

**ANALISIS MODEL EPIDEMIK MSEIR  
PADA PENYEBARAN PENYAKIT DIFTERI**

**SKRIPSI**

Oleh

**Unik Novita Wulandari  
NIM: 081810101042**

**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS JEMBER  
2013**



**ANALISIS MODEL EPIDEMIK MSEIR  
PADA PENYEBARAN PENYAKIT DIFTERI**

**SKRIPSI**

diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan Program Studi Matematika (S1) dan mencapai gelar Sarjana Sains

Oleh

**Unik Novita Wulandari  
NIM: 081810101042**

**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS JEMBER  
2013**

## **PERSEMBAHAN**

Skripsi ini saya persembahkan untuk:

1. Ibunda Siti Indun dan Ayahhanda Sarjuni yang tercinta;
2. Almarhum eyang kakung Riono dan eyang putri Tarbingatun yang terkasih;
3. Ninis Febrian Yuliansya yang tersayang;
4. guru-guru sejak taman kanak-kanak sampai dengan perguruan tinggi;
5. Almamater Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

## MOTTO

..... Sesungguhnya Allah tidak mengubah keadaan suatu kaum sehingga mereka mengubah keadaan yang ada pada diri mereka sendiri .....

(terjemahan surat *Ar-Ra'd* ayat 11)\*)

---

\*) Departemen Agama Republik Indonesia. 2005. *Al Quran dan Terjemahannya*. Bandung: CV. Jumanatul Ali Art.

## **PERNYATAAN**

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

nama : Unik Novita Wulandari

NIM : 081810101042

menyatakan dengan sesungguhnya bahwa karya ilmiah yang berjudul “Analisis Model Epidemik MSEIR pada Penyebaran Penyakit Difteri” adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali kutipan yang sudah saya sebutkan sumbernya, belum pernah diajukan pada institusi manapun, dan bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa ada tekanan dan paksaan dari pihak mana pun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, 19 Februari 2013

Yang menyatakan,

Unik Novita Wulandari  
NIM 081810101042

## **SKRIPSI**

### **ANALISIS MODEL EPIDEMIK MSEIR PADA PENYEBARAN PENYAKIT DIFTERI**

Oleh

Unik Novita Wulandari  
081810101042

Pembimbing

Dosen Pembimbing Utama : Kosala Dwidja Purnomo, S.Si., M.Si.

Dosen Pembimbing Anggota : Drs. Rusli Hidayat, M.Sc.

## PENGESAHAN

Skripsi yang berjudul “Analisis Model Epidemik MSEIR pada Penyebaran Penyakit Difteri” telah diuji dan disahkan pada:

hari, tanggal :

tempat : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Universitas Jember

### Tim Penguji:

Ketua,

Sekretaris,

Kosala Dwidja Purnomo, S.Si., M.Si  
NIP 196908281998021001

Drs. Rusli Hidayat, M.Sc.  
NIP 196610121993031001

Penguji I,

Penguji II,

Kiswara Agung Santosa, S.Si., M.Kom.  
NIP 197209071998031003

Ahmad Kamsyakawuni S.Si.,M.Kom.  
NIP 211291998021001

Mengesahkan

Dekan,

Prof. Drs. Kusno, DEA, Ph.D.  
NIP 196101081986021001

## RINGKASAN

### **Analisis Model Epidemik MSEIR pada Penyebaran Penyakit Difteri;**

Unik Novita Wulandari, 081810101042; 2013 : 38 halaman; Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Penyakit difteri merupakan salah satu masalah kesehatan yang penyebarannya sangat cepat, penyakit ini disebabkan oleh *corynebacterium diphteriae* yang biasanya mempengaruhi selaput lendir dan tenggorokan. Untuk mengetahui apakah suatu penyakit menular dapat menjadi endemik atau tidak, dikenal beberapa model penyebaran penyakit baik model yang bersifat deterministik maupun yang bersifat stokastik salah satunya adalah model epidemik MSEIR. Tujuan penelitian ini adalah mengkaji model MSEIR dalam upaya pencegahan terjadinya epidemik dan mendapatkan ambang batas ( $R_0$ ) melalui uji kestabilan titik keseimbangan bebas penyakit (*disease free equilibrium*) dan titik keseimbangan endemik (*endemic equilibrium*). Hasil penelitian diharapkan dapat memberi informasi mengenai kecenderungan pengidap penyakit difteri melalui model epidemik MSEIR.

Dalam penelitian ini, data yang digunakan adalah data dari Dinas Kesehatan Kabupaten Jember dan Badan Pusat Statistika Kabupaten Jember. Penelitian dilakukan dalam beberapa langkah. Langkah pertama adalah dengan memahami model epidemik MSEIR yang sudah ada. Langkah kedua adalah pemodelan MSEIR untuk penyakit difteri dengan memodifikasi atau menurunkan model yang sudah ada. Langkah ketiga adalah mencari titik keseimbangan bebas penyakit dan titik keseimbangan endemik dari model epidemik MSEIR. Langkah keempat adalah analisis dengan menguji kestabilan dari model epidemik MSEIR. Analisis stabilitas dapat dilakukan dengan cara melihat tanda akar-akar polinomial karakteristik dari



matrik Jacobian yang telah dievaluasi pada titik keseimbangan. Selain itu, juga dapat dilakukan dengan cara menggunakan kriteria *Routh-Hurwitz*. Langkah kelima adalah mengestimasi parameter-parameter yang terdapat dalam model epidemik MSEIR dan selanjutnya model diplot untuk mengetahui perilaku model epidemik MSEIR pada penyebaran penyakit difteri. Langkah terakhir adalah analisa hasil.

Berdasarkan hasil penelitian yang dilakukan di Kabupaten Jember, diperoleh hasil bahwa model epidemik MSEIR pada penyebaran penyakit difteri memiliki bilangan reproduksi dasar sebesar 259.218.390,8, sehingga titik keseimbangan bebas penyakit  $(\bar{M}, \bar{S}, \bar{E}, \bar{I}) = (25.434.586,47; 0; 0; 0)$  stabil asimtotik. Nilai  $(R_0)$  yang begitu besar memiliki arti bahwa perlu ada tindakan untuk mengurangi laju perubahan pada *maternal antibodies* sehingga dapat mengurangi nilai dari  $(R_0)$ . Karena nilai  $(R_0)$  lebih dari 1 maka penyakit tidak hilang dari populasi serta menyebabkan endemik di Kabupaten Jember. Nilai  $(R_0)$  lebih besar dari satu berarti setiap penderita dapat menularkan penyakit kepada lebih dari satu penderita baru sehingga pada akhirnya terjadi penyebaran penyakit yang meluas.

Kajian yang dilakukan terhadap penyebaran penyakit difteri di Kabupaten Jember dengan menggunakan model epidemik MSEIR memberikan hasil bahwa dengan menggunakan model tersebut terlihat bahwa penyakit difteri tidak menghilang dari Kabupaten Jember. Hal ini sesuai dengan kondisi riil di Kabupaten Jember yang sepanjang tahun 2012 terdapat kasus difteri dengan kasus tertinggi yaitu sebanyak 57 orang

## **PRAKATA**

Puji syukur kehadirat Allah SWT karena atas segala rahmat dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul “Analisis Model Epidemik MSEIR pada Penyebaran Penyakit Difteri”. Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat menyelesaikan pendidikan strata satu (S1) pada Jurusan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Penulis menyadari bahwa dalam penyusunan sampai terselesaikannya skripsi ini tidak lepas dari bantuan berbagai pihak. Karenanya penulis ingin mengucapkan banyak terima kasih kepada:

1. Bapak Kosala Dwidja Purnomo, S.Si., M.Si., selaku Dosen Pembimbing Utama dan bapak Drs. Rusli Hidayat, M.Sc., selaku Dosen Pembimbing Anggota yang telah meluangkan waktu, pikiran dan perhatiannya dalam penulisan skripsi ini;
2. Bapak Kiswara Agung Santosa, S. Si., M. Kom dan Ahmad Kamsyakawuni, S. Si., M. Kom., selaku Dosen penguji yang telah memberi masukan dalam skripsi ini;
3. ibu dan ayah serta keluarga di rumah yang telah memberikan doa dan semangat;
4. Drs. Moh. Hasan, M.Sc., Ph.D., selaku Dosen Pembimbing Akademik yang telah membimbing selama penulis menjadi mahasiswa;
5. Dinas Kesehatan Kabupaten Jember yang telah memberikan data kepada penulis;
6. teman-teman angkatan 2008 yang telah membantu baik secara langsung maupun tidak langsung;
7. semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu per satu.

Karena skripsi ini masih jauh dari sempurna, kritik dan saran yang sifatnya membangun sangat penulis harapkan. Akhirnya penulis berharap, semoga skripsi ini dapat memberi manfaat dan sumbangan bagi ilmu pengetahuan.

Jember, 19 Februari 2013

Penulis

## DAFTAR ISI

	Halaman
HALAMAN JUDUL .....	ii
HALAMAN PERSEMBAHAN .....	iii
HALAMAN MOTTO .....	iv
HALAMAN PERNYATAAN.....	v
HALAMAN PEMBIMBINGAN.....	vi
HALAMAN PENGESAHAN.....	vii
RINGKASAN .....	viii
PRAKATA.....	x
DAFTAR ISI.....	xi
DAFTAR GAMBAR.....	xiii
<b>BAB 1. PENDAHULUAN .....</b>	<b>1</b>
<b>1.1 Latar Belakang.....</b>	<b>1</b>
<b>1.2 Rumusan Masalah.....</b>	<b>2</b>
<b>1.3 Tujuan.....</b>	<b>3</b>
<b>1.4 Manfaat.....</b>	<b>3</b>
<b>BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA.....</b>	<b>4</b>
<b>2.1 Difteri .....</b>	<b>4</b>
<b>2.2 Model Kermack-McKendrick (Model SIR) .....</b>	<b>4</b>
<b>2.3 Model MSEIR (<i>Maternal antibodi – Susceptible – Exposed –     Infected - Recovered</i>).....</b>	<b>6</b>
<b>2.4 Sistem Keseimbangan dan <i>Autonomous</i>.....</b>	<b>8</b>
<b>2.5 Linierisasi.....</b>	<b>8</b>
<b>2.6 Linierisasi untuk Sistem Persamaan Diferensial Nonlinier     <i>Autonomous</i>.....</b>	<b>9</b>
<b>2.7 Analisis Kestabilan.....</b>	<b>11</b>
<b>2.8 Kriteria Kestabilan <i>Routh - Hurwitz</i> .....</b>	<b>13</b>

<b>2.9 Bilangan Reproduksi Dasar</b> .....	14
<b>2.10 Estimasi Parameter</b> .....	15
<b>BAB 3. METODE PENELITIAN</b> .....	16
<b>BAB 4. HASIL DAN PEMBAHASAN</b> .....	19
<b>4.1 Hasil</b> .....	19
4.1.1 Titik Keseimbangan Bebas Penyakit pada Model Epidemik MSEIR Difteri .....	20
4.1.2 Titik Keseimbangan Endemik pada Model Epidemik MSEIR Difteri .....	21
4.1.3 Analisis Kestabilan pada Titik Keseimbangan Model MSEIR Difteri .....	24
4.1.4 Studi Kasus Model Epidemik MSEIR pada Penyakit Difteri...	29
<b>4.2 Pembahasan</b> .....	31
<b>BAB 5. PENUTUP</b> .....	35
<b>5.1 Kesimpulan</b> .....	35
<b>5.2 Saran</b> .....	36
<b>DAFTAR PUSTAKA</b> .....	37
<b>LAMPIRAN</b> .....	39

## DAFTAR GAMBAR

	Halaman
2.1 Kompartemen model SIR .....	5
2.2 Kompartemen model MSEIR.....	7
3.1 Skema Metode Penelitian.....	16
4.1 Plot <i>maternal antibodies</i> dan <i>susceptible</i> model epidemik MSEIR pada difteri .....	32
4.2 Plot <i>exposed</i> dan <i>infected</i> epidemik MSEIR pada difteri.....	33

## BAB 1. PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Penyakit difteri merupakan salah satu masalah kesehatan yang penyebarannya sangat cepat, penyakit ini disebabkan oleh *corynebacterium diphtheriae* yang biasanya mempengaruhi selaput lendir dan tenggorokan. Penyakit ini banyak menyerang pada anak-anak. Pencegahan dalam penyebaran penyakit difteri selain dengan imunisasi juga tergantung terhadap kekebalan atau antibodi yang dimiliki oleh seseorang (Hull D & Johnston D I, 2008).

