PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL PADA ALIRAN PANAS SEBUAH PLAT LOGAM DENGAN METODE LIEBMANN

SKRIPSI

Oleh

Titik Eko Wati

NIM 081810101006

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER
2013

PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL PADA ALIRAN PANAS SEBUAH PLAT LOGAM DENGAN METODE LIEBMANN

SKRIPSI

diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat untuk
menyelesaikan Program Studi Matematika (S1)
dan mencapai gelar Sarjana Sains

Oleh

Titik Eko Wati

NIM 081810101006

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER

2013

PERSEMBAHAN

Skripsi ini saya persembahkan untuk:

1. Ayahanda Wardi dan Ibunda Almh. Surani yang telah melahirkan dan membesarkan saya dengan kasih sayang, perhatian dan pengorbanan yang tiada henti, serta doa yang tak pernah putus;
2. kakak tersayang Sri Wahyuningsih A.Md yang telah memberikan kasih sayang, perhatian dan do'a;
3. sahabat-sahabat saya Putri Pramitasari, Eka Farista, Tri Gunarso, Dayvis Suryadana, Lulus Novita Sari, Dewintha Melyasari S.Si, Arif Riyanto S.Si dan semua teman-teman saya yang telah memberi segala pengorbanan, dukungan, perhatian, dan doa;
4. Lukman Hariadi S.Si yang telah memberikan do'a, bantuan dan dukungan dalam menyelesaikan skripsi ini;
5. guru-guru saya yang telah memberikan ilmu dan membimbing saya dengan penuh kesabaran;
6. Almamater Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

MOTTO

"Barangsiapa bertakwa kepada Allah niscaya Dia akan mengadakan baginya jalan keluar".[1]

"Janganlah kamu sekalian berputus asa dari rahmat Allah.
Sesungguhnya orang yang berputus asa dari rahmat Allah adalah golongan orang-orang kafir."[2]

[1] Shofia, Abu. 2008. *Al-Qur'an dan Terjemahannya*. Surabaya:Toko Buku Imam
[2] Shofia, Abu. 2008. *Al-Qur'an dan Terjemahannya*. Surabaya:Toko Buku Imam

PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

nama : Titik Eko Wati

NIM : 081810101006

menyatakan dengan sesungguhnya bahwa karya ilmiah yang berjudul ” Penyelesaian Persamaan Diferensial Parsial Pada Aliran Panas Sebuah Plat Logam Dengan Metode Liebmann” adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali kutipan yang telah saya sebutkan sumbernya, belum pernah diajukan pada institusi mana pun, dan bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa ada tekanan dan paksaan dari pihak mana pun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, 31 Januari 2013

Yang menyatakan,

Titik Eko Wati
NIM 081810101006

SKRIPSI

PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL PADA ALIRAN PANAS SEBUAH PLAT LOGAM DENGAN METODE LIEBMANN

Oleh

Titik Eko Wati
NIM 081810101006

Pembimbing

Dosen Pembimbing Utama : Kusbudiono, S.Si, M.Si

Dosen Pembimbing Anggota : Drs. Rusli Hidayat, M.Sc.

PENGESAHAN

Skripsi berjudul ” Penyelesaian Persamaan Diferensial Parsial Pada Aliran Panas Sebuah Plat Logam Dengan Metode Liebmann” telah diuji dan disahkan pada:

hari, tanggal :

tempat : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember

Tim Penguji:

Ketua,	Sekretaris,
Kusbudiono, S.Si, M.Si NIP 197704302005011001	Drs. Rusli Hidayat, M.Sc. NIP 196610121993031001
Penguji I,	Penguji II,
Agustina Pradjaningsih, S.Si, MSi NIP 197108022000032009	Ahmad Kamsyakawuni, S.Si, M.Kom NIP.197211291998021001

Mengesahkan

Dekan,

Prof. Drs. Kusno, DEA, Ph.D.
NIP 196101081986021001

RINGKASAN

Penyelesaian Persamaan Diferensial Parsial Pada Aliran Panas Sebuah Plat Logam Dengan Metode Liebmann; Titik Eko Wati, 081810101006; 2013: 53 halaman; Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Banyak kejadian dalam kehidupan sehari-hari yang melahirkan model matematika, namun model matematikanya mengandung laju perubahan, sehingga dalam situasi seperti ini dibutuhkan penyelesaian atau perhitungan matematika secara khusus. Perhitungan tersebut memerlukan persamaan diferensial, misalnya masalah aliran panas dapat diselesaikan menggunakan salah satu metode numerik yaitu metode Liebmann. Tujuan dari skripsi ini yaitu untuk menyelesaikan persamaan aliran panas plat logam dua dimensi pada saat *steady*. Pengertian *steady* adalah bila laju aliran panas suatu sistem tidak berubah dengan waktu, yaitu laju tersebut konstan, maka suhu di titik manapun tidak berubah.

Penelitian dilakukan dalam dua tahap. Pertama mendiskritisasi model aliran panas dalam keadaan *steady* dengan sumber panas dan tanpa sumber panas karena bentuk modelnya masih kontinu. Tujuan dari diskritisasi model adalah merubah bentuk persamaan kontinu menjadi bentuk diskrit agar dapat diselesaikan dengan metode numerik. Tahap kedua yaitu pembuatan program, simulasi dan visualisasi. Pembuatan program dalam skripsi ini menggunakan *software* Matlab 7.8.0. Simulasi dan visualisasi bertujuan untuk mengetahui parameter-parameter apa saja yang berpengaruh dalam menyelesaikan model aliran panas. Simulasi dan visualisasi yang dilakukan antara lain merubah nilai *error* dan laju panas. Nilai *error* yang digunakan 0,01% dengan laju panas sebesar $10000\frac{W}{m}$ dan nilai *error* 0,001% dengan laju panas

sebesar $50000\frac{W}{m}$. Pemilihan nilai *error* sebesar 0,01% dan 0,001% dikarenakan syarat untuk memperoleh hasil yang signifikan yaitu dengan nilai *error* sebesar 1% < p < 5% sedangkan untuk memperoleh hasil yang sangat signifikan nilai *error* harus kurang dari 1%.

Dari hasil simulasi dan visualisasi yang telah dibuat dapat diketahui banyaknya iterasi yang dilakukan untuk memperoleh keadaan setimbang. Penyelesaian aliran panas pada saat *steady* menggunakan metode Liebmann dengan syarat awal nol dan syarat batas pada sekeliling plat dengan nilai $T(0,y) = 10℃, T(L,y) = 150℃, T(x,0) = 50℃, T(x,K) = 100℃$, pada aliran panas yang mengandung sumber panas pada plat logam besi dengan nilai *error* 0,01% dan laju panas $10000\frac{W}{m}$ diperoleh nilai setimbang pada iterasi ke-814, sedangkan dengan nilai *error* 0,001% dan laju panas $50000\frac{W}{m}$ pada iterasi ke-996. Pada plat logam tembaga dengan nilai *error* 0,01% dan laju panas $10000\frac{W}{m}$ diperoleh nilai setimbang yaitu pada iterasi ke-836, sedangkan dengan nilai *error* 0,001% dan laju panas $50000\frac{W}{m}$ pada iterasi ke-1007 dan pada plat logam aluminium dengan nilai *error* 0,01% dan laju panas $10000\frac{W}{m}$ diperoleh nilai setimbang pada iterasi ke-827, sedangkan dengan nilai *error* 0,001% dan laju panas $50000\frac{W}{m}$ pada iterasi ke-1001. Sedangkan pada plat logam dalam keadaan *steady* tanpa sumber panas didalamnya dengan nilai *error* 0,01% diperoleh nilai setimbang pada iterasi ke-858, sedangkan dengan nilai *error* 0,001% pada iterasi ke-1051.

PRAKATA

Puji syukur ke hadirat Allah SWT atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul “Penyelesaian Persamaan Diferensial Parsial Pada Aliran Panas Sebuah Plat Logam Dengan Metode Liebmann”. Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan Program Studi Matematika (S1) dan mencapai gelar Sarjana Sains.

Penyusunan skripsi ini tidak lepas dari bantuan berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan terima kasih kepada:

1. Kusbudiono, S.Si, M.Si selaku Dosen Pembimbing Utama dan Drs. Rusli Hidayat, M.Sc., selaku Dosen Pembimbing Anggota yang telah meluangkan waktu, pikiran, dan perhatian dalam penulisan skripsi ini;
2. Agustina Pradjaningsih,S.Si., M.Si. dan Ahmad Kamsyakawuni, S.Si, M.Kom, selaku Dosen Penguji yang telah memberikan kritik dan saran demi kesempurnaan skripsi ini;
3. teman-teman mahasiswa Jurusan Matematika, khususnya angkatan 2008 yang telah memberi bantuan dan dukungan kepada penulis;
4. teman-teman kos Kalimantan X No.23B, wintha, luluz, nila, fitri, vira, dan yuvi yang telah menemani, membantu dan memberi dukungan dalam mengerjakan skripsi ini;
5. semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu per satu.

Penulis menerima segala kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan skripsi ini. Akhirnya penulis berharap semoga skripsi ini dapat bermanfaat.

Jember, 31 Januari 2013

Penulis

DAFTAR ISI

Halaman

HALAMAN JUDUL i
HALAMAN PERSEMBAHAN ii
HALAMAN MOTTO iii
HALAMAN PERNYATAAN iv
HALAMAN PEMBIMBINGAN v
HALAMAN PENGESAHAN vi
HALAMAN RINGKASAN vii
PRAKATA ix
DAFTAR ISI x
DAFTAR TABEL xii
DAFTAR GAMBAR xiii
BAB 1. PENDAHULUAN 1
1.1 Latar Belakang 1
1.2 Rumusan Masalah 2
1.3 Batasan Masalah 2
1.4 Tujuan 3
1.5 Manfaat 3
BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA 4
2.1 Logam 4
2.1.1 Pengertian dan Kegunaan Logam 4
2.1.2 Konduktivitas Termal Logam 4
2.2 Energi 5
2.1.1 Pengertian Energi 5
2.1.2 Perpindahan Energi Panas 5

2.3 Persamaan Differensial Parsial 9
2.4 Metode Numerik 9
2.5 Deret Taylor 9
2.6 Metode Beda Hingga.. 10
2.6.1 Turunan Pertama 10
2.6.2 Turunan Kedua 11
2.6.3 Turunan Terhadap Variabel Lain... 11
2.7 Metode Liebmann 12
BAB 3. METODE PENELITIAN 14
BAB 4. HASIL DAN PEMBAHASAN.. 19
4.1 Kajian Pustaka Model Aliran Panas Pada Plat 19
4.2 Identifikasi Parameter... 19
4.3 Diskritisasi Model 20
4.3.1 Diskritisasi Model Dengan Sumber Panas 20
4.3.2 Diskritisasi Model Tanpa Sumber Panas 22
4.4 Tampilan Program.. 23
4.5 Simulasi dan Visualisasi Program.. 24
4.6 Analisis Hasil Simulasi 50
BAB 5. KESIMPULAN DAN SARAN... 52
5.1 Kesimpulan.. 52
5.2 Saran 53
DAFTAR PUSTAKA.. 54
LAMPIRAN 55

DAFTAR TABEL

Tabel 2.1 Konduktivitas Termal Logam 5
Tabel 4.1 Ringkasan Iterasi Untuk Memperoleh Keadaan Setimbang 49

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Penurunan Persamaan Konduksi panas 6

Gambar 2.2 Perkiraan Garis Singgung Suatu Fungsi 10

Gambar 4.1 Tampilan GUI Program Aliran Panas Plat Logam 23

Gambar 4.2 Grafik Aliran Panas Pada Besi dengan Sumber Panas $10000\,\frac{W}{m}$ dan Nilai *error* 0,01% 26

Gambar 4.3 Grafik Aliran Panas Pada Besi dengan Sumber Panas $50000\,\frac{W}{m}$ dan Nilai *error* 0,001% 30

Gambar 4.4 Grafik Aliran Panas Pada Tembaga dengan Sumber Panas $10000\,\frac{W}{m}$ dan Nilai *error* 0,01% 33

Gambar 4.5 Grafik Aliran Panas Pada Tembaga dengan Sumber Panas $50000\,\frac{W}{m}$ dan Nilai *error* 0,001% 37

Gambar 4.6 Grafik Aliran Panas Pada Aluminium dengan Sumber Panas $10000\,\frac{W}{m}$ dan Nilai *error* 0,01% 40

Gambar 4.7 Grafik Aliran Panas Pada Aluminium dengan Sumber Panas $50000\,\frac{W}{m}$ dan Nilai *error* 0,001% 43

Gambar 4.8 Grafik Aliran Panas Logam Tanpa Sumber Panas dengan Nilai *error* 0,01% 46

Gambar 4.9 Grafik Aliran Panas Logam Tanpa Sumber Panas dengan Nilai *error* 0,001% 49

BAB 1. PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Semakin berkembangnya ilmu pengetahuan maka akan mempermudah dalam menyelesaikan suatu permasalahan. Matematika merupakan ilmu pengetahuan yang mengalami perkembangan secara terus-menerus. Dalam perkembangan dan kemajuannya, matematika dapat memberikan sumbangan yang besar dalam memecahkan masalah-masalah pada bidang teknik, pertanian, perekonomian, sains dan permasalahan-permasalahan lainnya yang terjadi di atas permukaan bumi ini.

Persamaan diferensial merupakan cabang dari matematika yang termasuk permasalahan penting. Permasalahan ini digunakan untuk memecahkan masalah-masalah yang dihadapi dalam kehidupan sehari-hari. Dan persamaan diferensial membantu pemecahan masalah-masalah dalam bidang tersebut.

Aliran panas sangat berkaitan erat dengan kehidupan sehari-hari. Oleh karena itu, untuk mempermudah penyelesaian dari masalah yang terjadi dalam kehidupan sehari-hari digambarkan dalam bahasa matematika. Bahasa matematika yang digunakan dikenal dengan model atau persamaan aliran panas. Persamaan atau model aliran panas dapat digunakan untuk menghitung permasalahan aliran panas pada beberapa dimensi. Salah satunya adalah pada dimensi dua.

Penyelesaian model aliran panas dapat dilakukan secara analitik maupun secara numerik. Penyelesaian secara analitik diperoleh dengan menggunakan perhitungan secara sistematis dan solusi yang diperoleh berupa nilai eksak. Pada beberapa bentuk persamaan differensial, penyelesaian analitik sulit sekali dilakukan sehingga metode numerik dengan menggunakan bantuan komputer sebagai alat hitung dapat menjadi metode penyelesaian yang disarankan, oleh karena itu penyelesaian model aliran panas dilakukan secara numerik. Metode numerik yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial antara lain adalah Metode Crank-Nicholson, Metode Milne, Metode Hamming dan Metode Liebmann (Triatmodjo, 2002).

Dalam permasalahan ini, aliran panas merupakan persamaan diferensial parsial yang dapat diselesaikan dengan salah satu metode numerik yaitu menggunakan metode Liebmann. Berdasarkan uraian di atas, maka diharapkan penggunaan metode Liebmann dapat memperoleh penyelesaian dari persamaan diferensial parsial pada aliran panas pada plat logam dua dimensi dalam keadaan *steady* dengan bantuan komputer. Pengertian *steady* adalah bila laju aliran panas suatu sistem tidak berubah dengan waktu, yaitu laju tersebut konstan, maka suhu di titik manapun tidak berubah (Kreith, 1997).

1.2. Rumusan Masalah

Bagaimanakah penyelesaian aliran panas plat logam dua dimensi dalam keadaan *steady* dengan menggunakan metode Liebmann.

1.3. Batasan Masalah

Adapun batasan masalahnya adalah sebagai berikut:

a. pembahasan skripsi ini hanya dilakukan pada plat logam segiempat dua dimensi dan dalam keadaan *steady* dengan sumber panas dan tanpa sumber panas,
b. perpindahan panas yang dibahas adalah perpindahan panas konduksi,
c. logam yang di teliti dalam skripsi ini adalah logam besi, tembaga dan aluminium.

