



**ANALISIS SOLUSI NUMERIK MODEL FLUKS MOBIL
DENGAN METODE CRANK-NICHOLSON**

SKRIPSI

Oleh

**Dayvis Suryadana
NIM. 081810101021**

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER
2014**



**ANALISIS SOLUSI NUMERIK MODEL FLUKS MOBIL
DENGAN METODE CRANK-NICHOLSON**

SKRIPSI

Diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat
untuk menyelesaikan dan mencapai gelar Sarjana Sains

Oleh

**Dayvis Suryadana
NIM. 081810101021**

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER
2014**

PERSEMBAHAN

Skripsi ini saya persembahkan untuk:

1. Ayahanda Nusari dan Ibunda Sugiyanti tercinta, yang telah mendoakan dan memberi kasih sayang serta pengorbanan untuk putra tercintanya;
2. Adik Fajar Rivi Jannati yang telah memberikan dukungan;
3. guru-guru Sekolah Dasar sampai perguruan tinggi, yang telah memberikan ilmu dan bimbingan dengan penuh kesabaran;
4. Almamater Jurusan Matematika FMIPA Universitas Jember.

MOTTO

Hati suci selalu benar,
tetapi gejolak hati selalu mengubah hasrat hati suci.
Orang yang ada dalam hati suci adalah orang yang taqwa dan beriman.
Itulah tantangan hidup.^{*)}



^{*)}Frastica S UL. 2013. Kumpulan Motto Skripsi. [serial On line]. <http://www.ulan-news.com/2012/07/kumpulan-motto-kehidupan-terpopuler-dan.html>.

[19 Januari 2014]

PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

nama : Dayvis Suryadana

NIM : 081810101021

menyatakan dengan ini sesungguhnya bahwa karya tulis ilmiah yang berjudul “Analisis Solusi Numerik Model Fluks Mobil dengan Metode Crank-Nicholson” adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali kutipan yang sudah saya sebutkan sumbernya dan belum pernah diajukan pada institusi manapun serta bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa ada tekanan dan paksaan dari pihak manapun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata dikemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, Mei 2014

Yang menyatakan,

Dayvis Suryadana

NIM 081810101021

SKRIPSI

**ANALISIS SOLUSI NUMERIK MODEL FLUKS MOBIL
DENGAN METODE CRANK-NICHOLSON**

Oleh

Dayvis Suryadana

NIM 081810101021

Pembimbing

Dosen Pembimbing Utama : Drs. Rusli Hidayat, M.Sc.

Dosen Pembimbing Anggota : Kosala Dwidja Purnomo, S.Si, M.Si.

PENGESAHAN

Skripsi berjudul “Analisis Solusi Numerik Model Fluks Mobil dengan Metode Crank-Nicholson” telah diuji dan disahkan pada:

hari, tanggal :

tempat : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Jember.

Tim Penguji:

Dosen Pembimbing Utama,

Dosen Pembimbing Anggota,

Drs. Rusli Hidayat, M.Sc.
NIP 196610121993031001

Kosala Dwidja Purnomo, S.Si, M.Si.
NIP 196908281998021001

Penguji I,

Penguji II,

Ahmad Kamsyakawuni, S.Si, M.Kom.
NIP 197211291998021001

Dr. Alfian Futuhul Hadi, S.Si, M.Si.
NIP 197407192000121001

Mengesahkan
Dekan,

Prof. Drs. Kusno, DEA, Ph.D.
NIP 196101081986021001

RINGKASAN

Analisis Solusi Numerik Model Fluks Mobil Dengan Metode Crank-Nicholson;
Dayvis Suryadana; 081810101021; 30 halaman; Jurusan Matematika Fakultas MIPA
Universitas Jember

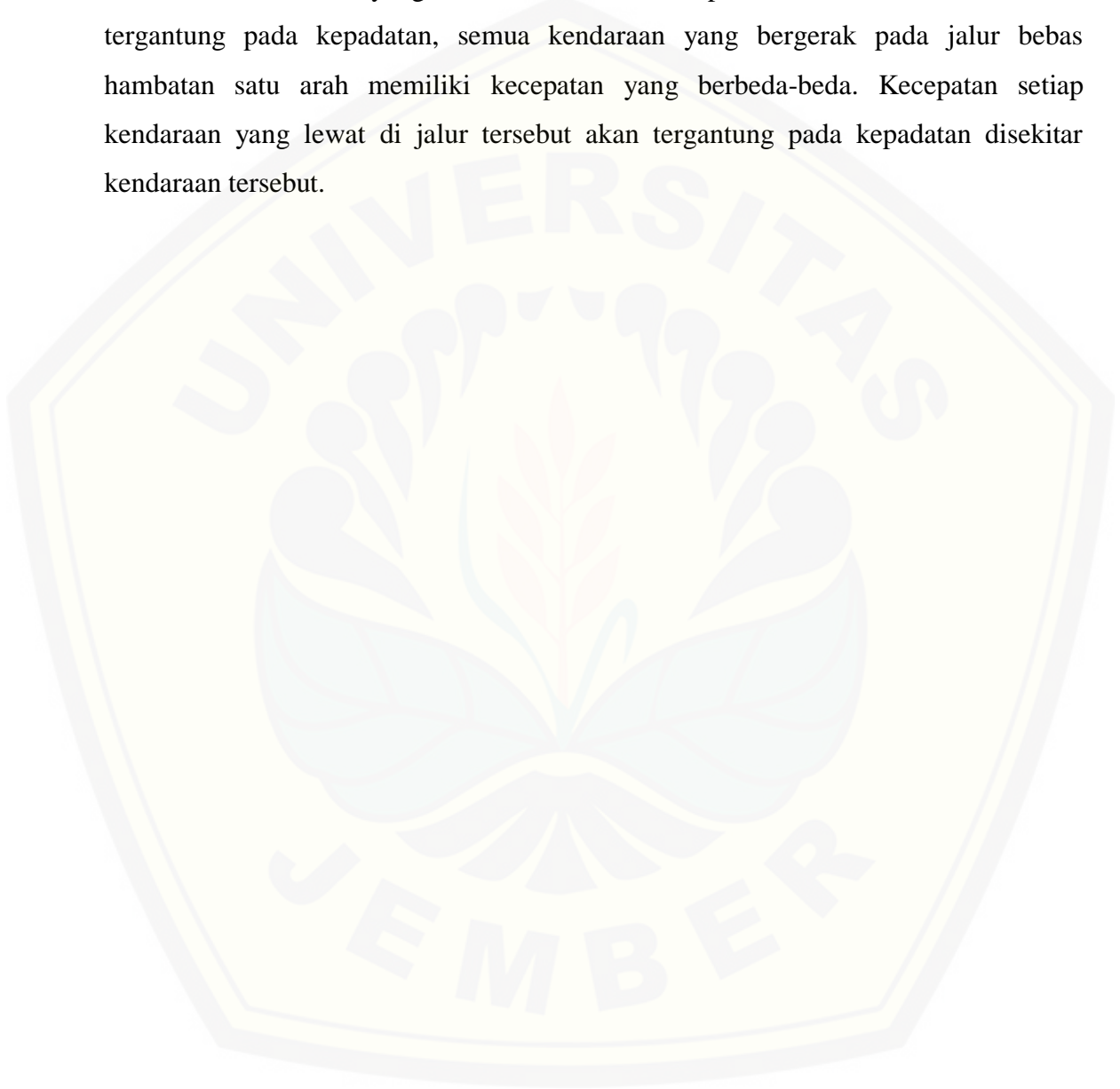
Arus lalu lintas pada suatu ruas jalan karakteristiknya akan bervariasi baik berdasar lokasi maupun waktunya. Oleh karena itu perilaku kendaraan yang melintas akan berpengaruh terhadap perilaku arus lalu lintas. Ada beberapa cara yang dipakai para ahli lalu lintas untuk mendefinisikan arus lalu lintas, tetapi ukuran dasar yang sering digunakan adalah konsentrasi fluks (arus) dan kecepatan. Fluks dan volume sering dianggap sama, meskipun istilah fluks lebih tepat untuk menyatakan arus lalu lintas dan mengandung pengertian jumlah kendaraan yang terdapat dalam ruang yang diukur dalam satu interval waktu tertentu. Konsentrasi dianggap sebagai jumlah kendaraan pada suatu panjang jalan tertentu, tetapi konsentrasi ini kadang-kadang menunjukkan kerapatan (kepadatan) (Harahap, 2010).