Untuk mengetahui apakah suatu penyakit menular dapat menjadi endemik atau tidak, dikenal beberapa model penyebaran penyakit baik model yang bersifat deterministik maupun yang bersifat stokastik. Model-model tersebut memiliki karakteristik tersendiri. Salah satu model epidemik penyebaran penyakit adalah model SIR (*susceptible-infected-recovered*). Model SIR digunakan untuk mengetahui laju penyebaran dan hilangnya suatu wabah penyakit dalam suatu populasi tertutup. Dari model epidemik tersebut akan terbentuk suatu sistem persamaan diferensial. Dengan persamaan diferensial yang telah terbentuk tadi, dapat dicari titik kritisnya (titik kesetimbangan) dan menganalisis kestabilannya (Esteva, Tanpa Tahun).

Dari titik kritis (titik keseimbangan) yang diperoleh, dapat dicari bilangan reproduksi dasar, dimana bilangan reproduksi dasar merupakan parameter penting dalam matematika epidemiologi yang merupakan ambang batas terjadinya penyebaran penyakit.

Penelitian tentang model epidemik tentang penyebaran penyakit telah banyak dilakukan guna mencegah penyebaran penyakit menular, salah satunya adalah Sarrayu (2010) yang pada tugas akhirnya menjelaskan tentang penyelesaian numerik dan analisis perilaku model SIR dengan vaksinasi untuk pencegahan penularan penyakit. Pada penjelasan tersebut diperoleh hasil bahwa pemberian vaksin dapat mengurangi jumlah populasi *susceptible*. Penelitian tentang model epidemik juga

dilakukan oleh Setyawan (2011), dalam kajiannya tersebut diperoleh titik keseimbangan pada saat bebas penyakit dengan pengaruh vaksinasi dan diperoleh juga bilangan reproduksi dasar (*basic reproduction number*) dengan pengaruh vaksinasi.

Kedua kajian model epidemik yang telah dilakukan diatas tidak memperhatikan pengaruh dari antibodi yang telah dimiliki oleh seseorang, sehingga membuat penulis tertarik untuk mengkajinya pada jenis penyakit tertentu dengan memperhatikan pengaruh dari antibodi yang telah dimiliki sebelumnya. Hal ini disebabkan karena pengaruh dari antibodi juga dapat membantu dalam proses pencegahan dari penularan suatu penyakit.

Pada tugas akhir ini akan dilakukan analisis model epidemik MSEIR pada penyebaran penyakit difteri. Model MSEIR (*Maternal antibodies-Susceptible-Exposed-Infected-Recovered*) menggambarkan lima kompartemen yakni populasi individu yang dilindungi dengan antibodi (*maternal-antibodies*), populasi yang mudah terinfeksi (*susceptible*), kelas populasi yang terdeteksi virus (*exposed*), kelas populasi yang terinfeksi (*infected*), dan kelas populasi yang sembuh dari penyakit (*recovered*).

## **1.2 Rumusan Masalah**

Permasalahan yang akan dibahas dalam penulisan tugas akhir ini adalah bagaimana mengkaji model MSEIR dalam upaya pencegahan terjadinya epidemik dan bagaimana cara mendapatkan ambang batas ( $R_0$ ) melalui uji kestabilan titik keseimbangan bebas penyakit (*disease free equilibrium*) dan titik keseimbangan endemik (*endemic equilibrium*).

### **1.3 Tujuan**

Tujuan dari penulisan tugas akhir ini adalah mengkaji penyebaran penyakit difteri dengan menggunakan model epidemik MSEIR dan mendapatkan ambang batas ( $R_0$ ) melalui uji kestabilan titik keseimbangan bebas penyakit (*disease free equilibrium*) dan titik keseimbangan endemik (*endemic equilibrium*).

### **1.4 Manfaat**

Manfaat yang dapat diperoleh dari tugas akhir ini adalah dapat memberi informasi mengenai kecenderungan penyakit difteri melalui model epidemik MSEIR.



## **BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA**

### **2.1 Difteri**

Difteri merupakan salah satu penyakit menular yang bersumber dari *Corynebacterium diphtheriae*, penyakit ini mempengaruhi selaput lendir dan tenggorokan. Difteri umumnya menyebabkan sakit tenggorokan, demam, kelenjar bengkak, dan lemas. Dalam tahap lanjut, difteri bisa menyebabkan kerusakan pada jantung, ginjal dan sistem saraf. Kondisi seperti itu pada akhirnya bisa berakibat sangat fatal dan berujung pada kematian.

Cara penularan difteri adalah melalui kontak langsung dengan penderita difteri, seseorang dapat tertular difteri bila menghirup bakteri difteri, bisa di tempat umum, di kendaraan atau di mana saja. Kerentanan terhadap infeksi penyakit difteri tergantung dari pernah tidaknya seseorang terinfeksi oleh difteri, sedangkan kekebalan terhadap difteri diperoleh setelah vaksinasi dan kekebalan pasif pada seorang bayi. Kekebalan pasif atau juga disebut imun pasif adalah imun yang diperoleh selama dalam kandungan ibu yang disalurkan melalui plasenta, imun pasif ini akan ada pada bayi hingga bayi berumur 6 bulan.

Selang waktu dimana individu terinfeksi sampai munculnya penyakit (masa inkubasi) untuk penyakit difteri adalah 2 sampai 5 hari, setelah melewati periode laten/ masa inkubasi, individu dengan difteri tersebut dapat menginfeksi individu lainnya. Masa penginfeksi penderita difteri 2 sampai 4 minggu sejak masa inkubasi (Hull D & Johnston D I, 2008).

### **2.2 Model Kermack-McKendrick**

Kebanyakan model matematika tentang penyebaran penyakit menular dimulai dari dasar pemikiran yang sama yaitu membagi individu kedalam kelas-kelas. Salah

satu model yang banyak dikenal di beberapa daerah di dunia untuk penyebaran penyakit menular adalah model Kermack-McKendrick atau juga disebut sebagai model SIR (*Susceptible-Infected-Recovered*). Model SIR membagi populasi menjadi populasi yang mudah terinfeksi (*susceptible*), kelas populasi yang terinfeksi (*infected*), dan kelas populasi yang sembuh dari penyakit dan telah memiliki kekebalan (*recovered*). Pembagian kelas tersebut disebut sebagai kompartemen (*compartment*). Dalam model ini,  $S(t), I(t), R(t)$  mewakili jumlah individu *susceptible*, *infected* dan *recovered* pada waktu  $t$  sedangkan  $N$  adalah total keseluruhan dari populasi. *susceptible* adalah jumlah individu yang mudah terinfeksi, *infected* adalah jumlah individu yang terinfeksi, dan *recovered* adalah jumlah individu yang sembuh dari penyakit.

Kompartemen model SIR (*Susceptible-Infected-Recovered*) dapat dilihat pada Gambar 2.1 berikut.



Gambar 2.1 Kompartemen model SIR

Sehingga diperoleh formulasi untuk model SIR sebagai berikut:

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI \quad S(0) > 0$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I \quad I(0) > 0$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I \quad R(0) > 0$$

$$N(t) = S(t) + I(t) + R(t), \beta > 0, \gamma > 0.$$

Laju perubahan untuk setiap kompartemen diperoleh dari input masing-masing kompartemen dikurangi output dari masing-masing kompartemen.

Asumsi untuk model diatas adalah:

1. penyebaran penyakit berada pada lingkungan tertutup, artinya tidak ada imigrasi ataupun emigrasi, dan tidak ada kelahiran ataupun kematian pada populasi, sehingga total populasi adalah konstan.

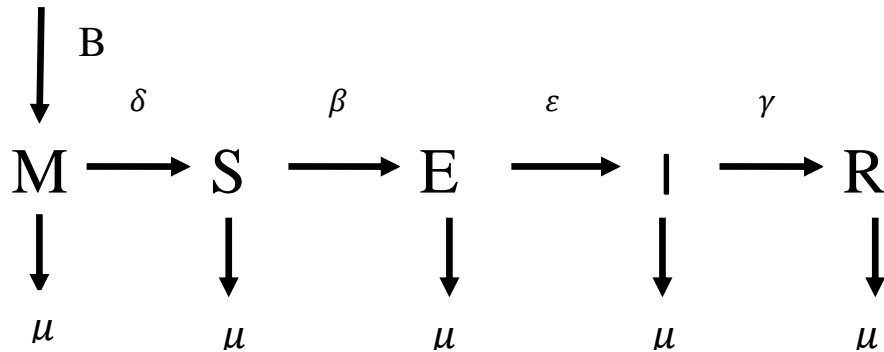
2. jumlah individu yang pindah dari kompartemen *infected* persatuan waktu dinyatakan dengan  $\gamma I(t)$ , dimana  $\gamma$  adalah laju transisi dari kompartemen *infected* ke *recovered*.
3. jumlah individu *susceptible* yang terinfeksi oleh individu *infected* persatuan waktu dinyatakan dengan  $\beta SI$ .

Model diatas merupakan model epidemik deterministik. Model deterministik disebut juga model kompartemen, kebanyakan model untuk penyakit infeksi menggunakan model deterministik karena hanya membutuhkan sedikit data (Trottier H & Philippe P, 2001).

### **2.3 Model MSEIR (*Maternal antibodies-Susceptible-Exposed-Infected-Recovered*)**

Model SIR klasik dapat dimodifikasi menjadi berbagai bentuk model epidemik, untuk penyakit difteri dengan memperhatikan pengaruh dari imun pasif yang telah dimiliki pada saat baru lahir dan periode laten atau masa inkubasi selama 5 hari, kompartemen  $M(t)$  (*maternal antibodies*) ditambahkan untuk populasi yang dilindungi dengan imun pasif dan kompartemen  $E(t)$  (*exposed*) untuk populasi yang terinfeksi tetapi belum dapat menginfeksi *susceptible*. Imun pasif adalah imun yang diperoleh selama dalam kandungan ibu yang disalurkan melalui plasenta, imun pasif ini akan ada pada bayi hingga bayi berumur 6 bulan, sedangkan periode laten atau masa inkubasi adalah selang waktu dimana individu terinfeksi sampai munculnya penyakit. Adanya imun pasif dan periode laten ini menjadi alasan pembentukan model MSEIR, yakni muncul populasi yang dilindungi dengan imun pasif (*maternal antibodies*) dan populasi yang terekspose (*exposed*).

