



**PERBANDINGAN METODE *KALMAN FILTER* DAN
METODE *ENSEMBLE KALMAN FILTER* DALAM MENDETEKSI
GANGGUAN KONDUKSI PANAS PADA BATANG LOGAM**

SKRIPSI

Oleh
Tria Nugrahini
NIM 081810101012

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER
2012**



**PERBANDINGAN METODE *KALMAN FILTER* DAN
METODE *ENSEMBLE KALMAN FILTER* DALAM MENDETEKSI
GANGGUAN KONDUKSI PANAS PADA BATANG LOGAM**

SKRIPSI

diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat
untuk menyelesaikan Program Studi Matematika (S1)
dan mencapai gelar Sarjana Sains

Oleh
Tria Nugrahini
NIM 081810101012

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER
2012**

PERSEMBAHAN

Skripsi ini saya persembahkan untuk:

1. Ibunda Siti Mafu'ah dan Ayahanda Sugiyanto yang telah memberikan segala cinta, kasih sayang, perhatian dan pengorbanan yang tiada henti, serta doa yang tak pernah putus dalam setiap langkah hidup;
2. kakak tersayang, Nurul dan Defi yang memberi segala perhatian, semangat dan doa yang selalu menyertai langkah;
3. guru-guru sejak taman kanak-kanak hingga perguruan tinggi, yang telah memberikan ilmu dan membimbing dengan penuh kesabaran;
4. Almamater Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

MOTO

Barang siapa merintis jalan mencari ilmu maka Allah akan memudahkan baginya jalan ke surga.*)

Tuntutlah ilmu, sesungguhnya menuntut ilmu adalah pendekatan diri kepada Allah, dan mengerjakannya adalah sodaqoh. Sesungguhnya ilmu pengetahuan menempatkan orangnya dalam kedudukan terhormat dan mulia (tinggi). Ilmu pengetahuan adalah keindahan bagi ahlinya di dunia dan akhirat.**)

*) HR. Muslim. 2011. *Berilmu Pengetahuan*. [serial online]. http://hamzahjohan.blogspot.com/2011_05_06_archive.html. [17 November 2012].

**) HR. Ar-Rabii'. 2011. *Berilmu Pengetahuan*. [serial online]. http://hamzahjohan.blogspot.com/2011_05_06_archive.html. [17 November 2012].

PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

nama : Tria Nugrahini

NIM : 081810101012

menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang berjudul “Perbandingan Metode *Kalman Filter* dan *Ensemble Kalman Filter* dalam Mendeteksi Gangguan Konduksi Panas pada Batang Logam” adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali kutipan yang sudah saya sebutkan sumbernya, belum pernah diajukan pada institusi manapun, dan bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa ada tekanan dan paksaan dari pihak manapun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata dikemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, 3 Desember 2012

Yang menyatakan,

Tria Nugrahini
NIM 081810101012

SKRIPSI

**PERBANDINGAN METODE *KALMAN FILTER* DAN
METODE *ENSEMBLE KALMAN FILTER* DALAM MENDETEKSI
GANGGUAN KONDUKSI PANAS PADA BATANG LOGAM**

Oleh

Tria Nugrahini
NIM 081810101012

Pembimbing

Dosen Pembimbing Utama : Kosala Dwidja Purnomo, S.Si, M.Si.

Dosen Pembimbing Anggota : Drs. Rusli Hidayat, M.Sc.

PENGESAHAN

Skripsi berjudul ”Perbandingan Metode *Kalman Filter* dan Metode *Ensemble Kalman Filter* dalam Mendeteksi Gangguan Konduksi Panas pada Batang Logam” telah diuji dan disahkan oleh Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember pada:

hari, tanggal : Senin, 3 Desember 2012

tempat : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Jember.

Tim Penguji:

Ketua,

Sekretaris,

Kosala Dwidja Purnomo, S.Si, M.Si
NIP 196908281998021001

Drs. Rusli Hidayat, M.Sc
NIP 196610121993031001

Anggota I,

Anggota II,

Yuliani Setia Dewi, S.Si, M.Si
NIP 197407162000032001

Bagus Juliyanto, S.Si
NIP 198007022003121001

Mengesahkan
Dekan,

Prof. Drs. Kusno, DEA, Ph.D.
NIP 196101081986021001

RINGKASAN

Perbandingan Metode *Kalman Filter* dan *Ensemble Kalman Filter* dalam Mendeteksi Gangguan Konduksi Panas pada Batang Logam; Tria Nugrahini, 081810101012; 2012; 61 halaman; Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Jember.

Panas merupakan suatu bentuk energi yang berpindah dari suatu sistem ke sistem yang lain. Panas berpindah dengan cara konduksi, konveksi dan radiasi yang terjadi secara terpisah ataupun dalam bentuk kombinasi ketiga cara tersebut. Salah satu aplikasi dari konduksi panas adalah mendeteksi gangguan konduksi panas pada batang logam. Model konduksi panas yang digunakan adalah model berdimensi satu dan berbentuk linier, sehingga dapat diimplementasikan dalam metode *Kalman Filter* (KF) dan *Ensemble Kalman Filter* (EnKF). Dimana metode KF merupakan metode estimasi dengan menggunakan sistem keadaan dan model pengukuran yang dapat diimplementasikan pada model dinamik linier. Sedangkan metode EnKF merupakan metode modifikasi dari metode KF yang dapat diimplementasikan pada model dinamik linier maupun non linier. Tujuan dari penelitian ini adalah mengetahui hasil perbandingan keakuratan metode KF dan metode EnKF dalam mendeteksi gangguan konduksi panas pada batang logam.

Untuk memperoleh hasil estimasi dan mengetahui metode yang lebih baik, dilakukan beberapa langkah, yaitu diskritisasi dengan metode beda hingga maju dan beda hingga pusat, kemudian menambahkan *noise* pada model dinamik konduksi panas berdimensi satu. Setelah itu mengimplementasikan algoritma KF dan EnKF. Simulasi dilakukan dengan menggunakan beberapa jenis logam yaitu aluminium, baja, dan tembaga. Selain itu, simulasi juga dilakukan dengan mencoba beberapa besar gangguan dan merubah posisi gangguan. Langkah berikutnya adalah menganalisis hasil simulasi. Hasil yang dianalisis adalah hasil estimasi penyebaran panas pada batang logam. Analisis yang dilakukan adalah membandingkan nilai rata-rata norm

kovariansi *error* dari metode KF dan EnKF, serta membandingkan nilai rata-rata *error* dimana nilai *error* yaitu selisih nilai numerik dengan nilai estimasi dari kedua metode tersebut. Pada EnKF, dilakukan juga perbandingan terhadap jumlah *ensemble* yang berbeda yaitu 100, 200, 300, 400 dan 500. Hasil terbaik dari EnKF ini akan dibandingkan dengan hasil dari KF.

Hasil simulasi menunjukkan bahwa metode KF dan EnKF secara umum mampu mendeteksi adanya gangguan panas yang masuk. Hal ini ditunjukkan dengan kenaikan atau penurunan suhu pada posisi dimana gangguan diberikan. Grafik mengalami kenaikan suhu apabila diberikan gangguan sebesar suhu diatas suhu ruang, misalkan 36°C . Sedangkan apabila diberikan gangguan sebesar suhu yang ekstrim misal -36°C maka grafik akan mengalami penurunan suhu pada posisi dimana gangguan diberikan. Selanjutnya setelah melakukan percobaan dengan beberapa jenis logam, yaitu aluminium, baja, dan tembaga dapat disimpulkan bahwa untuk metode EnKF, hasil estimasi terbaik yaitu menggunakan 500 *ensemble*. Jumlah *ensemble* antara 100 sampai 400 memberikan nilai rata-rata *error* yang lebih besar. Untuk metode KF, hasil estimasi metode KF menghasilkan rata-rata norm kovariansi *error* dan rata-rata *error* yang lebih besar dari hasil estimasi metode EnKF. Dengan demikian metode EnKF lebih akurat dibandingkan dengan metode KF dalam mendeteksi gangguan konduksi panas pada batang logam.

PRAKATA

Puji syukur ke hadirat Allah SWT. atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul ”Perbandingan Metode *Kalman Filter* dan Metode *Ensemble Kalman Filter* dalam Mendeteksi Gangguan Konduksi Panas pada Batang Logam”. Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat menyelesaikan pendidikan strata satu (S1) pada Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Penyusunan skripsi ini tidak lepas dari bantuan berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan terima kasih kepada:

1. Bapak Kosala Dwidja Purnomo, S.Si, M.Si., selaku Dosen Pembimbing Utama dan Bapak Drs. Rusli Hidayat, M.Sc., selaku Dosen Pembimbing Anggota yang telah membimbing dan mengarahkan penulis;
2. Ibu Yuliani Setia Dewi, S.Si, M.Si. dan Bapak Bagus Juliyanto, S.Si selaku Dosen Penguji yang telah memberikan masukan, saran dan kritik yang membangun dalam penulisan skripsi ini;
3. seseorang yang istimewa Trimman Invistasi Telaumbanua yang selalu memberi kasih sayang dan selalu menemani dalam keadaan suka duka, sahabat-sahabatku (Puphus, Hartanti, Ricky, Aini, Juwariya, Arisma, Ba'its) yang tiada lelah memberi doa dan motivasi, serta teman-teman matematika 2008 yang telah memberikan semangat;
4. semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu per satu.

Penulis juga menerima segala kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan skripsi ini. Akhirnya penulis berharap, semoga skripsi ini dapat bermanfaat.

Jember, Desember 2012

Penulis

DAFTAR ISI

	Halaman
HALAMAN JUDUL	ii
HALAMAN PERSEMBAHAN	iii
HALAMAN MOTTO	iv
HALAMAN PERNYATAAN	v
HALAMAN PEMBIMBINGAN	vi
HALAMAN PENGESAHAN	vii
RINGKASAN	viii
PRAKATA	x
DAFTAR ISI	xi
DAFTAR TABEL	xiii
DAFTAR GAMBAR	xiv
DAFTAR LAMPIRAN	xv
BAB 1. PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	2
1.3 Batasan Masalah	2
1.4 Tujuan Penelitian	2
1.5 Manfaat Penelitian	2
BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA	3
2.1 Konduksi Panas pada Batang Logam	3
2.2 Metode Beda Hingga	5
2.3 Metode Kalman Filter	8
2.4 Metode Ensemble Kalman Filter	10
2.5 Norm Matriks Kovariansi Error	14
BAB 3. METODE PENELITIAN	15
BAB 4. HASIL DAN PEMBAHASAN	18

4.1 Diskritisasi Model Konduksi Panas pada Batang Logam	18
4.2 Penambahan <i>Noise</i> pada Model Diskrit.....	21
4.3 Implementasi pada Metode KF dan EnKF.....	22
4.4 Simulasi dan Hasil Simulasi	25
BAB 5. PENUTUP	33
5.1 Kesimpulan	33
5.2 Saran	33
DAFTAR PUSTAKA	34
LAMPIRAN	36

DAFTAR TABEL

	Halaman
2.1 Algoritma <i>Kalman Filter</i>	10
2.2 Algoritma Ensemble <i>Kalman Filter</i>	13
4.1 Hasil Estimasi Metode EnKF	26
4.2 Perbandingan Hasil Estimasi Metode EnKF dengan $N_\varepsilon = 500$ dan Hasil Estimasi Metode KF	29

DAFTAR GAMBAR

	Halaman
2.1 Isolasi Batang Secara Sempurna	4
2.2 Perambatan Panas pada Batang	4
3.1 Keadaan Batang Logam	17
4.1 Perpindahan Panas Antara Batang dan Udara	22
4.2 Hasil Estimasi Metode EnKF dengan 500 <i>ensemble</i>	28
4.3 Hasil Estimasi Metode KF	30
4.4 Hasil Estimasi Penyebaran Panas Menggunakan Metode KF, $T = 300$ Dengan Gangguan Selama 100 Detik	31
4.5 Hasil Estimasi Penyebaran Panas Menggunakan Metode EnKF dengan 500 <i>ensemble</i> , $T = 300$ Dengan Gangguan Selama 100 Detik	32

DAFTAR LAMPIRAN

	Halaman
A. SKRIP PROGRAM METODE KF	36
B. SKRIP PROGRAM METODE EnKF	39
C. GRAFIK HASIL ESTIMASI METODE KF	43
C.1 Grafik Hasil Estimasi Metode KF untuk Logam Aluminium ($C = 0,05$ kkal/s.m °C) dengan Gangguan sebesar -36°C dan Posisi Gangguan (2,12)	43
C.2 Grafik Hasil Estimasi Metode KF untuk Logam Baja ($C = 0,011$ kkal/s.m °C)	44
C.3 Grafik Hasil Estimasi Metode KF untuk Logam Tembaga ($C = 0,092$ kkal/s.m °C)	45
D. GRAFIK HASIL ESTIMASI METODE EnKF	46
D.1 Grafik Hasil Estimasi Metode EnKF untuk Logam Aluminium ($C = 0,05$ kkal/s.m °C)	46
D.1.1 Grafik hasil estimasi metode EnKF dengan 100 <i>ensemble</i>	46
D.1.2 Grafik hasil estimasi metode EnKF dengan 200 <i>ensemble</i>	47
D.1.3 Grafik hasil estimasi metode EnKF dengan 300 <i>ensemble</i>	48
D.1.4 Grafik hasil estimasi metode EnKF dengan 400 <i>ensemble</i>	49
D.1.5 Grafik hasil estimasi metode EnKF dengan 500 <i>ensemble</i> untuk gangguan sebesar -36°C dan posisi gangguan (2,12)	50
D.2 Grafik Hasil Estimasi Metode EnKF untuk Logam Baja ($C = 0,011$ kkal/ s.m °C)	51
D.2.1 Grafik hasil estimasi metode EnKF dengan 100 <i>ensemble</i>	51
D.2.2 Grafik hasil estimasi metode EnKF dengan 200 <i>ensemble</i>	52
D.2.3 Grafik hasil estimasi metode EnKF dengan 300 <i>ensemble</i>	53
D.2.4 Grafik hasil estimasi metode EnKF dengan 400 <i>ensemble</i>	54

D.2.5 Grafik hasil estimasi metode EnKF dengan 500 <i>ensemble</i>	55
D.3 Grafik Hasil Estimasi Metode EnKF untuk Logam Tembaga	
($C = 0,092 \text{ kkal/s.m } ^\circ\text{C}$)	56
D.3.1 Grafik hasil estimasi metode EnKF dengan 100 <i>ensemble</i>	56
D.3.2 Grafik hasil estimasi metode EnKF dengan 200 <i>ensemble</i>	57
D.3.3 Grafik hasil estimasi metode EnKF dengan 300 <i>ensemble</i>	58
D.3.4 Grafik hasil estimasi metode EnKF dengan 400 <i>ensemble</i>	59
D.3.5 Grafik hasil estimasi metode EnKF dengan 500 <i>ensemble</i>	60
E. Hasil Estimasi	61
E.1 Perbandingan Hasil Estimasi Metode KF dan EnKF untuk	
Logam Baja	61
E.2 Perbandingan Hasil Estimasi Metode KF dan EnKF untuk	
Logam Tembaga	61

BAB 1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Kalman Filter (KF) merupakan salah satu metode untuk mengestimasi suatu masalah menggunakan sistem keadaan dan model pengukuran yang diperkenalkan pertama kali oleh Rudolph E. Kalman (1960). Algoritma pada *Kalman Filter* hanya dapat diimplementasikan pada model dinamik linier saja, akan tetapi banyak permasalahan tidak hanya berupa sistem yang linier melainkan juga sistem yang nonlinier, sehingga perlu dikembangkan algoritma yang dapat diimplementasikan pada model sistem dinamik nonlinier. Algoritma yang telah dikembangkan adalah *Extended Kalman Filter* (EKF) dan *Ensemble Kalman Filter* (EnKF) yang berasal dari modifikasi algoritma KF.

EKF dapat digunakan untuk sistem yang tak linier. Dalam EKF sistem semacam ini perlu dilinierisasi (apabila sistem tidak linier), pendiskritan sistem (apabila sistem kontinu), dan beberapa tahapan lain. Sedangkan EnKF dapat digunakan untuk mengestimasi model dinamik linear maupun nonlinear dengan membangkitkan sejumlah *ensemble* sebagai inisialisasi untuk menghitung nilai mean dan kovariansi error variabel sistem keadaan yang digunakan dalam algoritma KF. Beberapa contoh aplikasi metode EnKF adalah dalam mengestimasi populasi plankton di laut (Purnomo, 2008), serta mengestimasi aliran dua fase pada pipa pengeboran minyak (Kuswati, 2011).

Menurut Hidayat (2006) panas merupakan suatu bentuk energi yang berpindah dari suatu badan (sistem) ke badan yang lain (sistem atau sekitarnya). Panas berpindah dengan cara konduksi, konveksi dan radiasi yang terjadi secara terpisah ataupun dalam bentuk kombinasi ketiga cara tersebut. Budiono (2010) telah meneliti tentang aplikasi model konduksi panas dalam mendeteksi gangguan konduksi panas pada batang logam dengan menggunakan metode EnKF. Penelitian

tersebut menunjukkan tingkat sensitivitas metode EnKF dalam mendeteksi posisi dan besar gangguan pada batang logam. Model konduksi panas yang digunakan membuat penulis tertarik untuk membandingkannya dengan metode KF, karena mengingat model yang digunakan merupakan model dinamik yang berbentuk linier.

Pada skripsi ini akan dilakukan pengestimasi panas pada semua grid dengan menggunakan metode KF dan metode EnKF dalam mendeteksi gangguan konduksi panas pada suatu batang logam. Berbeda dengan penelitian sebelumnya yang bertujuan untuk menunjukkan tingkat sensitivitas metode EnKF, pada skripsi ini akan membandingkan tingkat keakuratan antara metode KF dan EnKF. Sehingga dari hasil simulasi dengan Matlab 7.8.0 dapat diketahui metode mana yang lebih akurat dalam mendeteksi gangguan konduksi panas pada batang logam.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka pokok permasalahan yang akan dibahas dalam tugas akhir ini adalah bagaimana hasil perbandingan keakuratan metode KF dan metode EnKF dalam mendeteksi gangguan konduksi panas pada batang logam.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian adalah mengetahui hasil perbandingan keakuratan metode KF dan metode EnKF dalam mendeteksi gangguan konduksi panas pada batang logam.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diambil dari penulisan tugas akhir ini adalah memberikan informasi mengenai metode yang menghasilkan estimasi terbaik antara metode KF dan EnKF dalam mendeteksi gangguan konduksi panas pada batang logam.

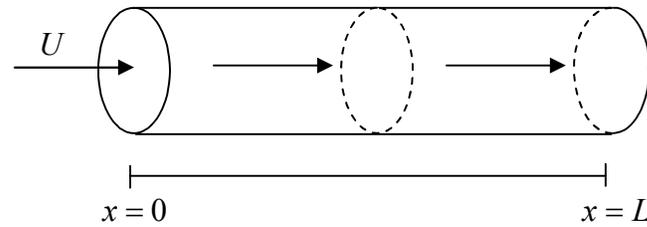
BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini diberikan beberapa bahasan yang berhubungan dengan permasalahan yang akan dibahas, yaitu mendeteksi gangguan konduksi panas pada batang logam menggunakan metode *Kalman Filter* (KF) dan *Ensemble Kalman Filter* (EnKF). Pertama, akan dibahas tentang model konduksi panas pada batang logam. Kemudian untuk melakukan diskritisasi diperlukan pembahasan tentang metode beda hingga. Selanjutnya akan diuraikan mengenai kedua metode yang dibandingkan, yaitu metode KF dan EnKF. Terakhir, untuk mengetahui tingkat keakuratan kedua metode tersebut dibutuhkan pembahasan mengenai norm matriks kovariansi *error*.

2.1 Konduksi Panas pada Batang Logam

Menurut hukum fisika, konduksi panas adalah aliran panas yang tidak diikuti oleh pergeseran media perantaranya dimana panas mengalir dari suhu yang lebih tinggi menuju ke suhu yang lebih rendah. Berlangsungnya konduksi panas melalui zat dapat diketahui oleh perubahan temperatur yang terjadi.

Misalkan diberikan suatu batang logam homogen yang seluruh penampangnya telah diisolasi sempurna sehingga tidak ada panas yang dapat menembus sisi-sisi batang tersebut dan dianggap pula bahwa temperatur yang mengalir sepanjang batang hanya dipengaruhi oleh posisi dan waktu. Untuk selanjutnya temperatur dinotasikan dengan U dan waktu dinotasikan dengan t . Jadi U adalah fungsi dari x dan t atau dapat ditulis dengan $U(x,t)$. Semua posisi sepanjang batang dinotasikan sebagai x dan panjang batang dinotasikan dengan L sehingga $0 < x < L$. Hal ini dapat dilihat pada Gambar 2.1.