Tujuan dari penelitian ini adalah menyelesaikan model fluks mobil secara numerik dengan cara mengubah persamaan fluks mobil kedalam bentuk skema beda hingga dengan menggunakan metode Crank-Nicholson serta mendefinisikan variabel-variabelnya sehingga diperoleh profil fluks mobil melalui solusi numeriknya.

Penelitian tentang fluks mobil ini dibagi menjadi enam tahap yaitu kajian pustaka, penyelesaian model fluks mobil menggunakan metode Crank-Nicholson, identifikasi parameter, pembuatan program, simulasi program, analisis hasil simulasi. Penentuan nilai parameter diambil dari simulasi dan sebagian diambil dari beberapa literatur yang berkaitan dengan fluks mobil. Setelah menyelesaikan model fluks mobil menggunakan metode Crank-Nicholson serta mengidentifikasi parameter, dilanjutkan dengan pembuatan program, dimana pada langkah ini diberikan hasil visualisasi dari simulasi model fluks mobil. Langkah selanjutnya yaitu melakukan simulasi dengan cara meng*input* nilai parameter-parameter yang telah ditentukan

sebelumnya, sebagian dari nilai parameter tersebut divariasikan. Kemudian tahap terakhir yaitu menganalisis *output* dari simulasi tersebut.

Hasil analisis yang telah dilakukan, kecepatan kendaraan tersebut akan tergantung pada kepadatan, semua kendaraan yang bergerak pada jalur bebas hambatan satu arah memiliki kecepatan yang berbeda-beda. Kecepatan setiap kendaraan yang lewat di jalur tersebut akan tergantung pada kepadatan disekitar kendaraan tersebut.



PRAKATA

Puji syukur Alhamdulillah penulis panjatkan kehadirat Allah SWT atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul “Analisis Solusi Numerik Model Fluks Mobil dengan Metode Crank-Nicholson”. Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat menyelesaikan pendidikan strata satu (S1) pada Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Jember.

Dalam penyelesaian skripsi ini, penulis telah banyak mendapat bantuan dan dorongan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan terima kasih kepada:

1. Drs. Rusli Hidayat, M.Sc, selaku Dosen Pembimbing Utama dan Kosala Dwidja Purnomo, S.Si, M.Si., selaku Dosen Pembimbing Anggota, yang telah meluangkan waktu, pikiran dan perhatian dalam penyusunan skripsi ini;
2. Ahmad Kamsyakawuni, S.Si, M.Kom., dan Dr. Alfian Futuhul Hadi, S.Si, M.Si., selaku Dosen Penguji yang telah memberikan saran dan kritikan;
3. Bagus Yulianto, S.Si., selaku Dosen Pembimbing Akademik;
4. bapak dan ibu serta keluarga di rumah yang telah memberikan doa, dukungan dan kasih sayang;
5. sahabat Connan Family (Yesiana, Prian, Bayu, Indah, Laily dan Mumu) dan Genk Cupu (Gunarso, Putri, Titik dan Rista) yang selalu memberikan semangat dan motivasi;
6. angkatan matematika 2008 dan teman-teman kost yang selalu berbagi suka dan duka bersama;
7. semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu-persatu.

Penulis juga menerima segala kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan skripsi ini. Penulis berharap semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi semua pihak.