Model MSEIR menggambarkan lima kompartemen yaitu kelas populasi yang dilindungi dengan imun pasif (*maternal antibodies*), kelas populasi rentan (*susceptible*), kelas populasi laten (*exposed*), kelas populasi terinfeksi (*infected*), dan kelas populasi sembuh (*recovered*). Kompartemen untuk model MSEIR dapat dilihat pada Gambar 2.2.



Gambar 2.2 Kompartemen model MSEIR

Sehingga formulasi untuk model MSEIR adalah:

$$\frac{dM}{dt} = B - \delta MS - \mu M \quad M(0) > 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{dS}{dt} = \delta MS - \beta SI - \mu S \quad S(0) > 0 \quad (2.2)$$

$$\frac{dE}{dt} = \beta SI - \varepsilon E - \mu E \quad E(0) \geq 0 \quad (2.3)$$

$$\frac{dI}{dt} = \varepsilon E - \gamma I - \mu I \quad I(0) > 0 \quad (2.4)$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I - \mu R \quad R(0) > 0 \quad (2.5)$$

$$N(t) = M(t) + S(t) + E(t) + I(t) + R(t), B > 0, \delta > 0, \beta > 0, \varepsilon > 0, \gamma > 0$$

Dimana  $B$  adalah laju kelahiran populasi yang dilindungi oleh imun,  $\delta MS$  adalah laju transisi dari kompartemen *maternal antibodi* ke *susceptible*,  $\beta SI$  adalah laju transisi dari kompartemen *susceptible* ke *expose*,  $\varepsilon E$  adalah laju transisi dari kompartemen *exposed* ke *infected*,  $\gamma I$  adalah laju transisi dari kompartemen *infected* ke *recovered*. Laju kematian alami untuk tiap kompartemen dinyatakan dengan  $\mu$ , sehingga laju kematian untuk kompartemen *maternal antibodi* adalah  $\mu M$ , laju kematian untuk kompartemen *susceptible* adalah  $\mu S$ , laju kematian untuk kompartemen *expose* adalah  $\mu E$ , laju kematian untuk kompartemen *infected* adalah  $\mu I$ , dan laju kematian untuk *recovered* adalah  $\mu R$  (Momoh, A. A., Ibrahim, M. O, & Madu, B. A, 2011).

## 2.4 Sistem Keseimbangan dan *Autonomous*

Persamaan diferensial biasa merupakan persamaan yang memuat turunan terhadap fungsi yang memuat satu variabel bebas. Sistem persamaan diferensial biasa yang berbentuk:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y) \quad (2.6)$$

$$\frac{dy}{dt} = g(x, y) \quad (2.7)$$

Merupakan sistem *autonomous* karena  $f(x, y)$  dan  $g(x, y)$  tidak memuat variable  $t$  (variabel bebas). Persamaan *autonomous* bersifat bahwa laju perubahan  $\frac{dx}{dt}$  atau  $\frac{dy}{dt}$  hanya bergantung pada nilai solusi tak diketahui  $x$  atau  $y$  dan tidak bergantung pada  $t$  (Campbell & Haberman, 2008). Contoh sistem *autonomous* adalah sebagai berikut:

$$\frac{dx}{dt} = 11x - 3y \quad \frac{dy}{dt} = 3x + 4y \quad (2.8)$$

Contoh sistem *nonautonomous* adalah sebagai berikut:

$$\frac{dx}{dt} = 13x(t) + 4y(t) \quad \frac{dy}{dt} = 3x(t) + 24y(t) \quad (2.9)$$

Persamaan (2.8) merupakan sistem *autonomous*, karena pada persamaan (2.8) bebas dari  $t$ , sedangkan persamaan (2.9) bukan merupakan persamaan *autonomous* karena memuat  $t$ . Sebuah titik  $(x_0, y_0)$  merupakan titik keseimbangan dari persamaan (2.6) dan (2.7) jika memenuhi  $f(x_0, y_0) = 0$  dan  $g(x_0, y_0) = 0$ . Karena turunan suatu konstanta sama dengan nol, maka sepasang fungsi konstan  $x(t) = x_0$  dan  $y(t) = y_0$  merupakan penyelesaian kesetimbangan dari persamaan (2.6) dan (2.7). Solusi keseimbangan dari suatu persamaan diferensial adalah penyelesaian yang tidak bergantung pada  $t$  (konstan terhadap waktu) (Campbell & Haberman, 2008).

## 2.5 Linierisasi

Persamaan nonlinier dapat diselesaikan dengan menggunakan pendekatan sistem persamaan linier. Persamaan-persamaan nonlinier yang ada, terlebih dahulu dilinierkan. Misalkan  $\frac{dx}{dt} = f(x)$  adalah persamaan diferensial orde pertama

*autonomous* dengan solusi setimbang  $x(t) = a$ . Syarat awal merupakan keadaan yang menetapkan nilai pemecahan pada sebuah titik. Syarat awal menunjukkan perilaku fungsi untuk arah waktu (*time direction*). Untuk menganalisis kestabilan di titik keseimbangan, harus ditentukan syarat awal (*initial condition*) yang dekat dengan titik keseimbangan. Salah satu cara yang dapat dilakukan adalah dengan aproksimasi persamaan diferensial di sekitar titik kesetimbangan. Cara ini bertujuan untuk menyederhanakan persamaan diferensial (Campbell & Haberman, 2008).

Dalam kalkulus, deret Maclaurin dapat digunakan untuk mengaproksimasi fungsi  $f(x)$  di sekitar  $x = 0$  adalah

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \dots \quad (2.10)$$

Persamaan (2.10) dapat digunakan untuk mengaproksimasi fungsi di sekitar  $x = a$  dan itu disebut dengan deret Taylor. Fungsi deret Taylor sebagai berikut:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2 + \dots$$

unsur linier dari deret Taylor  $f(a) + f'(a)(x - a)$  termasuk konstanta  $f(a)$  adalah linierisasi atau aproksimasi garis tangen (*tangent line approximation*) untuk fungsi  $f(x)$  disekitar titik kesetimbangan  $x = a$ . Jadi aproksimasi fungsi disekitar titik kesetimbangan dapat dilakukan dengan linierisasi seperti pada persamaan (2.11).

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a) \quad (2.11)$$

## 2.6 Linierisasi untuk Sistem Persamaan Diferensial Nonlinier *Autonomous*

Diberikan sistem nonlinier *autonomous*

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y) \quad (2.12)$$

$$\frac{dy}{dt} = g(x, y) \quad (2.13)$$

Misal  $x(t) = x_0$  dan  $y(t) = y_0$  merupakan solusi setimbang untuk sistem nonlinier *autonomous* diatas. Maka persamaan (2.12) dan (2.13) dapat dilinierkan dengan menggunakan deret Taylor, sehingga didapatkan:

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

$$g(x, y) \approx g(x_0, y_0) + g_x(x_0, y_0)(x - x_0) + g_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

karena  $(x_0, y_0)$  merupakan titik keseimbangan, maka  $f(x_0, y_0) = 0$  dan  $g(x_0, y_0) = 0$ . Solusi persamaan (2.12) dan (2.13) di dekat titik keseimbangan dapat diaproksimasi, sehingga diperoleh:

$$\frac{dx}{dt} = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \quad (2.14)$$

$$\frac{dy}{dt} = g_x(x_0, y_0)(x - x_0) + g_y(x_0, y_0)(y - y_0) \quad (2.15)$$

Misalkan  $z = x - x_0$  dan  $w = y - y_0$  maka:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dx}{dt} \text{ dan } \frac{dw}{dt} = \frac{dy}{dt}$$

sehingga persamaan (2.14) dan (2.15) menjadi:

$$\frac{dz}{dt} = az + bw$$

$$\frac{dw}{dt} = cz + dw$$

Dimana  $a = f_x(x_0, y_0)$ ,  $b = f_y(x_0, y_0)$ ,  $c = g_x(x_0, y_0)$  dan  $d = g_y(x_0, y_0)$ . Persamaan (2.12) dan (2.13) merupakan persamaan linier homogen, dengan menggunakan matrik, sistem (2.12) dan (2.13) dapat ditulis sebagai berikut:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x(x_0, y_0) & f_y(x_0, y_0) \\ g_x(x_0, y_0) & g_y(x_0, y_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix}$$

disini akan diperkenalkan matrik Jacobian, yaitu matrik yang elemen-elemennya berupa turunan pertama.

$$\text{Matrik Jacobian} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

karena matrik  $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix}$  merupakan sebuah matrik pergantian dari titik keseimbangan, maka persamaan (2.16) dapat ditulis menjadi:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{u}$$

dimana  $\mathbf{A}$  adalah matrik konstan yang diperoleh dari mengevaluasi matrik Jacobian pada titik keseimbangan.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} f_x(x_0, y_0) & f_y(x_0, y_0) \\ g_x(x_0, y_0) & g_y(x_0, y_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

(Campbell & Haberman, 2008).

## 2.7 Analisis Kestabilan

Stabilitas dapat dikatakan sebagai perubahan kecil dalam syarat awal hanya menyebabkan pengaruh kecil pada penyelesaian, sedangkan kesetabilan asimtotik berarti bahwa pengaruh dari suatu perubahan kecil cenderung tidak berpengaruh. Kestabilan berarti bahwa suatu perubahan kecil dalam syarat awal mempunyai pengaruh besar pada penyelesaian (Finizio & Ladas, 1982). Pada penelitian yang dilakukan oleh Sarrayu (2010), menjelaskan bahwa kestabilan dari sistem linier atau kestabilan dari sistem linierisasi dari sistem tak linier adalah kestabilan asimtotik lokal. Pendapat lain mengenai kestabilan asimtotik lokal dijelaskan oleh Aini (2010), yang mengatakan bahwa kestabilan dapat dilihat dari tanda nilai karakteristik (nilai eigen) matrik jacobian. Penjelasan mengenai nilai eigen yang diambil dari Anton (1998) akan dijelaskan sebagai berikut.

### Definisi 2.1

Jika  $\mathbf{A}$  merupakan matrik  $n \times n$ , maka vector tak nol  $\mathbf{x}$  di dalam  $R^n$  disebut sebagai vector eigen (*eigen vector*) dari  $\mathbf{A}$  jika  $\mathbf{Ax}$  adalah kelipatan skalar dari  $\mathbf{x}$ , yakni

$$\mathbf{Ax} = \lambda \mathbf{x} \quad (2.17)$$

Untuk suatu skalar  $\lambda$ . Skalar  $\lambda$  disebut nilai eigen (*eigen value*) dari  $\mathbf{A}$  dan  $\mathbf{x}$  dikatakan vector eigen yang bersesuaian dengan  $\lambda$ .