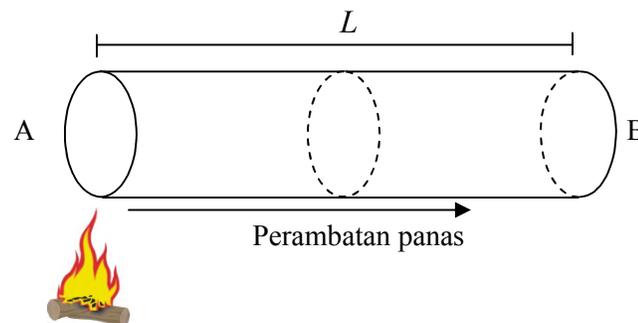
Gambar 2.1 Isolasi Batang Secara Sempurna

Menurut Spiegel (1993) persamaan konduksi panas berdimensi satu yaitu:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = C \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, (0 < x < L, t > 0). \quad (2.1)$$

Di sini $U(x,t)$ adalah temperatur dalam sebuah benda padat di kedudukan x pada waktu t dan C adalah koefisien konduktivitas.

Persamaan (2.1) tersebut diaplikasikan pada suatu batang logam yang dipanaskan salah satu ujungnya, sedang ujung yang lain adalah tetap, seperti ditunjukkan dalam Gambar 2.2. Panas pada ujung A tersebut akan merambat ke ujung B. Dengan menggunakan persamaan (2.1) akan dapat diprediksi temperatur di sepanjang logam (x) antara A dan B dan pada setiap saat (t).



Gambar 2.2 Perambatan Panas pada Batang

Di dalam permasalahan tersebut, temperatur pada ujung-ujung batang (titik A dan B) yang mempunyai jarak L diketahui untuk seluruh waktu. Kondisi ini disebut

dengan kondisi batas. Selain itu distribusi temperatur di sepanjang batang pada awal hitungan juga diketahui, dan kondisi ini disebut dengan kondisi awal.

Di dalam Gambar 2.2 suatu batang penghantar panas mempunyai distribusi temperatur awal pada $t = 0$, dan pada ujung-ujungnya mempunyai temperatur yang merupakan fungsi waktu. Distribusi temperatur $U(x, t)$ di batang pada waktu $t > 0$ dapat dihitung dengan anggapan bahwa sifat-sifat fisik batang adalah konstan. Permasalahan dapat dipresentasikan dalam bentuk persamaan diferensial dengan kondisi awal dan batas.

Persamaan (2.1) berlaku untuk daerah $0 < x < L$ dan $0 < t < \tau$, dengan τ adalah waktu hitungan total, sedang kondisi awal dan batas adalah:

$$\begin{aligned} U(x, 0) &= f(x) && ; 0 \leq x \leq L \\ U(0, t) &= g_0(t) && ; 0 < t \leq \tau \\ U(L, t) &= g_1(t) && ; 0 < t \leq \tau \end{aligned} \quad (2.2)$$

Dalam persamaan (2.2), $U(x, 0)$ adalah kondisi awal sedangkan $g_0(t)$ dan $g_1(t)$ adalah kondisi batas (Triatmodjo, 2002).

2.2 Metode Beda Hingga

Apabila dalam suatu persamaan tidak diperoleh penyelesaian analitis, maka digunakan penyelesaian pendekatan numeris, yaitu dengan menggunakan metode beda hingga. Untuk dapat menggunakan metode beda hingga, maka domain dari persamaan dasar harus didiskritkan (Luknanto, tanpa tahun).

Jika $U = U(x, t)$, diekspansikan deret Taylor, maka:

$$U(x + h, t) = U(x, t) + h \frac{\partial}{\partial x} U(x, t) + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2}{\partial x^2} U(x, t) + \dots \quad (2.3)$$

$$U(x - h, t) = U(x, t) - h \frac{\partial}{\partial x} U(x, t) + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2}{\partial x^2} U(x, t) - \dots \quad (2.4)$$

Beberapa skema numerik dari metode beda hingga, yaitu:

1. Beda Hingga Maju

Dari persamaan (2.3) diperoleh:

$$U(x+h, t) - U(x, t) = h \frac{\partial}{\partial x} U(x, t) + O(h)$$

$$\frac{U(x+h, t) - U(x, t)}{h} \approx \frac{\partial U}{\partial x} \quad (2.5)$$

Persamaan (2.5) disebut persamaan beda hingga maju karena menggunakan data di titik x dan $x+h$. Misalkan diambil suatu grid k untuk variabel t dimana Δt merupakan panjang dari grid k dan grid i untuk variabel x . Kemudian jika sumbu x dibagi ke dalam beberapa interval $\Delta x = h$ yang panjangnya sama, maka absis titik kisi i dapat ditulis dalam bentuk $x_i = i\Delta x = ih$. Sehingga persamaan (2.5) menjadi:

$$\frac{\partial U}{\partial x} \approx \frac{U_{i+1}^k - U_i^k}{\Delta x}$$

dan

$$\frac{\partial U}{\partial t} \approx \frac{U_i^{k+1} - U_i^k}{\Delta t}$$

apabila fungsi bergantung pada waktu.

2. Beda Hingga Mundur

Dari persamaan (2.3) diperoleh:

$$U(x, t) - U(x-h, t) = h \frac{\partial}{\partial x} U(x, t) + O(h)$$

$$\frac{U(x, t) - U(x-h, t)}{h} \approx \frac{\partial U}{\partial x} \quad (2.6)$$

Persamaan (2.6) disebut persamaan beda hingga mundur karena menggunakan data di titik x dan $x-h$. Sehingga persamaan (2.6) menjadi:

$$\frac{\partial U}{\partial x} \approx \frac{U_i^k - U_{i-1}^k}{\Delta x}$$

3. Beda Hingga Pusat

Jika persamaan (2.3) dikurangi dengan persamaan (2.4), maka:

$$\begin{aligned}
 U(x+h,t) - U(x-h,t) &= 2h \frac{\partial U}{\partial x} + O(h^2) \\
 U(x+h,t) - U(x-h,t) &\approx 2h \frac{\partial U}{\partial x} \\
 \frac{U(x+h,t) - U(x-h,t)}{2h} &\approx \frac{\partial U}{\partial x}
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Persamaan (2.7) disebut persamaan beda hingga pusat karena menggunakan data di titik $x+h$ dan $x-h$. Sehingga persamaan (2.7) menjadi:

$$\frac{\partial U}{\partial x} \approx \frac{U_{i+1}^k - U_{i-1}^k}{2\Delta x}$$

Jika persamaan (2.3) ditambahkan dengan persamaan (2.4), maka:

$$\begin{aligned}
 U(x+h,t) + U(x-h,t) &= 2U(x,t) + h^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + O(h^2) \\
 U(x+h,t) - 2U(x,t) + U(x-h,t) &\approx h^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \\
 \frac{U(x+h,t) - 2U(x,t) + U(x-h,t)}{h^2} &\approx \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Persamaan (2.8) disebut persamaan beda hingga pusat untuk turunan parsial kedua. Sehingga persamaan (2.8) menjadi:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \approx \frac{U_{i+1}^k - 2U_i^k + U_{i-1}^k}{\Delta x^2}$$

Diantara beberapa skema proses beda hingga, digunakan metode beda hingga maju untuk pendiskritan $\frac{\partial U}{\partial t}$ dan metode beda hingga pusat untuk pendiskritan

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}.$$

2.3 Metode Kalman Filter

Kalman Filter (KF) adalah suatu metode estimasi variabel keadaan dari sistem dinamik stokastik linear diskrit yang meminimumkan kovariansi *error* estimasi. Metode KF pertama kali diperkenalkan oleh Rudolph E. Kalman pada tahun 1960 lewat papernya yang terkenal tentang suatu penyelesaian rekursif pada masalah filtering data diskrit yang linear (Welch & Bishop, 2006). KF merupakan suatu pendekatan teknis untuk menaksir fungsi parameter dalam peramalan deret berkala (*time series*). Keunggulan metode KF adalah kemampuannya dalam mengestimasi suatu keadaan berdasarkan data yang minim. Data minim yang dimaksud adalah data pengukuran (alat ukur) karena KF merupakan suatu metode yang menggabungkan model dan pengukuran. Data pengukuran terbaru menjadi bagian penting dari algoritma KF karena data mutakhir akan berguna untuk mengoreksi hasil prediksi, sehingga hasil estimasinya selalu mendekati kondisi yang sebenarnya (Masduqi, 2008).

Bentuk umum sistem dinamik stokastik linier diskrit adalah:

$$x_{k+1} = \mathbf{A}_k x_k + \mathbf{B}_k u_k + w_k$$

dengan pengukuran $z_k \in \mathfrak{R}^P$ yang memenuhi

$$z_k = \mathbf{H}_k x_k + v_k$$

$$x_0 \sim N(\bar{x}_0, P_{x_0}); w_k \sim N(0, Q_k); v_k \sim N(0, R_k)$$

dengan:

x_0 = inisial dari sistem,

x_{k+1} = variabel keadaan pada waktu $k + 1$ dan berdimensi,

x_k = variabel keadaan pada waktu k yang nilai estimasi awalnya \bar{x}_0

dan kovariansi awal $P_{x_0}, x_k \in \mathfrak{R}^n$,

u_k = vektor masukan deterministik, pada waktu $k, u_k \in \mathfrak{R}^m$,

w_k = *noise* pada sistem dengan mean $\bar{w}_k = 0$ dengan kovariansi Q_k ,

z_k = variabel pengukuran, $z_k \in \mathfrak{R}^p$,

v_k = *noise* pada pengukuran dengan mean $\bar{v}_k = 0$ dengan kovariansi

R_k , dan

$\mathbf{A}_k, \mathbf{B}_k, \mathbf{H}_k$ = matriks-matriks dengan nilai elemen-elemennya adalah koefisien variabel masing-masing.

Variabel $w_k \sim N(0, Q_k)$ dan $v_k \sim N(0, R_k)$ ini diasumsikan *white* (berdistribusi normal dengan mean 0), tidak berkorelasi satu sama lain maupun dengan nilai estimasi awal \bar{x}_0 .

Proses estimasi KF dilakukan dengan dua tahapan, yaitu dengan cara memprediksi variabel keadaan berdasarkan sistem dinamik yang disebut tahap prediksi (*time update*) dan selanjutnya tahap koreksi (*measurement update*) terhadap data-data pengukuran untuk memperbaiki hasil estimasi.

Tahap prediksi dipengaruhi oleh dinamika sistem dengan memprediksi variabel keadaan dengan menggunakan persamaan estimasi variabel keadaan dan tingkat akurasiya dihitung menggunakan persamaan kovariansi *error*.

Pada tahap koreksi hasil estimasi variabel keadaan yang diperoleh pada tahap prediksi dikoreksi menggunakan model pengukuran. Salah satu bagian dari tahap ini yaitu menentukan matriks Kalman Gain yang digunakan untuk meminimumkan kovariansi *error*. Tahap prediksi dan koreksi dilakukan secara rekursif dengan cara meminimumkan kovariansi *error* estimasi $(x_k - \hat{x}_k), x_k$. Algoritma KF selengkapnya dapat dilihat pada Tabel 2.1.

Table 2.1 Algoritma *Kalman Filter*

Model Sistem dan Model Pengukuran	
$x_{k+1} = \mathbf{A}_k x_k + \mathbf{B}_k u_k + w_k$	
$z_k = \mathbf{H}_k x_k + v_k$	
$x_0 \sim N(\bar{x}_0, P_{x_0}); w_k \sim N(0, Q_k); v_k \sim N(0, R_k)$	
Inisialisasi	
$\hat{x}_0 = \bar{x}_0, P_0 = P_{x_0}$	
Tahap Prediksi	
Estimasi	$:\hat{x}_{k+1}^- = \mathbf{A}_k \hat{x} + \mathbf{B}_k u_k$
Kovariansi <i>error</i>	$:P_{k+1}^- = \mathbf{A}_k P_k \mathbf{A}_k^T + Q_k$
Tahap Koreksi	
Kalman Gain :	
$K_{k+1} = P_{k+1}^- \mathbf{H}_{k+1}^T (\mathbf{H}_{k+1} P_{k+1}^- \mathbf{H}_{k+1}^T + R_{k+1})^{-1}$	
Estimasi :	
$\hat{x}_{k+1} = \hat{x}_{k+1}^- + K_{k+1} (z_{k+1} - \mathbf{H}_{k+1} \hat{x}_{k+1}^-)$	
Kovariansi <i>error</i> :	
$P_{k+1} = [I - K_{k+1} \mathbf{H}_{k+1}] P_{k+1}^-$	

Pada Tabel 2.1 menunjukkan algoritma KF yang terdiri dari empat bagian, diantaranya bagian pertama mendefinisikan model sistem dan model pengukuran, bagian kedua merupakan nilai awal (inisialisasi), selanjutnya ketiga dan keempat masing-masing tahap prediksi dan koreksi (Purnomo, 2008).

2.4 Metode *Ensemble Kalman Filter*

Metode *Ensemble Kalman Filter* (EnKF) adalah metode estimasi modifikasi dari algoritma *Kalman Filter* yang dapat digunakan untuk mengestimasi model sistem

linear maupun nonlinear. Metode EnKF pertama kali dikembangkan oleh G. Evensen (1992-1993) pada saat mencoba mengimplementasikan metode EKF untuk asimilasi data pada suatu model. Linierisasi dalam metode EKF ternyata menyebabkan kovariansi *error*-nya membesar menuju takhingga. Selanjutnya G. Evensen (1994) telah memperkenalkan ide penggunaan sejumlah *ensemble* untuk mengestimasi kovariansi *error* pada tahap *forecasting* pada masalah yang sama (Evensen 1994, dalam Purnomo 2008).

Proses estimasi pada EnKF diawali dengan membangkitkan sejumlah N_ε *ensemble* dengan mean 0 dan kovariansi konstan. *Ensemble* yang dibangkitkan dilakukan secara random dan berdistribusi normal. Berdasarkan eksperimen, pada umumnya jumlah anggota *ensemble* yang mencukupi adalah 100-500 (Evensen 2003, dalam Purnomo 2008).

Secara umum algoritma EnKF juga terdiri dari dua tahap yaitu tahap prediksi (*time update*) dan tahap koreksi (*measurement update*). Pada metode EnKF terlebih dahulu dihitung mean *ensemble*-nya sebelum masuk ke tahap prediksi yaitu:

$$\hat{x}_k^* = \frac{1}{N_\varepsilon} \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} x_{k,i} \quad (2.8)$$

dimana N_ε adalah banyaknya *ensemble* yang dibangkitkan dan $x_{k,i}$ merupakan nilai *ensemble* yang dibangkitkan.

Bentuk umum sistem dinamik nonlinear pada EnKF adalah:

$$x_{k+1} = f(k, x_k) + w_k \quad (2.9)$$

Dengan pengukuran linier $z_k \in \mathfrak{R}^p$ yaitu:

$$z_k = \mathbf{H}_k x_k + v_k \quad (2.10)$$

$$x_0 \sim N(\bar{x}_0, P_{x_0}); w_k \sim N(0, Q_k); v_k \sim N(0, R_k)$$

Misalkan akan dibangkitkan sejumlah N_ε *ensemble* untuk memperoleh nilai rata-rata (*mean*):

$$x_{0,i} = [x_{0,1} \quad x_{0,2} \quad x_{0,3} \quad \dots \quad x_{0,N_\varepsilon}]$$

Selanjutnya diperoleh mean *ensemble* yaitu pada persamaan (2.8). Mean *ensemble* ini digunakan untuk menghitung estimasi \hat{x}_k^- pada tahap prediksi (*time update*) dan \hat{x}_k pada tahap koreksi (*measurement update*). Sedangkan untuk menghitung kovariansi *error* P_k^- pada tahap prediksi menggunakan

$$P_k = \frac{1}{N_e - 1} \sum_{i=1}^{N_e} (\hat{x}_{k,i}^- - \hat{x}_k^-)(\hat{x}_{k,i}^- - \hat{x}_k^-)^T \quad (2.15)$$

Pada EnKF, *noise* sistem w_k pada tahap prediksi dan *noise* pengukuran v_k pada tahap koreksi dibangkitkan dalam bentuk *ensemble*. Perlu diperhatikan bahwa algoritma EnKF tidak membutuhkan nilai awal kovariansi *error*. Sedangkan nilai awal \hat{x}_0 dihitung dari rata-rata *ensemble* $\hat{x}_{0,i}^-$ yang dibangkitkan pada tahap inisialisasi. Demikian juga, *noise* sistem $w_{k,i}$ pada tahap prediksi dan *noise* pengukuran $v_{k,i}$ pada tahap koreksi dibangkitkan dalam bentuk *ensemble* (Purnomo, 2008). Algoritma EnKF selengkapnya untuk mengestimasi penyelesaian model (2.9) dan (2.10) dapat dilihat pada Tabel 2.2.

Tabel 2.2 Algoritma *Ensemble Kalman Filter* (EnKF)

Model Sistem dan Model Pengukuran
$x_{k+1} = f(x_k, u_k) + w_k, \quad w_k \sim N(0, Q_k)$ $z_k = \mathbf{H}x_k + v_k, \quad v_k \sim N(0, R_k)$
Inisialisasi
<p>Bangkitkan N_ε ensemble sesuai estimasi awal \bar{x}_0</p> $x_{0,i} = [x_{0,1} \quad x_{0,2} \quad x_{0,3} \quad \dots \quad x_{0,N_\varepsilon}]$ <p>Tentukan nilai awal :</p> $\hat{x}_0 = \frac{1}{N_\varepsilon} \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} x_{0,i}$
Tahap Prediksi
$\hat{x}_{k,i}^- = f(\hat{x}_{k-1,i}, u_{k-1}) + w_k \quad \text{dengan} \quad w_{k,i} \sim N(0, Q_k)$ <p>Estimasi :</p> $\hat{x}_k^- = \frac{1}{N_\varepsilon} \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \hat{x}_{k,i}^-$ <p>Kovariansi <i>error</i> :</p> $P_k^- = \frac{1}{N_\varepsilon - 1} \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} (\hat{x}_{k,i}^- - \hat{x}_k^-)(\hat{x}_{k,i}^- - \hat{x}_k^-)^T$
Tahap Koreksi
$z_{k,i} = z_k + v_{k,i} \quad \text{dengan} \quad v_{k,i} \sim N(0, R_k)$ <p>Kalman Gain :</p> $K_k = P_k^- \mathbf{H}^T (\mathbf{H} P_k^- \mathbf{H}^T + R_k)^{-1}$ <p>Estimasi :</p> $\hat{x}_{k,i} = \hat{x}_{k,i}^- + K_k (z_{k,i} - \mathbf{H} \hat{x}_{k,i}^-)$ $\hat{x}_k = \frac{1}{N_\varepsilon} \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \hat{x}_{k,i}$ <p>Kovariansi <i>error</i> :</p> $P_k = [I - K_k \mathbf{H}] P_k^-$

2.5 Norm Matriks Kovariansi *Error*

Norm matriks kovariansi *error* berkaitan dengan kesimpulan baik tidaknya metode KF dan EnKF untuk pengestimasiannya, yaitu sebagai tolak ukur dalam pengestimasiannya suatu model pada metode KF maupun EnKF. Semakin kecil nilai kovariansi *error*, maka hasil estimasinya memiliki tingkat keakuratan yang semakin tinggi.

Norm matriks pada himpunan S yang memuat matriks-matriks berukuran $n \times n$, yaitu dituliskan dengan notasi $\|\cdot\|$ atau biasanya sering disebut panjang/ besar yang merupakan fungsi bernilai real yang terdefinisi pada S dan memenuhi:

- (i) $\|\mathbf{A}\| \geq 0$,
- (ii) $\|\mathbf{A}\| = 0$ jika dan hanya jika $\mathbf{A} = \mathbf{0}$,
- (iii) $\|\alpha\mathbf{A}\| = |\alpha| \|\mathbf{A}\|$, untuk semua bilangan real α ,
- (iv) $\|\mathbf{A} + \mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\|$,
- (v) $\|\mathbf{AB}\| \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{B}\|$,

Untuk semua $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in S$ (Purnomo, 2008)

Besaran matriks kovariansi *error* dinyatakan dengan nilai normnya. Dalam skripsi ini, definisi norm matriks kovariansi *error* P_k pada Matlab 7.8.0 diekspresikan dengan menggunakan formula `norm()`.