1.4. Tujuan

Penyusunan skripsi ini bertujuan untuk mengetahui penyelesaian dari aliran panas konduksi pada plat logam dua dimensi dalam keadaan *steady* dengan menggunakan metode Liebmann.

1.5. Manfaat

Dengan mengetahui penyelesaian aliran panas pada plat logam maka dapat mengetahui logam yang paling baik dalam menghantarkan panas dan dapat memilih logam yang baik untuk digunakan pada kondisi tertentu.

BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1. Logam

2.1.1. Pengertian dan Kegunaan Logam

Dalam fisika, logam adalah material yang mempunyai sifat-sifat kuat, liat, keras, dan mempunyai titik cair tinggi. Sifat fisis logam adalah mengkilat, konduktor panas dan listrik, merenggang jika ditarik, mudah ditempa, berupa padatan dalam suhu kamar, dapat ditarik oleh magnet, memiliki kepadatan yang tinggi dan berbunyi nyaring jika dipukul. Contoh logam yaitu emas, perak, besi, baja, tembaga, nikel, aluminium, timbal, seng, timah, dan lain sebagainya.

Penggunaan logam dalam kehidupan sangat beragam. Salah satu aplikasi penggunaannya adalah di bidang industri, pertanian dan kedokteran namun, penggunaan logam yang paling sering adalah di bidang teknik. Logam bersifat kuat sehingga dapat digunakan untuk membangun rangka bangunan dan jembatan. Sebagai konduktor panas yang baik, logam juga digunakan untuk membuat peralatan memasak. Selain itu, logam juga dapat menimbulkan suara dering yang nyaring jika dipukul, maka logam juga dapat digunakan dalam pembuatan bel.

2.1.2. Konduktivitas Termal Logam

Nilai kondukitivitas termal suatu bahan menunjukkan laju perpindahan panas yang mengalir dalam suatu bahan. Jika nilai konduktivitas termal suatu bahan makin besar, maka makin besar juga panas yang mengalir melalui benda tersebut. Karena itu, bahan yang harga konduktivitas termalnya besar adalah penghantar panas yang baik, sedangkan bila konduktivitas termalnya kecil bahan itu kurang menghantar atau merupakan isolator (Holman, 2002).

Tabel 2.1 Konduktivitas Termal Logam

Logam	Konduktivitas Termal (k)
	$\frac{W}{m}.℃$
Perak	410
Tembaga	385
Aluminium	202
Nikel	93
Besi	73
Baja Karbon, 1% C	43
Timbal	35
Baja krom-nikel	16,3
Emas	314

2.2. Energi

2.2.1. Pengertian Energi

Energi adalah suatu kemampuan atau potensi untuk melakukan suatu usaha (perubahan). Secara umum energi dibagi menjadi dua, yaitu energi transisional dan energi tersimpan. Energi transisional adalah energi yang sedang bergerak, dan dapat berpindah melintasi suatu batas sistem, sedangkan energi tersimpan adalah energi yang berwujud sebagai massa, posisi dalam medan gaya, dan lain-lain (Culp, 1996) .

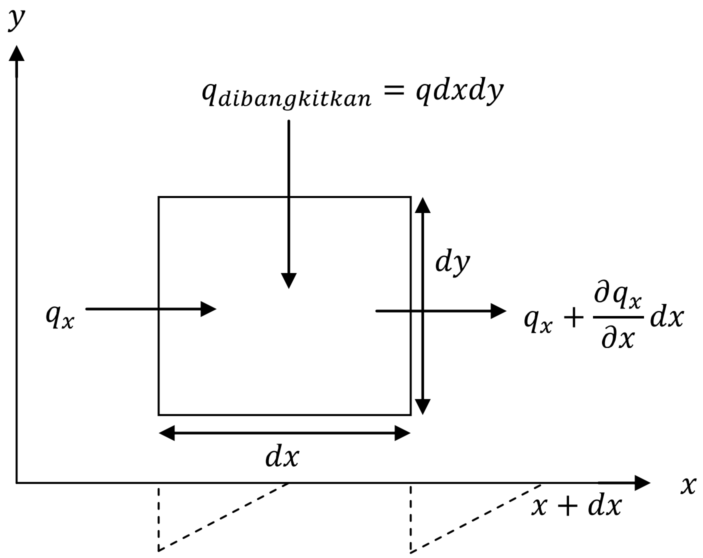
2.2.2. Perpindahan Energi Panas

Perpindahan energi panas dapat didefinsikan sebagai perpindahan energi dari satu daerah ke daerah lain sebagai akibat dari beda suhu antara daerah-daerah tersebut. Panas dapat berpindah dengan cara konduksi, konveksi dan radiasi yang terjadi secara terpisah ataupun dalam bentuk kombinasi ketiga cara tersebut (Hidayat, 2009).

Dalam penelitian ini yang akan dilakukan hanya terbatas pada konsep aliran panas konduksi dengan mengabaikan adanya aliran panas konveksi dan radiasi.

Perpindahan panas konduksi adalah perpindahan panas dimana panas mengalir dari daerah bersuhu lebih tinggi ke daerah yang lebih rendah di dalam suatu medium (padat, cair, atau gas) atau antara medium yang berlainan yang bersinggungan secara langsung.

Sketsa yang melukiskan penurunan persamaan konduksi panas umum dalam gambar berikut ini:



Gambar 2.1. Penurunan Persamaan Konduksi Panas

Untuk mendapatkan persamaan aliran panas maka laju aliran panas masuk ditambah laju pembangkitan panas oleh sumber-sumber dalam akan menghasilkan laju aliran panas keluar dan laju perubahan energi dalam.

atau:

$$\left(q_x + q_y\right) + q(dx\ dy) = \left(q_{x+dx} + q_{y+dy}\right) + c\rho(dx\ dy)\frac{\partial T}{\partial \theta}$$

dimana:

q_x = laju konduksi panas dalam arah x ($\frac{W}{m}$),

q_y = laju konduksi panas dalam arah y ($\frac{W}{m}$),

c = panas jenis ($W.\frac{s}{kg}.$℃),

ρ = kepadatan massa (kg/m),

T = suhu (℃),

θ = waktu (s).

Laju konduksi panas ke dalam arah x yaitu q_x dapat ditulis sebagai:

$$q_x = \left(-k\frac{\partial T}{\partial x}\right)dy \tag{2.1}$$

$\frac{\partial T}{\partial x}$ adalah gradien temperatur. Hubungan di atas menunjukkan bahwa laju konduksi panas berbanding lurus terhadap gradien temperatur dalam arah itu. Dapat ditetapkan bahwa arah naiknya jarak x adalah aliran panas positif. Mengingat hukum kedua termodinamika bahwa panas akan mengalir otomatis dari titik yang bersuhu lebih tinggi ke titik yang bersuhu lebih rendah. Oleh sebab itu, tanda negatif ditambahkan dalam persamaan (2.1) untuk membuat perpindahan panas dalam arah x positif menghasilkan nilai akhir yang positif (Dini, 2011).

Laju konduksi panas yang keluar dari elemen dengan melintasi permukaan pada $x + dx$, yaitu q_{x+dx} adalah

$$q_{x+dx} = \left[\left(-k\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(-k\frac{\partial T}{\partial x}\right)dx\right]dy$$

Laju panas yang meninggalkan elemen dikurangkan dengan laju aliran panas ke dalam elemen, maka diperoleh:

$$q_x - q_{x+dx} = \frac{\partial\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)}{\partial x}dxdy$$

dan dengan cara yang sama untuk arah y:

$$q_y - q_{y+dy} = \frac{\partial\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)}{\partial y} dxdy$$

Rumus-rumus ini dimasukkan ke dalam keseimbangan energi dan dibagi tiap suku dengan $dx\ dy$, maka diperoleh:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right) + q = c\rho\frac{\partial T}{\partial \theta} \qquad (2.2)$$

Jika sistemnya homogen dan panas jenis *(specific heat)* c serta kepadatan massa ρ tidak tergantung dari suhu dan dianggap seragam pula, maka persamaan (2.2) dapat ditulis menjadi:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{q}{k} = \frac{1}{A}\frac{\partial T}{\partial \theta} \qquad (2.3)$$

dimana konstanta $A = k/c\rho$ disebut difusivitas termal. Persamaan (2.3) dikenal sebagai persamaan perpindahan panas umum dan mengatur aliran suhu dan aliran konduksi di dalam benda padat yang sifat-sifat fisiknya seragam.

Jika sistemnya tidak mengandung sumber panas, maka persamaan (2.3) menjadi:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{1}{A}\frac{\partial T}{\partial \theta}$$

Jika sistemnya *steady*, tetapi terdapat sumber-sumber panas, maka persamaan (2.3) menjadi:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{q}{k} = 0 \qquad (2.4)$$

Dalam keadaan *steady*, aliran suhu di dalam benda tanpa sumber panas menjadi:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \qquad (2.5)$$

Pengertian *steady* adalah bila laju aliran panas suatu sistem tidak berubah dengan waktu, yaitu laju tersebut konstan, maka suhu di titik manapun tidak berubah (Kreith, 1997).

2.3. Persamaan Diferensial Parsial

Persamaan diferensial parsial adalah persamaan yang pada suku-sukunya mengandung bentuk turunan (diferensial) parsial yaitu turunan terhadap lebih dari satu variabel bebas.

Bentuk umum persamaan diferensial order 2 dan dua dimensi adalah:

$$a\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x} + c\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + d\frac{\partial\varphi}{\partial x} + e\frac{\partial\varphi}{\partial y} + f\varphi + g = 0$$

dengan *a, b*,*c, d, e, f* dan g merupakan fungsi dari variabel *x* dan *y* dan variabel tidak bebas φ (Purcell, 1990).

2.4. Metode Numerik

Metode numerik adalah teknik yang digunakan untuk menyelesaikan permasalahan-permasalahan yang diformulasikan secara matematis dengan cara operasi hitungan dan bantuan program komputer (Suprapto, 2012).

Ide dasar penggunaan metode numerik untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial adalah setiap turunan parsial dari persamaan diferensial yang digunakan diganti dengan suatu pendekatan beda hingga. Bila pendekatan beda hingga tersebut diterapkan seluruh titik-titik variabel yang terdapat pada model konsep, maka solusi dari rangkaian persamaan simultan yang digunakan dapat ditentukan secara langsung atau menggunakan cara iterasi (Setiawan, 2006).

2.5. Deret Taylor

Deret Taylor merupakan dasar yang digunakan untuk menyelesaikan masalah metode numerik, terutama penyelesaian persamaan diferensial. Jika suatu fungsi $T(x)$ diketahui di titik x_i dan semua turunan dari T terhadap *x* diketahui pada titik tersebut, maka dengan deret Taylor dapat dinyatakan nilai T pada titik x_{i+1} yang terletak pada jarak Δx dari titik x_i.

$$T(x_{i+1}) = T(x_i) + T^{'}(x_i)\frac{\Delta x}{1!} + T^{''}(x_i)\frac{\Delta x^2}{2!} + \cdots + T^{(n)}(x_i)\frac{\Delta x^n}{n!} + R_n \qquad (2.6)$$

Keterangan:

$T(x_i)$: fungsi di titik x_i,

$T(x_{i+1})$: fungsi di titik x_{i+1},

$T, T^{'}, T^{''}, T^{'''}, \cdots, T^{(n)}$: turunan pertama, kedua, ketiga, ..., ke-n dari fungsi,

Δx : langkah ruang, yaitu jarak antara $x_i$dan x_{i+1},

R_n : kesalahan pemotongan,

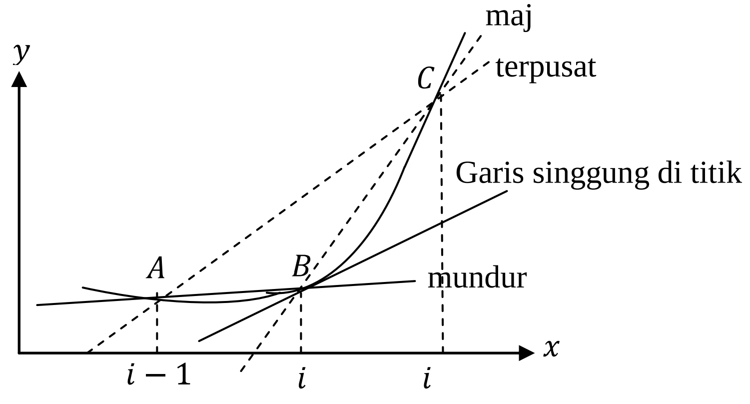
! : operator faktorial.

(Triatmojo, 2002).

2.6. Metode Beda Hingga

Salah satu metode numerik untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial adalah metode beda hingga. Metode beda hingga adalah suatu metode numerik untuk menyelesaikan suatu persamaan diferensial dengan mengaprosimasi turunan-turunan persamaan menjadi sistem persamaan linier (Institut Pertanian Bogor, Tanpa Tahun).

2.6.1. Turunan Pertama



Gambar 2.2. Perkiraan Garis Singgung Suatu Fungsi

Deret Taylor pada persamaan (2.6) dapat ditulis dalam bentuk:

$$T(x_{i+1}) = T(x_i) + T^{'}(x_i)\Delta x + O(\Delta x^2)$$

atau

$$\frac{\partial T}{\partial x} = f^{'}(x_i) = \frac{T(x_{i+1}) - T(x_i)}{\Delta x} - O(\Delta x^2) \qquad (2.7)$$

Bentuk diferensial dari persamaan (2.7) disebut diferensial maju order satu. Disebut diferensial maju karena menggunakan data pada x_i dan x_{i+1} untuk menghitung diferensial. Jika data yang digunakan adalah di titik x_i dan x_{i-1} , maka disebut diferensial mundur, dan deret Taylor menjadi:

$$T(x_{i-1}) = T(x_i) - T^{'}(x_i)\frac{\Delta x}{1!} + T^{''}(x_i)\frac{\Delta x^2}{2!} - T^{'''}(x_i)\frac{\Delta x^3}{3!} + \cdots \qquad (2.8)$$

Apabila data yang digunakan untuk memperkirakan diferensial dari fungsi adalah pada titik x_{i-1} dan x_{i+1}, maka perkiraannya disebut diferensial terpusat. Jika persamaan (2.7) dikurangi persamaan (2.8) didapat:

$$T(x_{i+1}) - T(x_{i-1}) = 2T^{'}(x_i)\Delta x + 2T^{'''}(x_i)\frac{\Delta x^3}{3!} + \cdots$$

2.6.2. Turunan Kedua

Turunan kedua dari suatu fungsi dapat diperoleh dengan menjumlahkan persamaan (2.7) dengan persamaan (2.8):

$$T(x_{i+1}) + T(x_{i-1}) = 2T(x_i) + 2T^{''}(x_i)\frac{\Delta x^2}{2!} + 2T^{''''}(x_i)\frac{\Delta x^3}{4!} + \cdots$$

Dari uraian di atas dapat disimpulkan bahwa bentuk diferensial (biasa atau parsial) dapat diubah dalam bentuk diferensial numerik (beda hingga).