Untuk mencari nilai eigen matrik  $\mathbf{A}$  yang berukuran  $n \times n$  maka harus menuliskan kembali persamaan (2.17) sebagai  $\mathbf{Ax} = \lambda \mathbf{Ix}$  atau secara ekivalen dapat ditulis

$$(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0 \quad (2.18)$$



Supaya  $\lambda$  menjadi nilai eigen, maka harus ada pemecahan tak nol dari persamaan ini. Sehingga, persamaan (2.18) akan mempunyai pemecahan tak nol jika dan hanya jika

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0 \quad (2.19)$$

Persamaan (2.19) dinamakan *persamaan karakteristik*  $\mathbf{A}$ , skalar yang memenuhi persamaan ini adalah nilai eigen dari  $\mathbf{A}$ . Bila diperluas, maka determinan  $\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})$  adalah polinom  $\lambda$  yang kita namakan *polinom karakteristik* dari  $\mathbf{A}$ . Berikut ini adalah penjelasan mengenai teorema kestabilan yang diambil dari Finizio & Ladas (1982).

### **Teorema 2.1**

1. Titik kesetimbangan  $(x_1, x_2)$  dari sistem linier akan stabil jika dan hanya jika akar-akar dari polinom karakteristik adalah real dan negatif atau mempunyai bagian riil tak positif.
2. Titik kesetimbangan  $(x_1, x_2)$  dari sistem linier akan stabil asimtotik jika dan hanya jika akar-akar dari polinom karakteristik adalah real dan negatif atau mempunyai bagian riil yang negatif.
3. Titik kesetimbangan  $(x_1, x_2)$  dari sistem linier akan tidak stabil jika paling sedikit satu akar mempunyai bagian real yang positif.

### **Teorema 2.2**

1. Titik kesetimbangan  $(x_1, x_2)$  dari sistem nonlinier adalah stabil asimtotik jika titik kesetimbangan  $(x_1, x_2)$  adalah hasil linierisasi dari sistem yang stabil asimtotik pada sistem liniernya.
2. Titik kesetimbangan  $(x_1, x_2)$  dari sistem nonlinier adalah tak stabil jika titik kesetimbangan  $(x_1, x_2)$  adalah hasil linierisasi dari sistem yang tak stabil pada sistem liniernya.

## 2.8 Kriteria Kestabilan *Routh-Hurwitz*

Kriteria kestabilan *Routh-Hurwitz* merupakan suatu metode yang digunakan untuk menunjukkan kestabilan sistem dengan memperhatikan koefisien dari persamaan karakteristik tanpa menghitung akar-akar secara langsung. Jika persamaan polinom adalah persamaan karakteristik, maka metode ini dapat digunakan untuk menentukan kestabilan dari suatu sistem. Prosedurnya adalah sebagai berikut.

1. Persamaan polinom orde  $n$  ditulis dalam bentuk sebagai berikut:

$$a_0s^n + a_1s^{n-1} + a_2s^{n-2} + a_3s^{n-3} + \dots + a_{n-1}s + a_n = 0$$

Dengan koefisien-koefisien adalah besaran nyata dan  $a_n \neq 0$ .

2. Bila ada koefisien yang bernilai 0 atau negatif disamping adanya koefisien positif, maka hal ini menunjukkan ada satu akar atau akar-akar imajiner atau memiliki bagian real positif (sistem tak stabil). Kondisi perlu (tetapi belum cukup) untuk stabil adalah semua koefisien persamaan polinom positif dan lengkap.
3. Bila semua koefisien positif, buat tabel *Routh* seperti yang ditunjuk pada tabel 2.1.

Tabel 2.1 Tabel *Routh*

$S^n$	$a_0$	$a_2$	$a_4$	$a_6$	...	$a_{n-1}$
$S^{n-1}$	$a_1$	$a_3$	$a_5$	$a_7$	...	$a_n$
$S^{n-2}$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$	...	$b_n$
$S^{n-3}$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$c_4$	...	$c_n$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$				
$S^0$						

Dimana nilai  $b_i, c_i, \dots$  didefinisikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
b_1 &= \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1} & c_1 &= \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1} \\
b_2 &= \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1} & c_2 &= \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1} \\
b_3 &= \frac{a_1 a_6 - a_0 a_7}{a_1} & c_3 &= \frac{b_1 a_7 - a_1 b_4}{b_1} \\
&\vdots & & \vdots \\
&\vdots & & \vdots \\
&\vdots & & \vdots \\
b_n &= \frac{a_1 a_{2n} - a_0 a_{2n+1}}{a_1} & c_n &= \frac{b_1 a_{2n+1} - a_1 b_{n+1}}{b_1}
\end{aligned}$$

4. Banyaknya akar tak stabil dapat dilihat dari banyaknya perubahan tanda pada kolom pertama tabel *Routh*.
5. Syarat perlu untuk stabil adalah koefisien dari persamaan karakteristik positif dan syarat cukup untuk stabil adalah semua suku pada kolom pertama tabel *Routh* bertanda positif.

Kriteria *Routh-Hurwitz* tidak dapat menjelaskan bagaimana memperbaiki kestabilan relatif atau bagaimana menstabilkan sistem tak stabil, tetapi dapat digunakan untuk menentukan batas penguatan suatu sistem agar masih stabil (Wahab W & Subiantoro A, Tanpa Tahun).

## 2.9 Bilangan Reproduksi Dasar

Kemungkinan terjadinya infeksi pada suatu populasi tergantung pada bilangan reproduksi. Bilangan reproduksi dasar ( $R_0$ ) merupakan parameter penting dalam matematika epidemilogi yang merupakan ambang batas (*threshold*) terjadinya penyebaran penyakit. Bilangan ini diperoleh dengan cara menentukan nilai eigen matriks Jacobian pada titik setimbang bebas penyakit (*disease free equilibrium*) dan titik setimbang endemik (*endemic equilibrium*). Jika  $R_0 < 1$  maka jumlah individu yang terinfeksi penyakit berkurang, sedangkan jika  $R_0 > 1$  maka jumlah individu yang terinfeksi bertambah (Hethcote. H. W. Tanpa Tahun).

### 2.10 Estimasi Parameter

Dalam model SIR, untuk mengestimasi laju kesembuhan diasumsikan tertutup, artinya tidak ada aliran masuk (*inflow*) ke dalam kompartemen *infected*. Maka persamaan untuk *infected* akan menjadi:

$$\frac{dI(t)}{dt} = -\gamma I \quad I(0) = I_0. \quad (2.20)$$

Persamaan (2.20) merupakan persamaan diferensial peubah terpisah. Selanjutnya persamaan tersebut diselesaikan dan diperoleh:

$$I(t) = I_0 e^{-\gamma t} \quad (2.21)$$

Persamaan (2.21) menggambarkan jumlah dari individu dalam kompartemen *infected* pada saat  $t$ . Selanjutnya persamaan (2.21) dapat diekspresikan seperti tampak pada persamaan (2.22)

$$\frac{I(t)}{I_0} = e^{-\gamma t} \quad (2.22)$$

Untuk  $t \geq 0$  merupakan jumlah manusia yang masih terinfeksi pada saat  $t$  atau merupakan peluang manusia yang masih terinfeksi pada saat  $t$ . Peluang manusia yang meninggalkan kompartemen *infected* pada interval  $(0, t)$  tampak seperti pada persamaan (2.23)

$$F(t) = 1 - e^{-\gamma t} \quad (2.23)$$

$F(t)$  merupakan distribusi peluang yang didefinisikan nol jika  $t < 0$ . Fungsi

kepadatan peluang  $f(t) = \frac{dF(t)}{dt}$  sehingga:

$$f(t) = \gamma e^{-\gamma t}$$

Rata-rata waktu yang dihabiskan individu dalam kompartemen *infected* diberikan sebagai mean seperti pada persamaan (2.24)

$$E[X] = \int_0^{\infty} t f(t) dt = \int_0^{\infty} t \gamma e^{-\gamma t} dt = \frac{1}{\gamma} \quad (2.24)$$

Jadi dapat disimpulkan bahwa rata-rata waktu yang dihabiskan dalam kompartemen *infected* adalah  $\frac{1}{\gamma}$  (Brauer, F., van den Driessche, P., & Wu, J, 2008).

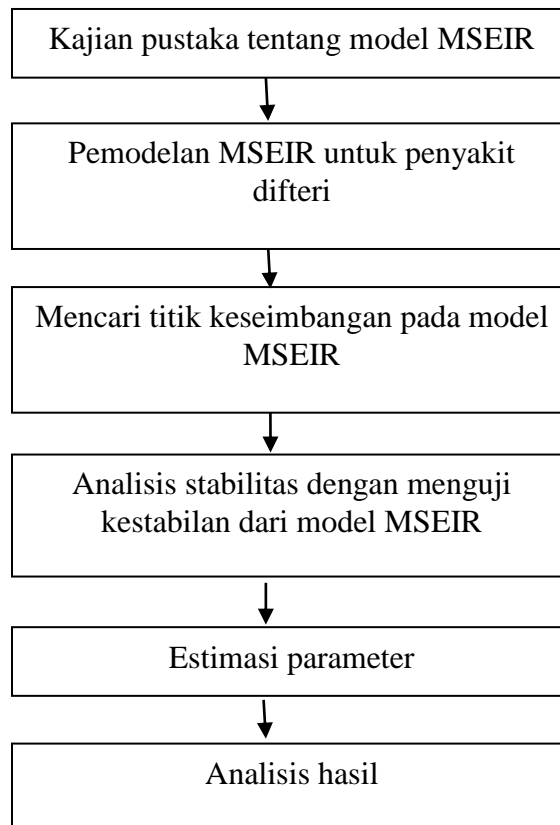
## BAB 3. METODE PENELITIAN

### 3.1 Data

Data yang digunakan dalam estimasi parameter diperoleh dari Dinas Kesehatan Kabupaten Jember dan Badan Pusat Statistik Kabupaten Jember.

### 3.2 Langkah- langkah Penelitian

Langkah-langkah yang dilakukan dalam menyelesaikan tugas akhir tentang pengaruh imun pasif terhadap penyebaran penyakit difteri, secara skematik dapat dilihat pada Gambar 3.1.



Gambar 3.1 Skema Metode Penelitian

Dari skema pada gambar 3.1, akan dijelaskan langkah-langkah untuk memperoleh hasil yang diinginkan, yaitu:

1. Kajian pustaka tentang model MSEIR

Kajian Pustaka dilakukan dengan cara memahami secara teoritis model epidemik MSEIR.

2. Pemodelan MSEIR untuk penyakit difteri

Pemodelan MSEIR untuk penyakit difteri diperoleh dengan memodifikasi model atau menurunkan model yang sudah ada, yaitu model Kermack-McKendrick dengan cara menambahkan kompartemen *maternal antibodies* dan *susceptible*.

3. Mencari titik keseimbangan pada model MSEIR

Untuk mencari titik keseimbangan bebas penyakit (*disease free equilibrium*), diperoleh jika  $E = 0$  dan  $I = 0$ , sedangkan untuk mencari titik keseimbangan endemik (*endemic equilibrium*) diperoleh jika  $E \neq 0$  dan  $I \neq 0$ . Setelah kedua titik keseimbangan diperoleh, selanjutnya dievaluasi menggunakan matriks Jacobian

4. Analisis stabilitas dengan menguji kestabilan dari model MSEIR

Analisis stabilitas dilakukan dengan cara melihat tanda akar-akar polinomial karakteristik dari matrik Jacobian yang telah dievaluasi pada titik keseimbangan. Karena polinomial karakteristik dari matrik Jacobian yang diperoleh berderajat tinggi, maka digunakan bantuan kriteria *Routh-Hurwitz* untuk mempermudahnya.