Jember, Mei 2014

Penulis

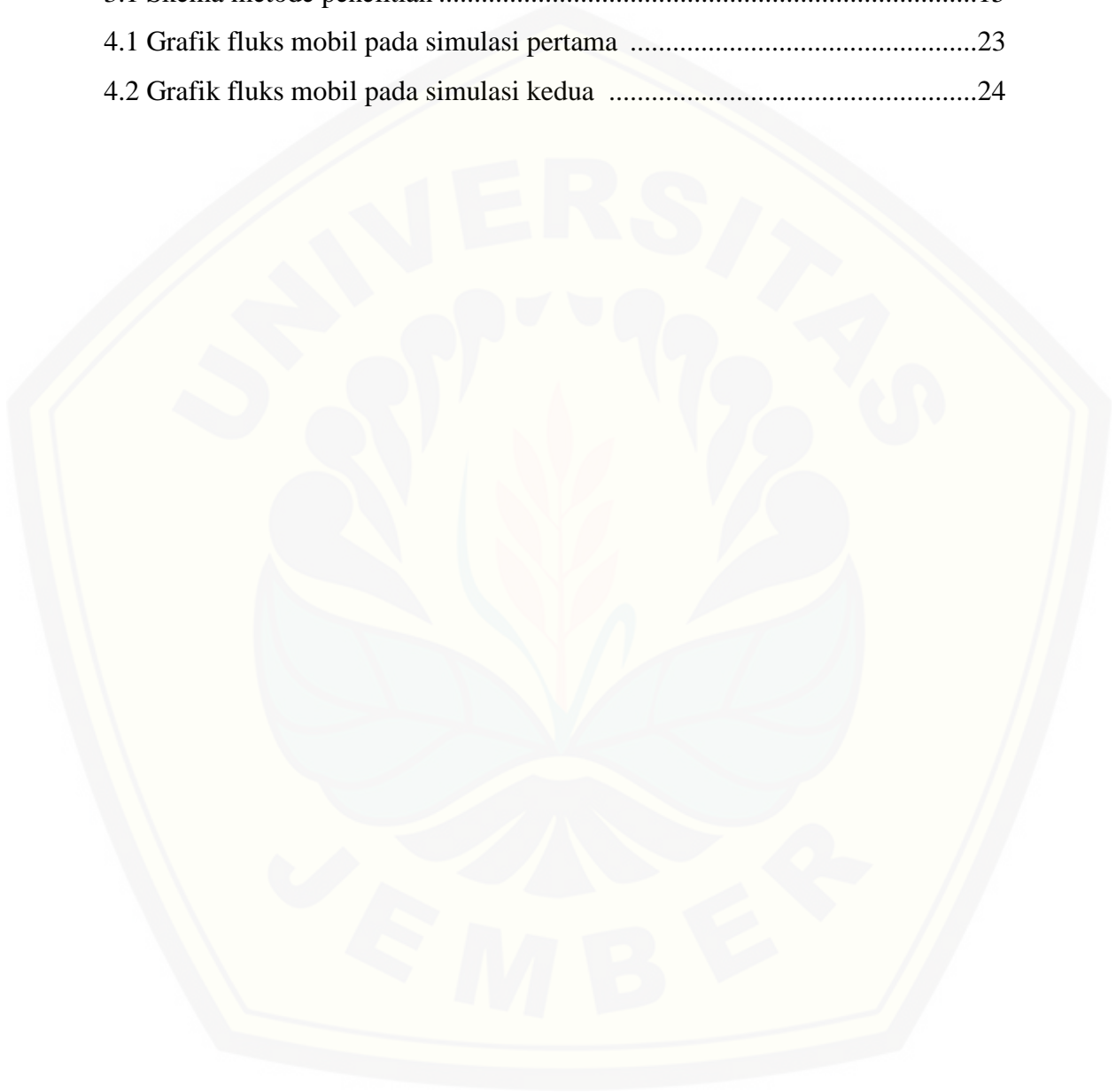
DAFTAR ISI

	Halaman
HALAMAN JUDUL	ii
HALAMAN PERSEMBAHAN	iii
HALAMAN MOTO	iv
HALAMAN PERNYATAAN	v
HALAMAN PEMBIMBING	vi
HALAMAN PENGESAHAN	vii
RINGKASAN	viii
PRAKATA	x
DAFTAR ISI	xi
DAFTAR TABEL	xii
DAFTAR GAMBAR	xiii
BAB 1. PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Permasalahan	3
1.3 Tujuan	3
1.4 Manfaat	3
BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA	4
2.1 Persamaan Diferensial Parsial	4
2.2 Model Arus Mobil	5
2.2.1 Prinsip kekekalan	5
2.2.2 Hukum Kekekalan Global dan Lokal	6
2.2.3 Lemma Lagrange	7
2.2.4 Model Fluks Mobil	7
2.2.5 Model Kepadatan Lalu Lintas Linier Terganggu	8

2.3 Teknik Beda Hingga	10
2.3.1 Skema Eksplisit	11
2.3.2 Skema Implisit	12
2.3.3 Skema Crank-Nicholson	13
BAB 3. METODE PENELITIAN	15
BAB 4. HASIL DAN PEMBAHASAN	18
4.1 Diskritisasi model Fluks Mobil menggunakan Metode Crank-Nicholson	18
4.2 Identifikasi Parameter	21
4.3 Simulasi Program	22
4.4 Hasil Simulasi dan Analisis Hasil Simulasi	23
BAB V. PENUTUP	30
5.1 Kesimpulan	29
5.2 Saran	29
LAMPIRAN	

DAFTAR GAMBAR

	Halaman
3.1 Skema metode penelitian	15
4.1 Grafik fluks mobil pada simulasi pertama	23
4.2 Grafik fluks mobil pada simulasi kedua	24



BAB 1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Arus lalu lintas pada suatu ruas jalan karakteristiknya akan bervariasi baik berdasar lokasi maupun waktunya. Oleh karena itu perilaku kendaraan yang melintas akan berpengaruh terhadap perilaku arus lalu lintas. Ada beberapa cara yang dipakai para ahli lalu lintas untuk mendefinisikan arus lalu lintas, tetapi ukuran dasar yang sering digunakan adalah konsentrasi fluks (arus) dan kecepatan. Fluks (arus) dan volume sering dianggap sama, meskipun istilah fluks lebih tepat untuk menyatakan arus lalu lintas dan mengandung pengertian jumlah kendaraan yang terdapat dalam ruang yang diukur dalam satu interval waktu tertentu. Konsentrasi dianggap sebagai jumlah kendaraan pada suatu panjang jalan tertentu, tetapi konsentrasi ini kadang-kadang menunjukkan kerapatan (kepadatan) (Harahap, 2010).

Pada tahun 1959 *Greenberg* menyelidiki aliran arus lalu lintas yang dilakukan pada bagian utara terowongan Lincoln di kota New York dan menganalisa hubungan antara kecepatan dan kerapatan dengan mempergunakan asumsi kontinuitas dari persamaan gerakan benda cair. Hubungan ini menimbulkan asumsi bahwa arus lalu lintas mempunyai kesamaan dengan arus fluida.

Julianto (2010) melakukan kajian tentang volume perjalanan lalu lintas pada ruas jalan Siliwangi Semarang yang mengalami peningkatan dari tahun ke tahun. Untuk mengatasi masalah kemacetan lalu lintas pada ruas jalan ini terlebih dahulu diperlukan pengetahuan mengenai karakteristik lalu lintas dan model hubungan antar karakteristik tersebut. Kajian ini bertujuan menganalisis model hubungan antar karakteristik volume (V), kecepatan (S) dan kepadatan (D) lalu lintas, sesuai dengan kondisi yang ada. Dengan menggunakan analisis model *Greenshield*, *Greenberg*, dan *Underwood* didapatkan hasil bahwa model hubungan V - S - D yang sesuai untuk ruas jalan Siliwangi adalah mengikuti model *Greenberg*.

Banyaknya pemakaian alat transportasi seperti mobil serta kurang ditunjangnya kedisiplinan lalu lintas yang tinggi, menyebabkan kemacetan dan kecelakaan lalu lintas sering terjadi. Dengan memahami dan merenungkan permasalahan tersebut, maka dapat disimpulkan bahwa kecelakaan manusia di jalan raya terutama pada manusianya sendiri. Oleh karena itu, Sugiono (1985) tergerak untuk membuat dan membicarakan permasalahan tersebut dalam buku dengan judul Model Matematika dari Arus Lalu Lintas yang isinya tentang model kepadatan lalu lintas linier terganggu.