2.6.3. Turunan Terhadap Variabel Lain

Apabila fungsi mengandung lebih dari satu variabel bebas, seperti (*x*,*y*), maka bentuk deret Taylor menjadi:

$$T\left(x_{i+1}, y_{j+1}\right) = T\left(x_i, y_j\right) + \frac{\partial T}{\partial x}\frac{\Delta x}{1!} + \frac{\partial T}{\partial y}\frac{\Delta y}{1!} + \frac{\partial^2 T}{\partial x}\frac{\Delta x^2}{2!} + \frac{\partial^2 T}{\partial y}\frac{\Delta y^2}{2!} + \cdots \qquad (2.9)$$

Dengan cara yang sama seperti telah dijelaskan, turunan pertama terhadap variabel *x* dan *y* berturut-turut dapat ditulis dalam bentuk diferensial maju:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{T\left(x_{i+1}, y_j\right) - T\left(x_i, y_j\right)}{\Delta x} \tag{2.10}$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{T\left(x_i, y_{j+1}\right) - T\left(x_i, y_j\right)}{\Delta y} \tag{2.11}$$

Untuk menyederhanakan penulisan, selanjutnya bentuk $T\left(x_i, y_j\right)$ ditulis menjadi $T_{i,j}$ dengan subskrip *i* dan *j* menunjukkan komponen dalam arah sumbu *x* dan sumbu *y*. Dengan cara seperti itu maka persamaan (2.10) dan (2.11) dapat ditulis menjadi:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{T_{i+1,j} - T_{i,j}}{\Delta x} \tag{2.12}$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{T_{i,j+1} - T_{i,j}}{\Delta y} \tag{2.13}$$

(Triatmojo, 2002).

2.7. Metode Liebmann

Metode iterasi Gauss-Seidel adalah metode yang menggunakan proses iterasi hingga diperoleh nilai-nilai yang berubah. Metode ini sering dipakai untuk menyelesaikan persamaan yang berjumlah besar. Dilakukan dengan suatu iterasi yang memberikan harga awal untuk $x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = x_n = 0$.

Metode Gauss-Seidel yang digunakan dalam persamaan differensial parsial sering dinamakan metode pemindahan berturut-turut atau metode Liebmann. Cara penyelesaian persamaan diferensial parsial dengan menggunakan metode beda hingga akan menghasilkan suatu sistem linier yang harus dipecahkan. Untuk pembagian *grid* yang besar, maka penyelesaiannya akan semakin sulit, dan menghasilkan kesalahan yang cukup besar. Untuk menyelesaikan hal ini biasanya menggunakan metode Liebmann. Pada metode Liebmann mengekspresikan persamaan beda hingga dua dimensi dan memecahkan secara iterasi untuk *i*=1 sampai *n* dan *j*=1 sampai *m*.

Persamaan yang terbentuk selanjutnya diselesaikan secara iterasi dengan persamaan over-relaksasi berikut:

$$T_{i,j}^{baru} = \lambda T_{i,j}^{baru} + (1-\lambda) T_{i,j}^{lama} \tag{2.14}$$

dengan $T_{i,j}^{baru}$ dan $T_{i,j}^{lama}$ adalah nilai $T_{i,j}$ dari iterasi sekarang dan sebelumnya, dan λ adalah koefisien relaksasi, yang besarnya dapat diambil antara 1 dan 2 (Setiawan, 2006).

λ dapat dicari menggunakan persamaan sebagai berikut:

$$\lambda = \frac{2}{1+\sqrt{1-\omega^2}} \tag{2.15}$$

Untuk

$$\omega = \frac{1}{1+\left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)^2}\left[cos\frac{\pi}{m} + \left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)^2 cos\frac{\pi}{n}\right] \tag{2.16}$$

ω = parameter relaksasi

Over-relaksasi digunakan untuk mempercepat dari kestabilan dengan menggunakan rumus pada persamaan (2.14) yang mengikuti pada masing-masing iterasi (Chapra, 2002).

Sebagai nilai awal maka kondisi pada titik interior diambil sama dengan nol. Iterasi dapat dihentikan jika kesalahan relatifnya sudah mencapai batas yang disyaratkan. Besarnya kesalahan relatif atau nilai *error* didefinisikan sebagai persamaan:

$$\left|(\varepsilon_a)_{i,j}\right| = \left|\frac{T_{i,j}^{baru} - T_{i,j}^{lama}}{T_{i,j}^{baru}}\right| \times 100\% \tag{2.17}$$

(Setiawan, 2006).

BAB 3. METODE PENELITIAN

Metode adalah setiap prosedur yang digunakan untuk mencapai tujuan akhir. Tujuan akhirnya adalah berupa data-data yang terkumpul dan metodenya adalah alat mengumpulkan data-data tersebut (Sulistyo, 2006).

Berdasarkan hal tersebut, maka dalam penulisan skripsi ini menggunakan studi literatur, yaitu penelitian yang dilakukan di perpustakaan yang bertujuan untuk mengumpulkan data dan informasi dengan bermacam materiil yang terdapat di perpustakaan, seperti buku-buku, majalah, dokumen, catatan, jurnal-jurnal resmi dan eksperimen komputasi menggunakan *software* Matlab 7.8.0.

Dalam penulisan skripsi ini, langkah-langkah yang dilakukan untuk menyelesaikan adalah sebagai berikut:

1. Kajian Pustaka Model Aliran Panas Pada Plat

Persamaan (2.4) merupakan model aliran panas dua dimensi dalam keadaan *steady* dengan sumber panas dan persamaan (2.5) model tanpa sumber panas yang dipakai dalam penelitian ini bersumber dari Kreith (1997), dimana bentuk modelnya adalah kontinu.

2. Identifikasi Parameter

Dalam penelitian ini terdapat parameter-parameter yang harus ditentukan terlebih dahulu. Parameter yang dimaksud antara lain banyaknya *grid* (m) sebesar 50, besarnya *error* (e) yaitu 0,01% dan 0,001%, konduktivitas termal (k) yaitu $k_{besi} = 73\frac{W}{m}.℃$, $k_{tembaga} = 385\frac{W}{m}.℃$, $k_{aluminium} = 202\frac{W}{m}.℃$, dan laju perpindahan panas (q) yaitu $q = 10000\frac{W}{m}\ dan\ 50000\frac{W}{m}$.

Pemilihan nilai *error* sebesar 0,01% dan 0,001% dikarenakan syarat untuk memperoleh hasil yang signifikan yaitu dengan nilai *error* sebesar 1% < p < 5% sedangkan untuk memperoleh hasil yang sangat signifikan nilai *error* harus kurang dari 1% (Tirta, 2004).

3. Diskritisasi Model

Metode Liebmann dikonstruksi dari metode beda hingga dengan menggunakan deret taylor, sehingga menghasilkan turunan pertama. Dari turunan pertama diturunkan lagi sehingga menjadi turunan kedua (karena pada dua dimensi jadi yang digunakan adalah turunan kedua). Dari persamaan tersebut kemudian disubtitusikan pada persamaan suhu dalam keadaan *steady* dengan sumber panas yang memenuhi memenuhi persamaan (2.4) dan tanpa sumber panas yang memenuhi persamaan (2.5) kemudian menyelesaikan dengan menggunakan bantuan *software* Matlab 7.8.0.

4. Menentukan Syarat Awal, Syarat Batas, dan Koefisien Relaksasi.

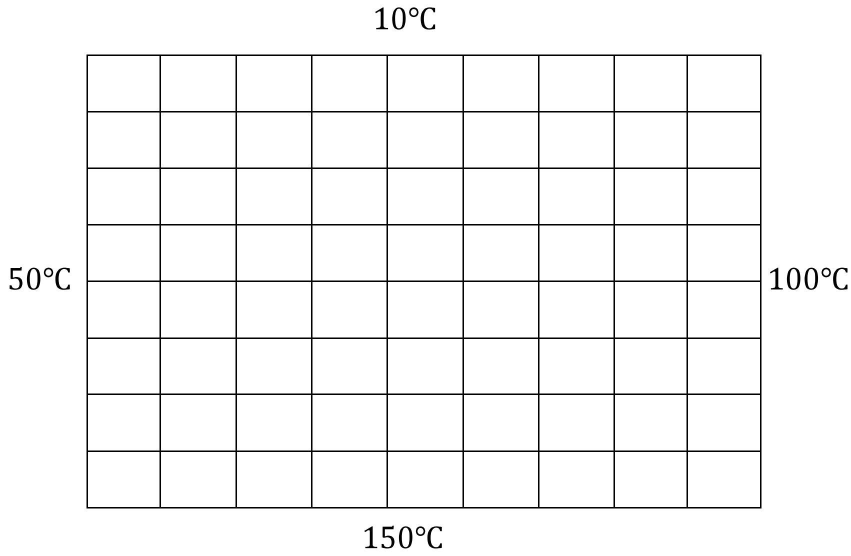
Dalam menyelesaikan persamaan diferensial parsial dengan menggunakan metode beda hingga perlu adanya syarat awal dan syarat batas. Secara umum, dari persamaan aliran panas dengan T adalah aliran panas pada jarak x dan y, yang mempunyai panjang L dan tinggi K. Panjang L dan K adalah $1m$. Oleh karena nilai T pada tepi plat diketahui suhunya (syarat batas) dan pada saat sebelum mengalir, nilai pada titik-titik dalamnya adalah nol (syarat awal).

Untuk persamaan diferensial parsial:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{q(\Delta x^2)}{k} = 0, \qquad 0 \leq x \leq L \text{ dan } 0 \leq y \leq K$$

dengan syarat batas:

$$T(0,y) = 10℃$$
$$T(L,y) = 150℃$$
$$T(x,0) = 50℃$$
$$T(x,K) = 100℃$$



Gambar 3.1. Plat yang dipanaskan dengan batas tertentu

Parameter relaksasi dapat dicari menggunakan persamaan:

$$\omega = \frac{1}{1+\left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)^2}\left[cos\frac{\pi}{m} + \left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)^2 cos\frac{\pi}{n}\right]$$

$$= \frac{1}{1+\left(\frac{0,1}{0,1}\right)^2}\left[cos\frac{3,14}{50} + \left(\frac{0,1}{0,1}\right)^2 cos\frac{3,14}{50}\right] = 0,93$$

Maka, λ dapat dicari menggunakan persamaan sebagai berikut:

$$\lambda = \frac{2}{1+\sqrt{1-\omega^2}}$$

$$= \frac{2}{1+\sqrt{1-0,93^2}} = 1,47 = 1,5$$

Untuk persamaan diferensial parsial:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0, \qquad 0 \leq x \leq L \text{ dan } 0 \leq y \leq K$$

menggunakan syarat batas dan koefisien relaksasi yang sama.

Selanjutnya diselesaikan secara iterasi untuk $i = 1$ sampai n dan $j = 1$ sampai m dengan persamaan over-relaksasi berikut:

$$T_{i,j}^{baru} = \lambda T_{i,j}^{baru} + (1 - \lambda) T_{i,j}^{lama}$$

Iterasi dapat dihentikan jika kesalahan relatifnya sudah mencapai batas yang disyaratkan. Besarnya kesalahan relatif didefinisikan sebagai:

$$\left|(\varepsilon_a)_{i,j}\right| = \left|\frac{T_{i,j}^{baru} - T_{i,j}^{lama}}{T_{i,j}^{baru}}\right| \times 100\%$$

5. Pembuatan Program

Software yang digunakan dalam penelitian ini adalah *software* Matlab 7.8.0. Input nilai-nilai parameter yaitu banyaknya *grid* (m), besarnya *error* yang diinginkan (e), konduktivitas termal (k), dan laju perpindahan panas (q).

6. Simulasi dan Visualisasi Program

Setelah pembuatan program selesai, langkah selanjutnya yaitu mensimulasikan beberapa parameter yang berpengaruh pada masing-masing plat misalnya besar *error* yang diinginkan dan laju panas. Simulasi ini dilakukan dengan mengubah-ubah beberapa nilai parameter yang telah ditentukan sebelumnya. Setelah di simulasi maka dapat di visualisasikan model tersebut menggunakan program yang telah dibuat yaitu dengan *software* Matlab 7.8.0 sehingga akan muncul grafik aliran panas dua dimensi.

7. Analisis Hasil Simulasi

Hasil yang diperoleh dari simulasi selanjutnya dianalisis untuk mendapatkan nilai-nilai yang berpengaruh pada proses perpindahan panas sehingga dapat diketahui aliran panas yang terjadi pada plat logam dengan sumber panas dan tanpa sumber panas di dalamnya. Hasil tersebut dapat menunjukkan bahwa suhu di setiap *grid* pada plat tidak sama dan perbedaan banyaknya iterasi untuk memperoleh keadaan setimbang yang berbeda-beda menunjukkan pengaruh beberapa parameter yang digunakan.

BAB 4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Bab ini akan dijelaskan mengenai penyelesaian persamaan diferensial parsial pada aliran panas plat logam dengan menggunakan metode Liebmann, dengan tujuan untuk mengetahui aliran panas plat logam dua dimensi pada saat *steady* dengan sumber panas maupun tanpa sumber panas. Langkah pertama yaitu kajian pustaka model dan identifikasi parameter, kemudian pendiskritan model karena model masih berbentuk kontinu dan menyelesaikannya menggunakan Matlab 7.8.0.

4.1. Kajian Pustaka Model Aliran Panas Pada Plat

Model aliran panas pada plat logam dengan sumber panas pada persamaan (2.4):

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{q}{k} = 0$$

Model aliran panas pada plat logam tanpa sumber panas pada persamaan (2.5):

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

bersumber dari Kreith (1997), dimana bentuk modelnya adalah kontinu.

4.2. Identifikasi Parameter

Dalam simulasi aliran panas pada plat logam terdapat parameter-parameter yang harus ditentukan terlebih dahulu, dimana besar parameter-parameter ini akan mempengaruhi suhu dalam plat logam. Besarnya parameter pada setiap logam sama, baik pada besi, aluminium maupun tembaga, yang membedakan hanyalah besarnya konduktivitas termal karena konduktivitas termal pada setiap logam tidak sama. Parameter yang dimaksud antara lain banyaknya *grid* (m), besarnya *error* yang diinginkan (e), konduktivitas termal (k), dan laju perpindahan panas (q). Dalam skripsi ini akan digunakan *grid* sebesar 50, besarnya *error* sebesar 0,01% dan 0,001%, $q = 10000\frac{W}{m}\ dan\ 50000\frac{W}{m}$, $k_{besi} = 73\frac{W}{m}.$℃, $k_{tembaga} = 385\frac{W}{m}.$℃, $k_{aluminium} = 202\frac{W}{m}.$℃.

4.3. Diskritisasi Model

Model aliran panas dua dimensi pada plat logam pada saat *steady* ada 2 yaitu dengan sumber panas di dalamnya memenuhi persamaan (2.4) dan tanpa sumber panas di dalamnya memenuhi persamaan (2.5).

4.3.1. Diskritisasi Model Dengan Sumber Panas

Model aliran panas pada plat logam dengan sumber panas pada persamaan (2.4) melibatkan variabel x dan y yang kontinu. Pertama yang harus dilakukan adalah melakukan diskritisasi dengan menggunakan metode beda hingga.

Untuk menurunkan persamaan (2.4), menggunakan deret Taylor dengan dua variabel bebas $T(x,y)$ yaitu dengan cara menambahkan variabel tambahan dengan mengikuti pola sebagaimana persamaan (2.6) dan didukung dengan penjelasan 2.6.3 Tentang turunan terhadap variabel lain (persamaan 2.9) sehingga deret Taylor dengan dua variabel bebas $T(x,y)$ adalah:

$$T(x_{i+1}, y_{j+1}) = T(x_i, y_j) + \frac{\partial T}{\partial x}\frac{\Delta x}{1!} + \frac{\partial T}{\partial y}\frac{\Delta y}{1!} + \cdots \qquad (4.1)$$

Dari persamaan (4.1) dapat dilihat bahwa:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{T(x_{i+1}, y_j) - T(x_i, y_j)}{\Delta x} \qquad (4.2)$$

dan

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{T(x_i, y_{j+1}) - T(x_i, y_j)}{\Delta y} \qquad (4.3)$$

Persamaan (4.2) dan persamaan (4.3), merupakan turunan pertama terhadap variabel *x* dan *y*.