5. Estimasi Parameter

Estimasi parameter  $\delta$  untuk model penyakit difteri adalah laju populasi yang kehilangan masa efektivitas dari imun pasif maupun dari vaksinasi, parameter  $\beta$  adalah laju kontak efektif dengan populasi *infected* persatuan waktu, parameter  $\varepsilon$  adalah laju populasi yang terinfeksi difteri tetapi masih belum dapat menginfeksi *susceptible*, parameter  $\gamma$  adalah laju populasi yang sembuh dari penyakit difteri dan parameter  $\mu$  adalah laju populasi yang mati karena kematian alami. Pada penyakit difteri untuk  $\beta$  diasumsikan  $\beta = \frac{C}{ND}$  di mana  $C$  adalah

jumlah individu yang melakukan kontak efektif dengan setiap orang dalam populasi selama periode *infectious*. Sedangkan  $N$  adalah jumlah populasi total. Rata-rata jumlah individu yang melakukan kontak efektif dengan setiap orang per satuan waktu adalah  $\frac{c}{D}$  dengan  $D$  adalah rata-rata lama infektivitas. Laju kelahiran dihitung berdasarkan dari jumlah yang lahir per satuan waktu. Laju infeksi dapat dinyatakan dengan  $\epsilon I$ , yaitu dalam peluang kontak efektif  $\epsilon$  dan jumlah *infectious* pada saat  $t$ . Proses estimasi sama dengan proses estimasi pada persamaan (2.20). Plot grafik dilakukan dengan masukan awal jumlah populasi *maternal antibody*  $M(0)$ , jumlah populasi *susceptible*  $S(0)$ , jumlah populasi *exposed*  $E(0)$ , jumlah populasi *infected*  $R(0)$ , dan jumlah populasi *recovered*  $R(0)$ . Output yang dihasilkan berupa plot grafik dari keempat populasi yaitu populasi *maternal antibodies*, populasi *susceptible*, populasi *exposed* dan populasi *infected* dari model epidemik pada penyebaran penyakit difteri

#### 6. Analisis Hasil

Analisis dilakukan dengan melihat nilai populasi *exposed* dan *infected*, jika tidak bernilai nol seiring bertambahnya waktu maka penyakit akan menjadi endemik pada populasi, tapi jika populasi pada *exposed* dan *infected* bernilai nol seiring bertambahnya waktu maka penyakit hilang dan tidak menjadi endemik pada populasi.

## BAB 4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dijelaskan mengenai cara mencari titik keseimbangan bebas penyakit pada model epidemik dan titik keseimbangan endemik pada model epidemik MSEIR pada penyebaran penyakit difteri, yang selanjutnya digunakan untuk melihat perilaku model MSEIR pada penyebaran penyakit difteri di Kabupaten Jember.

### 4.1 Hasil

Model MSEIR menggambarkan lima kompartemen yaitu kelas populasi yang dilindungi dengan imun pasif (*maternal antibodies*), kelas populasi rentan (*susceptible*), kelas populasi laten (*exposed*), kelas populasi terinfeksi (*infected*), dan kelas populasi sembuh (*recovered*). Kelas populasi *maternal antibody* dapat berubah karena kehadiran anak-anak yang telah diimunisasi kedalam populasi dimana diasumsikan bahwa porposi  $B$  adalah individu yang telah diimunisasi terhadap penyakit difteri. Kompartemen ini berkurang karena berakhirnya masa efektivitas vaksin atau habisnya masa imun pasif pada laju  $\delta$  dan juga karena kematian alami pada laju  $\mu$ .

Populasi *susceptible* meningkat karena adanya kehadiran dari individu-individu pada kompartemen yang dilindungi dengan imun sebagai akibat dari berakhirnya masa efektivitas vaksin atau habisnya masa imun pasif pada laju  $\delta$ . Populasi *susceptible* juga berkurang karena angka kematian alami pada laju  $\mu$  dan kontak dengan kompartemen infeksi pada laju  $\beta$ .

Dinamika populasi kelas *exposed* pada periode laten tumbuh dengan tingkat kejadian  $\beta SI$ . Kelas ini berkurang dengan angka kematian alami pada laju  $\mu$  dan dari individu yang ada pada periode laten menjadi terinfeksi difteri pada tingkat  $\varepsilon$ .



Untuk dinamika pada populasi *infected* meningkat karena individu pada kelas populasi laten menjadi individu terinfeksi dengan difteri dengan laju  $\varepsilon$ . Kelas ini berkurang karena angka kematian alami pada laju  $\mu$  dan keberhasilan pengobatan pada pasien yang terinfeksi difteri pada laju  $\gamma$ .

Pada akhirnya dinamika pada kelas populasi *recovered* meningkat dengan keberhasilan pengobatan pada pasien difteri pada laju  $\gamma$  dan berkurang karena kematian alami dengan laju  $\mu$ . Dari asumsi diatas, diperoleh model epidemik penyakit difteri seperti pada Gambar 2.2 dan persamaan (2.1) sampai persamaan (2.5).

#### 4.1.1 Titik Keseimbangan Bebas Penyakit pada Model Epidemik MSEIR Difteri.

Titik keseimbangan pada model epidemik MSEIR diperoleh jika  $\frac{dM}{dt} = 0, \frac{dS}{dt} = 0, \frac{dE}{dt} = 0, \frac{dI}{dt} = 0$  dan  $\frac{dR}{dt} = 0$ . Titik keseimbangan bebas penyakit diperoleh dari  $\frac{dS}{dt} = 0$  pada persamaan (2.2) sebagai berikut.

$$\delta MS - \beta SI - \mu S = 0$$

$$(\delta M - \beta I - \mu)S = 0$$

Sehingga diperoleh nilai untuk *susceptible* ( $\bar{S}$ )

$$\bar{S} = 0 \tag{4.1}$$

Untuk  $\frac{dE}{dt} = 0$  substitusikan persamaan (4.1) ke persamaan (2.3)

$$\beta SI - \varepsilon E - \mu E = 0$$

$$\beta \bar{S} I - \varepsilon E - \mu E = 0$$

$$\beta(0)I - \varepsilon E - \mu E = 0$$

$$-(\varepsilon + \mu)E = 0$$

Sehingga diperoleh nilai untuk *exposed* ( $\bar{E}$ )

$$\bar{E} = 0 \tag{4.2}$$

untuk  $\frac{dI}{dt} = 0$  substitusikan persamaan (4.2) ke persamaan (2.4)

$$\beta SI - \varepsilon E - \mu E = 0$$

$$\varepsilon \bar{E} - \gamma I - \mu I = 0$$

$$\varepsilon(0) - \gamma I - \mu I = 0$$

$$-(\gamma + \mu)I = 0$$

Sehingga diperoleh nilai untuk *infected* ( $\bar{I}$ )

$$\bar{I} = 0 \tag{4.3}$$

Untuk  $\frac{dM}{dt} = 0$  substitusikan persamaan (4.1) ke persamaan (2.1)

$$B - \delta MS - \mu M = 0$$

$$B - \delta M \bar{S} - \mu M = 0$$

$$B - \delta M(0) - \mu M = 0$$

Sehingga diperoleh nilai untuk *maternal antibodies* ( $\bar{M}$ )

$$\bar{M} = \frac{B}{\mu}$$

Dari persamaan (4.1) sampai persamaan (4.3) didapat titik keseimbangan bebas penyakit:

$$\left( \bar{M}, \bar{S}, \bar{E}, \bar{I} \right) = \left( \frac{B}{\mu}, 0, 0, 0 \right)$$

#### 4.1.2 Titik Keseimbangan Endemik pada Model Epidemik MSEIR Difteri.

Untuk titik keseimbangan endemik (*disease free equilibrium*) dapat diperoleh

dari  $\frac{dI}{dt} = 0$  pada persamaan (2.4) sebagai berikut:

$$\varepsilon E - \gamma I - \mu I = 0$$

$$\varepsilon E - (\gamma + \mu)I = 0$$

$$\varepsilon E = (\gamma + \mu)I$$

Sehingga diperoleh nilai untuk *exposed* ( $E^*$ )

$$E^* = \frac{(\gamma + \mu)I}{\varepsilon} \quad (4.4)$$

Untuk  $\frac{dE}{dt} = 0$  maka persamaan (2.3)

$$\beta SI - \varepsilon E - \mu E = 0$$

$$\beta SI - (\varepsilon + \mu)E = 0 \quad (4.5)$$

Substitusikan persamaan (4.4) ke persamaan (4.5)

$$\beta SI - (\varepsilon + \mu)E^* = 0$$

$$\beta SI - \frac{(\varepsilon + \mu)(\gamma + \mu)I}{\varepsilon} = 0$$

$$\beta SI = \frac{(\varepsilon + \mu)(\gamma + \mu)I}{\varepsilon}$$

Sehingga diperoleh nilai untuk *susceptible* ( $S^*$ )

$$S^* = \frac{(\varepsilon + \mu)(\gamma + \mu)}{\beta \varepsilon} \quad (4.6)$$

Untuk  $\frac{dM}{dt} = 0$  maka persamaan (2.1)

$$B - \delta MS - \mu M = 0$$

$$B - (\delta S + \mu)M = 0$$

$$(\delta S + \mu)M = B$$

$$M = \frac{B}{(\delta S + \mu)} \quad (4.7)$$

Substitusikan persamaan (4.6) ke persamaan (4.7)

$$M = \frac{B}{(\delta S^* + \mu)}$$

$$M = \frac{B}{\delta \left[ \frac{(\varepsilon + \mu)(\gamma + \mu)}{\beta\varepsilon} \right] + \frac{\mu\beta\varepsilon}{\beta\varepsilon}}$$

sehingga diperoleh nilai untuk *maternal antibodies* ( $M^*$ )

$$M^* = \frac{B\beta\varepsilon}{\delta[(\varepsilon + \mu)(\gamma + \mu)] + \mu\beta\varepsilon} \quad (4.8)$$

Untuk  $\frac{dS}{dt} = 0$  maka persamaan (2.2)

$$\delta MS - \beta SI - \mu S = 0$$

$$\beta SI = \delta MS - \mu S$$

$$I = \frac{\delta M - \mu}{\beta} \quad (4.9)$$

Selanjutnya substitusikan persamaan (4.8) ke persamaan (4.9)

$$I = \frac{\delta M^* - \mu}{\beta}$$

$$I = \frac{\delta \left[ \frac{B\beta\varepsilon}{\delta[(\varepsilon + \mu)(\gamma + \mu)] + \mu\beta\varepsilon} \right] - \mu}{\beta}$$

$$I = \frac{\delta B\beta\varepsilon - \mu[\delta[(\varepsilon + \mu)(\gamma + \mu)] + \mu\beta\varepsilon]}{\beta[\delta[(\varepsilon + \mu)(\gamma + \mu)] + \mu\beta\varepsilon]}$$

sehingga diperoleh nilai untuk *infected* ( $I^*$ )

$$I^* = \frac{\delta B\beta\varepsilon - \mu[\delta[(\varepsilon + \mu)(\gamma + \mu)] + \mu\beta\varepsilon]}{\beta[\delta[(\varepsilon + \mu)(\gamma + \mu)] + \mu\beta\varepsilon]} \quad (4.10)$$