Dalam ilmu matematika berbagai masalah yang ada dalam berbagai disiplin ilmu pengetahuan terutama dalam sains dan teknik, sering ditemukan masalah-masalah yang penyelesaiannya tidak dapat diatasi dengan hanya menggunakan rumus atau konsep yang sudah ada contohnya model perpindahan panas dan massa pada proses pengeringan butiran kedelai. Banyak fenomena-fenomena yang melahirkan model matematika, seperti halnya fluks (arus) yang telah disinggung pada paragraf sebelumnya. Namun model matematikanya mengandung laju perubahan, pada situasi seperti ini dibutuhkan penyelesaian atau perhitungan matematika secara khusus, dan perhitungan-perhitungan tersebut memerlukan persamaan diferensial.

Dalam analisis numerik, banyak metode yang telah diselidiki untuk memecahkan permasalahan yang terkait dengan persamaan diferensial parsial. Menurut Mutholi'ah (2008) yang melakukan analisis numerik perbandingan metode beda hingga skema Implisit dan Crank-Nicholson pada persamaan keseimbangan masa reaktor kimia silindris, metode beda hingga skema implisit lebih mudah daripada metode beda hingga skema Crank-Nicholson namun menghasilkan nilai yang hampir sama. Hal yang membedakan dari kedua skema ini adalah proses penentuan nilai matriksnya.

Penulis mengusulkan metode Crank-Nicholson yang merupakan rerata dari metode beda hingga skema eksplisit dan skema implisit, untuk dilakukan pendekatan penyelesaian pada kasus fluks yang terkait dengan lalu lintas. Pada skripsi ini akan

dianalisis solusi numerik model fluks mobil dengan menggunakan metode Crank-Nicholson.

1.2 Permasalahan

Adapun permasalahan yang diangkat dalam permasalahan ini adalah sebagai berikut:

- a. bagaimana menerapkan metode Crank-Nicholson pada model fluks mobil secara numerik?
- b. bagaimana profil fluks mobil melalui solusi numerik yang diperoleh?

Simulasi yang akan dilakukan pada skripsi ini menggunakan *software* Matlab R2009a.

Dalam hal ini model fluks mobil yang digunakan diambil dari Sugiono (1985).

1.3 Tujuan

Berdasarkan permasalahan di atas, tujuan dalam penulisan skripsi ini adalah:

- a. menyelesaikan model fluks mobil secara numerik dengan menggunakan metode Crank-Nicholson.
- b. Mengetahui profil fluks mobil melalui solusi numerik yang diperoleh.

1.4 Manfaat

Adapun manfaat yang bisa diambil dalam penulisan skripsi ini yaitu mendapatkan solusi numerik dari model fluks mobil dan mengetahui profil dari model fluks mobil melalui analisis solusi numeriknya.

BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Persamaan Diferensial Parsial

Persamaan diferensial parsial adalah suatu persamaan yang memuat satu atau lebih turunan parsial dengan dua atau lebih variabel bebas. Turunan parsial dinotasikan dengan subskrip sebagai berikut

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}.$$

Contoh sederhana dari persamaan diferensial parsial dapat dilihat pada persamaan berikut ini.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = cu. \quad (2.1)$$

Pada persamaan (2.1) $u = u(x, y)$ adalah suatu fungsi dengan dua peubah bebas x dan y dengan c sebagai konstanta. Penyelesaian dari persamaan ini di daerah R pada bidang- xy merupakan sebuah fungsi $u(x, y)$ dengan u , u_x , dan u_y terdefinisi pada setiap titik (x, y) di R , sehingga fungsi u dikatakan memenuhi persamaan (2.1) di daerah R .

Persamaan diferensial parsial memiliki dua bentuk, yaitu persamaan diferensial parsial linier dan persamaan diferensial parsial nonlinier. Suatu persamaan diferensial parsial dalam u disebut linier jika semua suku-suku dari u dan turunan-turunannya dapat dinyatakan sebagai suatu kombinasi linier dengan koefisien-koefisien yang bebas dari u . Dalam suatu persamaan diferensial parsial linier, koefisien-koefisiennya bisa tergantung kepada peubah-peubah bebas. Misalnya, suatu persamaan diferensial parsial linier tingkat dua dengan dua peubah bebas seperti yang diberikan oleh persamaan berikut ini.

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G \quad (2.2)$$

Pada persamaan (2.2) A, B, C, D, E, F dan G adalah konstanta-konstanta atau fungsi-fungsi dari x dan y yang diberikan. Contoh dari persamaan diferensial parsial linier dan nonlinier dapat dilihat pada persamaan berikut ini.

$$u_{xx} + 5u_{xy} + u_{yy} - u_x - u = e^{x-y} \quad (2.3)$$

$$u_{xx} + 5u_{xy} + u_{yy} - u_x^2 - u = e^{x-y} \quad (2.4)$$

Jika $u = u(x, y)$ adalah fungsi dengan dua peubah bebas x dan y maka persamaan (2.3) adalah sebuah persamaan diferensial parsial linier dan persamaan (2.4) adalah persamaan diferensial parsial nonlinier.

Jika A, B, C, D, E dan F di dalam persamaan (2.2) adalah konstan maka persamaannya disebut persamaan diferensial dengan koefisien konstan dan jika tidak demikian disebut persamaan diferensial dengan koefisien peubah (Hidayat, 2006).

2.2 Model Arus Mobil

Semua mobil (kendaraan) yang bergerak pada jalur bebas hambatan satu arah disepanjang jalan tol bebas hambatan memiliki kecepatan yang berbeda-beda. Kecepatan setiap mobil yang lewat di jalur itu akan tergantung kepada kepadatan (density) disekitar mobil itu. Jadi, bila kepadatannya tinggi maka seorang pengemudi akan berhati-hati dan mengendarai mobilnya lebih lambat daripada ketika kepadatannya lebih rendah dengan kata lain mengubah kecepatan jika ada perubahan dalam kepadatan yang diamati (Groesen, 2001).

2.2.1 Prinsip Kekekalan

Misalkan $[a, b]$ adalah segmen pada jalan tol, dan $N([a, b], t)$ jumlah kendaraan yang berada pada segmen $[a, b]$ pada saat t . Bisa dipahami untuk mempertimbangkan N suatu bilangan real positif yang merupakan bilangan bulat. Misalkan pada segmen $[a, b]$, perubahan jumlah kendaraan pada selang waktu yang kecil ∂t dinyatakan dengan persamaan $N([a, b], t + \partial t) - N([a, b], t)$. Perubahan tersebut hanya bisa terjadi karena adanya perbedaan antara arus kendaraan yang masuk ke dalam segmen

atau selang pada titik $x = a$ dan meninggalkan selang pada titik $x = b$. Untuk lebih jelasnya lagi, misalkan $Q(x, t)$ adalah fluks mobil, yaitu kendaraan yang melewati titik x dari segmen jalan pada saat t persatuan waktu per selang.