Turunan kedua terhadap variabel *x*:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{T_{i+1,j} - T_{i,j}}{\Delta x}\right)$$

Misal

$$r = \frac{T_{i+1,j} - T_{i,j}}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{r_{i,j} - r_{i-1,j}}{\Delta x}$$

Maka

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\frac{T_{i+1,j} - T_{i,j}}{\Delta x} - \frac{T_{i,j} - T_{i-1,j}}{\Delta x}}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{\Delta x^2} \tag{4.4}$$

Turunan kedua terhadap variabel *y*:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{T_{i+1,j} - T_{i,j}}{\Delta y}\right)$$

Misal

$$z = \frac{T_{i,j+1} - T_{i,j}}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z_{i,j} - z_{i,j-1}}{\Delta y}$$

Maka

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{\frac{T_{i,j+1} - T_{i,j}}{\Delta y} - \frac{T_{i,j} - T_{i,j-1}}{\Delta y}}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{\Delta y^2} \tag{4.5}$$

Setelah diketahui turunan kedua fungsi *T* terhadap *x* dan *y*, kemudian disubstitusikan pada persamaan (2.4), sehingga diperoleh:

$$\frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{\Delta y^2} + \frac{q}{k} = 0$$

Untuk ukuran Δx dan Δy yang sama, maka persamaan di atas disederhanakan menjadi:

$$T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1} + \frac{q(\Delta x^2)}{k} = 0$$

atau

$$T_{i+1,j} - T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1} - 4T_{i,j} + \frac{q(\Delta x^2)}{k} = 0 \qquad (4.6)$$

Persamaan Liebmann dikonstruksi dari persamaan (4.6) di atas menjadi:

$$T_{i,j} = \frac{T_{i+1,j} - T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1} + \frac{q(\Delta x^2)}{k}}{4}$$

4.3.2. Diskritisasi Model Tanpa Sumber Panas

Model aliran panas pada plat logam tanpa sumber panas pada persamaan (2.5). Untuk menurunkan persamaan (2.5), menggunakan deret Taylor dengan dua variabel bebas $T(x, y)$ yaitu dengan cara menambahkan variabel tambahan dengan mengikuti pola sebagaimana persamaan (2.6) dan didukung dengan penjelasan 2.6.3 Tentang turunan terhadap variabel lain (persamaan 2.9) sehingga deret Taylor dengan dua variabel bebas $T(x, y)$ adalah seperti pada persamaan (4.1).

Dari persamaan (4.1) kita dapat melihat turunan pertama terhadap *x* dan *y* atau diferensial maju yaitu persamaan (4.2) dan persamaan (4.3). Sebagaimana penjelasan 2.6.3, persamaan (4.2) dan persamaan (4.3), merupakan turunan pertama terhadap variabel *x* dan *y*. Turunan kedua terhadap variabel *x* dan *y* dapat dituliskan seperti persamaan (4.4) dan persamaan (4.5).

Setelah diketahui turunan kedua fungsi *T* terhadap *x* dan *y*, kemudian disubstitusikan pada persamaan (2.5), sehingga diperoleh:

$$\frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{\Delta y^2} = 0$$

Untuk ukuran Δx dan Δy yang sama, maka persamaan di atas disederhanakan menjadi:

$$T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1} = 0$$

atau

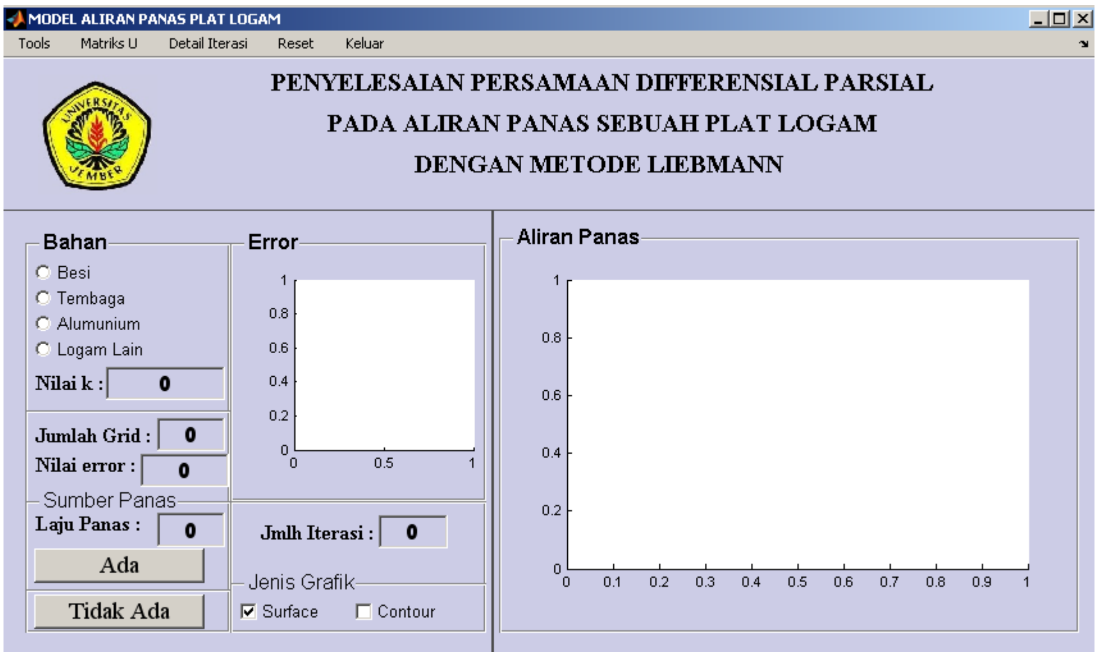
$$T_{i+1,j} - T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1} - 4T_{i,j} = 0 \qquad (4.7)$$

Persamaan Liebmann dikonstruksi dari persamaan (4.7) di atas menjadi:

$$T_{i,j} = \frac{T_{i+1,j} - T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1}}{4}$$

4.4. Tampilan Program

Setelah diperoleh model diskrit dengan menggunakan metode Liebmann, selanjutnya diselesaikan dengan menggunakan bantuan *software* Matlab 7.8.0. Dengan memasukkan nilai-nilai yang sudah ditentukan pada program yang telah dibuat, selanjutnya ditampilkan dalam bentuk GUI sebagai berikut:



Gambar 4.1. Tampilan GUI Program Aliran Panas Plat Logam

Input dari program diatas antara lain bahan logam yang mana setiap bahan memiliki nilai konduktivitas termal yang berbeda, selanjutnya *input* lainnya yaitu jumlah *grid*, nilai *error* dan laju panas jika terdapat sumber panas, jika tidak terdapat sumber panas maka pada nilai *k* dan laju panas tidak perlu diisi. Sedangkan *output*nya yaitu jumlah iterasi yang dilakukan, matriks U yaitu matriks suhu aliran panas, grafik *error*, grafik detail beberapa iterasi dan grafik aliran panas pada dua dimensi. Keterangan lain dari program diatas antara lain:

a. Tombol Ada, merupakan tombol yang digunakan ketika mencari penyelesaian yang mengandung sumber panas, sedangkan Tombol Tidak Ada jika tidak mengandung sumber panas.
b. Tombol Reset, merupakan tombol untuk menghapus nilai-nilai yang sudah diinput.

4.5. Simulasi dan Visualisasi Program

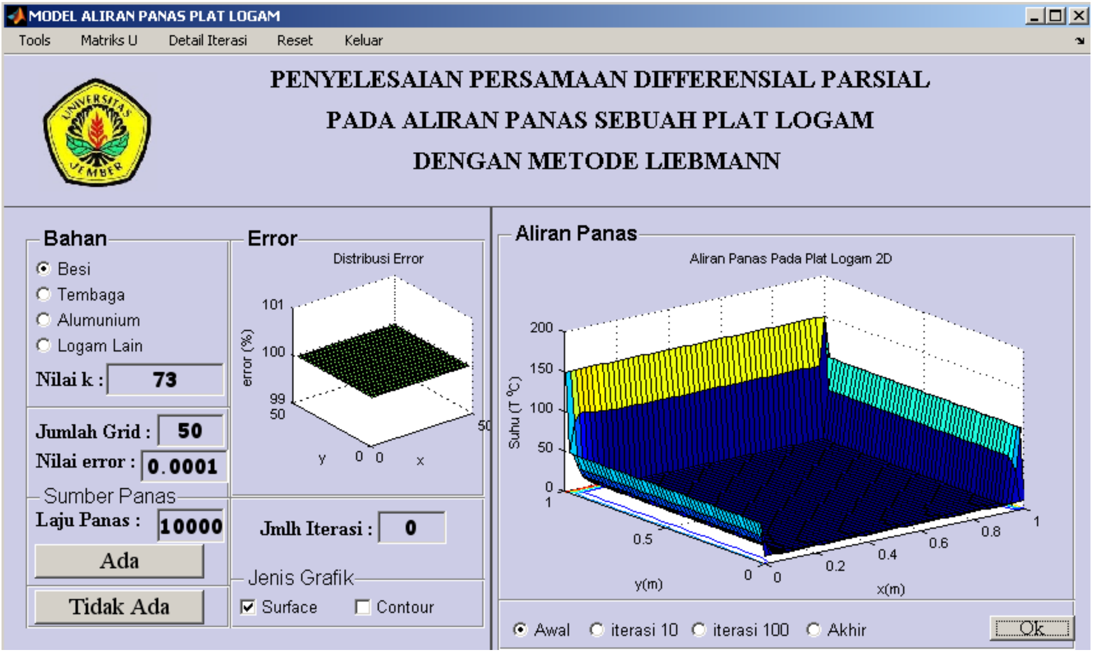
Pada simulasi aliran panas pada plat logam menggunakan metode Liebmann terdapat parameter yang dapat diubah-ubah yaitu jumlah *grid*, nilai *error* dan laju panas, yang di simulasikan hanya nilai *error* yaitu sebesar 0,01% dan 0,001% dan laju panas sebesar 10000$\frac{W}{m}$ dan 50000 $\frac{W}{m}$. Pemilihan nilai *error* sebesar 0,01% dan 0,001% dikarenakan syarat untuk memperoleh hasil yang signifikan yaitu dengan nilai *error* sebesar 1% < p < 5% sedangkan untuk memperoleh hasil yang sangat signifikan nilai *error* harus kurang dari 1%.

4.5.1. Plat Logam Dengan Sumber Panas Di Dalamnya

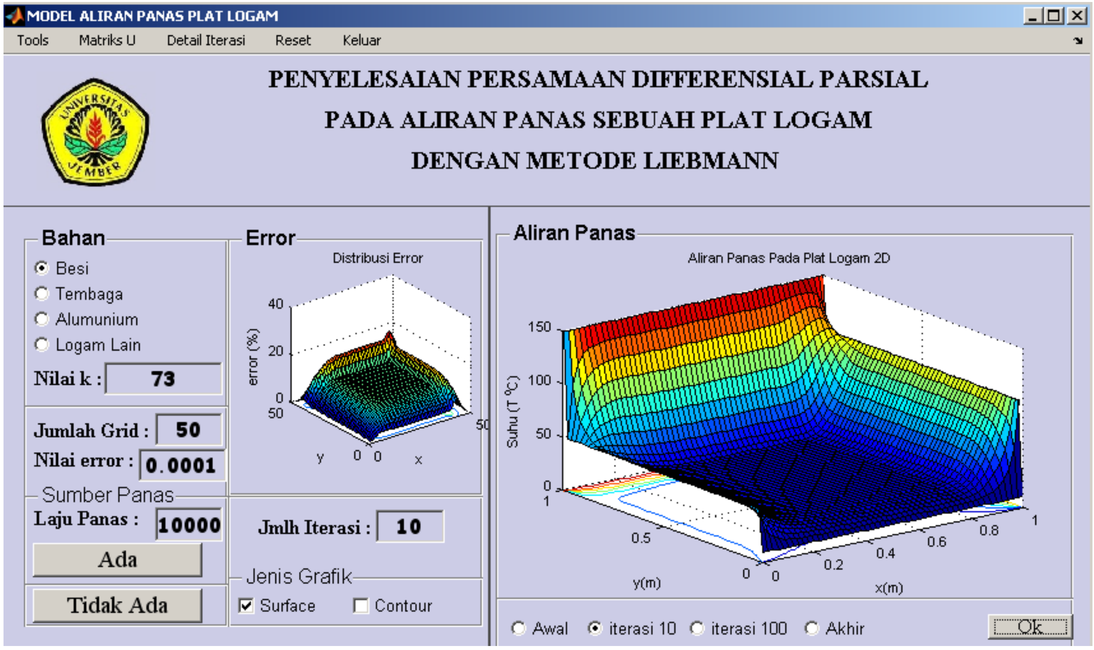
a. Logam Besi

Dalam bagian ini akan diberikan hasil simulasi serta visualisasi aliran panas pada plat logam besi dalam keadaan *steady* dengan sumber panas didalamnya. Diberikan konduktivitas termal besi sebesar $73\,\frac{W}{m}$°C, jumlah *grid* 50, nilai *error* 0,01%, dan laju panas $10000\,\frac{W}{m}$. Hasil simulasi serta visualisasi dapat dilihat pada gambar 4.2.

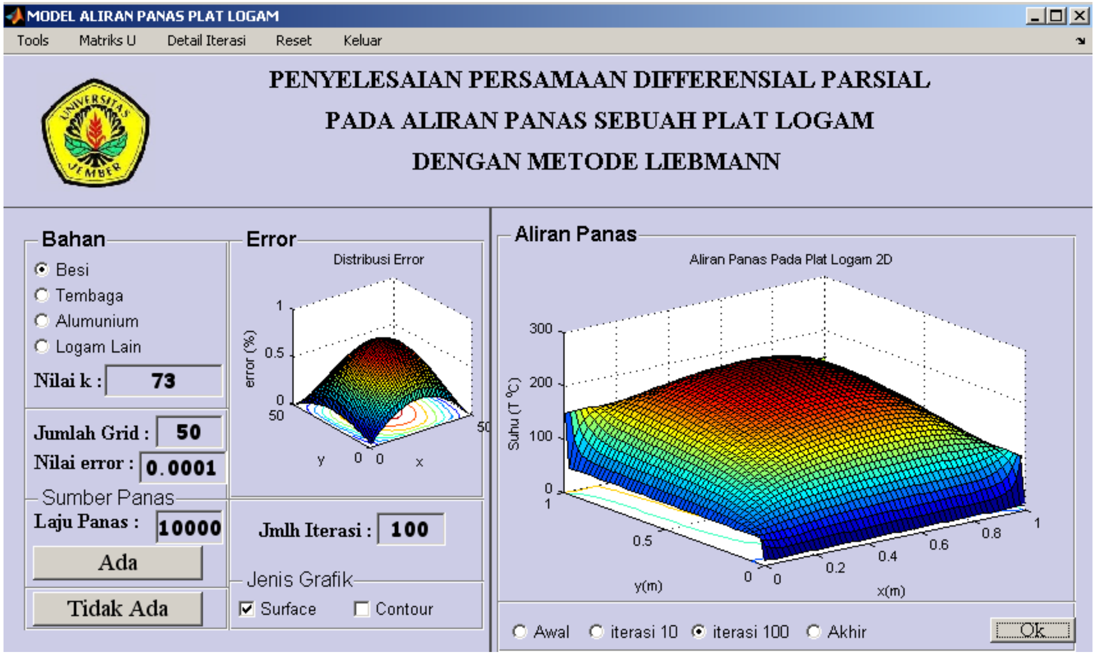
Grafik Aliran Panas Pada Kondisi Awal dari Logam Besi