Substitusikan persamaan (4.10) ke persamaan (4.4) untuk memperoleh nilai *exposed*

$$\begin{aligned}
 E^* &= \frac{(\gamma + \mu)I}{\varepsilon} \\
 E^* &= \frac{(\gamma + \mu)I^*}{\varepsilon} \\
 E^* &= \frac{(\gamma + \mu) \left[ \frac{\delta B \beta \varepsilon - \mu [\delta [(\varepsilon + \mu)(\gamma + \mu)] + \mu \beta \varepsilon]}{\beta [\delta [(\varepsilon + \mu)(\gamma + \mu)] + \mu \beta \varepsilon]} \right]}{\varepsilon} \\
 E^* &= \frac{(\gamma + \mu) [\delta B \beta \varepsilon - \mu [\delta [(\varepsilon + \mu)(\gamma + \mu)] + \mu \beta \varepsilon]]}{\beta \varepsilon [\delta [(\varepsilon + \mu)(\gamma + \mu)] + \mu \beta \varepsilon]} \tag{4.11}
 \end{aligned}$$

Dari persamaan (4.4) sampai persamaan (4.11) diperoleh titik keseimbangan endemik  $(M^*, S^*, E^*, I^*)$

Dimana:

$$\begin{aligned}
 M^* &= \frac{B \beta \varepsilon}{\delta [(\varepsilon + \mu)(\gamma + \mu)] + \mu \beta \varepsilon} \\
 S^* &= \frac{(\varepsilon + \mu)(\gamma + \mu)}{\beta \varepsilon} \\
 E^* &= \frac{(\gamma + \mu) [\delta B \beta \varepsilon - \mu [\delta [(\varepsilon + \mu)(\gamma + \mu)] + \mu \beta \varepsilon]]}{\beta \varepsilon [\delta [(\varepsilon + \mu)(\gamma + \mu)] + \mu \beta \varepsilon]} \\
 I^* &= \frac{\delta B \beta \varepsilon - \mu [\delta [(\varepsilon + \mu)(\gamma + \mu)] + \mu \beta \varepsilon]}{\beta [\delta [(\varepsilon + \mu)(\gamma + \mu)] + \mu \beta \varepsilon]}
 \end{aligned}$$

#### 4.1.3 Analisis Kestabilan pada Titik Keseimbangan Model MSEIR Difteri.

Untuk menganalisis kestabilan pada titik keseimbangan model MSEIR, langkah pertama adalah linierisasi pada model MSEIR. Persamaan yang digunakan dalam linierisasi adalah persamaan (2.1) sampai (2.4)

$$f(M, S, E, I) = B - \delta MS - \mu M$$

$$g(M, S, E, I) = \delta MS - \beta SI - \mu S$$

$$h(M, S, E, I) = \beta SI - \varepsilon E - \mu E$$

$$i(M, S, E, I) = \varepsilon E - \gamma I - \mu I$$

Keempat persamaan diatas dilinierkan sehingga didapatkan sebagai berikut:

$$\frac{\partial f}{\partial M} = \frac{\partial(B - \delta MS - \mu M)}{\partial M} = -\delta S - \mu$$

$$\frac{\partial f}{\partial S} = \frac{\partial(B - \delta MS - \mu M)}{\partial S} = -\delta M$$

$$\frac{\partial f}{\partial E} = \frac{\partial(B - \delta MS - \mu M)}{\partial E} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial I} = \frac{\partial(B - \delta MS - \mu M)}{\partial I} = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial M} = \frac{\partial(\delta MS - \beta SI - \mu S)}{\partial M} = \delta S$$

$$\frac{\partial g}{\partial S} = \frac{\partial(\delta MS - \beta SI - \mu S)}{\partial S} = \delta M - \beta I - \mu$$

$$\frac{\partial g}{\partial E} = \frac{\partial(\delta MS - \beta SI - \mu S)}{\partial E} = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial I} = \frac{\partial(\delta MS - \beta SI - \mu S)}{\partial I} = -\beta S$$

$$\frac{\partial h}{\partial M} = \frac{\partial(\beta SI - \varepsilon E - \mu E)}{\partial M} = 0$$

$$\frac{\partial h}{\partial S} = \frac{\partial(\beta SI - \varepsilon E - \mu E)}{\partial S} = \beta I$$

$$\frac{\partial h}{\partial E} = \frac{\partial(\beta SI - \varepsilon E - \mu E)}{\partial E} = -\varepsilon - \mu$$

$$\frac{\partial h}{\partial I} = \frac{\partial(\beta SI - \varepsilon E - \mu E)}{\partial I} = \beta S$$

$$\frac{\partial i}{\partial M} = \frac{\partial(\varepsilon E - \gamma I - \mu I)}{\partial M} = 0$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial i}{\partial S} &= \frac{\partial(\varepsilon E - \gamma I - \mu I)}{\partial S} = 0 \\
\frac{\partial i}{\partial E} &= \frac{\partial(\varepsilon E - \gamma I - \mu I)}{\partial E} = \varepsilon \\
\frac{\partial i}{\partial I} &= \frac{\partial(\varepsilon E - \gamma I - \mu I)}{\partial I} = -\gamma - \mu
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Linierisasi yang telah dilakukan merupakan matrik Jacobian  $J_1$ .

$$J_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial M} & \frac{\partial f}{\partial S} & \frac{\partial f}{\partial E} & \frac{\partial f}{\partial I} \\ \frac{\partial g}{\partial M} & \frac{\partial g}{\partial S} & \frac{\partial g}{\partial E} & \frac{\partial g}{\partial I} \\ \frac{\partial h}{\partial M} & \frac{\partial h}{\partial S} & \frac{\partial h}{\partial E} & \frac{\partial h}{\partial I} \\ \frac{\partial i}{\partial M} & \frac{\partial i}{\partial S} & \frac{\partial i}{\partial E} & \frac{\partial i}{\partial I} \end{bmatrix} \tag{4.13}$$

Kemudian persamaan (4.12) disubstitusikan ke matrik jacobian (4.13) maka diperoleh:

$$J_1 = \begin{bmatrix} -\delta S - \mu & -\delta M & 0 & 0 \\ \delta S & \delta M - \beta I - \mu & 0 & -\beta S \\ 0 & \beta I & -\varepsilon - \mu & \beta S \\ 0 & 0 & \varepsilon & -\gamma - \mu \end{bmatrix} \tag{4.14}$$

a. Analisis Kestabilan Bebas Penyakit Model MSEIR pada Penyakit Difteri

Titik kestabilan bebas penyakit (*disease free equilibrium*)

$(\bar{M}, \bar{S}, \bar{E}, \bar{I}) = \left( \frac{B}{\mu}, 0, 0, 0 \right)$  dievaluasi pada matrik Jacobian (4.14) sehingga didapat:

$$J_2 = \begin{bmatrix} -\delta(0) - \mu & -\delta\left(\frac{B}{\mu}\right) & 0 & 0 \\ \delta(0) & \delta\left(\frac{B}{\mu}\right) - \beta(0) - \mu & 0 & -\beta(0) \\ 0 & \beta(0) & -\varepsilon - \mu & \beta(0) \\ 0 & 0 & \varepsilon & -\gamma - \mu \end{bmatrix} \tag{4.15}$$

Untuk mencari nilai eigen (*eigen value*)  $\lambda$  matriks  $J_2$  yang berukuran  $4 \times 4$ , maka matriks  $J_2$  dituliskan sebagai  $(\lambda I - J_2)\mathbf{x} = 0$ , dengan  $I$  adalah matriks identitas, agar  $\lambda$  menjadi nilai eigen, maka harus ada pemecahan tak nol dari persamaan  $(\lambda I - J_2)\mathbf{x} = 0$ . Persamaan tersebut mempunyai pemecahan tak nol jika dan hanya jika:

$$\det(\lambda I - J_2) = 0$$

Persamaan karakteristik untuk matriks Jacobian (4.15) yang dievaluasi di titik keseimbangan bebas penyakit adalah sebagai berikut:

$$\begin{vmatrix} -\mu - \lambda & -\delta\left(\frac{B}{\mu}\right) & 0 & 0 \\ 0 & \delta\left(\frac{B}{\mu}\right) - \mu - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon - \mu - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon & -\gamma - \mu - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Jadi persamaan karakteristiknya adalah:

$$\begin{aligned} &(-\mu - \lambda)\left(\delta\left(\frac{B}{\mu}\right) - \mu - \lambda\right)(-\varepsilon - \mu - \lambda)(-\gamma - \mu - \lambda) = 0 \\ &\lambda^4 + \lambda^3\left(\varepsilon - \frac{\delta B}{\mu} + 4\mu + \gamma\right) + \lambda^2\left(6\mu^2 + \varepsilon\gamma - \frac{\delta B\gamma}{\mu} + 3\gamma\mu - \frac{\varepsilon\delta B}{\mu} - 3\delta B + 3\mu\varepsilon\right) \\ &+ \lambda\left(-2\gamma\delta B + 3\mu^2\gamma - \frac{\varepsilon\gamma\delta B}{\mu} + 2\mu\varepsilon\gamma + 3\mu^2\varepsilon - 2\varepsilon\delta B - 3\mu\delta B + 4\mu^3\right) \\ &+ (\mu + \gamma)(-\varepsilon - \mu)(\delta B - \mu^2) = 0 \end{aligned} \tag{4.16}$$

Kestabilan untuk persamaan (4.16) dapat dicari dengan membuat tabel *Routh-Hurwitz*. Misalkan:

$$\begin{aligned} a &= \left(\varepsilon - \frac{\delta B}{\mu} + 4\mu + \gamma\right) \\ b &= \left(6\mu^2 + \varepsilon\gamma - \frac{\delta B\gamma}{\mu} + 3\gamma\mu - \frac{\varepsilon\delta B}{\mu} - 3\delta B + 3\mu\varepsilon\right) \end{aligned}$$



$$c = \left( -2\gamma\delta B + 3\mu^2\gamma - \frac{\varepsilon\gamma\delta B}{\mu} + 2\mu\varepsilon\gamma + 3\mu^2\varepsilon - 2\varepsilon\delta B - 3\mu\delta B + 4\mu^3 \right)$$

$$d = (\mu + \gamma)(-\varepsilon - \mu)(\delta B - \mu^2)$$

Tabel 4.1 Tabel *Routh-Hurwitz*

$\lambda^4$	1	$b$	$d$
$\lambda^3$	$a$	$c$	0
$\lambda^2$	$\frac{ab - c}{a}$	$d$	
$\lambda^1$	$\frac{\left(\frac{ab - c}{a}\right)c - ad}{\frac{ab - c}{a}} = c - \frac{aad}{ab - c}$		
$\lambda^0$	$d$		

Semua suku pada kolom pertama tabel *Routh-Hurwitz* harus bertanda positif agar persamaan menjadi stabil, karena koefisien pada persamaan (4.16) bertanda positif dan lengkap, maka syarat perlu untuk stabil terpenuhi. Terlihat bahwa sistem akan stabil jika  $d > 0$  maka:

$$(\mu + \gamma)(-\varepsilon - \mu)(\delta B - \mu^2) > 0$$

$$\delta B(\mu + \gamma)(-\varepsilon - \mu) - \mu^2(\mu + \gamma)(-\varepsilon - \mu) > 0$$

$$\delta B(\mu + \gamma)(-\varepsilon - \mu) > \mu^2(\mu + \gamma)(-\varepsilon - \mu)$$

$$\frac{\delta B(\mu + \gamma)(-\varepsilon - \mu)}{\mu^2(\mu + \gamma)(-\varepsilon - \mu)} < 1$$

$$\frac{\delta B}{\mu^2} < 1 \tag{4.17}$$

Sehingga bilangan reproduksi dasar ( $R_0$ ) untuk model MSEIR untuk penyakit difteri adalah  $\frac{\delta B}{\mu^2}$ . Titik keseimbangan bebas penyakit  $(\bar{M}, \bar{S}, \bar{E}, \bar{I}) = \left(\frac{B}{\mu}, 0, 0, 0\right)$  stabil asimtotik jika  $\frac{\delta B}{\mu^2} < 1$  yang menunjukkan bahwa tidak terjadi penyebaran penyakit pada populasi.

b. Analisis Kestabilan Endemik Model MSEIR pada Penyakit Difteri.