BAB 3. METODE PENELITIAN

Pada bab ini dijelaskan bagaimana langkah-langkah yang digunakan dalam mendeteksi gangguan konduksi panas pada batang logam menggunakan metode *Kalman Filter* (KF) dan *Ensemble Kalman Filter* (EnKF). Berikut ini merupakan prosedur yang dilakukan dalam penelitian, yaitu:

1. Menentukan model dinamik konduksi panas pada batang logam.

Persamaan (2.1) merupakan model konduksi panas pada batang logam yang dipakai dalam penelitian ini bersumber dari Budiono (2010), dimana bentuk modelnya adalah linier dan kontinu.

2. Melakukan pendiskritan terhadap model konduksi panas pada batang logam.

Model konduksi panas pada batang logam yang dipandang dalam masalah ini masih berbentuk kontinu. Oleh karena itu, harus dilakukan pendiskritan terhadap model tersebut. Untuk mendapatkan sistem dinamik diskrit akan digunakan metode beda hingga dengan skema pendiskritan berupa beda hingga maju untuk bentuk turunan pertama dan beda hingga pusat untuk turunan kedua. Berdasarkan model pada persamaan (2.1), $U = U(x, t)$ merupakan temperatur dalam sebuah benda padat di kedudukan x pada waktu t . Dengan demikian akan dilakukan aproksimasi:

$$\frac{\partial U}{\partial t} \approx \frac{U_i^{k+1} - U_i^k}{\Delta t} \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \approx \frac{U_{i+1}^k - 2U_i^k + U_{i-1}^k}{\Delta x^2} \quad (3.2)$$

$$U \approx U_i^k \quad (3.3)$$

$$t \approx k\Delta t \quad (3.4)$$

$$x \approx i\Delta x \quad (3.5)$$

dalam hal ini i dan k merupakan masing-masing grid dari variabel x dan t , dimana $i = 1, 2, \dots, L$ dan $k = 1, 2, \dots$.

Model diskrit pada (3.1), (3.2), (3.3), (3.4), dan (3.5) akan digunakan untuk mendapatkan model stokastik, yaitu dengan cara menambahkan *noise*.

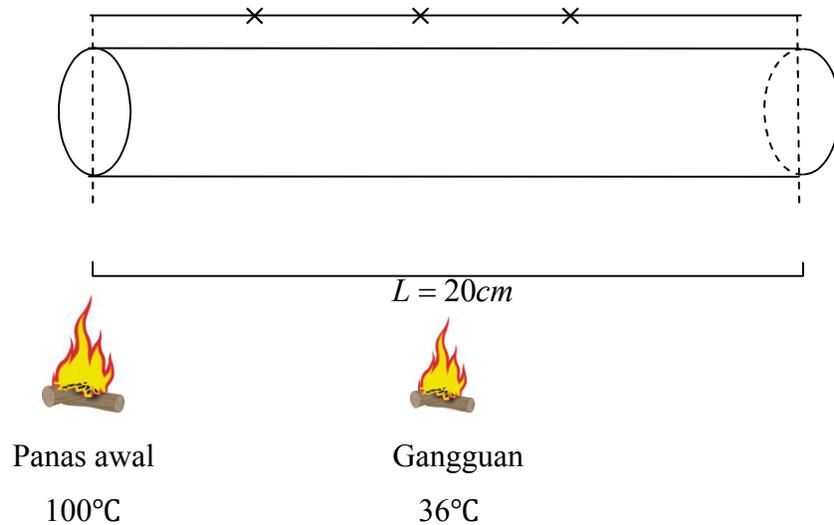
3. Menambahkan *noise* pada model diskrit

Model pada persamaan (2.1) digunakan untuk sistem yang terisolasi secara sempurna pada sisi-sisi batang logam. Sedangkan pada kenyataannya tidak demikian, artinya terdapat perpindahan panas antara batang logam dan udara, yang disebut dengan *noise* atau gangguan sistem. Secara umum, *noise* disimbolkan dengan w_k dan v_k dimana kedua simbol tersebut menunjukkan *noise* sistem dan *noise* pengukuran. Penambahan *noise* ini dilakukan dengan membangkitkan sejumlah bilangan acak dari komputer. *Noise* yang dibangkitkan diasumsikan memiliki sebaran normal dan mean nol. Sedangkan variansi dari *noise* ini diasumsikan konstan sebesar $Q_k = 0,01$ dan $R_k = 0,01$. Pembangkitan *noise* sistem dan *noise* pengukuran pada Matlab 7.8.0 diekspresikan menggunakan formula $w = \text{normrnd}(0, \text{sqrt}(Q), s, 1)$ dan $v = \text{normrnd}(0, \text{sqrt}(R), n, 1)$.

4. Mengimplementasikan metode KF dan EnKF

Model dinamik konduksi panas pada batang logam diimplementasikan pada algoritma KF dan EnKF. Dalam hal ini, variabel yang diestimasi adalah panas pada semua grid (U). Sedangkan variabel bebasnya adalah posisi (x) dan waktu (t). Hasil yang diperoleh dari Metode KF dan EnKF akan disimulasikan menggunakan Matlab 7.8.0.

5. Menganalisis hasil simulasi



Gambar 3.1 Keadaan Batang Logam

Berdasarkan Gambar 3.1 simulasi dilakukan dengan menerapkan algoritma KF dan EnKF pada persamaan konduksi panas pada batang logam satu dimensi dengan panjang 20 cm yang dibagi menjadi f grid. Proses simulasi dibagi menjadi beberapa bagian berdasarkan data pengukurannya, yang dalam hal ini menyatakan banyaknya alat ukur, ditunjukkan dengan tanda \times . Pada ujung sebelah kiri batang diberikan panas awal sebesar 100°C. Simulasi dilakukan dengan mencoba gangguan sebesar 36°C pada posisi bebas. Hasil yang dianalisis adalah hasil estimasi penyebaran panas pada batang logam. Analisis yang dilakukan adalah membandingkan rata-rata norm kovariansi *error* dari metode KF dan EnKF, serta membandingkan nilai rata-rata *error* dimana nilai *error* merupakan selisih nilai numerik dengan nilai estimasi dari kedua metode tersebut. Untuk metode EnKF terlebih dahulu dilakukan perbandingan untuk jumlah *ensemble* yang berbeda. Dalam hal ini jumlah *ensemble* yang dibandingkan adalah 100, 200, 300, 400 dan 500. Hasil yang terbaik dari perbandingan tersebut akan dibandingkan dengan metode KF.

BAB 4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dijelaskan mengenai pemecahan masalah tentang bagaimana mengimplementasikan metode KF dan EnKF pada model konduksi panas pada batang logam, dengan tujuan untuk mengetahui tingkat keakuratan kedua metode tersebut dalam mendeteksi gangguan konduksi panas. Langkah pertama yaitu pendiskritan model konduksi panas, karena masih berbentuk kontinu maka harus didiskritkan terlebih dahulu agar dapat dijalankan dalam bentuk pemrograman dengan Matlab 7.8.0.

4.1 Diskritisasi Model Konduksi Panas pada Batang Logam

Model konduksi panas pada persamaan (2.1) yang dituliskan dalam bentuk:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = C \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, (0 < x < L, t > 0)$$

melibatkan variabel x dan t yang kontinu. Pertama yang harus dilakukan adalah melakukan didiskritisasi untuk mendapatkan model diskrit agar dapat diterapkan pada algoritma KF dan EnKF dengan menggunakan metode beda hingga. Dalam hal ini batang yang panjangnya 20 cm didiskritkan menjadi sejumlah f grid yang homogen.

Panjang setiap gridnya (Δx) adalah $\frac{20}{f}$. Pada skripsi ini digunakan metode beda

hingga maju untuk pendiskritan $\frac{\partial U}{\partial t}$ dan metode beda hingga pusat untuk

pendiskritan $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, maka dari persamaan (2.1) didapat:

$$\frac{U_i^{k+1} - U_i^k}{\Delta t} = C \left(\frac{U_{i+1}^k - 2U_i^k + U_{i-1}^k}{\Delta x^2} \right)$$

$$U_i^{k+1} - U_i^k = \frac{C\Delta t}{\Delta x^2} (U_{i+1}^k - 2U_i^k + U_{i-1}^k)$$

$$U_i^{k+1} = \frac{C\Delta t}{\Delta x^2} (U_{i+1}^k - 2U_i^k + U_{i-1}^k) + U_i^k$$

misal $p = \frac{C\Delta t}{\Delta x^2}$, maka diperoleh:

$$U_i^{k+1} = p(U_{i+1}^k - 2U_i^k + U_{i-1}^k) + U_i^k$$

$$U_i^{k+1} = pU_{i+1}^k + (1-2p)U_i^k + pU_{i-1}^k \quad (4.1)$$

dengan kondisi awal $U(x,0) = 100 - 3,75x$ dan $\frac{\partial U}{\partial t}(L,0) = 0$ sedangkan untuk

kondisi batas yaitu $U(0,t) = 100$ dan $U(L,t) = 25$. Sehingga berdasarkan persamaan

(4.1) diperoleh bentuk umum dalam bentuk matriks hasil diskritisasi yaitu:

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ U_s \end{bmatrix}^{k+1} = \begin{bmatrix} 1-2p & p & 0 & \dots & 0 \\ p & 1-2p & p & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & p & 1-2p & p & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & 0 & p & 1-2p & p & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & p & 1-2p & p & 0 & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & p & \ddots & \ddots & \ddots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p & 1-2p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ U_s \end{bmatrix}^k$$

$$x_k = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_7 \\ \vdots \\ \vdots \\ U_s \end{bmatrix}^k ; \quad \mathbf{B}u_k = \begin{bmatrix} pU_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ pU_{s+1} \end{bmatrix}$$

dimana s menunjukkan ukuran matriks keadaan dan $s = f - 1$.

Sehingga setelah didiskritisasi persamaan (2.1) menjadi:

$$x_{k+1} = \mathbf{A}x_k + \mathbf{B}u_k \quad (4.3)$$

dengan matriks \mathbf{A} dan matriks \mathbf{B} adalah matriks dari hasil diskritisasi.

Apabila diberikan gangguan ketika simulasi maka persamaan (4.3) menjadi:

$$x_{k+1} = \mathbf{A}x_k + \mathbf{B}u_k + \mathbf{E}d_k$$

dimana \mathbf{E} merupakan matriks gangguan yang akan diinputkan ketika simulasi.

4.2 Penambahan *Noise* pada Model Diskrit

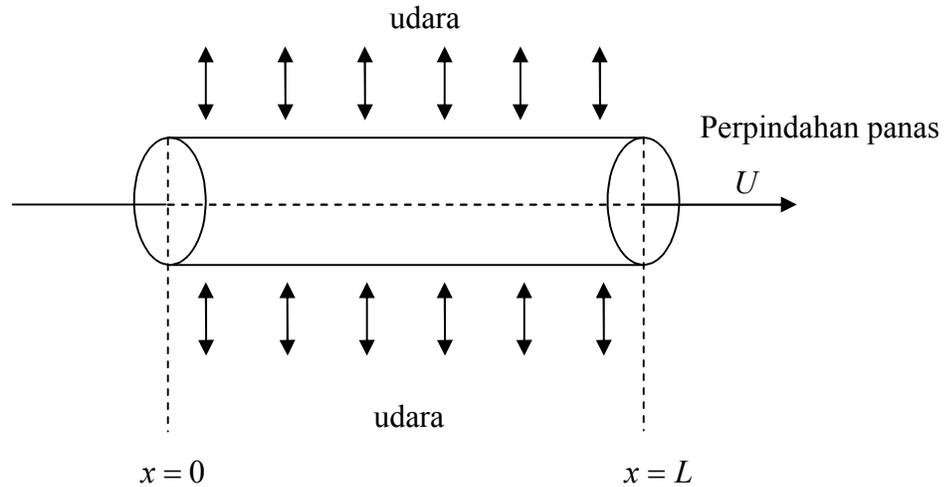
Model pada persamaan (2.1) digunakan untuk sistem yang terisolasi secara sempurna pada sisi-sisi batang logam. Sedangkan pada kenyataannya tidak demikian, artinya terdapat perpindahan panas antara batang logam dan udara, yang disebut dengan *noise*. Hal ini dapat ditunjukkan pada Gambar 4.1.

Sehingga diperoleh model stokastik untuk model sistem dan pengukuran:

$$x_{k+1} = \mathbf{A}x_k + \mathbf{B}u_k + \mathbf{E}d_k + w_k$$

$$z_k = \mathbf{H}x_k + v_k$$

dengan w_k adalah *noise* sistem yang timbul akibat proses pembentukan model konduksi panas yang tidak sempurna, sedangkan v_k merupakan *noise* pengukuran.



Gambar 4.1 Perpindahan Panas Antara Batang dan Udara

Penambahan *noise* ini dilakukan dengan membangkitkan sejumlah bilangan acak dari komputer. *Noise* yang dibangkitkan diasumsikan memiliki sebaran normal dan mean nol. Variansi dari *noise* diasumsikan konstan yaitu $Q_k = 0,01$ dan $R_k = 0,01$, dimana Q_k merupakan variansi *noise* sistem dan R_k merupakan variansi *noise* pengukuran.

4.3 Implementasi Model Konduksi Panas pada Metode KF dan EnKF

Pada algoritma KF dan EnKF, model sistem konduksi panas pada batang logam setelah dilakukan pendiskritan dan penambahan *noise* adalah

$$x_{k+1} = \mathbf{A}_k x_k + \mathbf{B}_k u_k + \mathbf{E}_k d_k + w_k \quad (4.5)$$

dan model pengukurannya adalah

$$z_k = \mathbf{H}_k x_k + v_k \quad (4.6)$$

Dalam hal ini persamaan (4.5) pada algoritma EnKF didapat dari

$$x_{k+1} = f(x_k, u_k) + w_k$$

dengan $f(x_k, u_k)$ adalah model hasil pendiskritan pada persamaan (4.4).

d_k adalah matriks berukuran $s \times 1$ yang isinya 1.

\mathbf{H} adalah matriks pengukuran berukuran $b \times s$ dimana b menunjukkan jumlah alat ukur yang akan dipasang. Matriks pengukuran \mathbf{H} ditentukan untuk menunjukkan posisi data pengukuran yang diambil atau disimulasikan. Jika simulasi dilakukan dengan memasang 3 alat ukur, misal pada posisi $(1, s-15)$, $(2, s-10)$ dan $(3, s-5)$ maka matriks \mathbf{H} berukuran $3 \times s$ seperti ditunjukkan pada matriks berikut:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Posisi dimana terdapat gangguan diasumsikan bernilai 1 karena variabel yang diukur koefisiennya 1. Jika dalam percobaan ini tidak dipasang alat ukur artinya tidak ada data pengukuran di posisi manapun maka matriks \mathbf{H} berisi 0. Hal ini mengakibatkan metode KF dan EnKF menjadi metode numerik biasa.

Apabila ditulis dalam bentuk matriks maka persamaan (4.5) menjadi:

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ U_s \end{bmatrix}^{k+1} = \begin{bmatrix} 1-2p & p & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ p & 1-2p & p & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & p & 1-2p & p & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & p & 1-2p & p & 0 & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & p & \ddots & \ddots & \ddots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p & 1-2p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ U_s \end{bmatrix}^k$$

$$+ \begin{bmatrix} pU_0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ pU_{s+1} \end{bmatrix}^k + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 36 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}^k + \begin{bmatrix} w_{k1} \\ w_{k2} \\ w_{k3} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ w_{ks} \end{bmatrix}^k$$

sedangkan persamaan (4.6) menjadi:

$$\begin{bmatrix} z_{k1} \\ z_{k2} \\ z_{k3} \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ U_s \end{bmatrix}^k$$

$$+ \begin{bmatrix} v_{k1} \\ v_{k2} \\ v_{k3} \end{bmatrix}^k$$

4.4 Simulasi dan Hasil Simulasi

Pada tahap simulasi dilakukan dengan menerapkan algoritma KF dan EnKF pada model konduksi panas berdimensi satu yang telah didiskritkan terlebih dahulu. Sebelumnya terlebih dahulu ditentukan jumlah grid yaitu $f = 20$, panjang grid posisi

$\Delta x = \frac{20}{f} = 1$, panjang grid waktu $\Delta t = 1$, sedangkan untuk koefisien konduktivitas

$C = 0,05$ kkal/s.m °C diambil dari logam aluminium.

Simulasi dilakukan dengan menerapkan metode EnKF terlebih dahulu dengan mencoba beberapa N_e ensemble, yaitu 100, 200, 300, 400 dan 500. Simulasi dilakukan juga dengan meletakkan gangguan pada posisi yang telah ditentukan, gangguan yang diberikan sebesar 36°C pada posisi grid ke (1,9). Jumlah iterasi dilakukan sebanyak $T = 100$. Variansi noise sistem $Q_k = 0,01$ dan variansi noise pengukuran $R_k = 0,01$. Hasil estimasi terbaik dari metode EnKF akan dibandingkan dengan hasil estimasi metode KF. Hasil simulasi dari kedua metode tersebut akan dievaluasi dengan cara membandingkan nilai rata-rata norm kovariansi error dan nilai rata-rata error. Nilai error pada matlab 7.8.0 diekspresikan dengan menggunakan formula $\text{error} = \text{abs}(\text{xreal} - \text{xcor})$, dimana xreal merupakan nilai numerik dan xcor merupakan nilai estimasi. Sedangkan untuk mencari nilai rata-rata menggunakan formula $\text{mean}(\text{error})$.

Selanjutnya dengan mencoba beberapa ensemble yaitu 100, 200, 300, 400 dan 500, diperoleh hasil seperti pada Tabel 4.1.

Tabel 4.1 Hasil Estimasi Metode EnKF

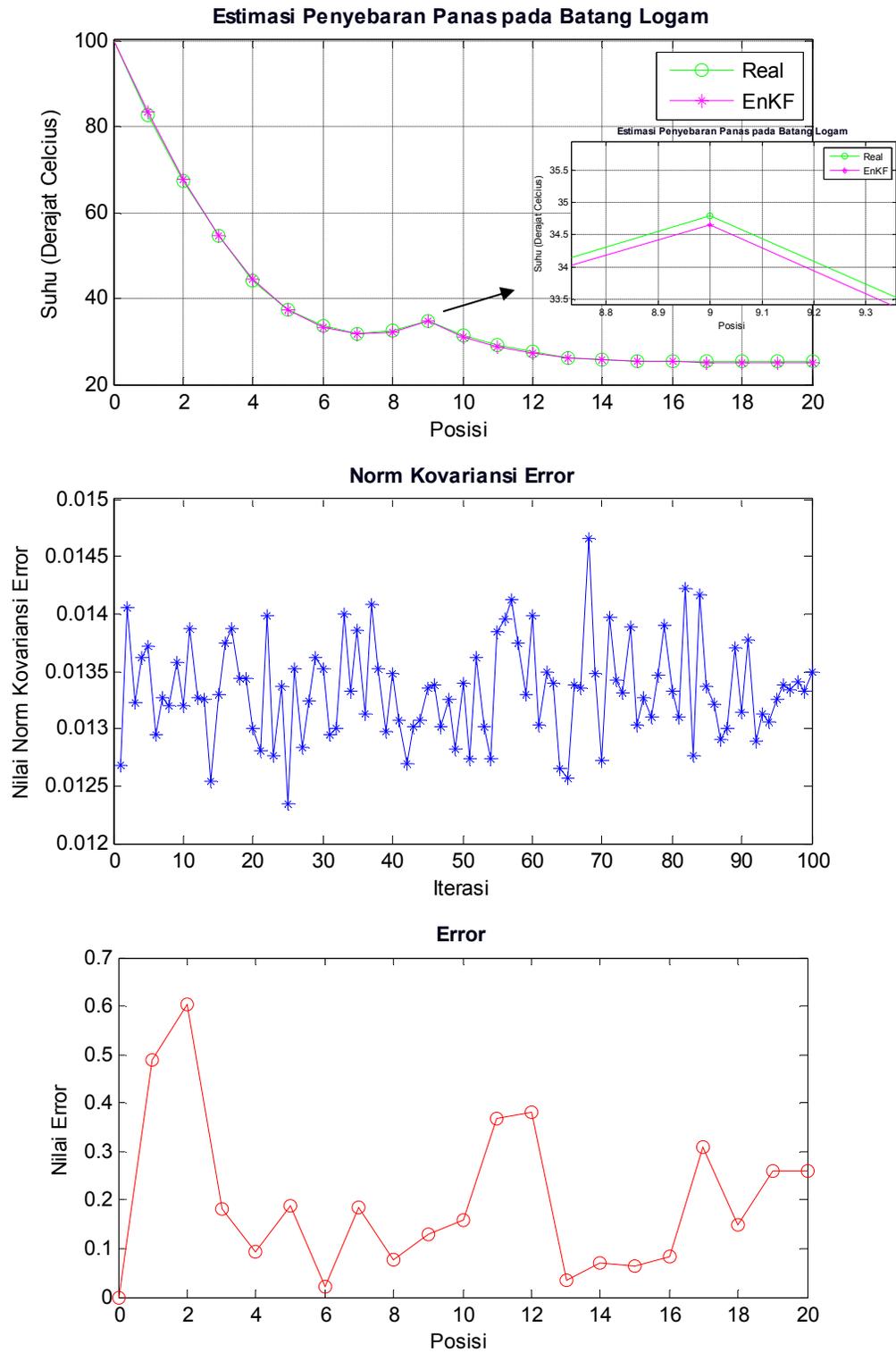
	EnKF				
	$N_e = 100$	$N_e = 200$	$N_e = 300$	$N_e = 400$	$N_e = 500$
Rata-rata norm kovariansi error	0,01825	0,01554	0,01448	0,01379	0,01334
Rata-rata error	0,25296	0,29224	0,23918	0,20684	0,19527

Dari Tabel 4.1 diperoleh nilai rata-rata norm kovariansi error dan nilai rata-rata error dari metode EnKF dengan 100 sampai 500 ensemble. Pada 100 ensemble diperoleh rata-rata norm kovariansi error sebesar 0,01825 dan rata-rata error sebesar

0,25296. Pada 200 *ensemble* diperoleh rata-rata norm kovariansi *error* sebesar 0,01554 dan rata-rata *error* sebesar 0,29224. Pada 300 *ensemble* diperoleh rata-rata norm kovariansi *error* sebesar 0,01448 dan rata-rata *error* sebesar 0,23918. Pada 400 *ensemble* diperoleh rata-rata norm kovariansi *error* sebesar 0,01379 dan rata-rata *error* sebesar 0,20684. Sedangkan pada 500 *ensemble* diperoleh rata-rata norm kovariansi *error* sebesar 0,01334 dan rata-rata *error* sebesar 0,19527.