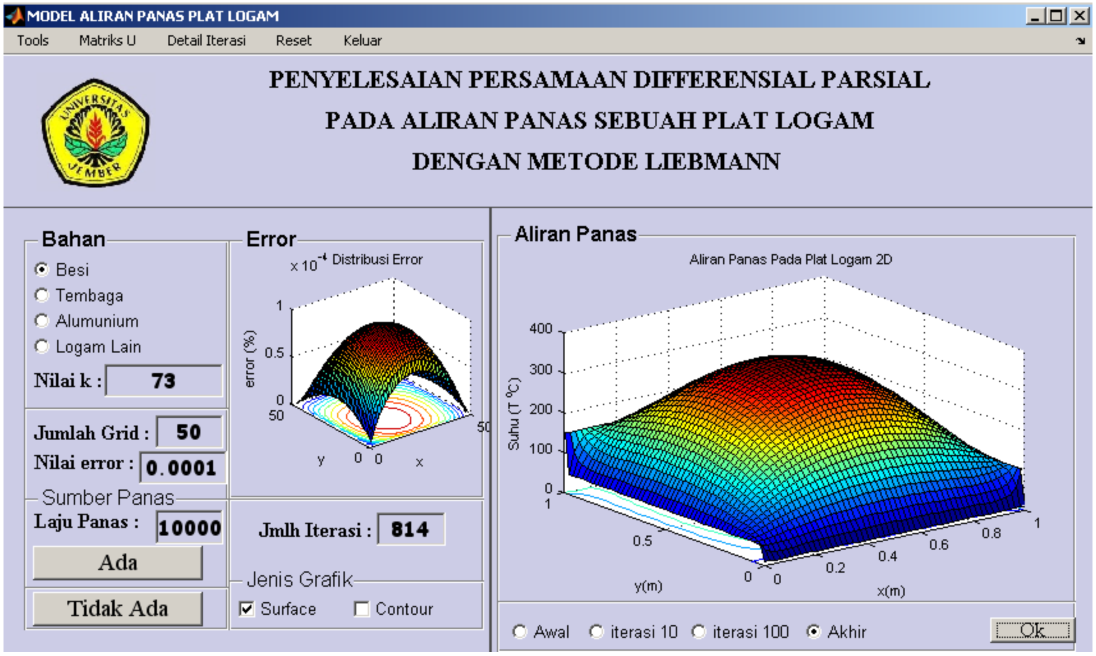
Grafik Aliran Panas Pada Saat Iterasi ke-10 dari Logam Besi



Grafik Aliran Panas Pada Saat Iterasi ke-100 dari Logam Besi



Grafik Aliran Panas Pada Iterasi Ke-814 dari Logam Besi

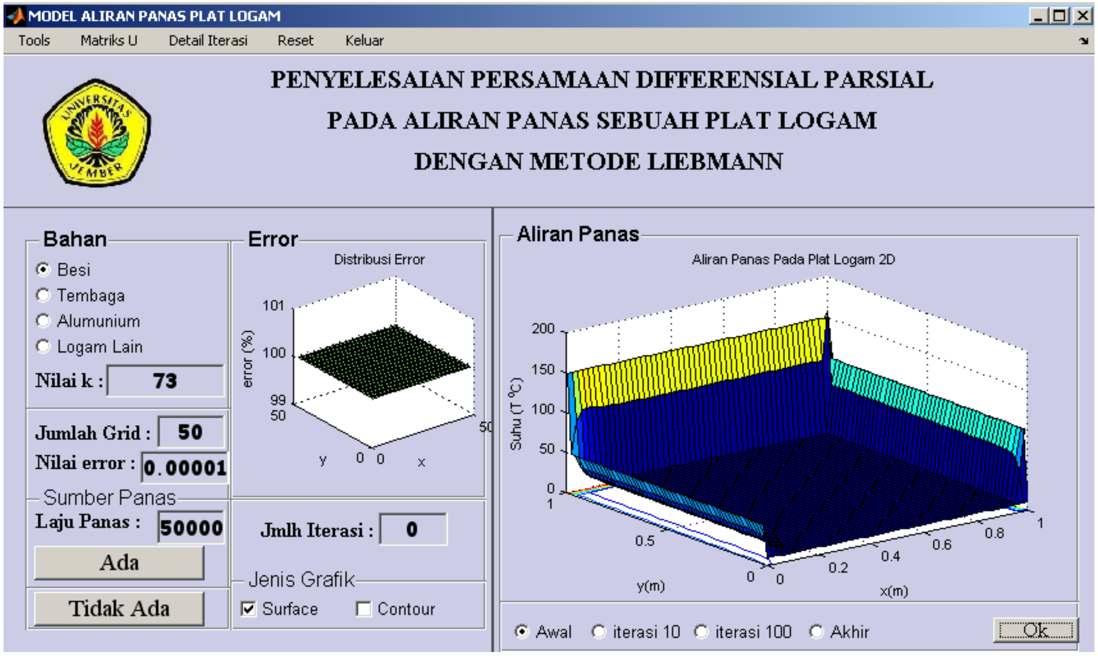


Gambar 4.2 Grafik Aliran Panas Pada Besi dengan Sumber Panas 10000 $\frac{W}{m}$ dan Nilai *error* 0,01%

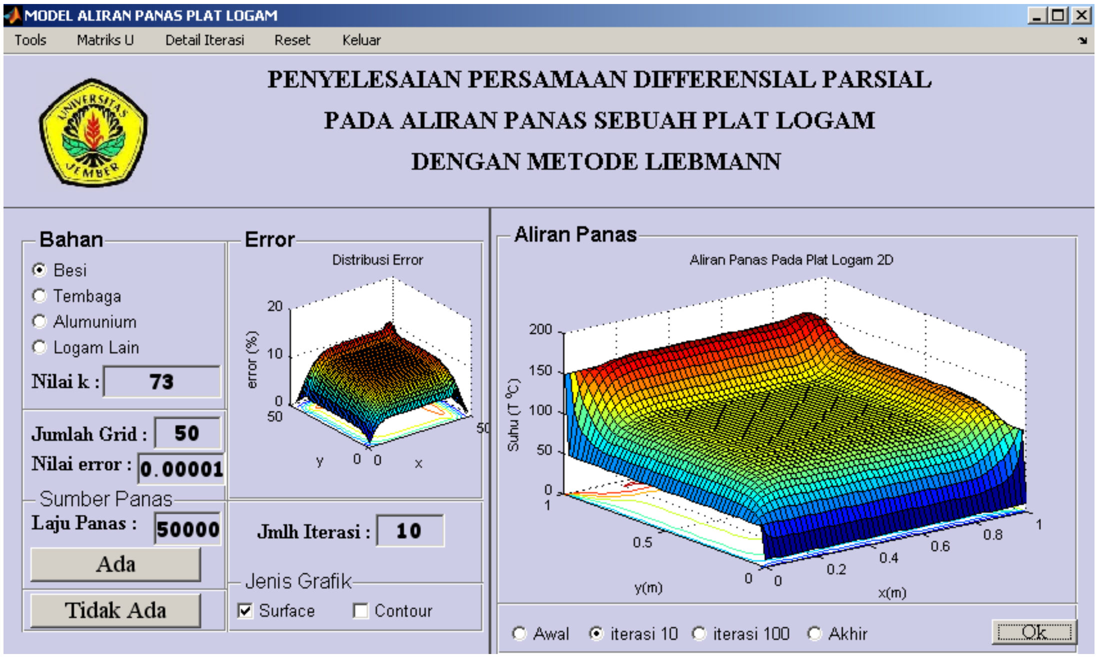
Grafik aliran panas diatas menjelaskan bahwa dengan memasukkan nilai-nilai parameter dihasilkan visualisasi seperti gambar 4.2. Untuk memperoleh keadaan setimbang dengan nilai *error* 0,01% pada setiap titik $T_{i,j}$, dilakukan iterasi sebanyak 814 kali. Pada gambar aliran suhu terlihat untuk daerah yang berwarna merah adalah daerah yang mempunyai suhu tinggi yaitu suhu di atas $300℃$, untuk daerah yang berwarna orange adalah daerah yang bersuhu antara $250℃$ sampai $300℃$, untuk daerah yang berwarna kuning adalah daerah yang bersuhu antara $200℃$ sampai $250℃$, untuk daerah yang berwarna hijau adalah daerah yang bersuhu antara $150℃$ sampai $200℃$, dan untuk daerah yang berwarna biru adalah daerah yang bersuhu dibawah $150℃$, yang artinya semakin rendah suhu pada gambar tersebut maka warnanya semakin tua (biru tua).

Selanjutnya akan diberikan hasil simulasi serta visualisasi aliran panas pada plat logam besi dalam keadaan *steady* dengan sumber panas didalamnya. Diberikan konduktivitas termal besi sebesar $73\frac{W}{m}℃$, jumlah *grid* 50, nilai *error* 0,001%, dan laju panas $50000\frac{W}{m}$. Hasil simulasi serta visualisasi dapat dilihat pada gambar 4.3.

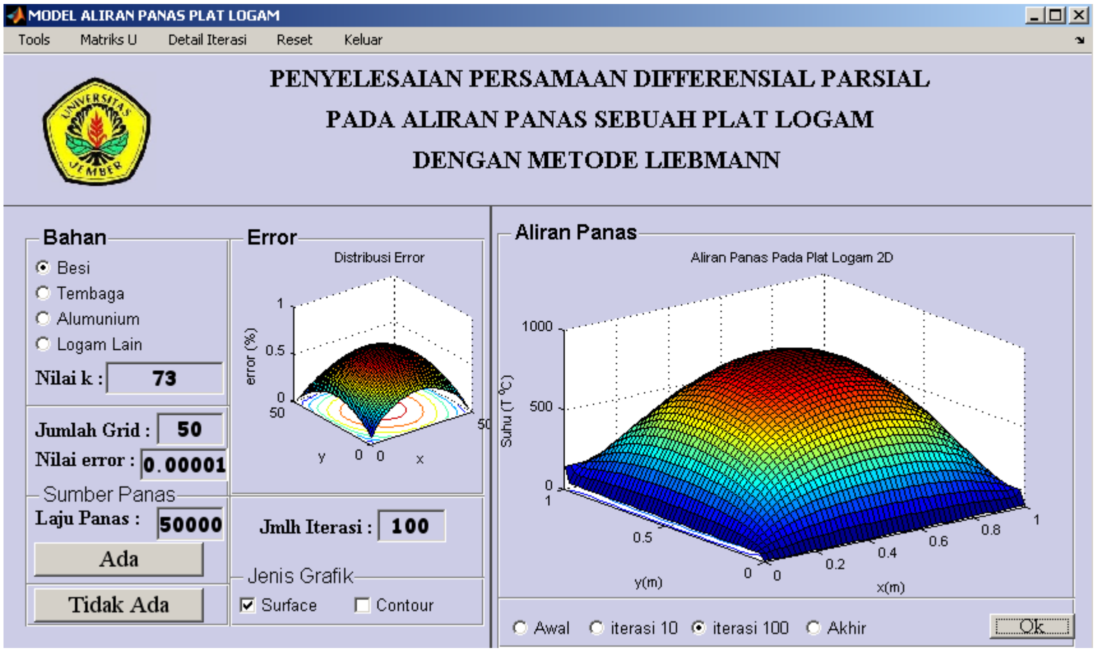
Grafik Aliran Panas Pada Kondisi Awal dari Logam Besi



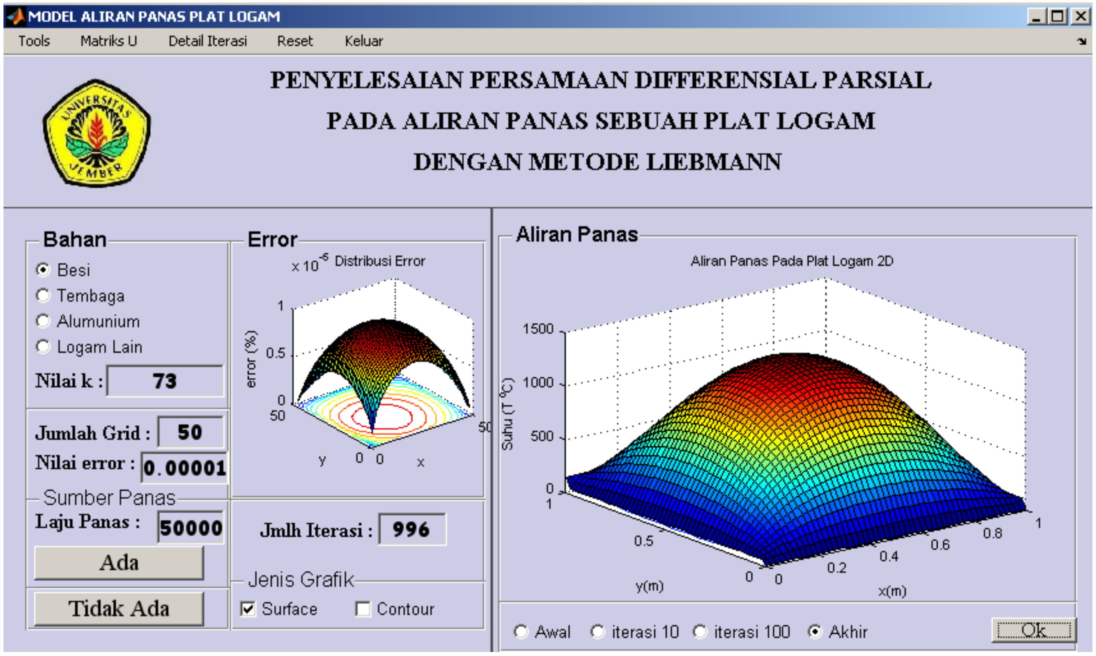
Grafik Aliran Panas Pada Saat Iterasi ke-10 dari Logam Besi



Grafik Aliran Panas Pada Saat Iterasi ke-100 dari Logam Besi



Grafik Aliran Panas Pada Iterasi Ke-996 dari Logam Besi



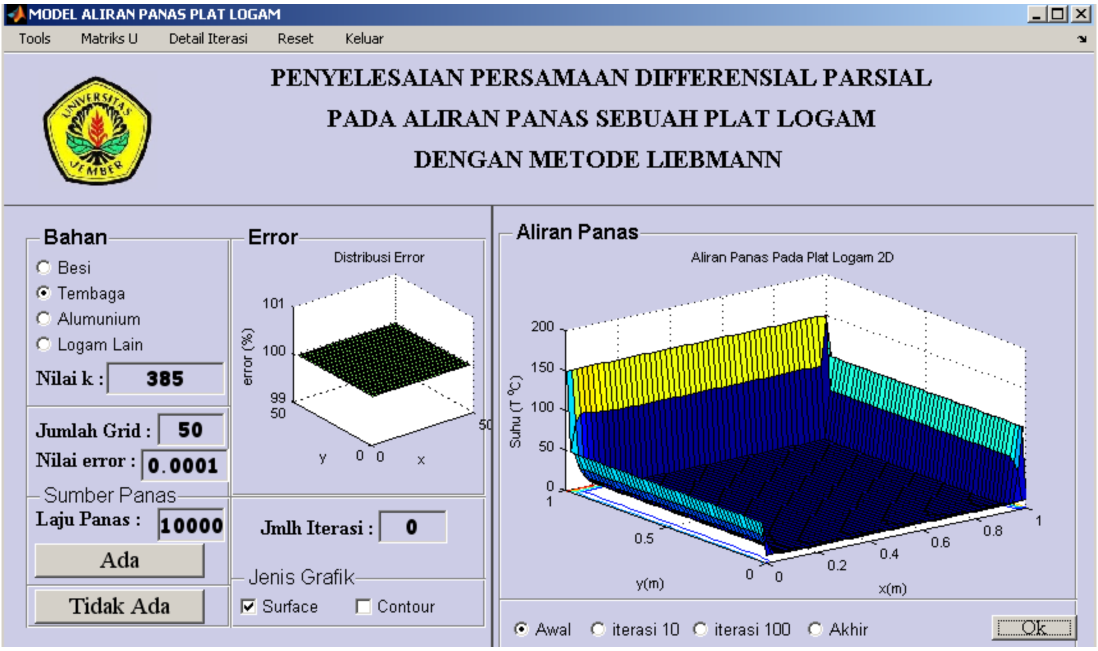
Gambar 4.3 Grafik Aliran Panas Pada Besi dengan Sumber Panas 50000 $\frac{W}{m}$ dan Nilai *error* 0,001%

Gambar diatas menjelaskan bahwa dengan memasukkan nilai-nilai parameter dihasilkan visualisasi seperti gambar 4.3. Untuk memperoleh keadaan setimbang dengan laju panas $50000\frac{W}{m}$ dan nilai *error* 0,001% pada setiap titik $T_{i,j}$, dilakukan iterasi sebanyak 996 kali. Pada gambar aliran suhu terlihat untuk daerah yang berwarna merah adalah daerah yang mempunyai suhu tinggi yaitu suhu di atas $1200℃$, untuk daerah yang berwarna orange adalah daerah yang bersuhu antara $1000℃$ sampai $1200℃$, untuk daerah yang berwarna kuning adalah daerah yang bersuhu antara $800℃$ sampai $1000℃$, untuk daerah yang berwarna hijau adalah daerah yang bersuhu antara $600℃$ sampai $800℃$, dan untuk daerah yang berwarna biru adalah daerah yang bersuhu dibawah $600℃$, yang artinya semakin rendah suhu pada gambar tersebut maka warnanya semakin tua (biru tua).