Karena $Q(x, t) \partial t$ menyatakan jumlah kendaraan yang melalui titik x dalam selang waktu ∂t , maka perubahan jumlah kendaraan dalam selang $[a, b]$ dapat dinyatakan dengan persamaan berikut

$$\{-Q(b, t) + Q(a, t)\} \partial t$$

Dengan prinsip kekekalan mengakibatkan bahwa

$$N([a, b], t + \partial t) - N([a, b], t) = \{-Q(b, t) + Q(a, t)\} \partial t$$

Bagi persamaan terakhir dengan ∂t dan ambil nilai limit $\partial t \rightarrow 0$, dengan asumsi turunan N terhadap t kontinu (*differentiable*), sehingga diperoleh persamaan berikut

$$\frac{d}{dt} N([a, b], t) = -Q(b, t) + Q(a, t) \quad (2.5)$$

Relasi antara N dan fluks Q berlaku untuk setiap selang $[a, b]$ dari jalan tol tersebut. Selanjutnya, akan digunakan sifat ini untuk membangun relasi yang menggunakan titik tunggal sebagai pengganti sebuah selang (Hidayat, 2006).

2.2.2 Hukum Kekekalan Global dan Lokal

Pertama, mendefinisikan kepadatan $\rho(x, t)$ yaitu jumlah kendaraan per satuan panjang pada posisi x pada saat t . Jelas bahwa nilai ρ tidak negatif karena kepadatan terendah adalah nol, dan nilai ini juga dibatasi karena panjang selang terbatas. Jadi, $\rho \in [0, \rho_m]$ dengan ρ_m merupakan kepadatan maksimum, dan N dapat diekspresikan

$$N([a, b], t) = \int_a^b \rho(x, t) dx \quad (2.6)$$

Selanjutnya, ruas kiri persamaan (2.5) dapat ditulis sebagai

$$\frac{d}{dt} \int_a^b \rho(x, t) dx.$$

Asumsikan bahwa fluks ini *differentiable* terhadap peubah ruang, sehingga ruas kanannya dapat ditulis sebagai

$$-Q(b, t) + Q(a, t) = - \int_a^b \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} dx.$$

Kedua ruas tersebut digunakan bersama, sehingga hukum kekekalan di atas menjadi

$$\frac{d}{dt} \int_a^b \rho(x, t) dx = - \int_a^b \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} dx. \quad (2.7)$$

Persamaan tersebut bisa dinyatakan sebagai

$$\int_a^b \left[\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} \right] dx = 0. \quad (2.8)$$

Persamaan (2.7) disebut integral hukum kekekalan mobil (global).

2.2.3 Lemma Lagrange

Untuk membuktikan bahwa nilai integral pada selang $[a, b]$ adalah nol, maka digunakan lemma Lagrange.

Misalkan f adalah suatu fungsi kontinu yang terdefinisi pada sebuah selang $[A, B]$. Jika integral $\int_a^b f(x) dx = 0$ berlaku untuk setiap subselang $[a, b] \subset [A, B]$, maka f tidak ada atau identik dengan $f(x) = 0$ untuk tiap $x \in [A, B]$.

Jadi, dengan menggunakan lemma Lagrange tersebut persamaan (2.8) menjadi

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} = 0. \quad (2.9)$$

Persamaan (2.8) disebut sebagai hukum kekekalan mobil (lokal) (Hidayat, 2006).

2.2.4 Model Fluks Mobil

Fluks mobil akan tergantung pada kepadatan ρ dan mungkin juga kepada turunannya terhadap peubah ruang. Selanjutnya, akan dideskripsikan secara jelas model fluks mobil yang sederhana. Hal yang paling gampang untuk menginterpretasikan fluks mobil Q dalam bentuk kecepatan V_{cars} sehingga relasi antara Q dan ρ dapat dinyatakan sebagai

$$Q = \rho V_{cars}. \quad (2.10)$$

Selanjutnya, untuk membuat model yang lebih realistis dengan menggunakan kecepatan tersebut, perlu diasumsikan bahwa seorang pengemudi, kecepatannya akan tergantung kepada situasi di sekitarnya. Kecepatan kendaraan tersebut akan tergantung kepada kepadatan. Jadi kecepatan akan maksimum jika kepadatannya nol, dan kecepatan menjadi nol tatkala kepadatannya maksimum. Model yang paling simpel untuk kecepatan mobil V_{car} adalah model yang tergantung kepada ρ secara linier :

$$V_{car} = \beta(\rho_m - \rho). \quad (2.11)$$

Parameter β pada persamaan di atas merupakan kondisi lingkungan. Melalui observasi menunjukkan bahwa $V_{carmax} = \beta \rho_m$ yakni kecepatan maksimum mobil dicapai pada saat jalan kosong ($\rho = 0$), hubungan tersebut menunjukkan bahwa kecepatan akan hilang jika ρ mencapai nilai maksimum ($\rho = \rho_m$). Substitusikan $Q(\rho) = \rho(\beta(\rho_m - \rho))$ pada persamaan (2.8) sehingga diperoleh

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + V(\rho) \frac{\partial}{\partial x} \rho = 0. \quad (2.12)$$

2.2.5 Model Kepadatan Lalu Lintas Linier Terganggu

Kecepatan kepadatan V yang muncul pada persamaan (2.12), didefinisikan dengan

$$V(\rho) = \frac{dQ(\rho)}{d\rho} = \beta(\rho_m - 2\rho) \quad (2.13)$$

yang menarik disini adalah mengobservasi bahwa kecepatan kepadatan $V(\rho)$ lebih kecil dari kecepatan mobil. Walaupun kecepatan mobil selalu positif, kecepatan kepadatan mengalami penurunan untuk $\rho > \frac{1}{2}\rho_m$ (pada saat lalu lintas padat) dan mengalami peningkatan untuk lalu lintas renggang $\rho < \frac{1}{2}\rho_m$ (Groesen, 2001). Substitusikan persamaan (2.13) ke dalam persamaan (2.12) diperoleh

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \frac{dQ(\rho)}{d\rho} \frac{\partial}{\partial x}\rho = 0$$

Satu syarat awal yang memungkinkan adalah kepadatan awal lalu lintas $\rho(x, 0) = f(x)$, dan persamaan diferensial parsial ini tidak dapat secara langsung diintegrasikan hal ini dikarenakan $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ dan $\frac{\partial \rho}{\partial x}$ muncul bersamaan.

Jika kepadatan awal lalu lintas adalah konstan yaitu $\rho(x, 0) = \rho_0$ dan dimana x variabel bebas, maka kepadatan akan tetap konstan (karena semua kendaraan bergerak dalam kecepatan yang sama). Ini kelihatan jelas dengan menyatakan bahwa kepadatan yang konstan $\rho(x, t) = \rho_0$ memenuhi persamaan diferensial parsial (2.9).