Dari percobaan beberapa *ensemble* yang dilakukan menunjukkan bahwa semakin banyak jumlah *ensemble* yang diambil maka nilai rata-rata norm kovariansi *error*-nya semakin kecil. Untuk nilai rata-rata *error*, nilai rata-rata *error* pada 100 sampai 400 *ensemble* nilainya relatif lebih besar dari nilai rata-rata *error* pada 500 *ensemble*. Sehingga dapat disimpulkan bahwa hasil estimasi terbaik adalah percobaan dengan menggunakan 500 *ensemble* karena memiliki rata-rata norm kovariansi *error* dan rata-rata *error* paling kecil. Grafik hasil estimasi metode EnKF dengan 500 *ensemble* ditunjukkan pada Gambar 4.2.

Pada grafik estimasi penyebaran panas dapat diketahui hasil pendeteksian gangguan konduksi panas pada batang logam menggunakan metode EnKF. Terlihat bahwa pada posisi pertama sampai posisi ke-7 suhu menurun secara kontinu. Setelah posisi ke-7 suhu mulai naik sampai posisi ke-9. Sehingga dari grafik estimasi terlihat bahwa pada posisi ke-9 terdapat gangguan yaitu dengan panas yang masuk, atau bisa dikatakan bahwa pada posisi tersebut terdeteksi adanya gangguan. Untuk grafik hasil estimasi metode EnKF dengan 100, 200, 300, dan 400 *ensemble* ditunjukkan pada Lampiran D.



Gambar 4.2 Hasil Estimasi Metode EnKF dengan 500 Ensemble

Selanjutnya setelah diperoleh hasil estimasi terbaik dari metode EnKF dilakukan percobaan dengan menggunakan metode KF. Pada metode KF, diberikan nilai kovariansi awal sebesar $P_0 = 0,01$. Iterasi dilakukan sebanyak $T = 100$ dengan besar dan letak gangguan sama seperti pada percobaan metode EnKF. Variansi *noise* sistem $Q_k = 0,01$ dan variansi *noise* pengukuran $R_k = 0,01$. Grafik hasil estimasi dengan menggunakan metode KF ditunjukkan pada Gambar 4.3.

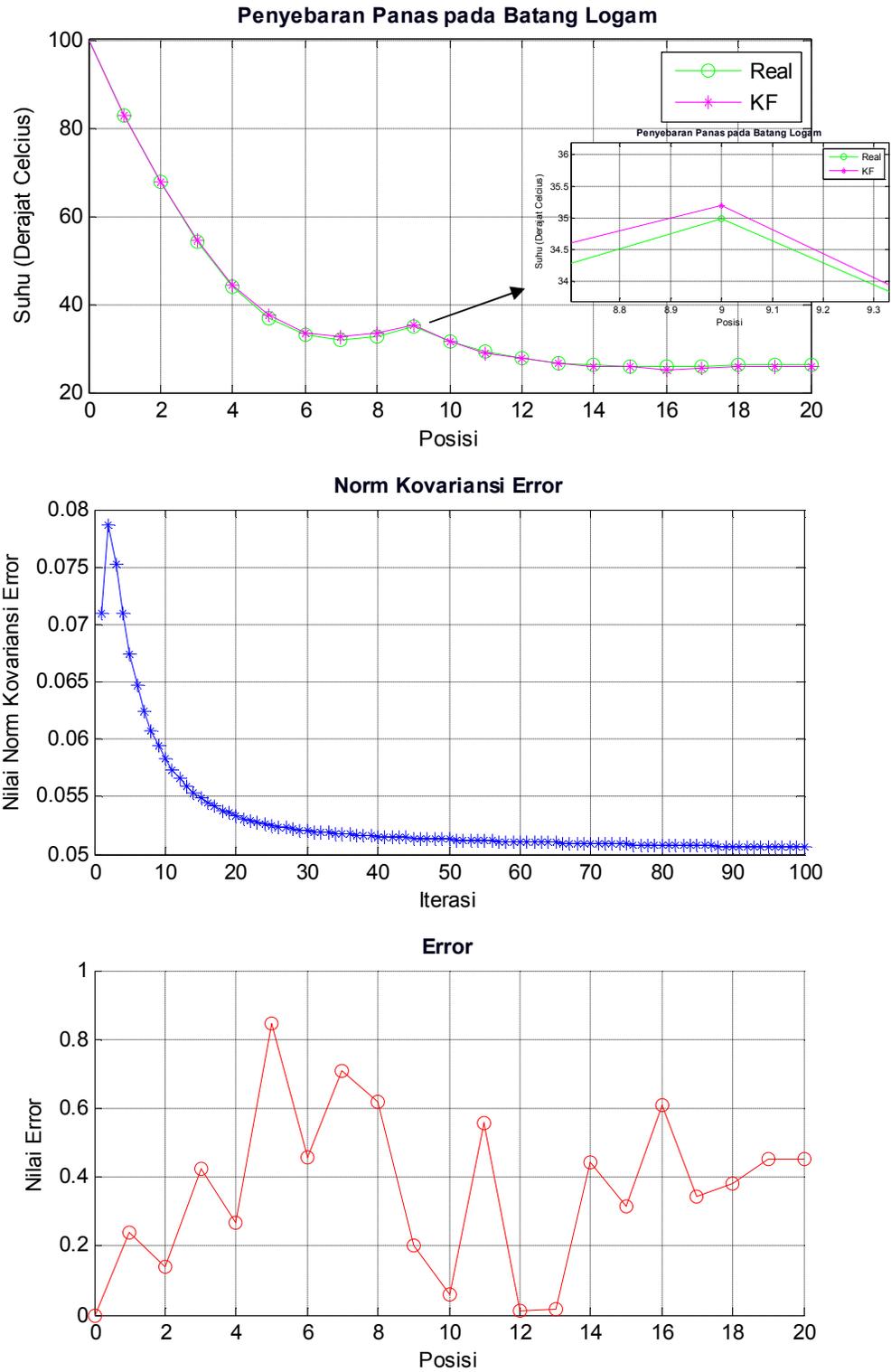
Gambar 4.3 menunjukkan hasil estimasi dengan menggunakan metode KF. Seperti pada grafik estimasi pada metode EnKF, pada grafik estimasi metode KF juga terlihat adanya gangguan yang ditunjukkan dengan kenaikan suhu pada posisi ke-9. Terlihat bahwa pada posisi pertama sampai posisi ke-7 suhu menurun secara kontinu, kemudian setelah posisi ke-7 suhu mulai naik sampai pada posisi ke-9.

Kemudian hasil estimasi terbaik yang diperoleh yaitu hasil estimasi metode EnKF dengan 500 *ensemble* akan dibandingkan dengan hasil estimasi metode KF. Dari perbandingan tersebut diperoleh hasil seperti pada Tabel 4.2.

Tabel 4.2 Perbandingan Hasil Estimasi Metode EnKF dengan $N_e = 500$
dan Hasil Estimasi Metode KF

	EnKF dengan $N_e = 500$	KF
Rata-rata norm kovariansi <i>error</i>	0,01334	0,05318
Rata-rata <i>error</i>	0,19527	0,35904

Setelah diperoleh hasil estimasi dengan menggunakan metode KF, berdasarkan Tabel 4.2 diperoleh bahwa metode EnKF dengan 500 *ensemble* memiliki nilai rata-rata norm kovariansi *error* dan rata-rata *error* lebih kecil yaitu 0,01334 dan 0,19527 dari metode KF yaitu 0,05318 dan 0,35904. Berdasarkan hal tersebut dapat disimpulkan bahwa metode EnKF dengan jumlah 500 *ensemble* dalam kasus ini yaitu mendeteksi gangguan konduksi panas pada batang logam lebih akurat dari metode KF karena metode EnKF memiliki nilai rata-rata norm kovariansi *error* dan rata-rata *error* yang lebih kecil.

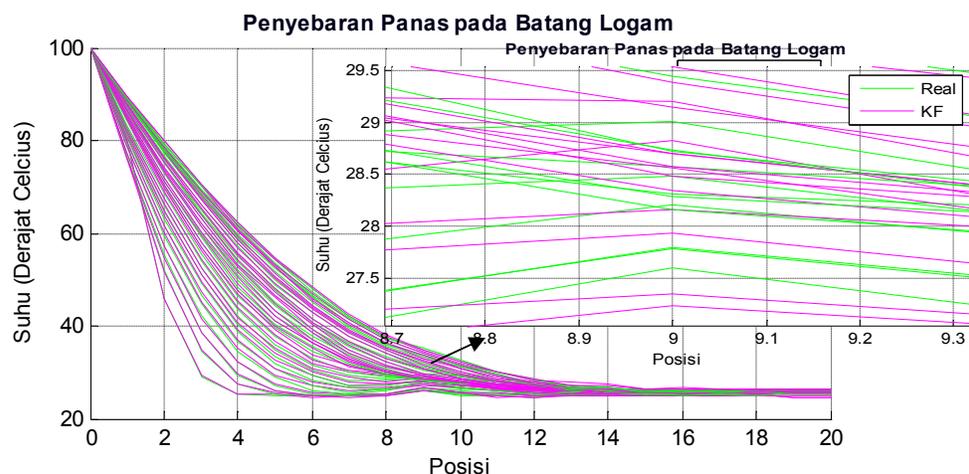


Gambar 4.3 Hasil Estimasi Metode KF

Pada skripsi ini diberikan simulai gangguan yang besarnya diatas suhu ruang yaitu sebesar 36°C dengan posisi (1,9). Apabila diberikan gangguan sebesar suhu yang ekstrim misal dengan suhu -36°C dengan mengubah posisi yaitu dengan meletakkan gangguan pada posisi (2,12), maka grafik dapat dilihat pada Lampiran C.1 untuk metode KF dan Lampiran D.1.5 untuk metode EnKF dengan 500 *ensemble*. Hal ini dilakukan dengan tujuan membuktikan bahwa metode KF dan EnKF dapat mendeteksi adanya gangguan yang masuk.

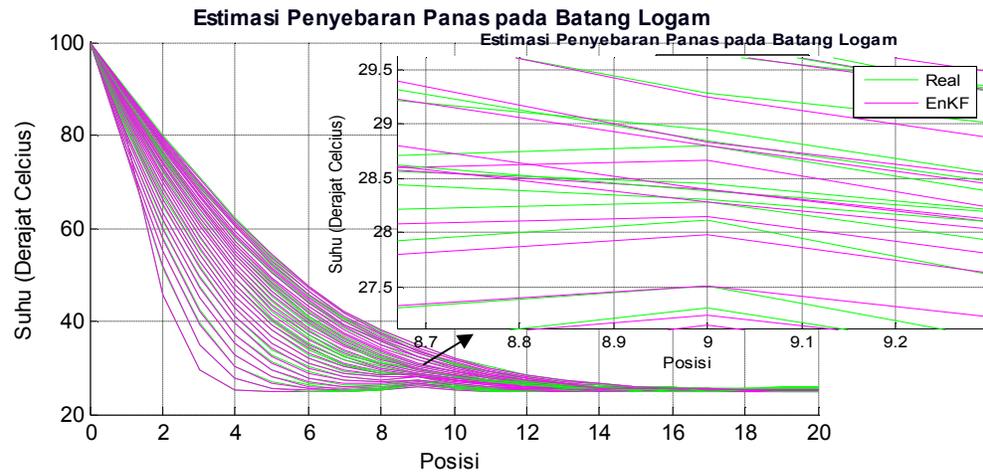
Apabila iterasi dilakukan sebanyak 5 menit atau $T = 300$ sedangkan gangguan diberikan selama 100 detik, maka grafik yang dihasilkan ditunjukkan pada Gambar 4.4 untuk hasil estimasi penyebaran panas menggunakan metode KF dan Gambar 4.5 untuk hasil estimasi penyebaran panas menggunakan metode EnKF dengan 500 *ensemble*.

Pada Gambar 4.4 dan Gambar 4.5 terlihat adanya kenaikan suhu pada posisi ke-9, kemudian pada beberapa waktu grafik kembali normal seperti tidak ada gangguan. Hal ini terjadi karena waktu gangguan dibatasi dengan asumsi batang logam hanya tersentuh selama 100 detik. Percobaan ini dilakukan dengan tujuan bahwa metode KF dan EnKF secara umum dapat mendeteksi adanya gangguan yang masuk walaupun waktu pemberian gangguan dibatasi.



Gambar 4.4 Hasil Estimasi Penyebaran Panas Menggunakan Metode KF,

$T = 300$ dengan Gangguan Selama 100 Detik.



Gambar 4.5 Hasil Estimasi Penyebaran Panas Menggunakan Metode EnKF dengan 500 *ensemble*, $T = 300$ dengan Gangguan Selama 100 Detik.

Seperti halnya dengan logam aluminium, logam lain misal baja dan tembaga memiliki kesimpulan hasil estimasi yang sama dengan hasil estimasi logam aluminium, yaitu metode EnKF dengan 500 *ensemble* memiliki hasil estimasi yang lebih akurat dibandingkan dengan hasil estimasi metode KF. Tabel perbandingan hasil estimasi dengan logam selain logam aluminium ditunjukkan pada Lampiran E.

BAB 5. PENUTUP

Pada bab ini diperoleh kesimpulan dari hasil analisis dan pembahasan yang diperoleh dari penerapan model konduksi panas pada batang logam dengan menggunakan metode *Kalman Filter* (KF) dan *Ensemble Kalman Filter* (EnKF), serta diberikan saran yang dapat dilakukan sebagai kelanjutan skripsi ini.

5.1 Kesimpulan

Kesimpulan yang diperoleh berdasarkan hasil analisis dan pembahasan adalah sebagai berikut:

1. Berdasarkan hasil simulasi menunjukkan bahwa metode KF dan EnKF secara umum mampu mendeteksi adanya gangguan panas yang masuk.
2. Pada metode EnKF, jumlah *ensemble* yang baik untuk mengestimasi adalah 500 *ensemble* karena rata-rata norm kovariansi *error* dan rata-rata *error* lebih kecil dari 100 sampai 400 *ensemble*. Sedangkan untuk jumlah 100 sampai 400 *ensemble* hasil estimasi memberikan rata-rata *error* yang lebih besar.
3. Metode EnKF dengan jumlah 100 sampai 500 *ensemble* dalam kasus ini yaitu mendeteksi gangguan konduksi panas pada batang logam lebih akurat dibandingkan dengan metode KF karena memiliki rata-rata norm kovariansi *error* dan rata-rata *error* yang paling kecil.

5.2 Saran

Pada skripsi ini, permasalahan yang dikaji masih jauh dari kesempurnaan. Sehingga sangat memungkinkan untuk lebih dikembangkan bidang kajian yang lebih luas dan lebih lanjut lagi. Selain itu, penggunaan metode lain juga disarankan agar dapat mengetahui hasil estimasi yang lebih baik.

DAFTAR PUSTAKA

- Budiono, W. S. 2010. *Deteksi Gangguan Konduksi Panas pada Batang Logam Menggunakan Metode Ensemble Kalman Filter*. [serial online]. [http:// digilib.its.ac.id/public/ITS-Undergraduate-12355-Paper.pdf](http://digilib.its.ac.id/public/ITS-Undergraduate-12355-Paper.pdf). [7 November 2011].
- Hidayat, R. 2006. *Persamaan Diferensial Parsial*. Jember: Jember University Press.
- Institut Teknologi Telkom. 2009. *Perpindahan Kalor*. [serial online]. http://www.ittelkom.ac.id/admisi/elearning/menu_27.php. [8 Agustus 2012].
- Kuswati, I. 2011. *Penggunaan Metode Ensemble Kalman Filter untuk Mengestimasi Aliran Dua Fase pada Pipa Pengeboran Minyak*. [serial online]. [http:// digilib.its.ac.id/public/ITS-Undergraduate-15107-Chapter1-1257701.pdf](http://digilib.its.ac.id/public/ITS-Undergraduate-15107-Chapter1-1257701.pdf). [2 November 2011].
- Luknanto, D. Tanpa Tahun. *Hidraulika Komputasi, Metode Beda Hingga*. [serial online]. <http://luk.staff.ugm.ac.id/hidkom/pdf/DiskritisasiSkemaBedaHingga.pdf>. [06 Desember 2011].
- Masduqi, A., & Apriliani, E. 2008. Estimation of Surabaya River Water Quality Using Kalman Filter Algorithm. *The Journal for Technology and Science*, **19(3): 87-91**. [serial online]. http://its.ac.id/personal/files/pub /2102-alimasduqiIPTEK_Kalman_Filter.pdf. [1 januari 2012].
- Purnomo, K. D. 2008. *Aplikasi Metode Ensemble Kalman Filter pada Model Populasi Plankton*. Tidak Diterbitkan. Tesis. Surabaya: Program Pascasarjana Institut Teknologi Sepuluh November.
- Spiegel, M. R. 1993. *Transformasi Laplace*. Jakarta: Airlangga.

Triatmodjo, B. 2002. *Metode Numerik*. Yogyakarta: Beta Offset.

Welch, G. & Bishop, G. 2006. *An Introduction to the Kalman Filter*. [serial online].
http://www.cs.unc.edu/~welch/media/pdf/kalman_intro.pdf. [1 Oktober 2011].