Titik keseimbangan endemik (*endemic equilibrium*)  $(M^*, S^*, E^*, I^*)$  akan stabil asimtotik jika  $R_0 > 1$ . Selanjutnya titik endemik dievaluasi di matriks Jacobian, sehingga diperoleh:

$$J_2 = \begin{bmatrix} -\delta S^* - \mu & -\delta M^* & 0 & 0 \\ \delta S^* & \delta M^* - \beta I^* - \mu & 0 & -\beta S^* \\ 0 & -\beta I^* & -\varepsilon - \mu & \beta S^* \\ 0 & 0 & \varepsilon & -\gamma - \mu \end{bmatrix}$$

Persamaan karakteristik untuk matriks Jacobian yang dievaluasi di titik keseimbangan endemik adalah sebagai berikut:

$$J_3 = \begin{bmatrix} -\delta S^* - \mu - \lambda & -\delta M^* & 0 & 0 \\ \delta S^* & \delta M^* - \beta I^* - \mu - \lambda & 0 & -\beta S^* \\ 0 & -\beta I^* & -\varepsilon - \mu - \lambda & \beta S^* \\ 0 & 0 & \varepsilon & -\gamma - \mu - \lambda \end{bmatrix}$$

Jadi persamaan karakteristiknya adalah:

$$(-\delta S^* - \mu - \lambda)(\delta M^* - \beta I^* - \mu - \lambda)(-\varepsilon - \mu - \lambda)(-\gamma - \mu - \lambda) = 0$$

Persamaan diatas merupakan polinomial dengan orde 4. Selanjutnya untuk mendapatkan akar karakteristik (nilai *eigen*) dari polinomial derajat 4 digunakan kriteria *Routh-Hurwitz* untuk menentukan kestabilannya. Polinomial orde 4 mempunyai akar negatif pada bagian realnya jika dan hanya jika elemen-elemen dari kolom pertama pada tabel *Routh-Hurwitz* mempunyai tanda sama. Sehingga didapatkan ketika  $R_0 > 1$  maka titik setimbang endemik stabil asimtotik.

#### 4.1.4 Studi Kasus Model Epidemik MSEIR pada Penyakit Difteri.

Perubahan pada kelas *maternal antibodies* terjadi karena kehadiran individu yang telah diimunisasi kedalam populasi. Pada tahun 2012 jumlah individu yang telah mendapat imunisasi difteri sebesar 523.791 sedangkan jumlah individu yang menjadi

asaran imunisasi sebanyak 533.739 sehingga dimungkinkan masih ada individu yang memasuki kelompok rentan. Laju untuk bayi dengan maternal anti bodies dihitung berdasarkan dari jumlah bayi yang berumur 0-6 bulan per unit waktu. Laju kematian alami diestimasi berdasarkan rata-rata angka harapan hidup. Berdasarkan data dari Badan Pusat Statistika Provinsi Jawa Timur, Kabupaten Jember memiliki angka harapan hidup sebesar 63 tahun. Jadi laju kematian dinotasikan  $\frac{1}{P}$ .  $P$  adalah angka harapan hidup untuk Kabupaten Jember. Sehingga untuk laju kematiannya adalah sebesar

$$\mu = \frac{1}{P} = \frac{1}{\text{angka harapan hidup}} = \frac{1}{62,45 \text{ tahun}} = \frac{1}{756 \text{ bulan}} = 0,00132 / \text{bulan}.$$

Secara umum jika  $T$  adalah waktu yang dihabiskan dalam suatu kompartemen, maka laju individu yang meninggalkan kompartemen adalah  $\frac{1}{T}$ . Masa efektivitas dari imun pasif akan berlangsung selama 6 bulan. Setelah 6 bulan maka individu akan meninggalkan kompartemen *maternal antibodies* ke *susceptible*, jadi untuk laju perpindahannya sebesar

$$\delta = \frac{1}{T} = \frac{1}{\text{masa efektifitas imun pasif}} = \frac{1}{6 \text{ bulan}} = 0,167 / \text{bulan}.$$

Masa inkubasi untuk penyakit difteri adalah 5 hari. Setelah 5 hari maka individu akan meninggalkan kompartemen *exposed* ke *infected*, jadi laju individu yang meninggalkan kompartemen adalah sebesar

$$\varepsilon = \frac{1}{T} = \frac{1}{\text{masa inkubasi}} = \frac{1}{0,17 \text{ bulan}} = 5,88 / \text{bulan}.$$

Setelah melewati masa inkubasi, maka manusia dapat menularkan penyakitnya ke manusia lain. Rata-rata masa infektifitas untuk penyakit difteri adalah 28 hari. Setelah 28 hari maka manusia akan meninggalkan kompartemen *infected* ke *recovered*, sehingga laju individunya adalah sebesar

$$\gamma = \frac{1}{T} = \frac{1}{\text{masa infektifitas}} = \frac{1}{0,93 \text{ bulan}} = 1,075 / \text{bulan}.$$

Probabilitas penularan dinotasikan dengan  $\beta$ .  $\beta$  diasumsikan sebagai  $\beta = \frac{c}{ND}$  dimana  $R$  adalah jumlah individu yang kontak langsung dengan setiap individu dalam

populasi selama masa infektifitas.  $C$  adalah individu dalam kompartemen *infected*. Pada tahun 2012, jumlah penderita difteri di Kabupaten Jember adalah 57 orang. Jadi  $C = 57$  orang.  $D$  adalah lama masa infektifitas.  $N$  adalah jumlah populasi di Kabupaten Jember. Pada tahun 2012 jumlah penduduk Kabupaten Jember sebanyak 2.345.851 jiwa. Jadi probabilitas penularanya adalah sebesar

$$\beta = \frac{C}{ND} = \frac{57 \text{ jiwa}}{2.345.851 \text{ jiwa} \times 0,93 \text{ bulan}} = 0,0000261/\text{bulan}.$$

Pada tahun 2012 jumlah penderita difteri di Kabupaten Jember adalah 57 jiwa dengan jumlah populasi rentan sebanyak 9.123 jiwa dan jumlah populasi dengan imun pasif sebanyak 33.828. Populasi *recovered* dihitung dari populasi total imun pasif, rentan, *exposed*, dan *infected*. Jadi populasi *recovered* sebanyak 57 jiwa. Dari data-data yang telah disebutkan sebelumnya dan dimasukkan ke persamaan (2.1) sampai persamaan (2.5) maka diperoleh formulasi model epidemik difteri untuk kasus penyakit difteri di Kabupaten Jember sebagai berikut:

$$\frac{dM}{dt} = 2819 - 0,167MS - 0,00132M \quad M(0) = 33828 \quad (4.18)$$

$$\frac{dS}{dt} = 0,167MS - 0,0000261SI - 0,00132S \quad S(0) = 9.123 \quad (4.19)$$

$$\frac{dE}{dt} = 0,0000261SI - 5,88E - 0,00132E \quad E(0) = 0 \quad (4.20)$$

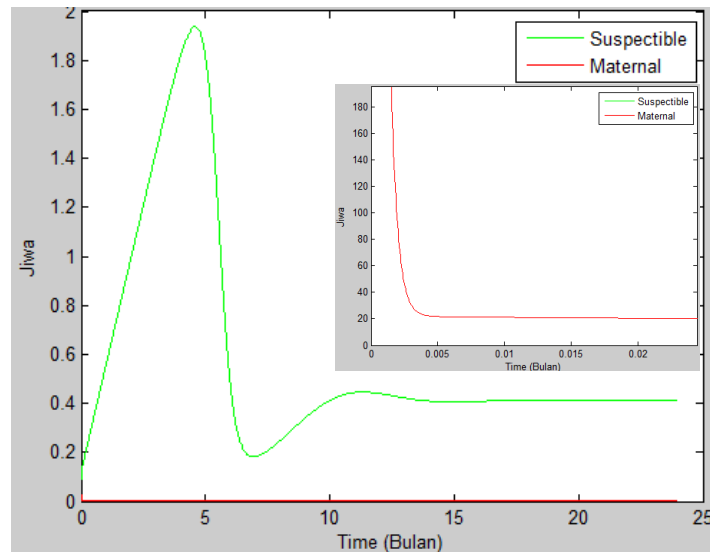
$$\frac{dI}{dt} = 5,88E - 1,075I - 0,00132I \quad I(0) = 57 \quad (4.21)$$

$$\frac{dR}{dt} = 1,075I - 0,00132R \quad R(0) = 57 \quad (4.22)$$

Skip program untuk model epidemik difteri dapat dilihat pada Lampiran.

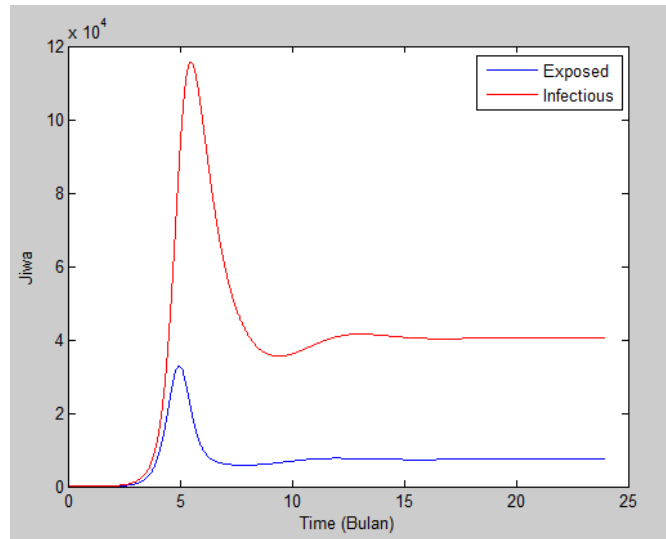
## 4.2 Pembahasan

Berdasarkan persamaan (4.18) sampai (4.22) plot *maternal antibodies* dan *susceptible* dari model epidemik difteri dengan menggunakan model MSEIR tampak pada Gambar 4.1. Sedangkan plot untuk *exposed* dan *infected* tampak pada Gambar 4.2 berikut.



