| *Graf Roda*$(W_n)$, $n \geq 5$ | $\chi(G) = 4$ | Irwanto dkk 2014 |
| *Graf Helm*$(H_n)$, $n \geq 4$ | $\chi(G) = 3$ | Irwanto dkk 2014 |
| *Graf Anti Prisma*$(H_m)$, $n \geq 4$ | $\chi(G) = 4$ | Irwanto dkk 2014 |
| *Graf Prisma*$(H_m)$, $n \geq 5$ | $\chi(G) = 4$ | Irwanto dkk 2014 |
| $C_n \odot C_m$ | $\chi(G) = 4$ | Puspasari dkk 2014 |
| $C_n \otimes C_m$ | $\chi(G) = 3$ | Puspasari dkk 2014 |
| $S_n \otimes C_m$ | $\chi(G) = 3$ | Dewi, N.L dkk 2014 |
| *graf Particular* | $\chi(G) = 2$ | Lai, dkk 2002 |
| $W_n + P_m$=$W_n + P_m$,$n$ genap | $\chi(G) = \chi_d(G) = \chi_3(G)$ $= \chi_4(G) = 5$ | Wulandari dkk 2015 |
| $W_n + P_m$=$W_n + P_m$, $n$ ganjil | $\chi(G) = \chi_d(G) = \chi_3(G)$ $= \chi_4(G) = 6$ | Wulandari dkk 2015 |
| $W_n \odot P_m$ | $\chi(G) = \chi_d(G) = 4$ | Wulandari dkk 2015 |
| $P_m \odot W_n$, $n$ genap | $\chi(G) = \chi_d(G)$ $= \chi_3(G) = 5$ | Wulandari dkk 2015 |
| $P_m \odot W_n$, $n$ ganjil | $\chi(G) = \chi_d(G)$ $= \chi_3(G) = 5$ | Wulandari dkk 2015 |

# BAB 3. METODE PENELITIAN

## 3.1 Jenis Penelitian

Penelitian ini dikategorikan kedalam penelitian eksploratif dan penelitian terapan *(applied research)*.

1. Penelitian eksploratif adalah jenis penelitian yang bertujuan untuk menemukan hal baru yang ingin diketahui oleh peneliti, kemudian hasilnya dapat digunakan sebagai dasar penelitian selanjutnya.

2. Penelitian terapan *(applied research)* merupakan jenis penelitian dengan penyelidikan yang hati-hati, sistematik dan terus-menerus terhadap suatu masalah yang bertujuan untuk keperluan tertentu.

## 3.2 Graf Kajian Pewarnaan Titik

Graf yang digunakan dalam penelitian ini berasal dari graf khusus. Aplikasi pewarnaan titik menggunakan skema aplikasi pada pengaturan lampu lalu lintas. Penelitian ini menggunakan metode deduktif aksiomatik dalam menyelesaikan permasalahan. Metode deduktif menggunakan prinsip-prinsip pembuktian deduktif yang berlaku dalam logika matematika dengan menggunakan aksioma atau teorema yang telah ada untuk memecahkan suatu masalah.

## 3.3 Rancangan Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada graf khusus. Adapun teknik penelitian adalah sebagai berikut:

1. menentukan graf-graf khusus sebagai objek penelitian;

2. menentukan kardinalitas graf-graf khusus dan operasi shakel;

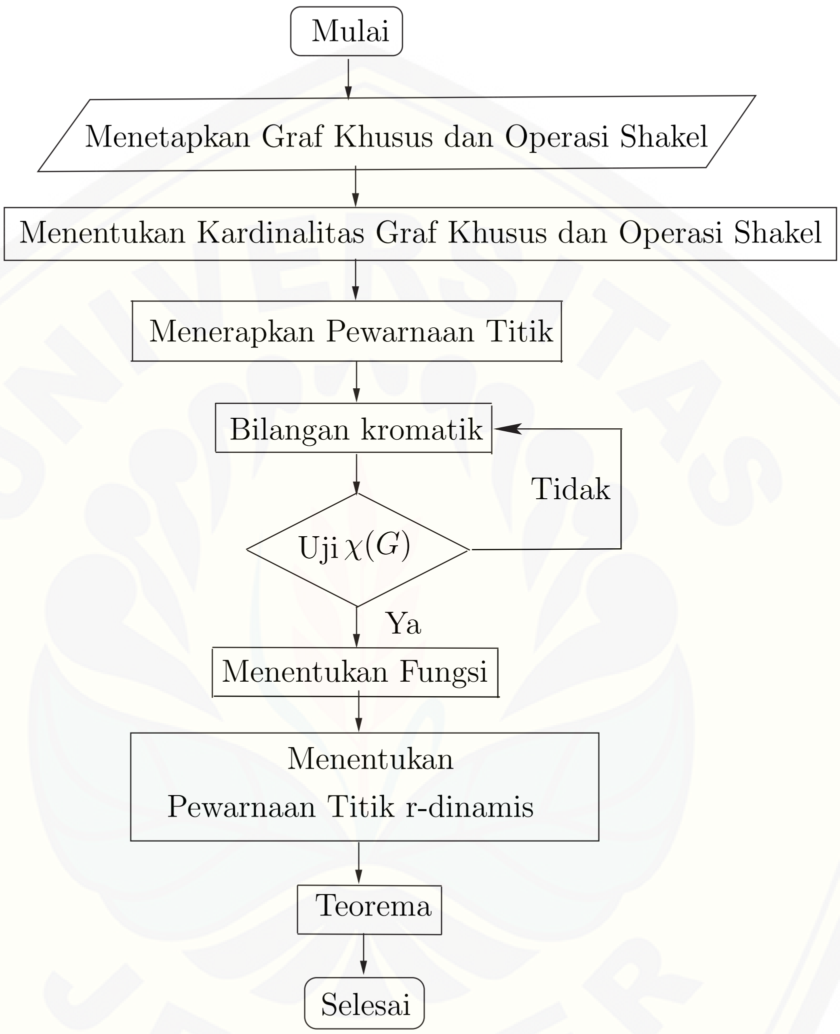
3. menerapkan pewarnaan titik pada graf-graf khusus dan operasi shakel;

4. memeriksa keoptimalan bilangan kromatik, apabila sudah optimal dilanjutkan dengan menentukan fungsi, apabila belum optimal akan kembali ke tahap sebelumnya yaitu menerapkan pewarnaan titik pada graf;

5. menentukan fungsi berdasarkan keteraturan dari bilangan kromatik;

6. menentukan pewarnaan titik $r$-dinamis dari graf khusus dan operasi shakel;

7. pewarnaan titik $r$-dinamis yang telah didapatkan kemudian dibuktikan sehingga menjadi sebuah teorema.




Gambar 3.1 Rancangan Penelitian