LAMPIRAN A. SKRIP PROGRAM METODE KF

```

% Program KF
% Oleh: Tria Nugrahini
% NIM: 081810101012

clear all;
close all;
disp('KF')
format long;
% TAHAP INISIALISASI
T=100; % input('Jumlah iterasi (satuan waktu)')
Q=0.01; % input ('Nilai kovariansi model')
R=0.01; % input ('Nilai kovariansi model pengukuran')
b=3; % input ('Jumlah alat ukur')
f=20; % banyaknya pendiskritan

% Parameter model
C=0.05; % input ('koefisien konduktivitas logam aluminium')
% C=0.011; % input ('koefisien konduktivitas logam baja')
% C=0.092; % input ('koefisien konduktivitas logam tembaga')
dt=1; % input ('delta t: ')
dx=20/f; % input ('delta x: ')
px=(C/dx^2)*dt;
P0=0.01; % kovariansi error

% Ukuran matrix keadaan
s=f-1;

% Matriks A = matriks hasil pendiskritan berukuran sxs
A=zeros(s,s);
for i=1:s
    A(i,i)=1-2*px;
end
    for i=1:s
        A(s,s)=1-px;
    end
for i=1:s-1
    A(i+1,i)=px;
    A(i,i+1)=px;
end

% Matriks B = matriks koefisien variabel input berukuran sxs
B=zeros(s,s);
B(1,1)=px;

% Matriks E = matriks gangguan berukuran sxs
E=zeros(s,s);
E(1,s-10)=36/T; % E(baris,kolom)
E(2,s-7)=-36/T; % E(baris,kolom)

```

```

% Matriks u
u=zeros(s,1); % u=variabel input yang diberikan secara
deterministik
for i=1:s
    u(i,1)=100-3.75*i*dx;
end
u=ones(s,1)*25;
u(1,1)=100; % batas kiri
u(s,1)=25; % batas kanan

% Matriks H
H=zeros(b,s); % H=matriks pengukuran berukuran bxs
H(1,s-15)=1;
H(2,s-10)=1;
H(3,s-5)=1;

n=size(H,1); % Dimensi matriks H
R1=R*eye(n); % Matriks kovarian model error

% Inisialisasi
x0=u;
xre0=x0;
xrea=x0;
xcor=x0;
d=ones(s,1);

for k=1:T
% Model sistem dan model pengukuran
xreal=A*xre0+B'*u+E'*d+normrnd(0,sqrt(Q),s,1);
z1=H*xreal+normrnd(0,sqrt(R),n,1);

Mxreal(:,k)=xreal;
xre0=xreal;

% -----> TAHAP PREDIKSI
% estimasi
xpre=A*xcor+B'*u+E'*d+normrnd(0,sqrt(Q),s,1);

% kovariansi error
Ppre=A*P0*A'+Q;

% -----> TAHAP KOREKSI
% Kalman Gain
K=Ppre*H'*inv(H*Ppre*H'+R1);

% Estimasi
xcor=xpre(:,1)+K*(z1(:,1)-H*xpre(:,1));
Mxcor(:,k)=xcor;

% Kovariansi error

```

```

Pcor=(eye(s)-K*H)*Ppre;
P0=Pcor;

nilainorm(k)=norm(Pcor);
end

xreal(2:s+1)=xreal; xcor(2:s+1)=xcor;
xreal(s+2)=xreal(s+1); xcor(s+2)=xcor(s+1); s=s+1;
xreal(1)=100; xcor(1)=100;

figure(1)
plot((0:s),xreal,'-og',(0:s),xcor,'-*m');
title('Penyebaran Panas pada Batang
Logam','fontweight','bold','fontsize',10,'color',[.0 .0 .1]); hold
on;
xlabel(' Posisi ');
ylabel(' Suhu (Derajat Celcius)');
legend('Real','KF');
grid on

figure(2)
plot(nilainorm,'-*b');
title('Norm Kovariansi
Error','fontweight','bold','fontsize',10,'color',[.0 .0 .1]); hold
on;
xlabel('Iterasi');
ylabel('Nilai Norm Kovariansi Error');
grid on

figure(3)
title('Error','fontweight','bold','fontsize',10,'color',[.0 .0 .1]);
hold on;
galat=abs(xreal-xcor);
plot((0:s),galat,'-or');
xlim([0 s]);
xlabel('Posisi');
ylabel('Nilai Error');
grid on

disp('rata2 normP'); mean(nilainorm)
disp('rata2 error'); mean(galat)

```

LAMPIRAN B. SKRIP PROGRAM METODE EnKF

```

% Program EnKF dengan N ensemble
% Oleh: Tria Nugrahini
% NIM: 081810101012

clear all;
close all;
disp('EnKF')
format long;
% TAHAP INISIALISASI
% N=100; % input ('Banyaknya Ensemble yang dibangkitkan')
% N=200; % input ('Banyaknya Ensemble yang dibangkitkan')
% N=300; % input ('Banyaknya Ensemble yang dibangkitkan')
% N=400; % input ('Banyaknya Ensemble yang dibangkitkan')
N=500; % input ('Banyaknya Ensemble yang dibangkitkan')
T=100; % input('Jumlah iterasi (satuan waktu)')
Q=0.01; % input ('Nilai kovariansi model')
R=0.01; % input ('Nilai kovariansi model pengukuran')
b=3; % input ('Jumlah alat ukur')
f=20; % banyaknya pendiskritan

% Parameter model
C=0.05; % input ('koefisien konduktivitas logam aluminium')
% C=0.011; % input ('koefisien konduktivitas logam baja')
% C=0.092; % input ('koefisien konduktivitas logam tembaga')
dt=1; % input ('delta t: ')
dx=20/f; % input ('delta x: ')
px=(C/dx^2)*dt;

% Ukuran matrix keadaan
s=f-1;

% Matriks A = matriks hasil pendiskritan berukuran sxs
A=zeros(s,s);
for i=1:s
    A(i,i)=1-2*px;
end
for i=1:s
    A(s,s)=1-px;
end
for i=1:s-1
    A(i+1,i)=px;
    A(i,i+1)=px;
end

% Matriks B = matriks koefisien variabel input berukuran sxs
B=zeros(s,s);
B(1,1)=px;

% Matriks E = matriks gangguan berukuran sxs

```

```

E=zeros(s,s);
E(1,s-10)=36/T;    % E(baris,kolom)
% E(2,s-7)=-36/T; % E(baris,kolom)

% Matriks u
u=zeros(s,1);    % u=variabel input yang diberikan secara
deterministik
for i=1:(s)
    u(i,1)=(100-3.75*i)*dx;
end
u=ones(s,1)*25;
u(1,1)=100; % Batas kiri
u(s,1)=25; % Batas kanan

% Matriks H
H=zeros(b,s);    % H=matriks pengukuran berukuran bxs
H(1,s-15)=1;
H(2,s-10)=1;
H(3,s-5)=1;

n=size(H,1);    % Dimensi matriks H
R1=R*eye(n);    % Matriks kovarian model error

% Inialisasi
x0=u;
xre0=x0;
xrea=x0;
d=ones(s,1);

% Membangkitkan Ensemble awal
for ens=1:N
    x=x0+normrnd(0,sqrt(Q),s,1);
    Mx(:,ens)=x;
end

% Mean Ensemble awal
xcor=mean(Mx,2);

for k=1:T
    % Model sistem dan model pengukuran
    xreal=A*xre0+B'*u+E'*d+normrnd(0,sqrt(Q),s,1);
    z1=H*xreal+normrnd(0,sqrt(R),n,1);

    Mxreal(:,k)=xreal;
    xre0=xreal;

% -----> TAHAP PREDIKSI
% Estimasi
for e=1:N
    x0pre=A*xcor(:,1)+B'*u+E'*d+normrnd(0,sqrt(Q),s,1);

```

```

        xpre1(:,e)=x0pre;
end
% Mean rata-rata ensemble
xpre_mean1=mean(xpre1,2);

for en=1:N
xpre_error1(:,en)=xpre1(:,en)-xpre_mean1;
end

% Kovariansi Error
Ppre=(xpre_error1*xpre_error1')/(N-1);

% -----> TAHAP KOREKSI
% Kalman Gain
K=Ppre*H'*inv(H*Ppre*H'+R1);

% Data pengukuran Ensemble
for a=1:N;
    error1(:,a)=normrnd(0,sqrt(R),n,1);
    z4(:,a)=z1+error1(:,a);
% Estimasi
x0a=xpre1(:,a)+K*(z4(:,a)-H*xpre1(:,a));
xa(:,a)=x0a;
end

xcor1=mean(xa,2);
xcor=xcor1;

% Kovariansi error
P0=(eye(s)-K*H)*Ppre;

nilainorm(k)=norm(P0);
end

xreal(2:s+1)=xreal; xcor(2:s+1)=xcor;
xreal(s+2)=xreal(s+1); xcor(s+2)=xcor(s+1); s=s+1;
xreal(1)=100; xcor(1)=100;

figure(1)
plot((0:s),xreal,'-og',(0:s),xcor,'-*m');
title('Estimasi Penyebaran Panas pada Batang Logam','fontweight','bold','fontsize',10,'color',[.0 .0 .1]); hold on;
xlabel('Posisi ');
ylabel('Suhu (Derajat Celcius)');
legend('Real','EnKF');
grid on

figure(2)
plot(nilainorm,'-*b');

```

```
xlabel('Iterasi');
ylabel('Nilai Norm Kovariansi Error');
title('Norm Kovariansi
Error','fontweight','bold','fontsize',10,'color',[.0 .0 .1]); hold
on;

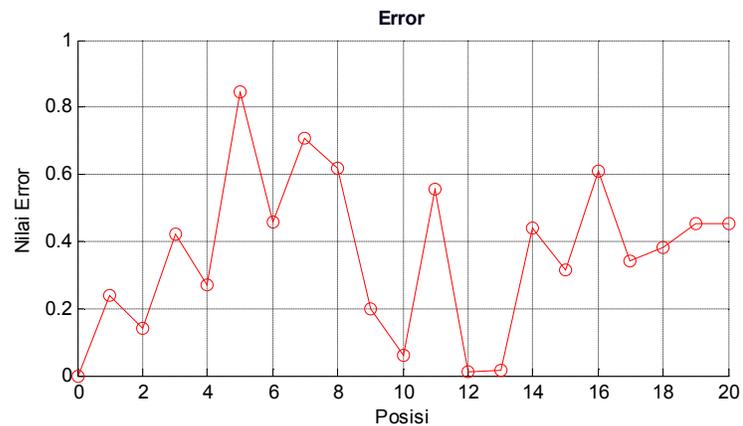
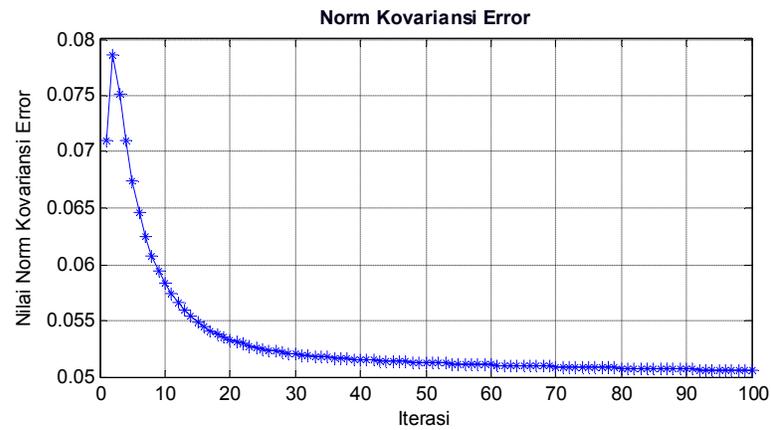
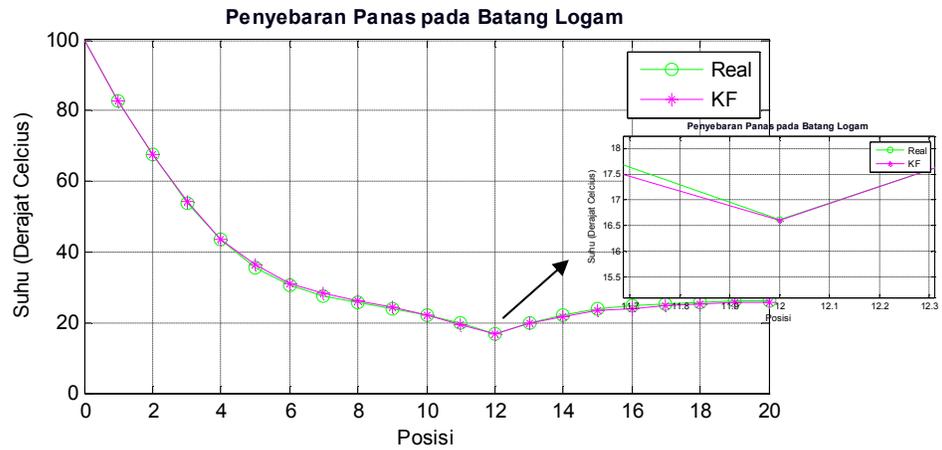
figure(3)
error=abs(xreal-xcor);
plot((0:s),error,'-or');
xlim([0 s]);
xlabel('Posisi ');
ylabel('Nilai Error');
title('Error','fontweight','bold','fontsize',10,'color',[.0 .0 .1]);
hold on;

disp('rata2 normP'); mean(nilainorm)
disp('rata2 error'); mean(error)
```

LAMPIRAN C. GRAFIK HASIL ESTIMASI METODE KF

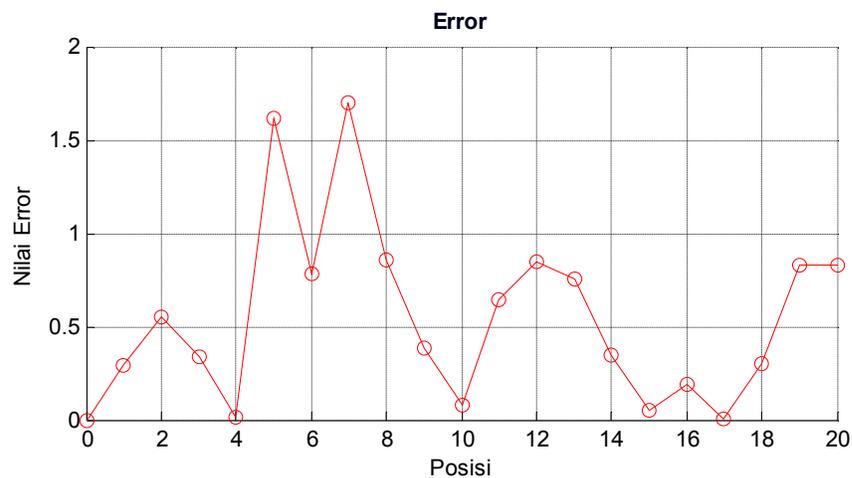
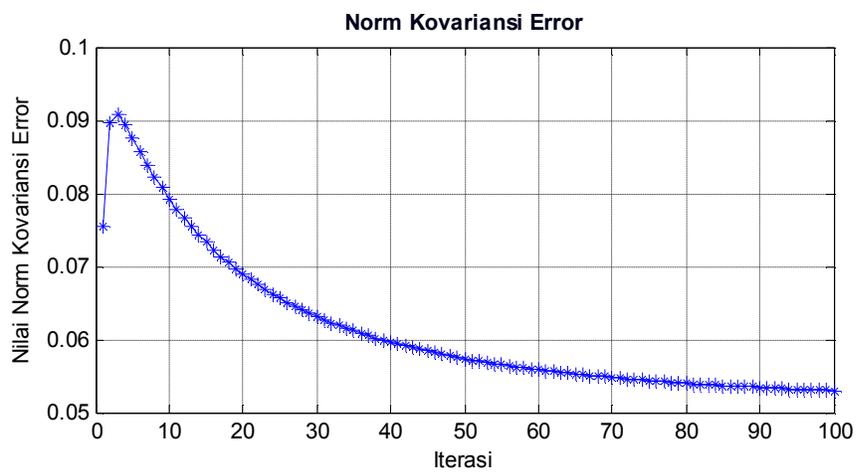
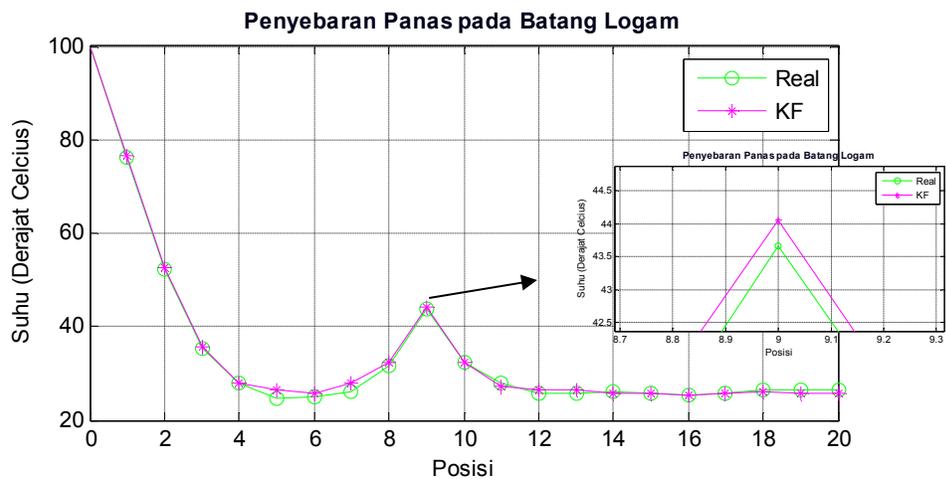
C.1 Grafik Hasil Estimasi Metode KF untuk Logam Aluminium

($C = 0,05 \text{ kkal/s.m } ^\circ\text{C}$) dengan Gangguan Sebesar -36°C dan Posisi Gangguan (2,12)



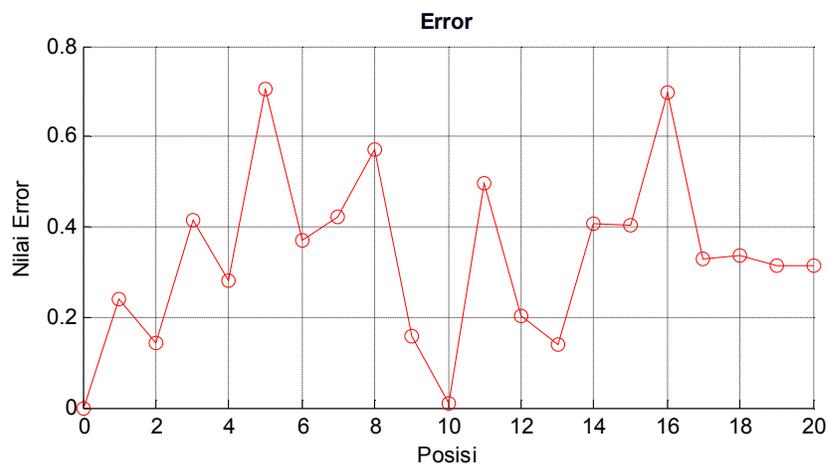
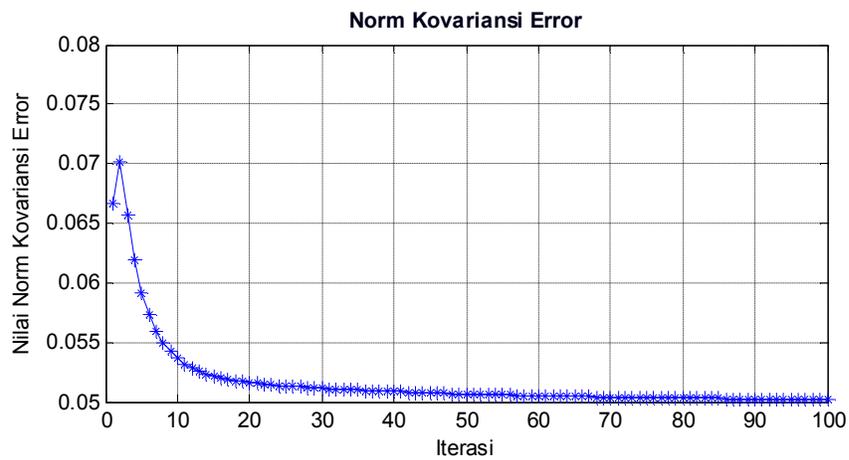
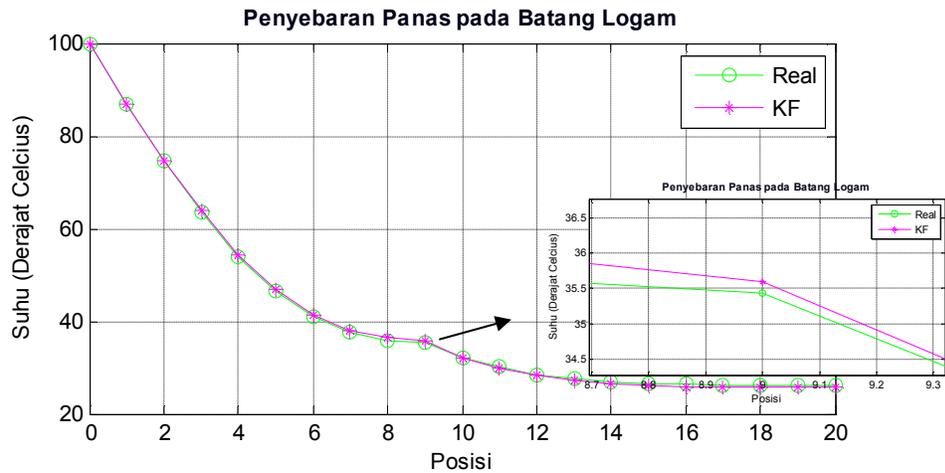
C.2 Grafik Hasil Estimasi Metode KF untuk Logam Baja