Jika kepadatannya hampir *uniform* maka harus ada perkiraan penyelesaian persamaan diferensial parsial sedemikian rupa hingga

$$\rho(x, t) = \rho_0 + \varepsilon\rho(x, t) \quad (2.14)$$

dimana ρ merupakan kepadatan terganggu dan $|\varepsilon\rho| \ll \rho_0$. Bentuk $\varepsilon\rho(x, t)$ ini disebut kepadatan lalu lintas yang terganggu (penyimpangan yang kepadatannya konstan) sehingga $\rho(x, 0) = \rho_0 + \varepsilon f(x)$. Dengan mensubstitusikan persamaan (2.14) ke bentuk (2.9) menghasilkan

$$\varepsilon \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{dQ}{d\rho}(\rho_0 + \varepsilon\rho(x, t))\varepsilon \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0$$

Turunan $\frac{dQ}{d\rho}$ dievaluasikan pada kepadatan total lalu lintas

$$\rho_0 + \varepsilon\rho(x, t).$$

Persamaan ini dikembangkan dengan menggunakan deret Taylor sehingga menghasilkan

$$\frac{dQ}{d\rho}(\rho_0 + \varepsilon\rho(x, t)) = \frac{dQ}{d\rho}(\rho_0) + \varepsilon\rho \frac{d^2Q}{d\rho^2}(\rho_0) + \frac{(\varepsilon\rho)^2}{2!} \frac{d^3Q}{d\rho^3}(\rho_0) + \dots$$

kemudian didapat persamaan

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{dQ}{d\rho}(\rho_0) \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \quad (2.15)$$

Persamaan diferensial parsial ini mengatur kepadatan lalu lintas terganggu. Namun demikian persamaan (2.15) adalah persamaan diferensial linier, sedangkan persamaan (2.9) yang pasti adalah non linier.

Koefisien yang muncul dalam persamaan (2.15) yaitu $\left(\frac{dQ}{d\rho}\right)(\rho_0)$ adalah konstanta yang sesuai dengan kecepatan yang konstan (slope dari arus sebagai fungsi dari kepadatan yang dievaluasikan pada kepadatan yang konstan). Oleh karena

$$\left(\frac{dQ}{d\rho}\right)(\rho_0) = c$$

maka persamaan (2.15) dapat dirubah menjadi bentuk

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + c \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \quad (\text{Sugiono, 1985}). \quad (2.16)$$

2.3 Teknik Beda Hingga

Pengertian penyelesaian dengan teknik beda hingga (*finite-difference technique*) dapat dijelaskan dengan meninjau suatu luasan yang merupakan hasil dari persamaan diferensial parsial yang mempunyai variabel tak bebas dan dua atau lebih variabel bebas. Setiap persamaan diferensial yang berlaku pada luasan tersebut menyatakan keadaan suatu titik atau ruas yang cukup kecil di luasan tersebut.

Misal diberikan persamaan:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.17)$$

Untuk mengaproksimasi persamaan (2.17) dengan beda hingga, dibuat garis paralel pada sumbu x dan t yang membentuk *grid*. Setelah itu akan ditulis Δx dan Δt untuk jarak garis.

$$(x_j = j\Delta x, t_n = n\Delta t); j = 1, 2, \dots, J; n = 1, 2, \dots$$

dengan $\Delta x = \frac{L}{J}$, yang disebut titik jaringan (*grid point*). Bentuk turunan pertama dan kedua terhadap waktu dan ruang adalah:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n}{\Delta x^2} \quad (2.19)$$

Dalam bentuk beda hingga di atas, superskrip n dan $n + 1$ menunjukkan nilai u pada waktu n dan $n + 1$. Penulisan n sebagai superskrip, menunjukkan waktu, untuk membedakan dengan subskrip untuk j yang menunjukkan notasi ruang (Triatmodjo, 1992).

Ada tiga tipe metode (skema) dasar untuk menyelesaikan persamaan (2.17), yaitu:

- a. skema Eksplisit,
- b. skema Implisit dan,
- c. skema Crank-Nicholson.

2.3.1 Skema Eksplisit

Pada skema eksplisit, variabel waktu $n + 1$ dihitung berdasarkan variabel pada waktu n yang sudah diketahui. Dengan menggunakan skema eksplisit, fungsi $u(x, t)$ dan turunannya dalam ruang dan waktu didekati oleh bentuk berikut:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= u_j^n \\ \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} &\approx \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} \\ \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} &\approx \frac{u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n}{\Delta x^2} \end{aligned}$$

sehingga persamaan (2.16) dapat ditulis:

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} &= v_j \frac{u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n}{\Delta x^2} \\ u_j^{n+1} &= u_j^n + v_j w (u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n) \end{aligned} \quad (2.20)$$

dimana $w = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$.

Persamaan (2.16) dengan kondisi batas yang diketahui memungkinkan untuk menghitung u_j^{n+1} , dari nilai awal dan nilai batas:

$$u_j^0 = u(x_j, 0) ; j = 1, 2, \dots, J - 1$$

$$u_0^n = u_J^n = 0 ; n = 0, 1, 2, \dots$$

Kondisi perhitungan pada metode eksplisit akan stabil jika $0 < w < \frac{1}{2}$. Skema eksplisit memberikan hasil yang baik apabila langkah waktu Δt yang cukup kecil. Apabila Δt besar, penyelesaian dari persamaan (2.20) menjadi tidak stabil. Hal ini menyebabkan metode eksplisit kurang disukai, karena langkah waktu Δt dibatasi berdasarkan bilangan Courant yaitu dimana nilai dari $Cr = (U \Delta t) / \Delta x \leq 1$. Apabila nilai $Cr > 1$ maka hitungan menjadi tidak stabil. Penggunaan langkah waktu Δt yang kecil tersebut menyebabkan prosedur dan waktu hitungan menjadi sangat panjang dan lama.

2.3.2 Skema Implisit

Dalam skema implisit, ruas kanan persamaan (2.17) tersebut ditulis pada waktu $n + 1$, dimana nilainya belum diketahui. Dengan menggunakan skema tersebut, fungsi $u(x, t)$ dan turunannya dalam ruang dan waktu didekati oleh bentuk berikut ini:

$$u(x, t) = u_j^n \text{ atau } u(x, t) = u_j^{n+1}$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \approx \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t}$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \approx \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2\Delta t}$$

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \approx \frac{u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1}}{\Delta x^2}$$

Dengan menggunakan skema di atas, persamaan (2.17) dapat ditulis dalam bentuk beda hingga:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = v_j \frac{u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1}}{\Delta x^2} \quad (2.21)$$

$$\frac{1}{\Delta t} u_j^{n+1} - \frac{v_j}{\Delta x^2} u_{j-1}^{n+1} + \frac{2v_j}{\Delta x^2} u_j^{n+1} - \frac{v_j}{\Delta x^2} u_{j+1}^{n+1} = \frac{u_j^n}{\Delta t}$$

$$\begin{aligned}
-\frac{u_j}{\Delta x^2} u_{j-1}^{n+1} + \left(\frac{1}{\Delta t} + \frac{2v_j}{\Delta x^2} \right) u_j^{n+1} - \frac{v_j}{\Delta x^2} u_{j+1}^{n+1} &= \frac{u_j^n}{\Delta t} \\
-wv_j u_{j-1}^{n+1} + (1 + 2wv_j) u_j^{n+1} - wv_j u_{j+1}^{n+1} &= u_j^n
\end{aligned} \tag{2.22}$$

dengan $w = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$.