Gambar 4.1 Plot *maternal antibodies* dan *susceptible* model epidemik MSEIR pada difteri

Pada awal pertumbuhannya nilai untuk populasi *maternal antibodies* sebesar 33.828 jiwa, beberapa waktu kemudian populasi *maternal antibodies* terlihat menjadi konstan. Hal ini karena aliran keluar pada kompartemen *maternal antibodies* cukup besar dibandingkan dengan aliran masuk. Pada awal pertumbuhannya populasi *susceptible* sebesar 9.123 jiwa, karena adanya aliran masuk yang berasal dari kompartemen *maternal antibodies* berupa laju berakhirnya masa efektifitas dari imun pasif atau vaksin cukup besar sedangkan aliran keluarnya yang berupa kematian alami dan laju kontak efektif dengan *exposed* lebih kecil sehingga menyebabkan kenaikan yang cukup signifikan pada populasi *susceptible*. Selanjutnya banyaknya individu *susceptible* yang tertular difteri akan menambah jumlah populasi dalam *exposed* dan *infected*.



Gambar 4.2 Plot *exposed* dan *infected* model epidemik MSEIR pada difteri

Berdasarkan persamaan (4.17) diperoleh bilangan reproduksi dasar ( $R_0$ ) yaitu  $\frac{\delta B}{\mu^2}$ , maka model epidemik difteri memiliki bilangan reproduksi dasar ( $R_0$ ) sebesar 259.218.390,8 selain itu juga diperoleh titik keseimbangan bebas penyakit sebesar  $(\bar{M}, \bar{S}, \bar{E}, \bar{I}) = \left(\frac{B}{\mu}, 0, 0, 0\right) = (25.434.586,47; 0; 0; 0)$  yang stabil asimtotik. Nilai ( $R_0$ ) yang begitu besar memiliki arti bahwa perlu ada tindakan untuk mengurangi laju perubahan pada *maternal antibodies* sehingga dapat mengurangi nilai dari ( $R_0$ ). Karena nilai ( $R_0$ ) lebih dari 1 maka penyakit tidak hilang dari populasi serta menyebabkan endemik di Kabupaten Jember. Nilai ( $R_0$ ) lebih besar dari satu berarti setiap penderita dapat menularkan penyakit kepada lebih dari satu penderita baru sehingga pada akhirnya terjadi penyebaran penyakit yang meluas.

Pada awal pertumbuhannya nilai untuk populasi *exposed* sebesar 0 jiwa sedangkan untuk populasi *infected* sebesar 57 jiwa, keduanya mengalami peningkatan yang cukup signifikan. Terlihat bahwa kenaikan populasi *infected* lebih besar daripada populasi *exposed*. Hal ini disebabkan karena aliran masuk ke kompartemen *infected* lebih besar daripada aliran masuk pada *exposed*. Tampak pada Gambar 4.2

pada bulan 10 terjadi sedikit kenaikan pada populasi *infected* namun setelah 15 bulan jumlah manusia *exposed* dan *infected* stabil di titik kesetimbangan endemik.

Dalam kajian ini, didapatkan hasil bahwa penyakit difteri endemik di Kabupaten Jember. Endemik berarti penyakit yang terjadi dengan laju konstan namun cukup tinggi pada suatu populasi. Kajian yang dilakukan terhadap penyebaran penyakit difteri di Kabupaten Jember dengan menggunakan model epidemik MSEIR memberikan hasil bahwa dengan menggunakan model tersebut terlihat bahwa penyakit difteri tidak menghilang dari Kabupaten Jember. Hal ini sesuai dengan kondisi riil di Kabupaten Jember yang sepanjang tahun 2012 terdapat kasus difteri dengan kasus tertinggi yaitu sebanyak 57 orang.

## BAB 5. PENUTUP

### 5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan Bab 4 maka diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

Model epidemik MSEIR difteri untuk kasus di Kabupaten Jember berdasarkan data yang diperoleh dari Dinas Kesehatan Kabupaten Jember dan Badan Pusat Statistik Kabupaten Jember pada tahun 2012 yang menyebutkan bahwa dari 2.345.851 jiwa populasi penduduk Kabupaten Jember diperoleh jumlah populasi *maternal antibodi* sebesar 33828 jiwa, populasi untuk *susceptible* sebesar 9.123 jiwa, populasi *exposed* sebesar 0 jiwa, dan populasi *infected* sebesar 57 jiwa. Dari penelitian yang dilakukan diperoleh hasil bahwa:

1. Untuk populasi *recovered* sebesar 57 jiwa/tahun
2. Probabilitas untuk penularan penyakit difteri di Kabupaten Jember sekitar 5 jiwa/tahun.
3. Untuk penyebaran penyakit difteri diperoleh bilangan reproduksi dasar ( $R_0$ ) sebesar 259.218.390,8. Nilai ( $R_0$ ) lebih besar dari satu berarti setiap penderita dapat menularkan penyakit kepada lebih dari satu penderita baru sehingga pada akhirnya terjadi penyebaran penyakit yang meluas. Hal ini sesuai dengan kondisi riil di Kabupaten Jember yang sepanjang tahun 2012 terdapat kasus difteri tertinggi yaitu sebanyak 57 orang.



## **5.2 Saran**

Pada tugas akhir ini, tidak dilakukan pengelompokan umur dalam penelitian menggunakan model epidemik MSEIR. Oleh karena itu masih terbuka kemungkinan bagi peneliti selanjutnya untuk melanjutkan penelitian ini menggunakan model epidemik MSEIR dengan pengelompokan umur sehingga hasil yang diperoleh dalam penelitian menggunakan model epidemik MSEIR ini dapat lebih maksimal.

## DAFTAR PUSTAKA

- Anton, H. 1998. *Aljabar Linier Elementer*. Terjemahan oleh Pantur Silaban. Jakarta: Erlangga.
- Aini, N. 2010. *Pengendalian Optimal Penggunaan Insektisida dan Virus Penginfeksi pada Hama Serangga*. Skripsi. Tidak diterbitkan. Surabaya: FMIPA Institut Teknologi Sepuluh November.
- Badan Pusat Statistik Kabupaten Jember. 2012. *Kabupaten Jember dalam Angka*. Jember: Badan Pusat Statistik Kabupaten Jember.
- Brauer, F., van den Driessche, P., & Wu, J. 2008. *Mathematical Epidemiology*. Berlin: Springer - Verlag.
- Campbell, S. L., & Haberman, R. 2008. *Introduction to Differential Equations with Dynamical Systems*. New Jersey: Princeton University Press.
- Esteva, Lourdes. (Tanpa Tahun). *Global Stability In Epidemic Models*. <http://www.google.co.id/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=1&cad=rja&ved=0CCwQFjAA&url=http%3A%2F%2Fwww.ime.unicamp.br%2F~hyunyang%2Fcurso%2FcursoLourdes.pdf&ei=IOu7UPuyGcLprAfCz>.
- Finizio, J., & Ladas, T. 1982. *Persamaan Diferensial Biasa dengan Penerapan Modern*. Alih bahasa oleh Widiarti Santoso. Jakarta: Erlangga.
- Hethcote, H. W. Tanpa Tahun. *The Basic Epidemiology Models: Models, Expression for  $R_0$ , Parameter Estimation and Application*. USA: Departemen of Mathematics University of Iowa
- Hull, D & Johnston, D. I. 2008. *Dasar-Dasar Pediatri Edisi 3*. <http://books.google.co.id/books?id=tyvqKwsfM6UC&pg=PA99&dq=Difteri&hl=id&sa=X&ei=yOu7UKu2HcfwrQeVkoDoDg&ved=0CC0Q6AEwAQ#v=onepage&q=Difteri&f=false>. [28 November 2012].
- Momoh, A. A, Ibrahim, M. O, & Madu, B. A. 2011. *Stability of an Disease Free Equilibrium of Hepatitis B Model*. Nigeria: Departemen of Mathematics Usmanu Danfadiyo University.
- Sarrayu, E. A. 2010. *Penyelesaian Numerik dan Analisis Perilaku SIR dengan Vaksinasi untuk Pencegahan Penularan Penyakit (Numerical Solution and Behavior Analytical of SIR Epidemic Model with Vaccination to Prevent Contagious Disease)*. Skripsi. Tidak diterbitkan. Surabaya: FMIPA Institut Teknologi Sepuluh November.
- Setyawan, A. 2011. *Analisis Stabilitas pada Penyebaran Penyakit Campak dan Demam Berdarah Dengue di Kabupaten Jember*. Skripsi. Tidak diterbitkan. Jember :FMIPA Universitas Jember.
- Wahab, W & Subiantoro A. Tanpa Tahun. *Fundamental of Control System Stability Criterion-Routh Hurwitz*.

<http://staff.ui.ac.id/internal/130702176/material/Lecture5-StabilityCriterion-Routh-HurwitzTest20Oct08.pdf>

Trottier, H & Philippe, P. 2001. *Deterministic Modeling of Infectious Diseases: Theory And Methods*.

[http://www.ispub.com/journal/the\\_internet\\_journal\\_of\\_infectious\\_diseases/volume\\_1\\_number\\_2\\_29/article/deterministic\\_modeling\\_of\\_infectious\\_diseases\\_theory\\_and\\_methods.html](http://www.ispub.com/journal/the_internet_journal_of_infectious_diseases/volume_1_number_2_29/article/deterministic_modeling_of_infectious_diseases_theory_and_methods.html) .

## LAMPIRAN

```
% Inisialisasi
beta=0.0000261;
epsilon=5.88
gamma=1.075;
B=43649;
delta=0.167
miu=0.0013;
M0=33828;
S0=9123;
E0=0;
I0=57;
R0=2302843;
MaxTime=24;
% Checks all the parameters are valid
if S0<0
    error('Initial level of susceptibles (%g) is less
than zero',S0);
end

if E0<0
    error('Initial level of exposed (%g) is less than
zero',E0);
end

if I0<0
    error('Initial level of infectious (%g) is less than
zero',I0);
end

if beta<0
    error('Transmission rate beta (%g) is less than or
equal to zero',beta);
end

if gamma<0
    error('Recovery rate gamma (%g) is less than
zero',gamma);
end

if epsilon<=0
```

```

    error('Exposed to Infectious rate sigma (%g) is less
than zero',epsilon);
end

if miu<0
    error('Birth / Death rate gamma (%g) is less than
zero',miu);
end

if MaxTime<0
    error('Maximum run time (%g) is less than
zero',MaxTime);
end

M=M0;%=====
S=S0; E=E0; I=I0; R=R0
% The main iteration
options = odset('RelTol', 1e-5);
[t pop]=ode45(@Diff,[0 MaxTime],[M S E I R],options,[B
delta beta gamma miu]);

M=pop(:,1);S=pop(:,2); E=pop(:,3); I=pop(:,4);
R=pop(:,5);

% plots the graphs with scaled colours
figure(1)
h=plot(t,S,'-g',t,M,'-r');
legend(h,'Susceptible','Maternal');
xlabel 'Time (Bulan)';
ylabel 'Jiwa'

figure(2)
plot(t,E,'-b',t,I,'-r');
legend('Exposed','Infectious');
xlabel 'Time (Bulan)';
ylabel 'Jiwa'
clc

```