($C = 0,011 \text{ kkal/s.m } ^\circ\text{C}$)



C.3 Grafik Hasil Estimasi Metode KF untuk Logam Tembaga

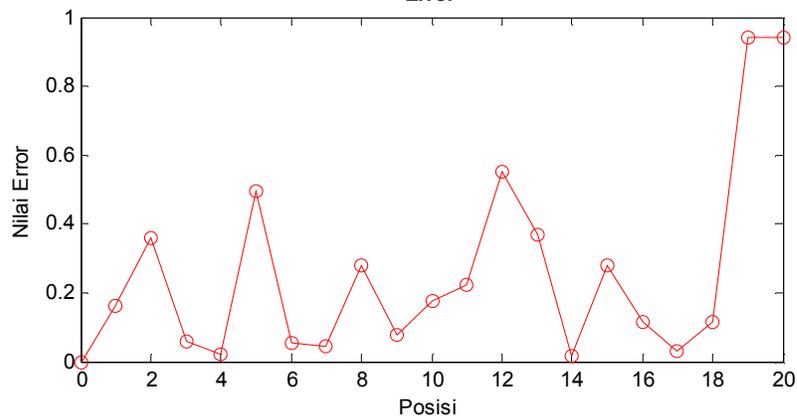
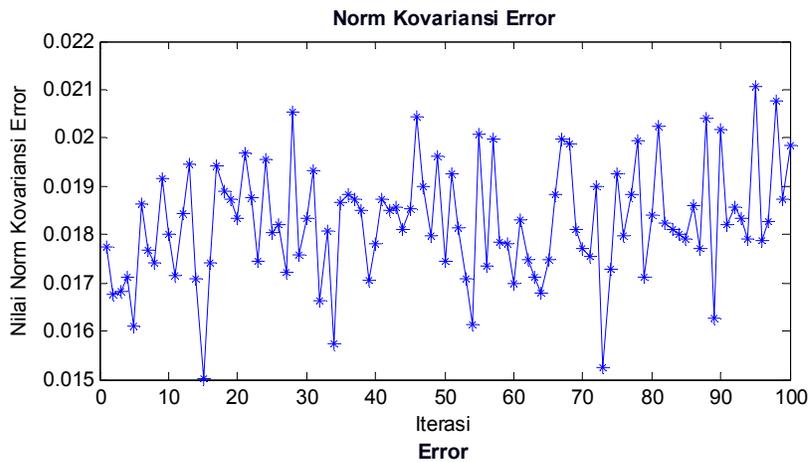
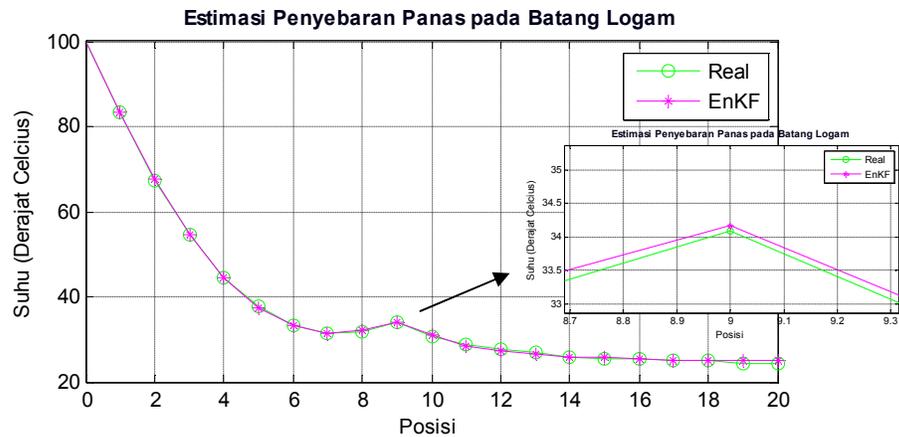
($C = 0,092 \text{ kkal/s.m } ^\circ\text{C}$)



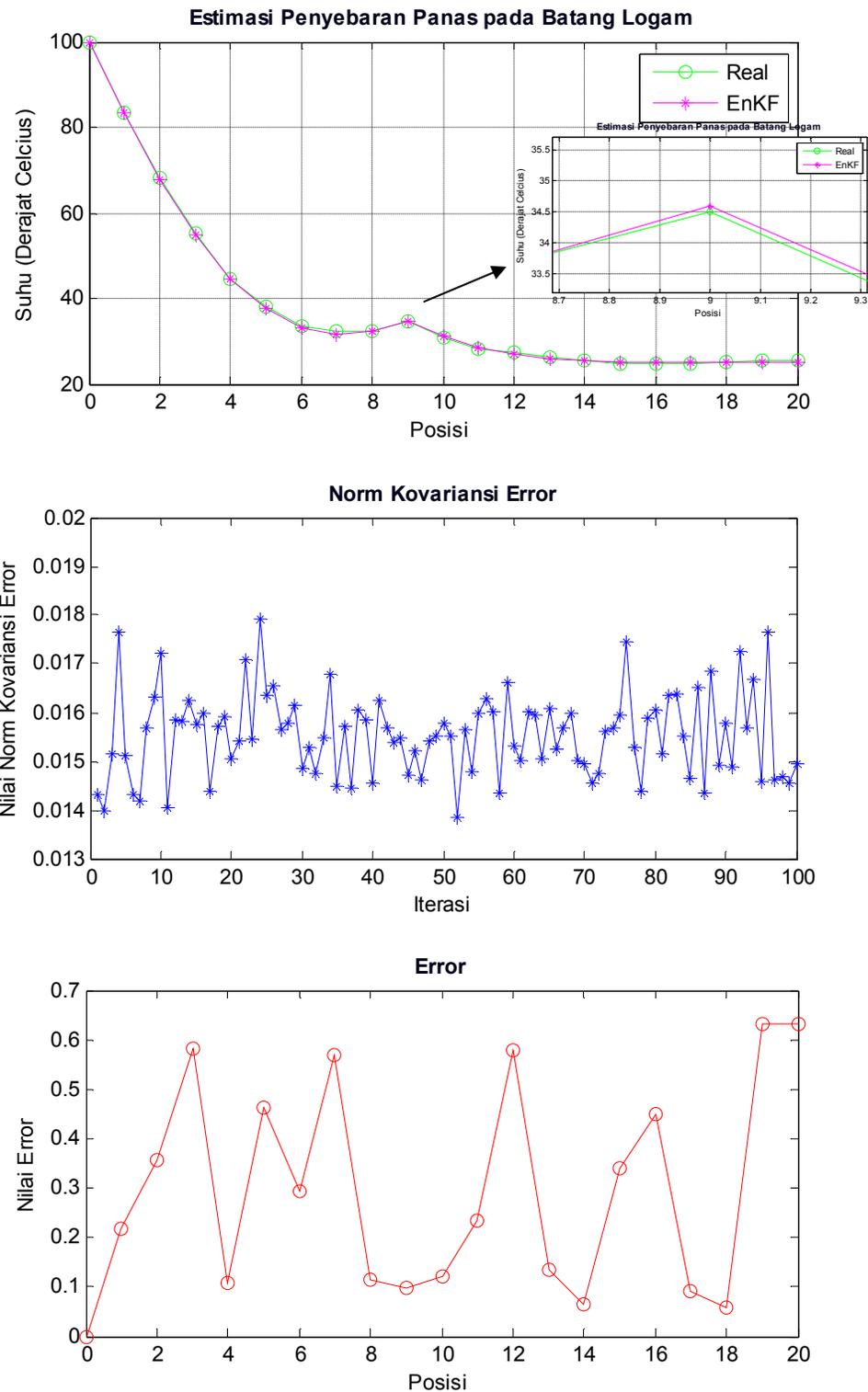
LAMPIRAN D. GRAFIK METODE EnKF

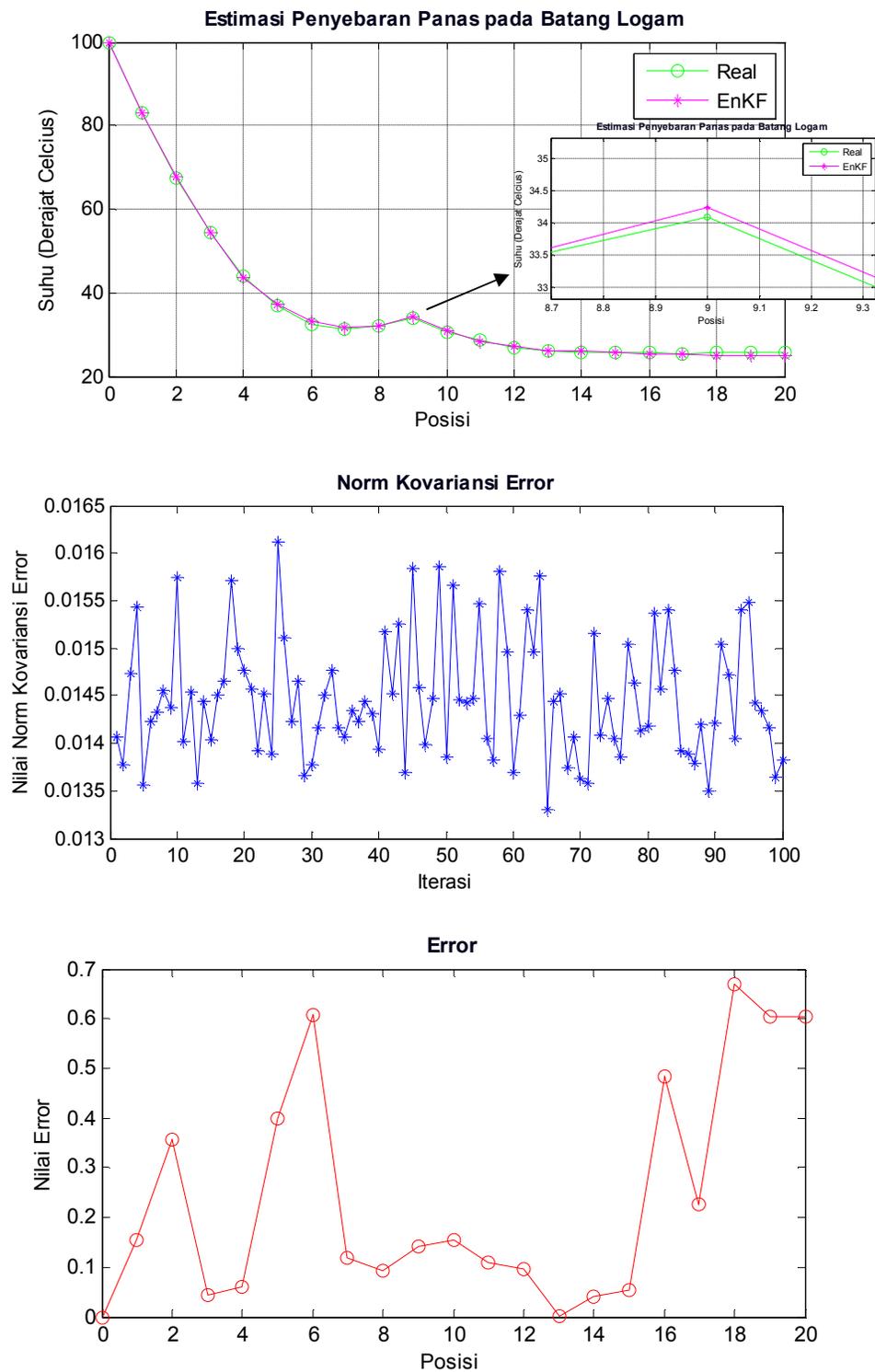
D.1 Grafik Hasil Estimasi Metode EnKF untuk Logam Aluminium ($C = 0,05 \text{ kkal/s.m } ^\circ\text{C}$)