Dengan memberikan nilai $j = 1, 2, \dots, (J - 1)$, kita memperoleh persamaan linier $(J - 1)$ yang dapat diselesaikan dengan metode matrik.

Penyelesaian dengan menggunakan skema implisit lebih sulit dibandingkan dengan skema eksplisit. Kelebihan dari skema implisit adalah stabil tanpa syarat, langkah waktu Δt dapat diambil sembarang (besar) tanpa menimbulkan ketidakstabilan. Pembatasan Δt hanya untuk menjaga kesalahan pemotongan (*truncation error*) dalam batas-batas yang dapat diterima.

2.3.3 Skema Crank-Nicholson

Dalam skema eksplisit, ruas kanan dari persamaan (2.17) ditulis pada waktu n . Dalam skema implisit, ruas kanan dari persamaan tersebut ditulis untuk waktu $n + 1$. Skema Crank-Nicholson menulis ruas kanan dari persamaan (2.17) pada waktu $\frac{n+1}{2}$ yang merupakan nilai rerata dari skema eksplisit dan implisit. Turunan kedua fungsi terhadap x adalah :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{1}{2} \left(\frac{u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1}}{\Delta x^2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n}{\Delta x^2} \right)$$

Dengan menggunakan skema di atas persamaan (2.17) dapat ditulis:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = v_j \left(\frac{1}{2} \frac{u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1}}{\Delta x^2} + \frac{1}{2} \frac{u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n}{\Delta x^2} \right) \tag{2.23}$$

Suku kedua ruas kanan dari persamaan di atas telah diketahui. Terlihat bahwa persamaan di atas adalah persamaan implisit (Hidayat, 2009).

Untuk lebih memudahkan perhitungan, nilai u_{j-1}^{n+1} , u_j^{n+1} , u_{j+1}^{n+1} dijadikan dalam satu sisi dengan menguraikan persamaan (2.23). Sehingga diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 & \frac{-v}{2\Delta x^2} u_{j+1}^{n+1} + \left(\frac{1}{2\Delta t} + \frac{v}{\Delta x^2} \right) u_j^{n+1} - \frac{v}{2\Delta x^2} u_{j-1}^{n+1} \\
 & = \frac{v}{2\Delta x^2} u_{j+1}^n + \left(\frac{1}{2\Delta t} - \frac{v}{\Delta x^2} \right) u_j^n + \frac{v}{2\Delta x^2} u_{j-1}^n
 \end{aligned} \tag{2.24}$$

atau

$$-Lu_{j+1}^{n+1} + Mu_j^{n+1} - Nu_{j-1}^{n+1} = Lu_{j+1}^n + Ou_j^n + Nu_{j-1}^n$$

Dimana:

$$\begin{aligned}
 L &= \frac{v}{2\Delta x^2} & M &= \left(\frac{1}{2\Delta t} + \frac{v}{\Delta x^2} \right) \\
 N &= \frac{v}{2\Delta x^2} & O &= \left(\frac{1}{2\Delta t} - \frac{v}{\Delta x^2} \right)
 \end{aligned}$$

Asumsikan bahwa untuk $j = 1, 2, 3, \dots, m$, dan dengan diketahui nilai awal dan nilai batasnya, maka dari persamaan (2.23) akan terbentuk sistem persamaan dalam bentuk matriks seperti berikut:

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} M & -O & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ -L & M & -O & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -L & M & -O & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdot & \cdot & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & -L & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ u_3^{n+1} \\ \vdots \\ u_{k-1}^{n+1} \end{bmatrix} \\
 & = \begin{bmatrix} O & N & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ L & O & N & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L & O & N & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdot & \cdot & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & L & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ u_3^n \\ \vdots \\ u_{k-1}^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L(b_0 + a_0) \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ N(b_L + a_0) \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

atau

$$\mathbf{X}\rho_j^{n+1} = \mathbf{Y}\rho_j^n + \mathbf{Z}$$

$$\rho_j^{n+1} = \mathbf{X}^{-1}(\mathbf{Y}\rho_j^n + \mathbf{Z}) \tag{2.26}$$

Dari beberapa keterangan di atas, maka dapat diambil kesimpulan bahwa untuk persamaan (2.17) dalam metode beda hingga dapat ditulis dalam bentuk:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \alpha \left(\frac{u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1}}{\Delta x^2} \right) + (1 - \alpha) \left(\frac{u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n}{\Delta x^2} \right) \tag{2.27}$$

Kelebihan dari skema ini adalah bahwa untuk nilai Δx tertentu kesalahan pemotongan pada suku dalam Δt adalah lebih kecil daripada dalam skema implisit dan eksplisit.