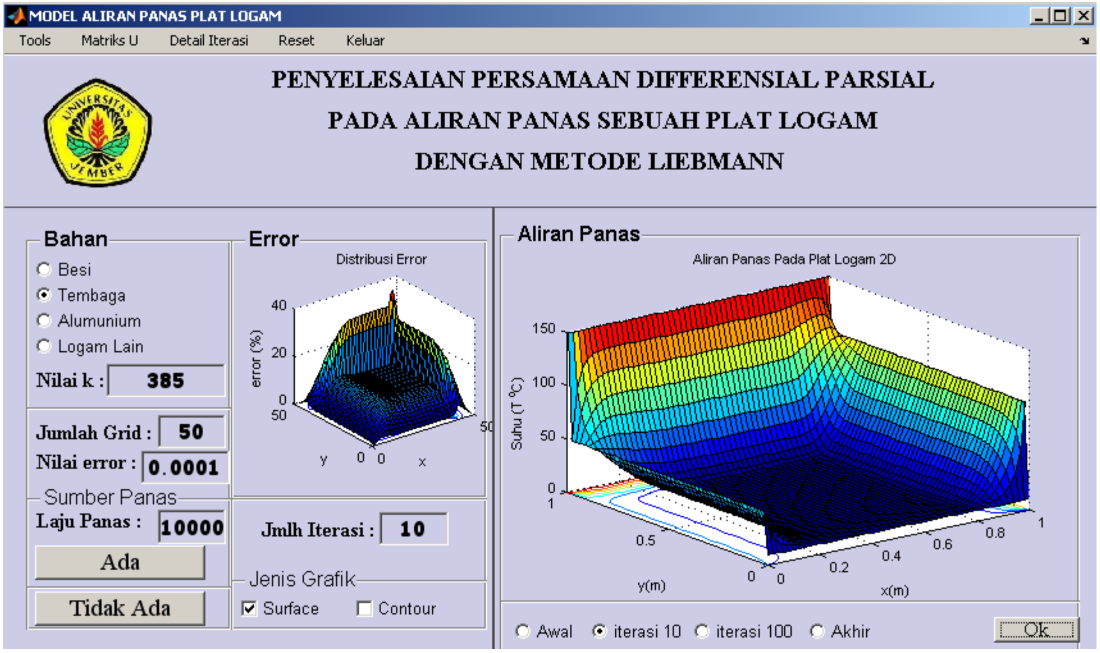
b. Logam Tembaga

Dalam bagian ini akan diberikan hasil simulasi serta visualisasi aliran panas pada plat logam tembaga dalam keadaan *steady* dengan sumber panas didalamnya. Diberikan konduktivitas termal tembaga sebesar $385\frac{W}{m}℃$, jumlah *grid* 50, nilai *error* 0,01%, dan laju panas $10000\frac{W}{m}$. Hasil simulasi serta visualisasi dapat dilihat pada gambar 4.4.

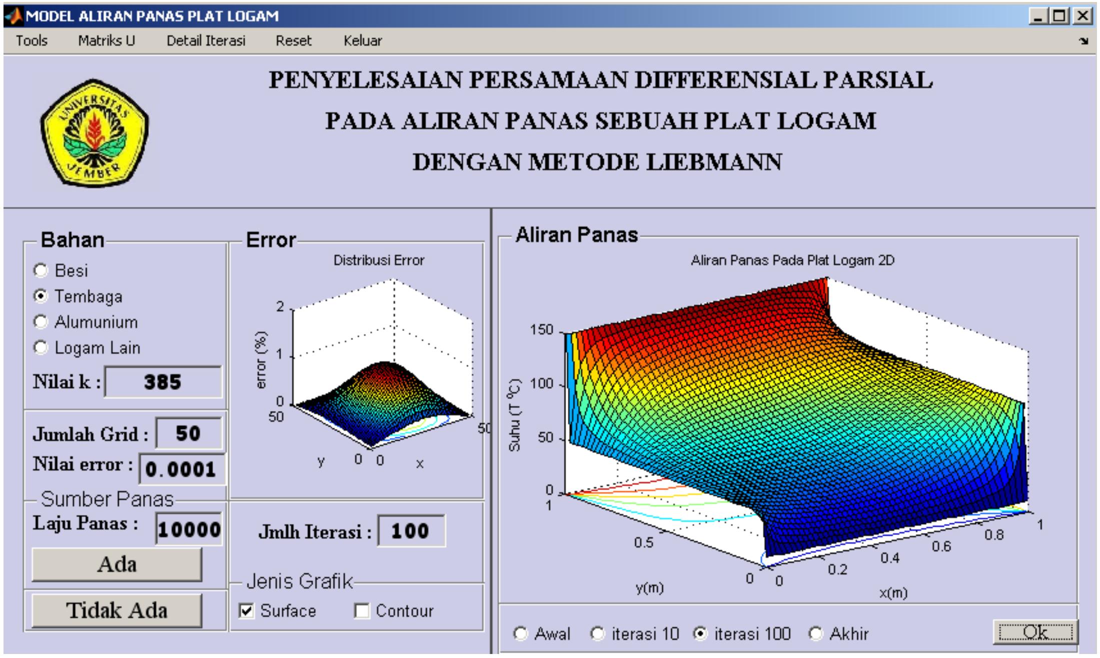
Grafik Aliran Panas Pada Kondisi Awal dari Logam Tembaga



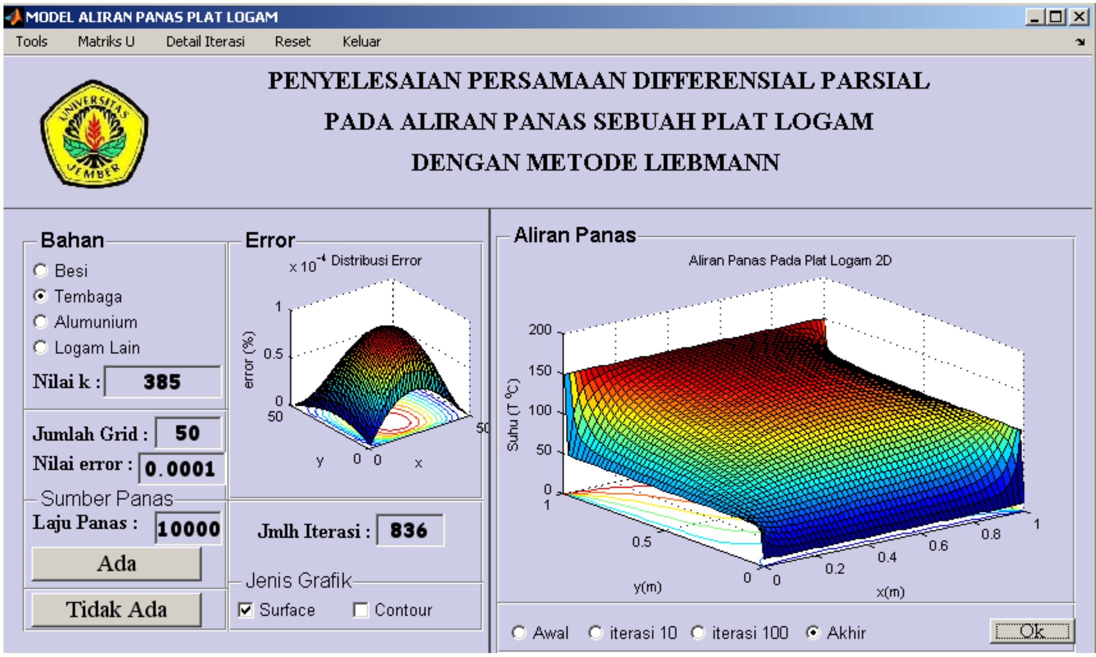
Grafik Aliran Panas Pada Saat Iterasi ke-10 dari Logam Tembaga



Grafik Aliran Panas Pada Saat Iterasi ke-100 dari Logam Tembaga



Grafik Aliran Panas Pada Iterasi Ke-836 dari Logam Tembaga

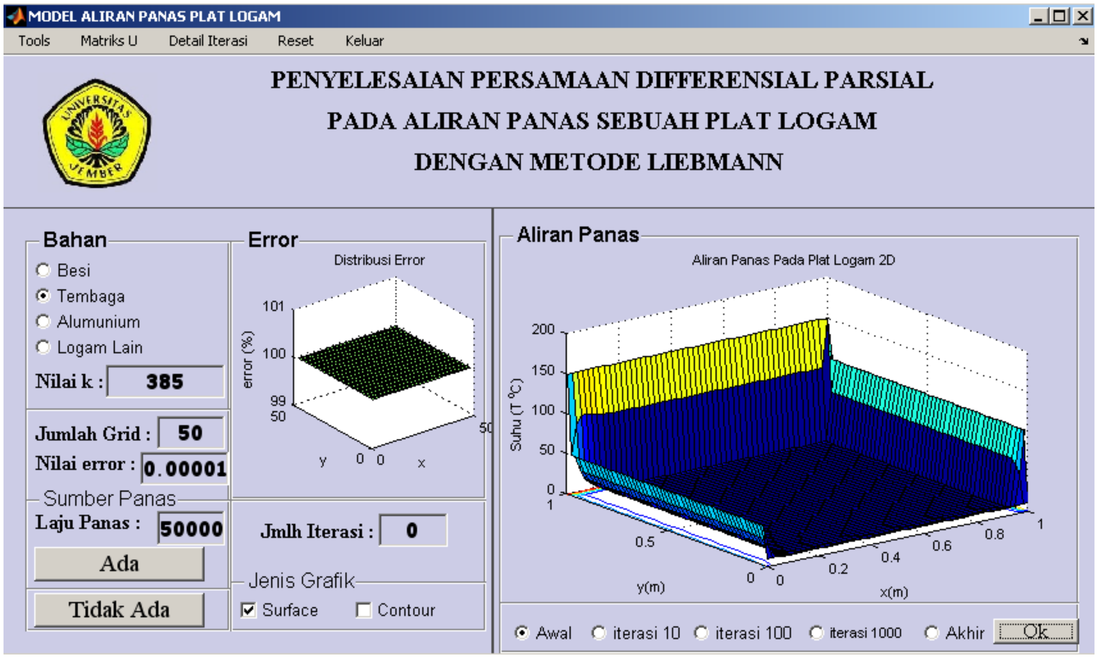


Gambar 4.4 Grafik Aliran Panas Pada Tembaga dengan Sumber Panas $10000\,\frac{W}{m}$ dan Nilai *error* 0,01%

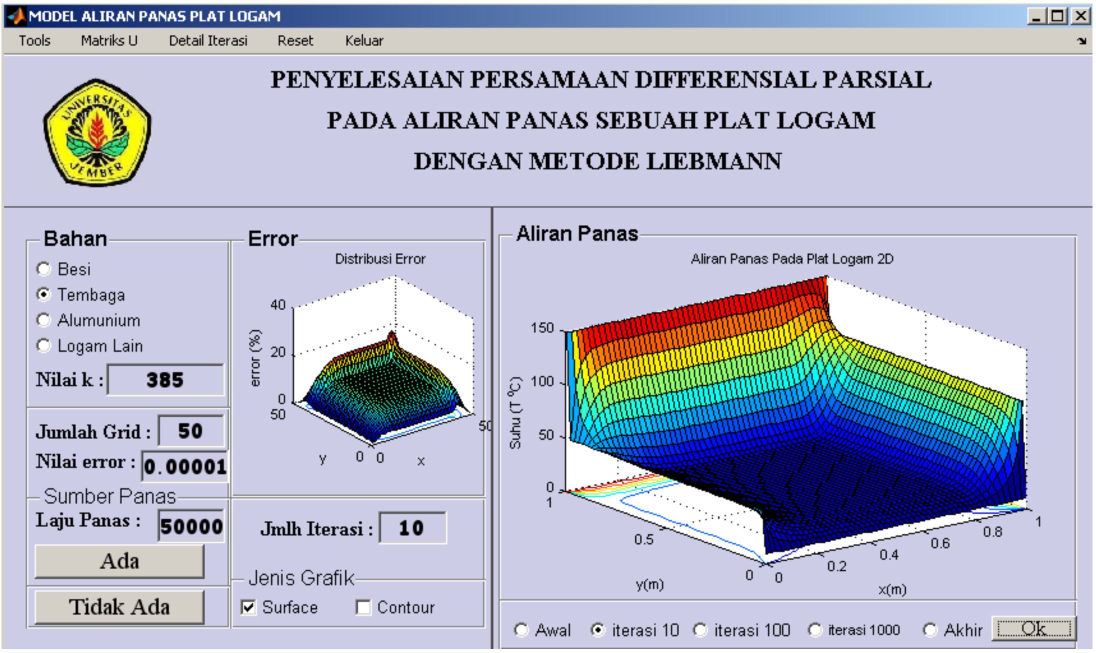
Gambar diatas menjelaskan bahwa dengan memasukkan nilai-nilai parameter dihasilkan visualisasi seperti gambar 4.4. Untuk memperoleh keadaan setimbang dengan nilai *error* 0,01% pada setiap titik $T_{i,j}$, dilakukan iterasi sebanyak 836 kali. Pada gambar aliran suhu terlihat untuk daerah yang berwarna merah adalah daerah yang mempunyai suhu tinggi yaitu suhu di atas $140℃$, untuk daerah yang berwarna orange adalah daerah yang bersuhu antara $120℃$ sampai $140℃$, untuk daerah yang berwarna kuning adalah daerah yang bersuhu antara $100℃$ sampai $120℃$, untuk daerah yang berwarna hijau adalah daerah yang bersuhu antara $80℃$ sampai $100℃$, dan untuk daerah yang berwarna biru adalah daerah yang bersuhu dibawah $80℃$, yang artinya semakin rendah suhu pada gambar tersebut maka warnanya semakin tua (biru tua).

Selanjutnya akan diberikan hasil simulasi serta visualisasi aliran panas pada plat logam tembaga dalam keadaan *steady* dengan sumber panas didalamnya. Diberikan konduktivitas termal tembaga sebesar $385\frac{W}{m}℃$, jumlah *grid* 50, nilai *error* 0,001%, dan laju panas $50000\frac{W}{m}$. Hasil simulasi serta visualisasi dapat dilihat pada gambar 4.5.