D.1.1 Grafik hasil estimasi metode EnKF dengan 100 *ensemble*

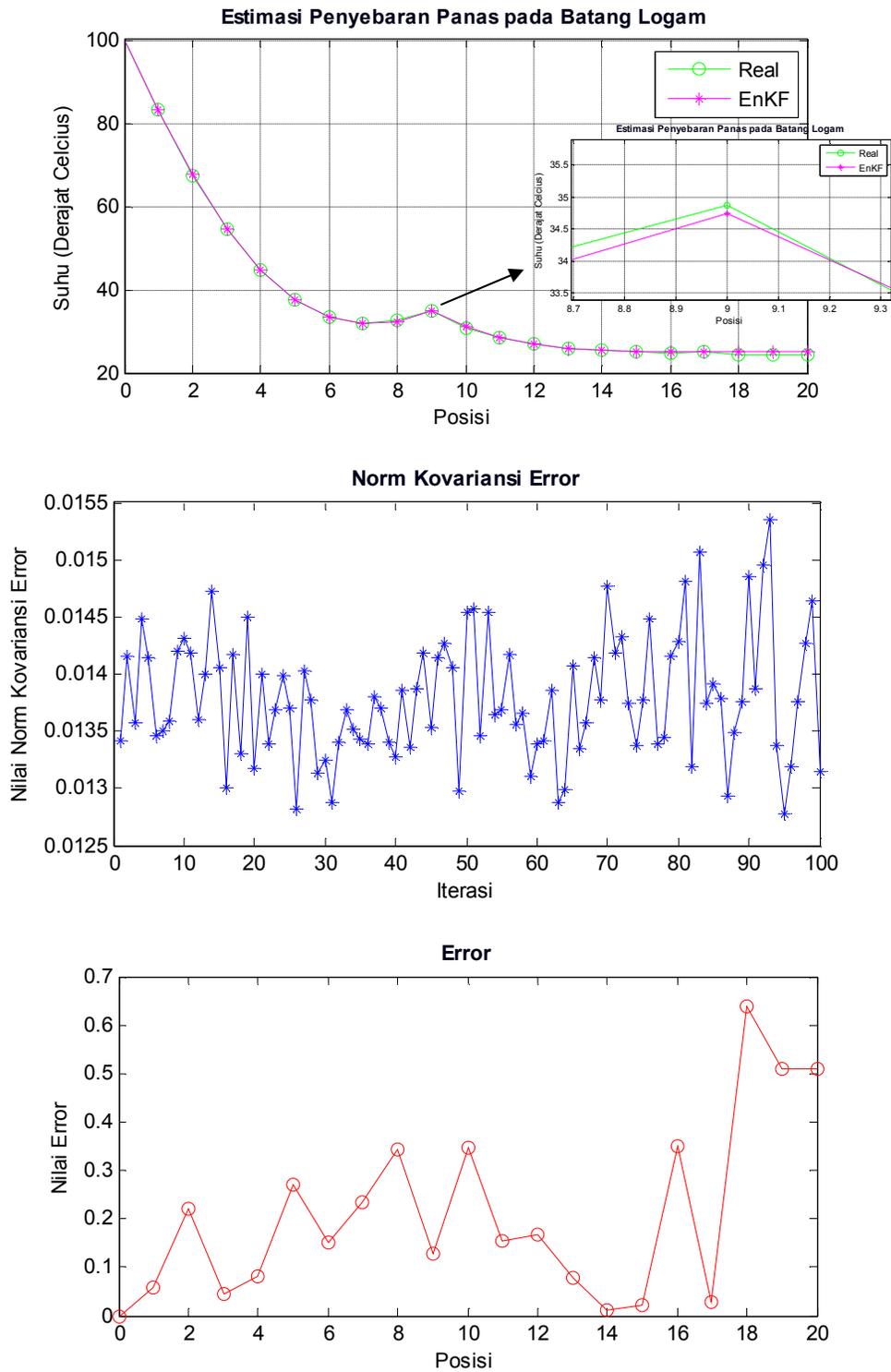


D.1.2 Grafik hasil estimasi metode EnKF dengan 200 *ensemble*

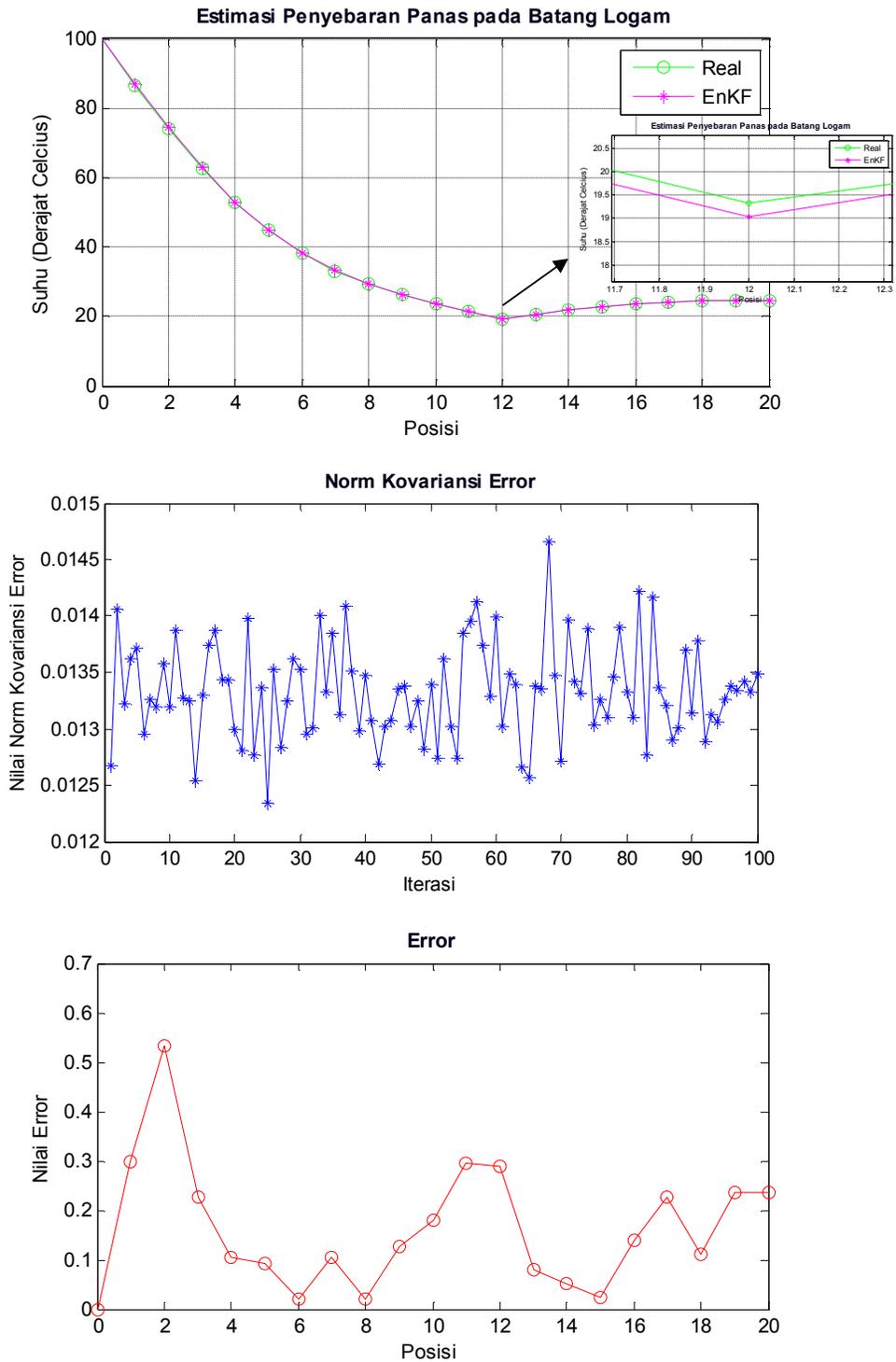


D.1.3 Grafik hasil estimasi metode EnKF dengan 300 *ensemble*

D.1.4 Grafik hasil estimasi metode EnKF dengan 400 ensemble

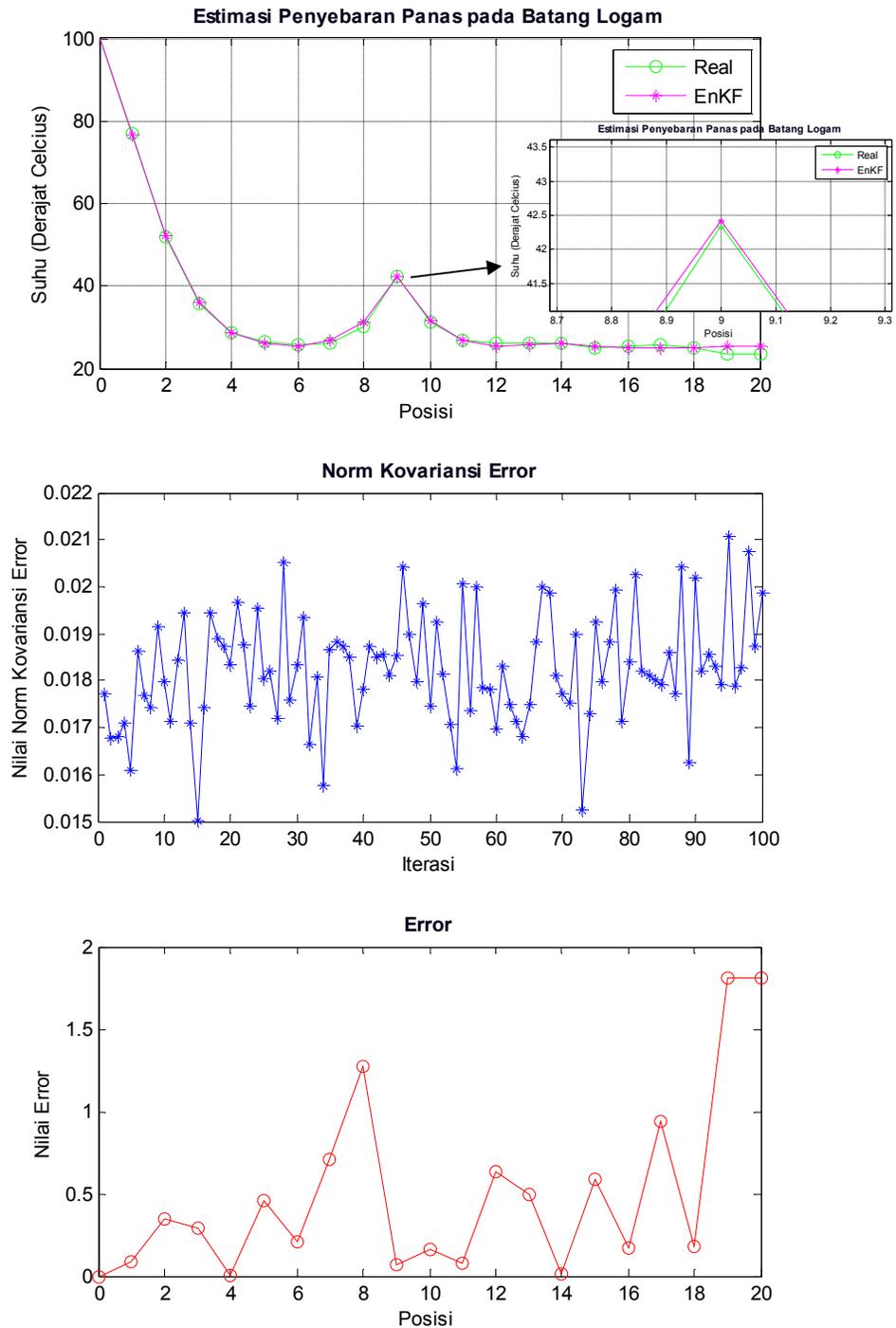


D.1.5 Grafik hasil estimasi metode EnKF dengan 500 *ensemble* untuk gangguan sebesar -36°C dan letak gangguan (2,12)

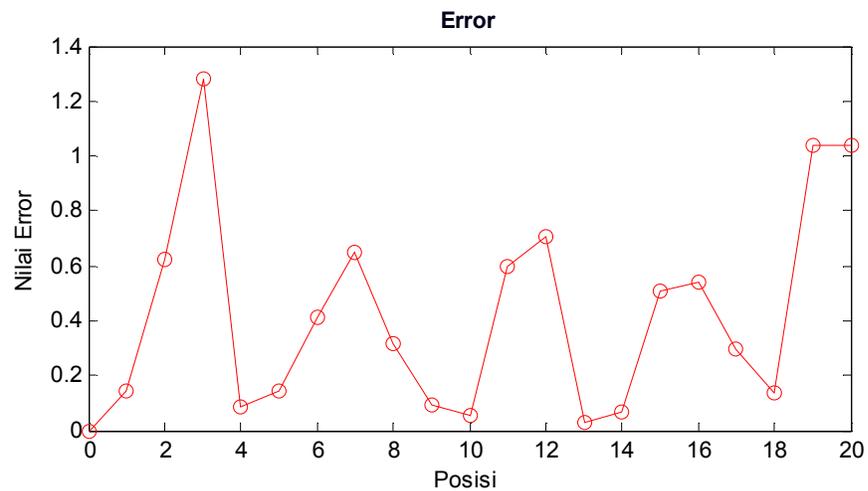
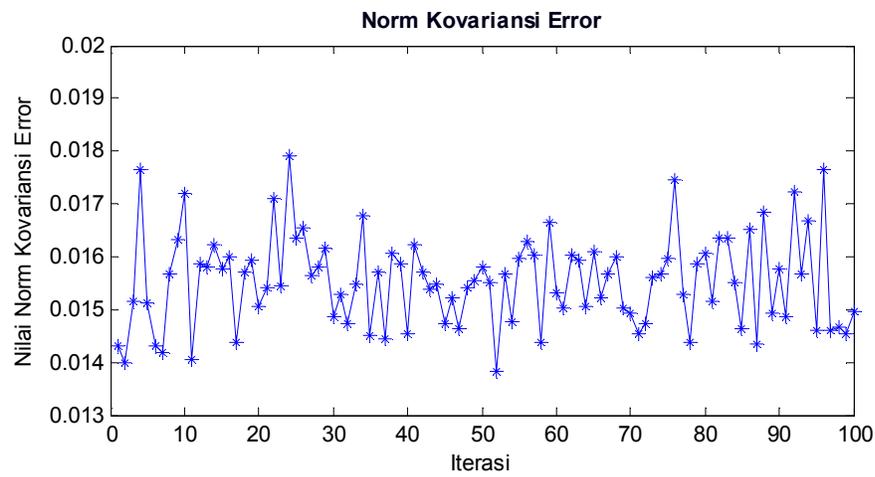
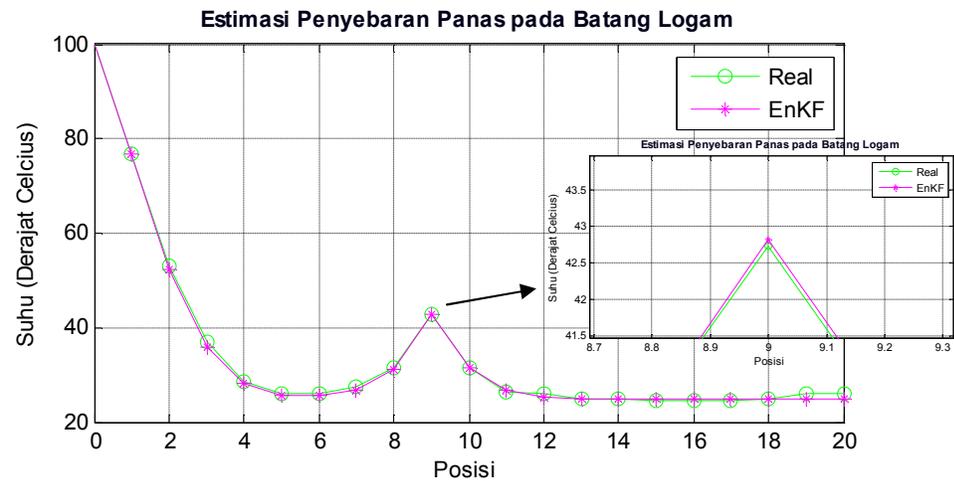


D.2 Grafik Hasil Estimasi Metode EnKF untuk Logam Baja ($C = 0,011 \text{ kkal/s.m } ^\circ\text{C}$)

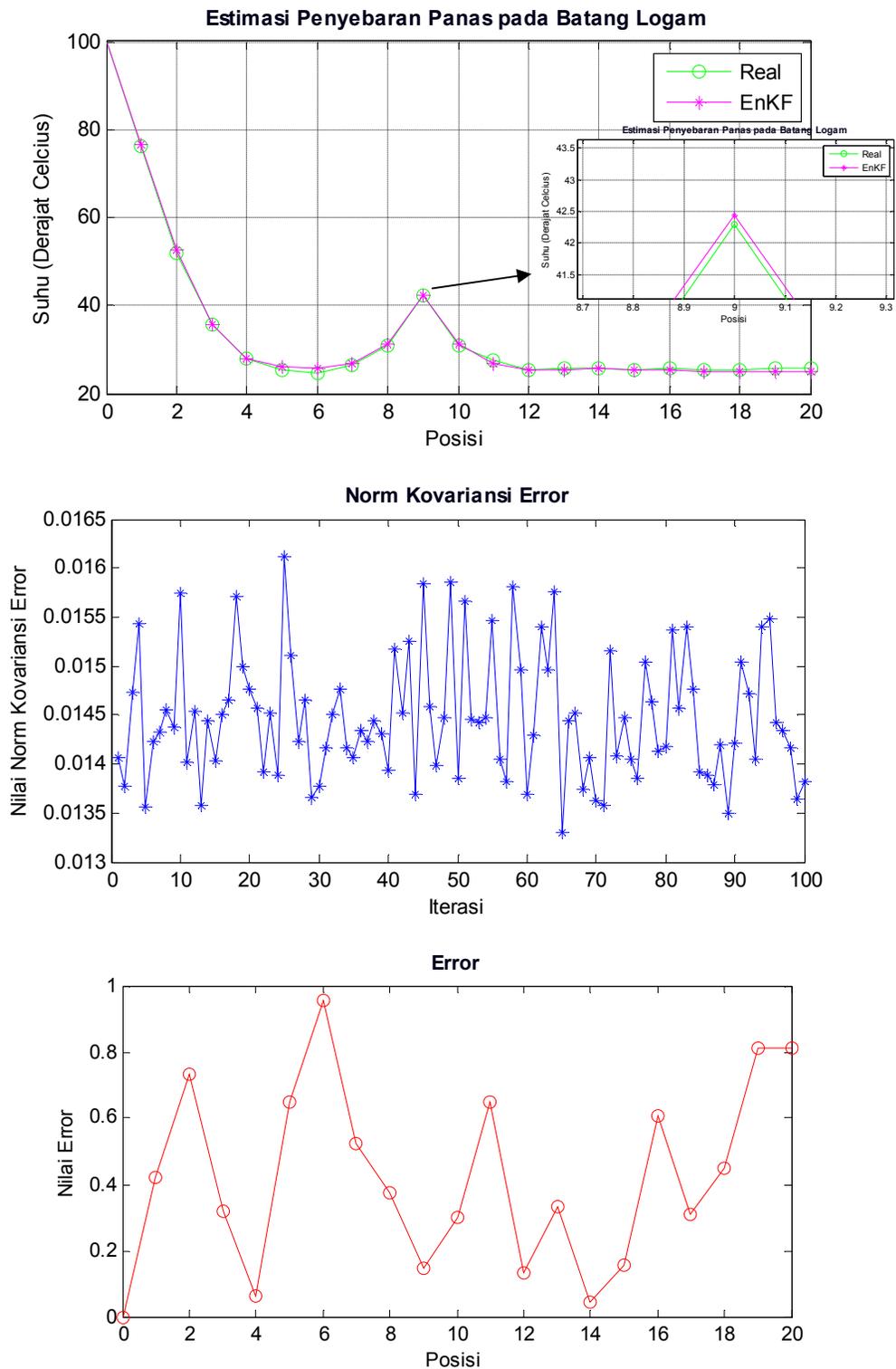
D.2.1 Grafik hasil estimasi metode EnKF dengan 100 *ensemble*



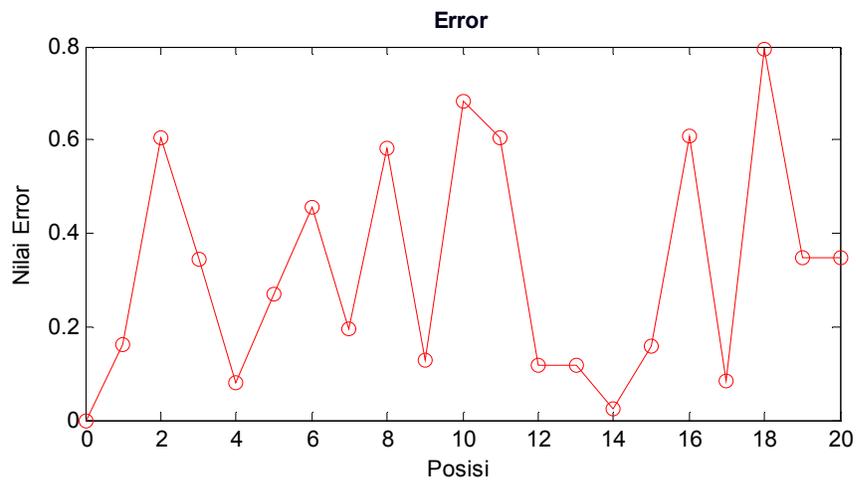
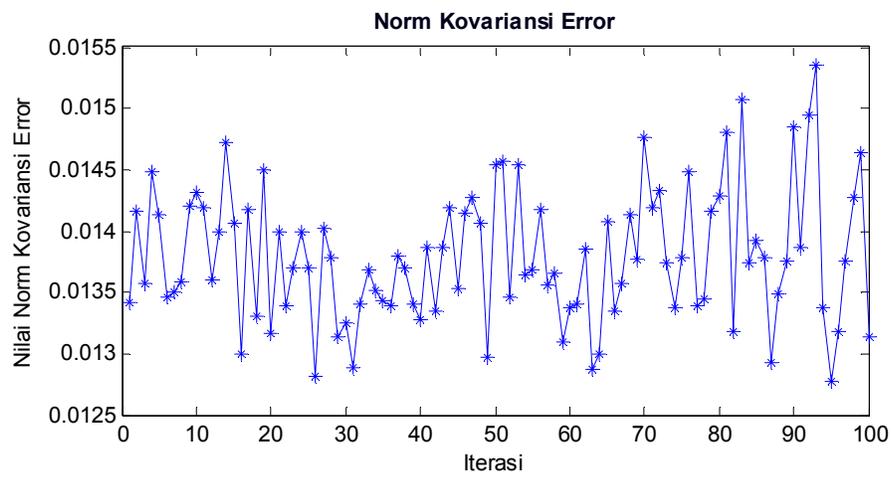
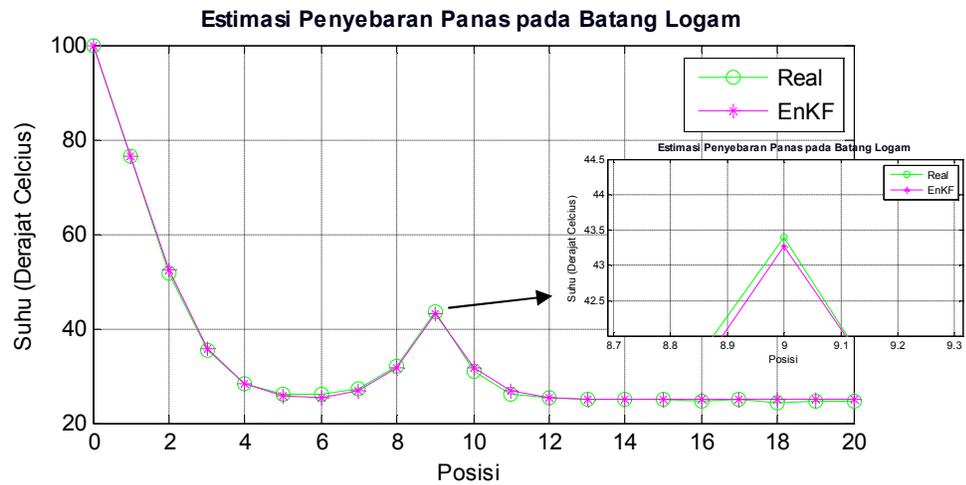
D.2.2 Grafik hasil estimasi metode EnKF dengan 200 *ensemble*



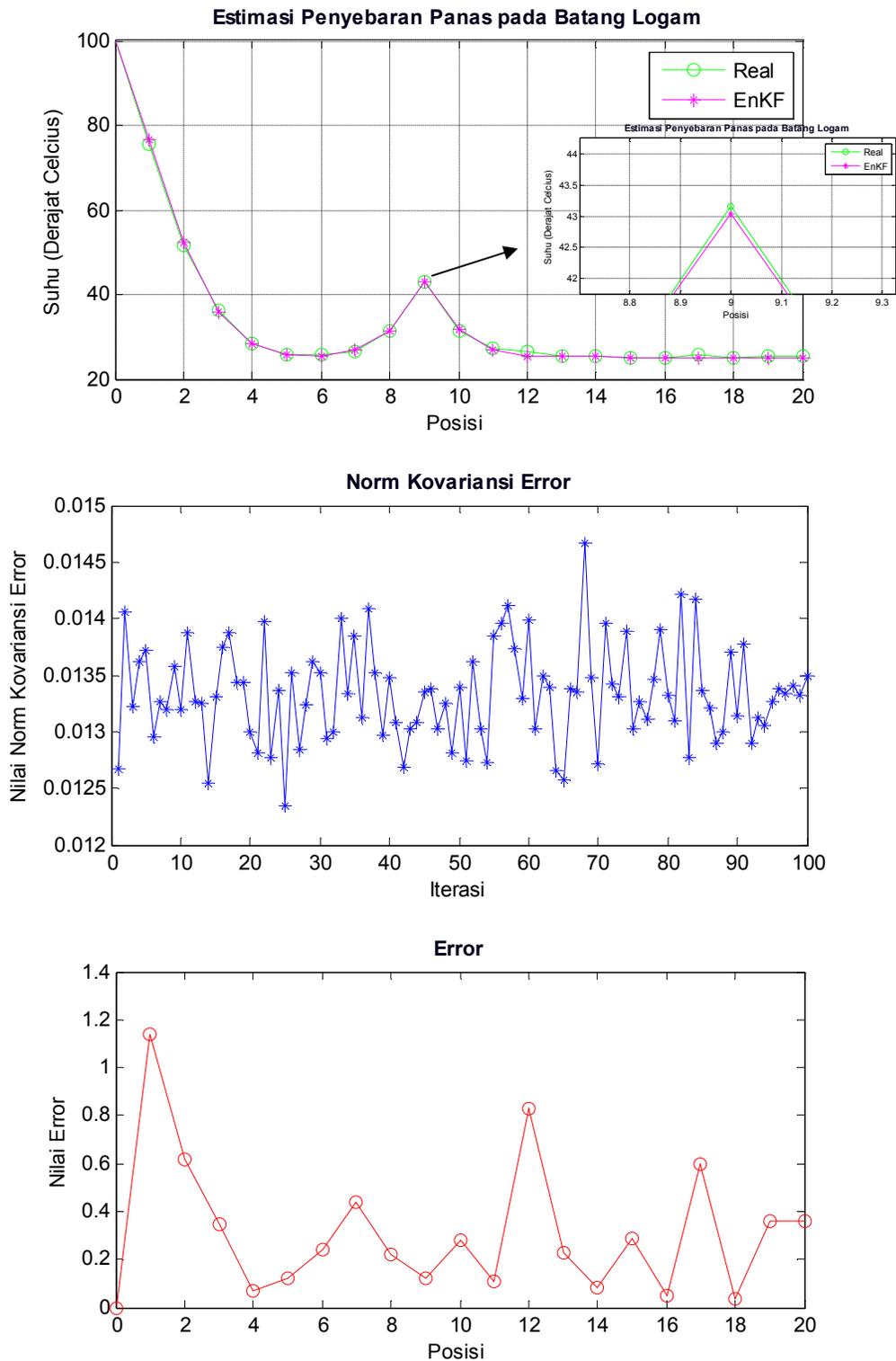
D.2.3 Grafik hasil estimasi metode EnKF dengan 300 *ensemble*