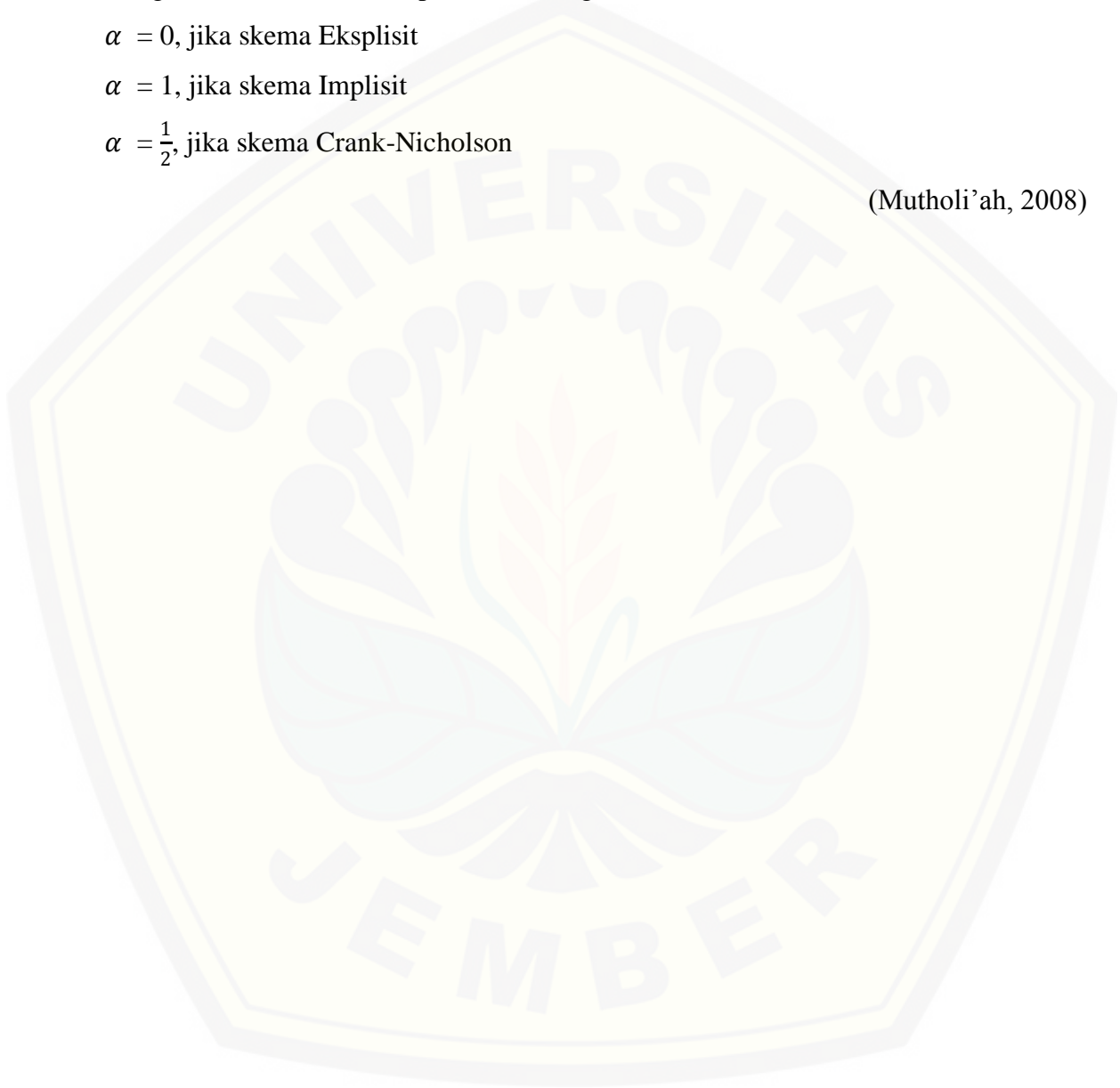
Dengan α adalah koefisien pembobot dengan nilai:

$\alpha = 0$, jika skema Eksplisit

$\alpha = 1$, jika skema Implisit

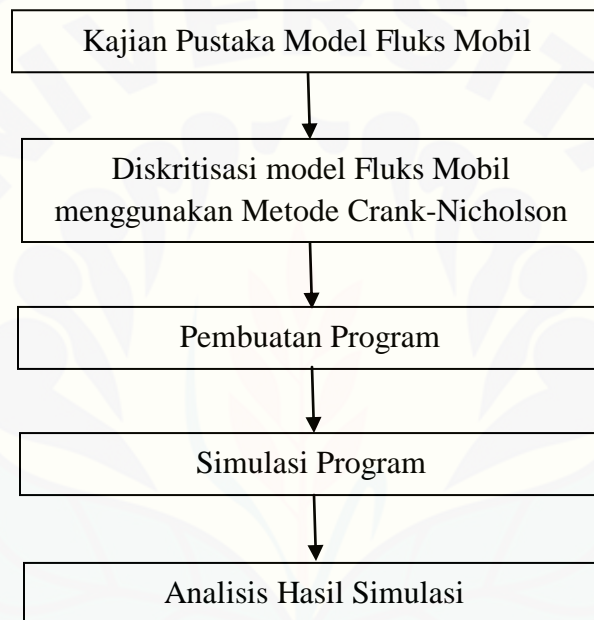
$\alpha = \frac{1}{2}$, jika skema Crank-Nicholson

(Mutholi'ah, 2008)



BAB 3. METODE PENELITIAN

Secara skematik, langkah-langkah yang dilakukan dalam tugas akhir ini dapat dilihat pada Gambar 3.1.



Gambar 3.1 Skema Langkah Penelitian

Langkah-langkah penelitian pada Gambar 3.1 dapat dijelaskan sebagai berikut.

a. Kajian Pustaka Model Fluks Mobil

Kajian Pustaka dengan cara memahami secara teoritis untuk mendapatkan data dan informasi dari buku-buku, artikel-artikel, jurnal, dan skripsi atau tugas akhir yang terkait materi tentang model fluks Mobil.

b. Diskritisasi model Fluks Mobil menggunakan Metode Crank-Nicholson

Persamaan yang digunakan dalam penelitian ini adalah persamaan (2.16). Pada proses ini, persamaan (2.16) diubah kedalam bentuk skema beda hingga dengan menggunakan metode Crank-Nicholson serta mendefinisikan variabel-variabelnya dengan cara sesuai skema umum, pada persamaan (2.22).

c. Pembuatan Program

Seperti yang telah dijelaskan pada subbab di atas (1.2) bahwa *software* yang akan digunakan dalam pembuatan program adalah *software* Matlab R2009a.

Adapun prosedur untuk membuat program analisis model fluks mobil adalah sebagai berikut:

1) input nilai-nilai parameter

Penentuan parameter ini diambil dari literatur yang berkaitan dengan lalu lintas yang bersumber dari Sudrajat (2010). Nilai-nilai parameter tersebut diantaranya kecepatan kepadatan (c), panjang jalan (P_j), lebar jalan (L_j), jumlah kendaraan (N) dan waktu pengamatan (t).

2) proses

Adapun proses yang dilakukan yaitu membuat program untuk metode Crank-Nicholson.

3) output

Output yang dihasilkan dari program ini yaitu berupa grafik $\rho(x, t)$ terhadap panjang jalan yang dilalui kendaraan.

d. Simulasi Program

Proses simulasi model fluks mobil ini dilakukan dengan mengimplementasikan skema Crank-Nicholson pada *software* Matlab 7.8.0 (R2009a). Setelah pembuatan program selesai, langkah selanjutnya adalah mensimulasi beberapa parameter yang mempengaruhi kepadatan. Simulasi ini dilakukan dengan mengubah nilai parameter N .

e. Analisis Hasil Simulasi

Hasil yang diperoleh dari simulasi selanjutnya dianalisis. Analisis dilakukan dengan memperhatikan grafik yang dihasilkan oleh program pada langkah sebelumnya. Grafik tersebut menunjukkan pengaruh parameter N yang menghasilkan nilai kepadatan yang berbeda-beda. Hal ini dilakukan untuk mengetahui profil dari fluks mobil.