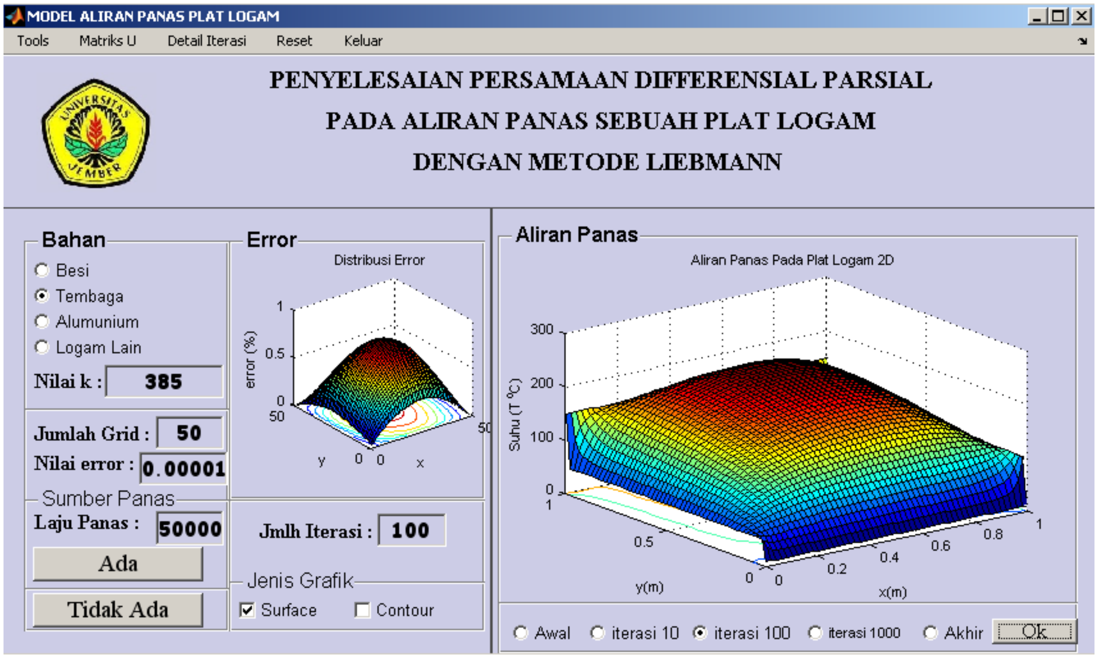
Grafik Aliran Panas Pada Kondisi Awal dari Logam Tembaga



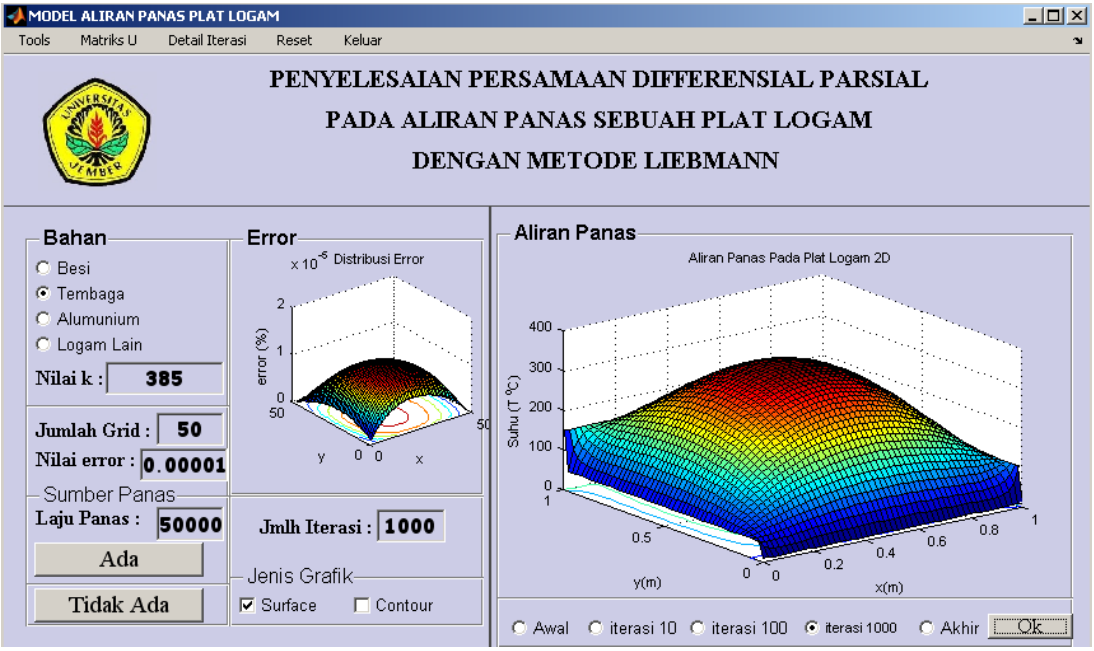
Grafik Aliran Panas Pada Saat Iterasi ke-10 dari Logam Tembaga



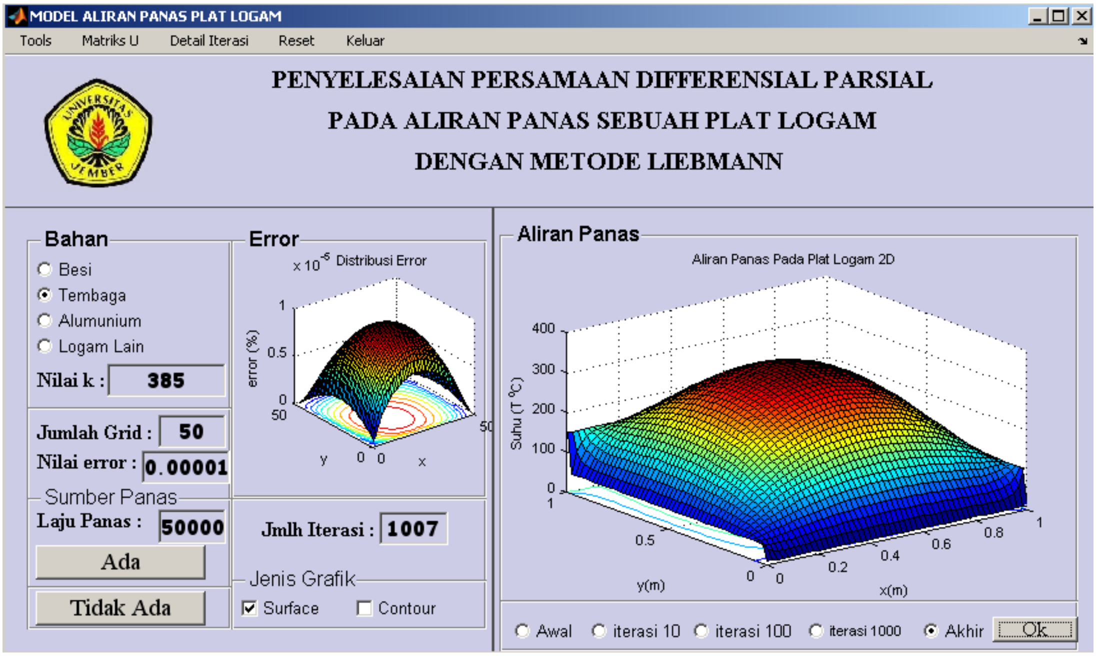
Grafik Aliran Panas Pada Saat Iterasi ke-100 dari Logam Tembaga



Grafik Aliran Panas Pada Saat Iterasi ke-1000 dari Logam Tembaga



Grafik Aliran Panas Pada Iterasi Ke-1007 dari Logam Tembaga



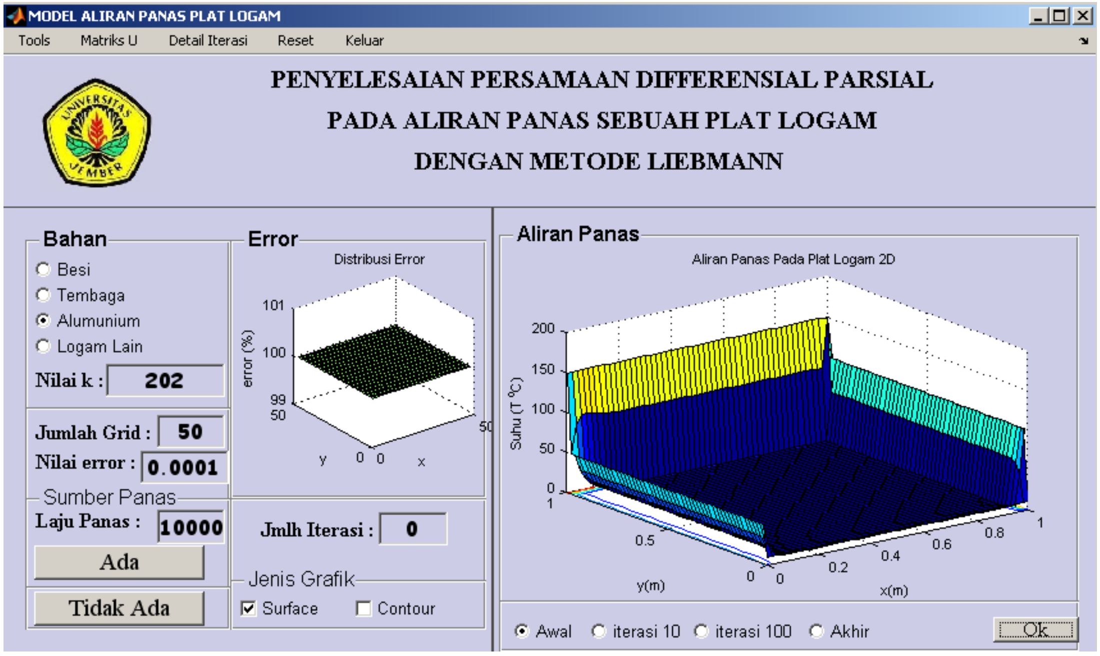
Gambar 4.5 Grafik Aliran Panas Pada Tembaga dengan Sumber Panas 50000 $\frac{W}{m}$ dan Nilai *error* 0,001%

Gambar diatas menjelaskan bahwa dengan memasukkan nilai-nilai parameter dihasilkan visualisasi seperti gambar 4.5. Untuk memperoleh keadaan setimbang dengan nilai *error* 0,001% pada setiap titik $T_{i,j}$, dilakukan iterasi sebanyak 1007 kali. Pada gambar aliran suhu terlihat untuk daerah yang berwarna merah adalah daerah yang mempunyai suhu tinggi yaitu suhu di atas 300°C, untuk daerah yang berwarna orange adalah daerah yang bersuhu antara 250°C sampai 300°C, untuk daerah yang berwarna kuning adalah daerah yang bersuhu antara 200°C sampai 250°C, untuk daerah yang berwarna hijau adalah daerah yang bersuhu antara 150°C sampai 200°C, dan untuk daerah yang berwarna biru adalah daerah yang bersuhu dibawah 150°C, yang artinya semakin rendah suhu pada gambar tersebut maka warnanya semakin tua (biru tua).

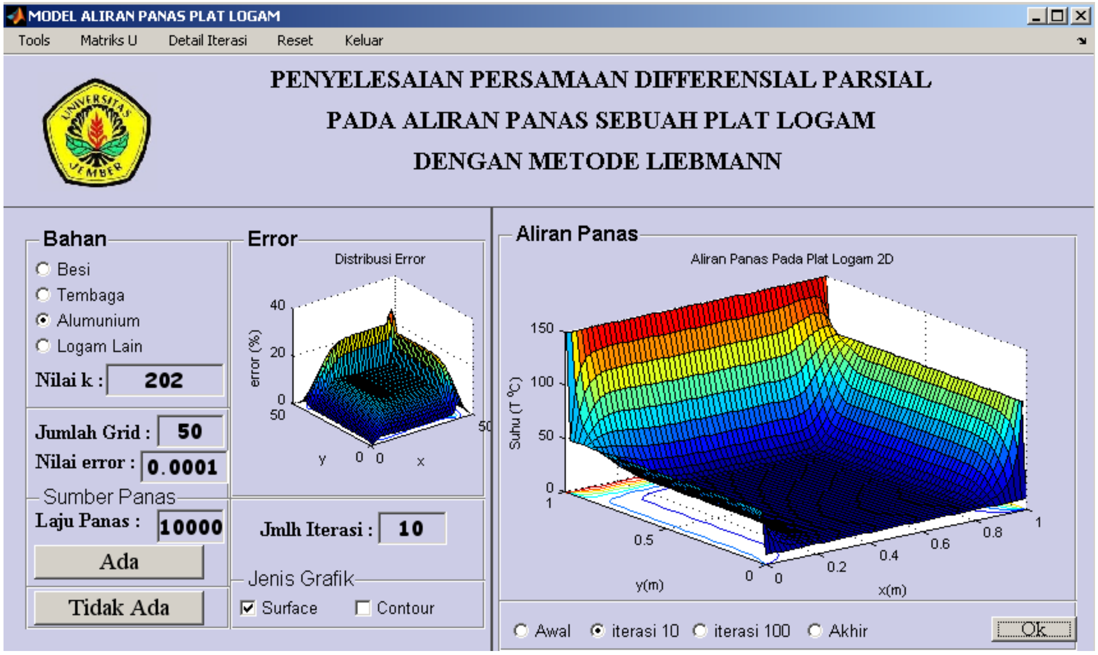
c. Logam Aluminium

Dalam bagian ini akan diberikan hasil simulasi serta visualisasi aliran panas pada plat logam aluminium dalam keadaan *steady* dengan sumber panas didalamnya. Diberikan konduktivitas termal aluminium sebesar $202 \frac{W}{m}$°C, jumlah *grid* 50, nilai *error* 0,01%, dan laju panas $10000 \frac{W}{m}$. Hasil simulasi serta visualisasi dapat dilihat pada gambar 4.6.

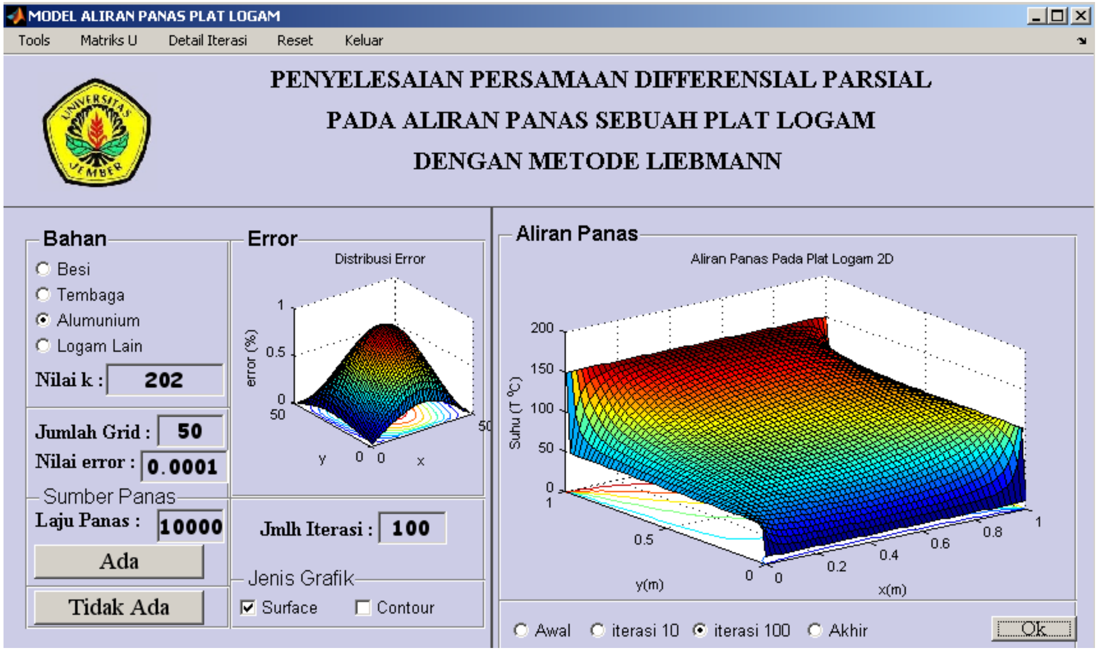
Grafik Aliran Panas Pada Kondisi Awal dari Logam Aluminium