D.2.4 Grafik hasil estimasi metode EnKF dengan 400 ensemble

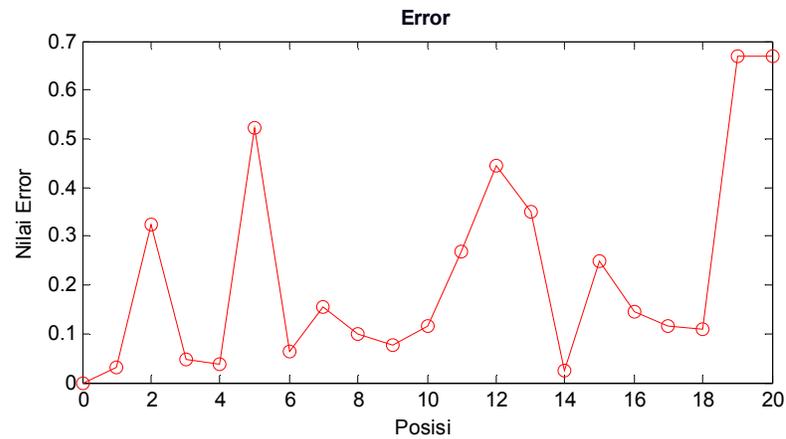
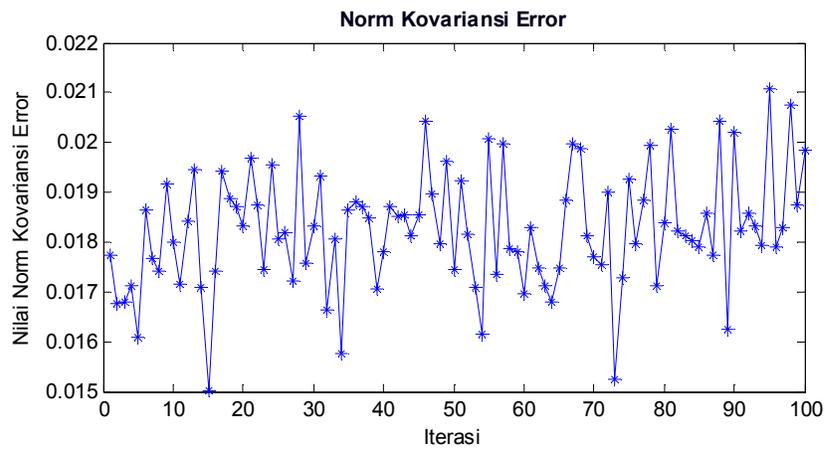
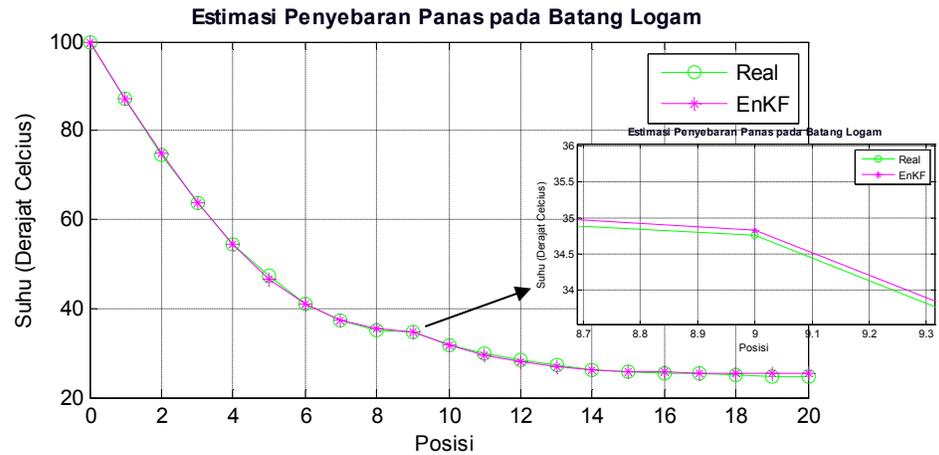


D.2.5 Grafik hasil estimasi metode EnKF dengan 500 ensemble

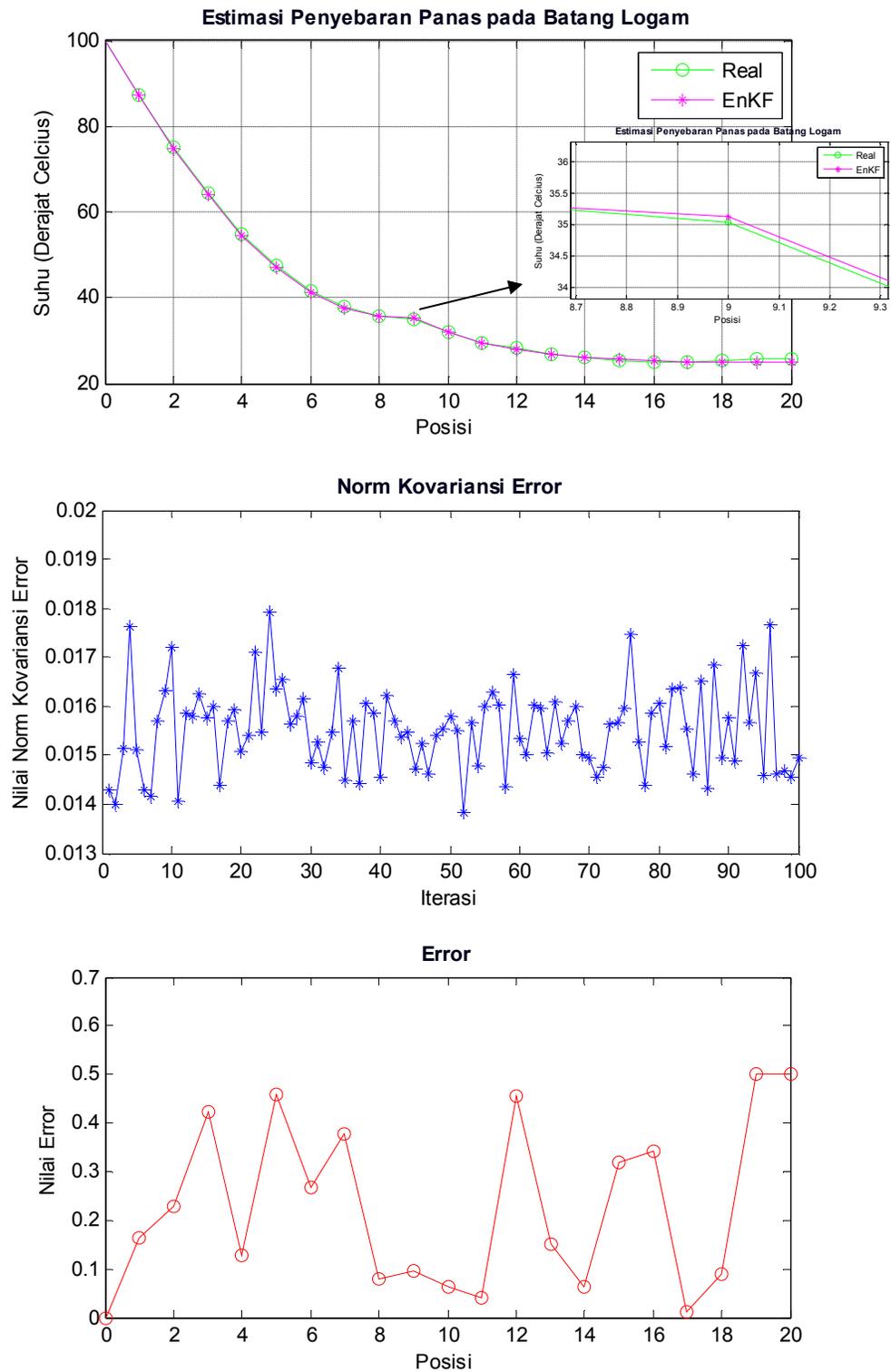


D.3 Grafik Hasil Estimasi Metode EnKF untuk Logam Tembaga ($C = 0,092 \text{ kkal/s.m } ^\circ\text{C}$)

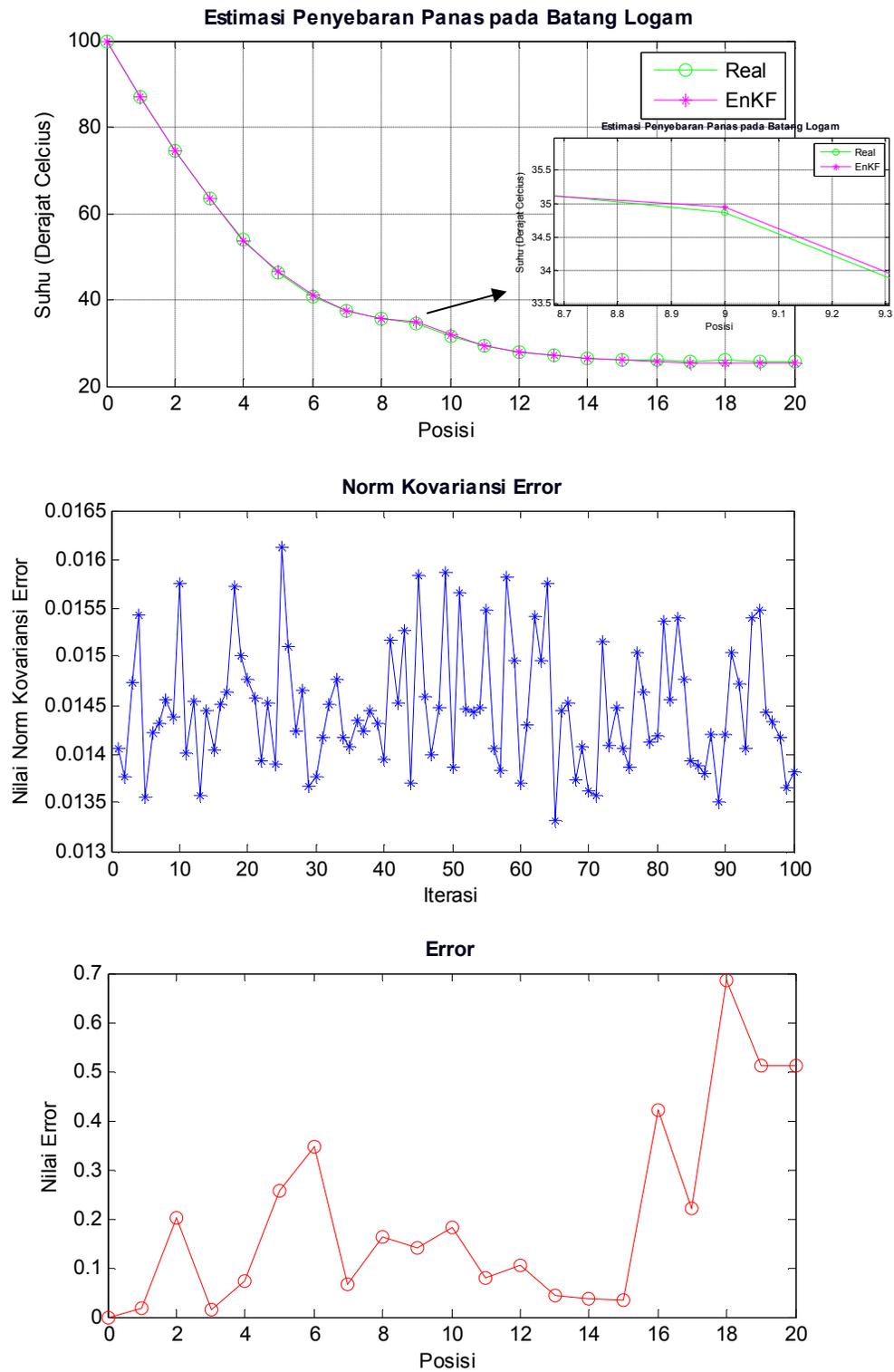
D.3.1 Grafik hasil estimasi metode EnKF dengan 100 *ensemble*



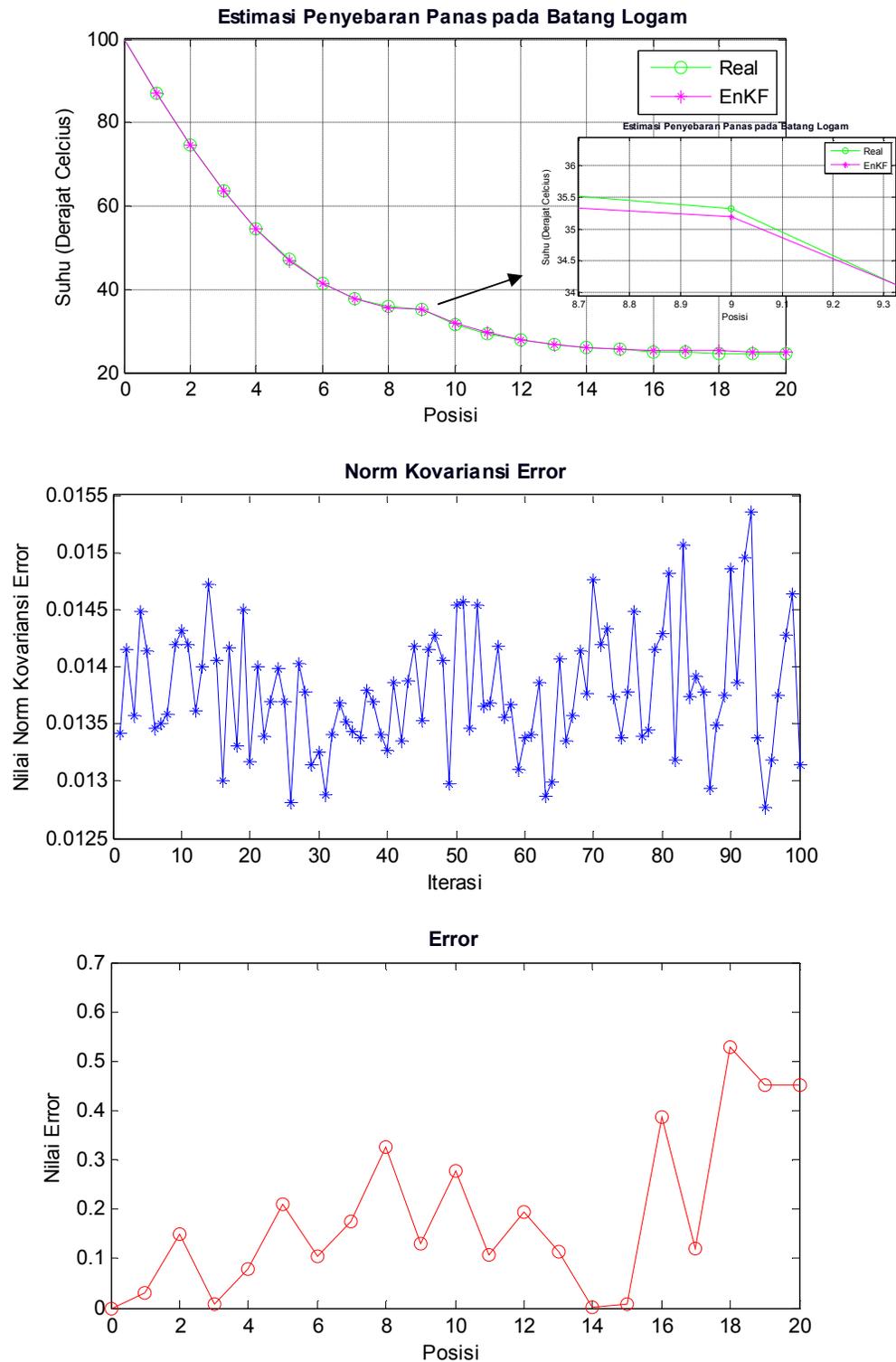
D.3.2 Grafik hasil estimasi metode EnKF dengan 200 ensemble



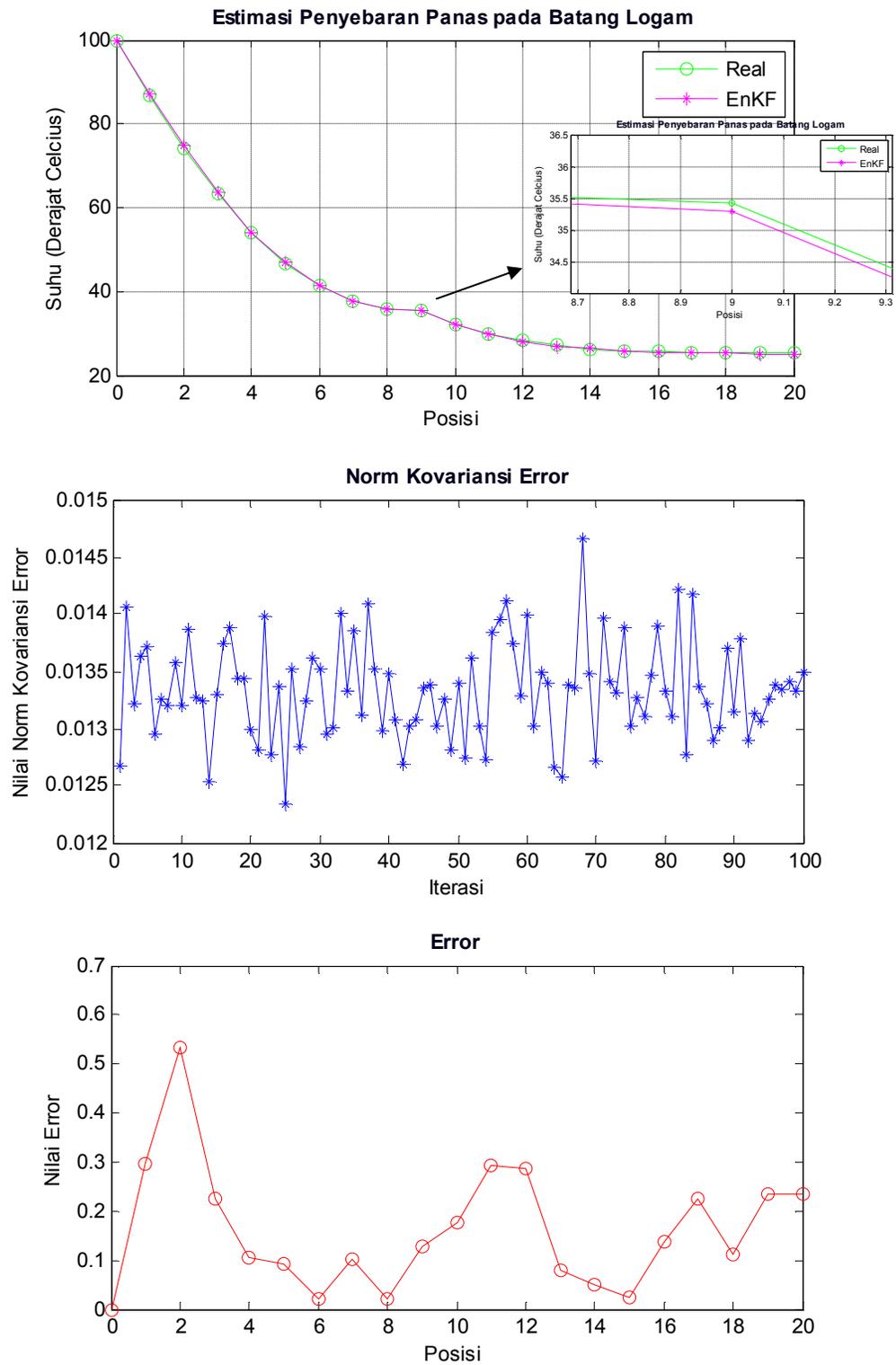
D.3.3 Grafik hasil estimasi metode EnKF dengan 300 ensemble



D.3.4 Grafik hasil estimasi metode EnKF dengan 400 ensemble



D.3.5 Grafik hasil estimasi metode EnKF dengan 500 ensemble



LAMPIRAN E. HASIL ESTIMASI

E.1 Perbandingan Hasil Estimasi Metode KF dan EnKF untuk Logam Baja

	KF	EnKF				
		$N_{\varepsilon} = 100$	$N_{\varepsilon} = 200$	$N_{\varepsilon} = 300$	$N_{\varepsilon} = 400$	$N_{\varepsilon} = 500$
Rata-rata norm kovariansi <i>error</i>	0,06154	0,01780	0,01549	0,01455	0,01380	0,01340
Rata-rata <i>error</i>	0,54388	0,49163	0,41715	0,41820	0,31933	0,31112

E.2 Perbandingan Hasil Estimasi Metode KF dan EnKF untuk Logam Tembaga

	KF	EnKF				
		$N_{\varepsilon} = 100$	$N_{\varepsilon} = 200$	$N_{\varepsilon} = 300$	$N_{\varepsilon} = 400$	$N_{\varepsilon} = 500$
Rata-rata norm kovariansi <i>error</i>	0,05171	0,01805	0,01566	0,01452	0,01380	0,01338
Rata-rata <i>error</i>	0,33084	0,21492	0,22657	0,19556	0,18369	0,16102