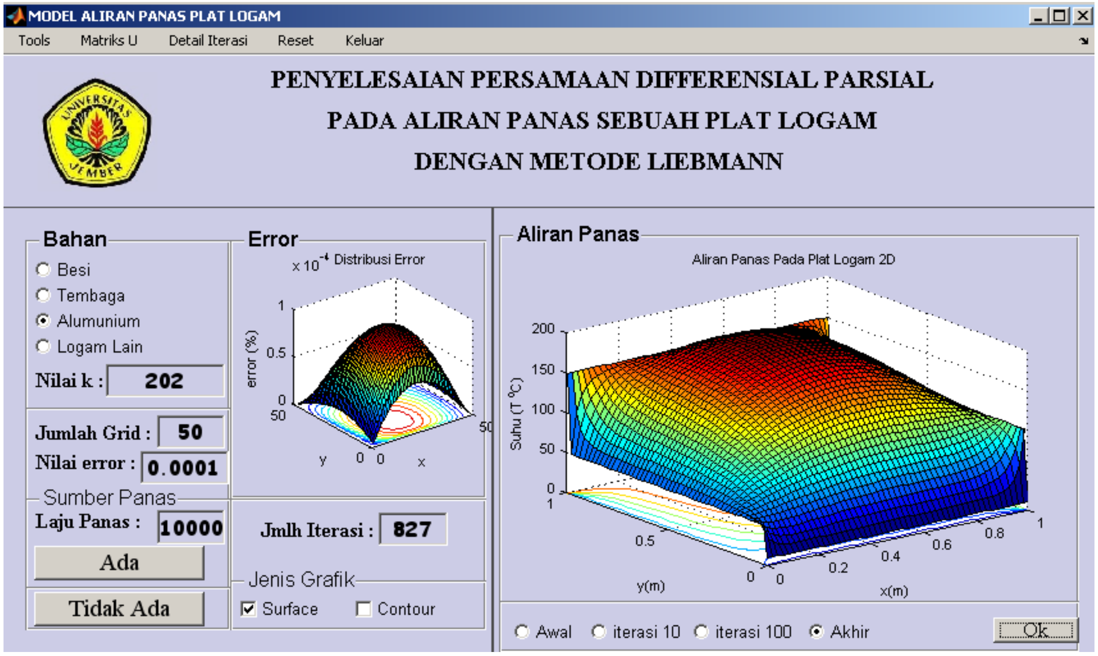
Grafik Aliran Panas Pada Saat Iterasi ke-10 dari Logam Aluminium



Grafik Aliran Panas Pada Saat Iterasi ke-100 dari Logam Aluminium



Grafik Aliran Panas Pada Iterasi Ke-827 dari Logam Aluminium

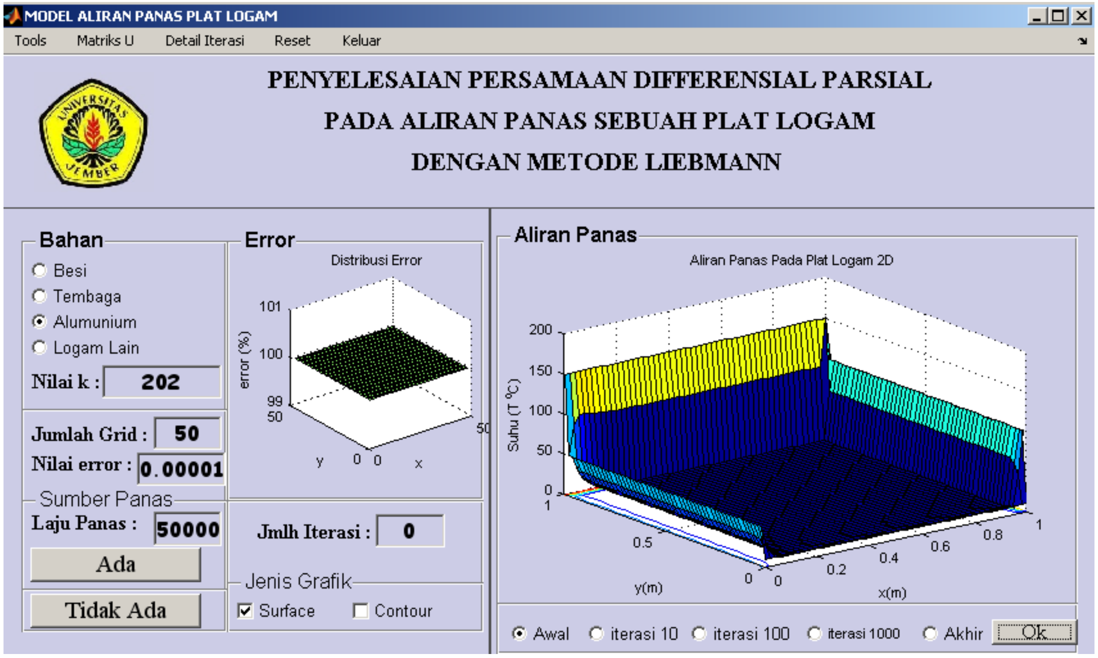


Gambar 4.6 Grafik Aliran Panas Pada Aluminium dengan Sumber Panas $10000\frac{W}{m}$ dan Nilai *error* 0,01%

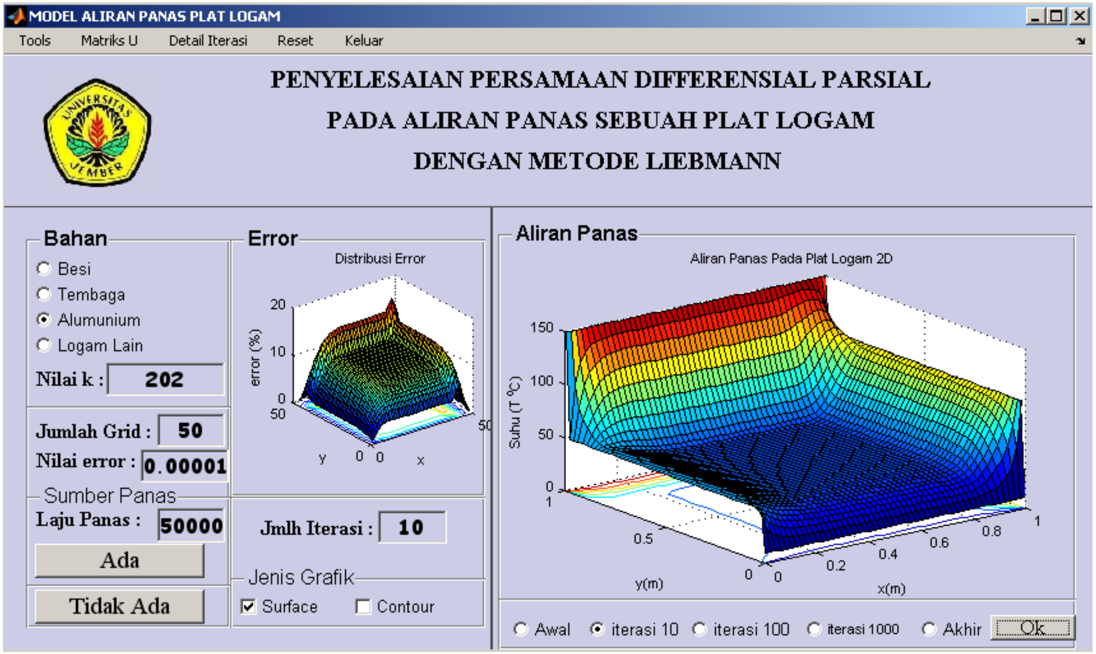
Gambar diatas menjelaskan bahwa dengan memasukkan nilai-nilai parameter dihasilkan visualisasi seperti gambar 4.6. Untuk memperoleh keadaan setimbang dengan nilai *error* 0,01% pada setiap titik $T_{i,j}$, dilakukan iterasi sebanyak 827 kali. Pada gambar aliran suhu terlihat untuk daerah yang berwarna merah adalah daerah yang mempunyai suhu tinggi yaitu suhu di atas 160°C, untuk daerah yang berwarna orange adalah daerah yang bersuhu antara 140°C sampai 160°C, untuk daerah yang berwarna kuning adalah daerah yang bersuhu antara 120°C sampai 140°C, untuk daerah yang berwarna hijau adalah daerah yang bersuhu antara 100°C sampai 120°C, dan untuk daerah yang berwarna biru adalah daerah yang bersuhu dibawah 100°C, yang artinya semakin rendah suhu pada gambar tersebut maka warnanya semakin tua (biru tua).

Selanjutnya akan diberikan hasil simulasi serta visualisasi aliran panas pada plat logam aluminium dalam keadaan *steady* dengan sumber panas didalamnya. Diberikan konduktivitas termal aluminium sebesar $202\,\frac{W}{m}$°C, jumlah *grid* 50, nilai *error* 0,001%, dan laju panas $50000\,\frac{W}{m}$. Hasil simulasi serta visualisasi dapat dilihat pada gambar 4.7.

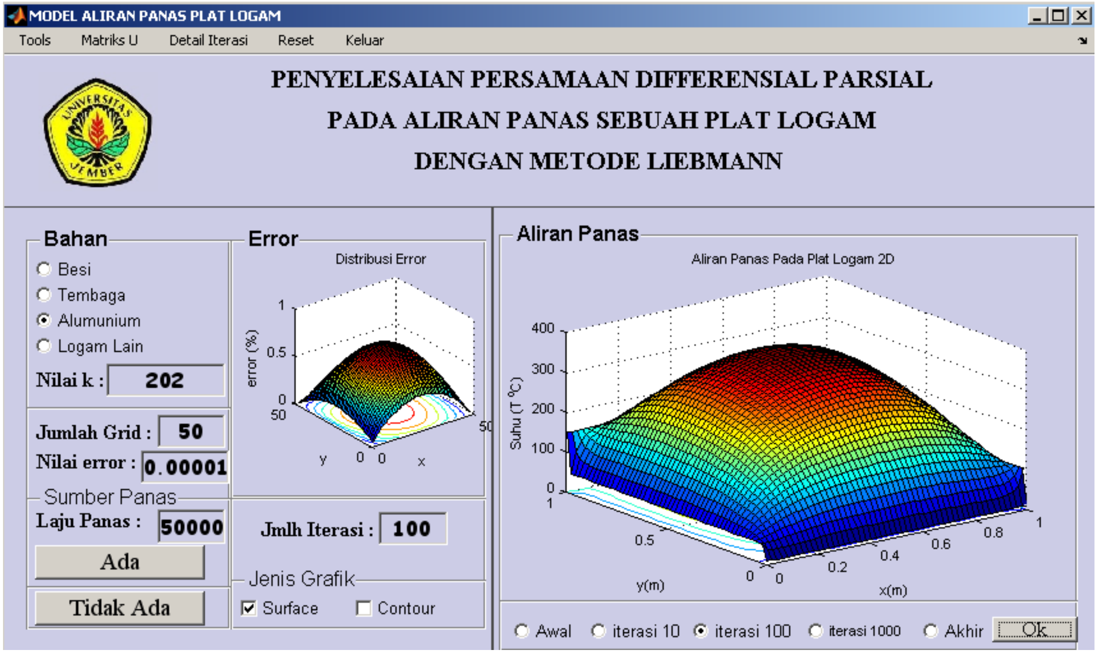
Grafik Aliran Panas Pada Kondisi Awal dari Logam Aluminium



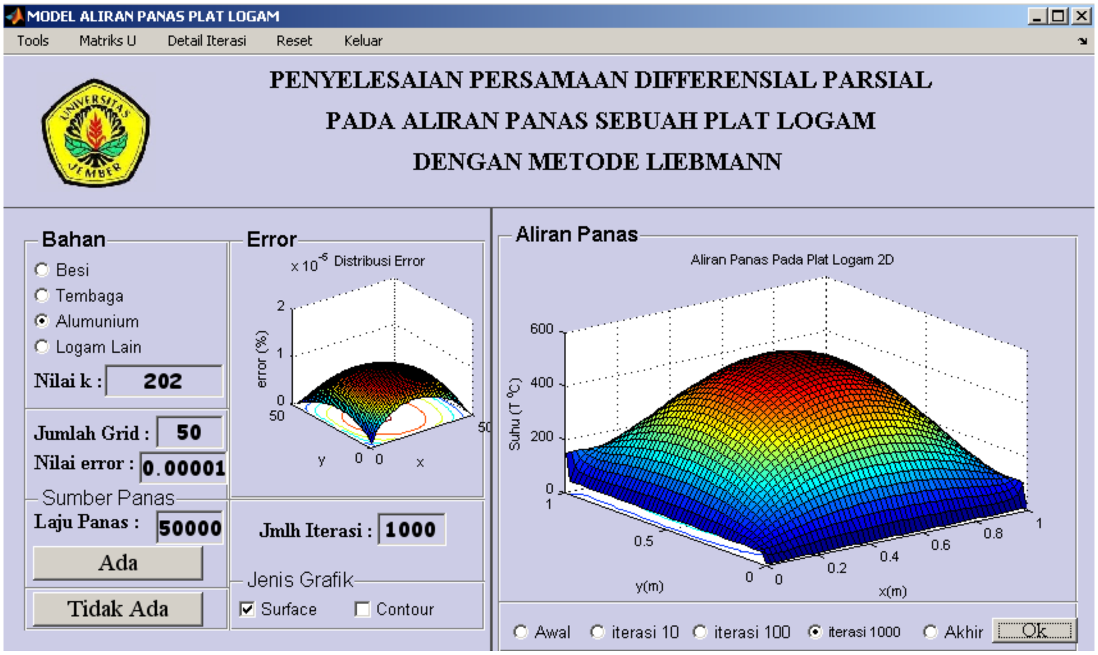
Grafik Aliran Panas Pada Saat Iterasi ke-10 dari Logam Aluminium



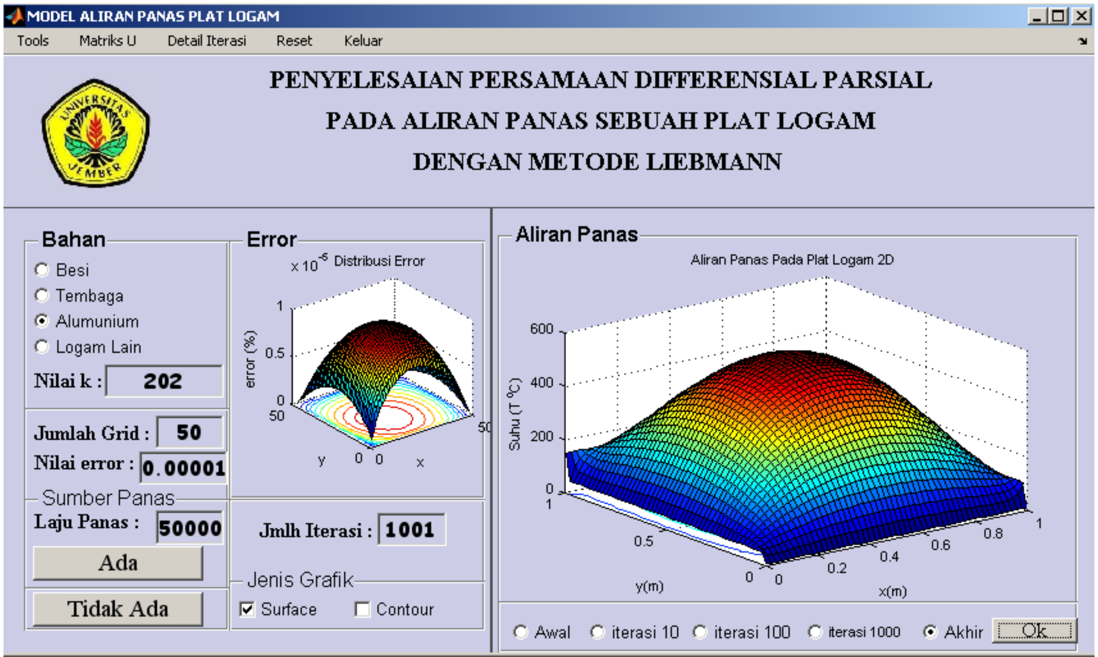
Grafik Aliran Panas Pada Saat Iterasi ke-100 dari Logam Aluminium



Grafik Aliran Panas Pada Saat Iterasi ke-1000 dari Logam Aluminium



Grafik Aliran Panas Pada Saat Iterasi ke-1001 dari Logam Aluminium



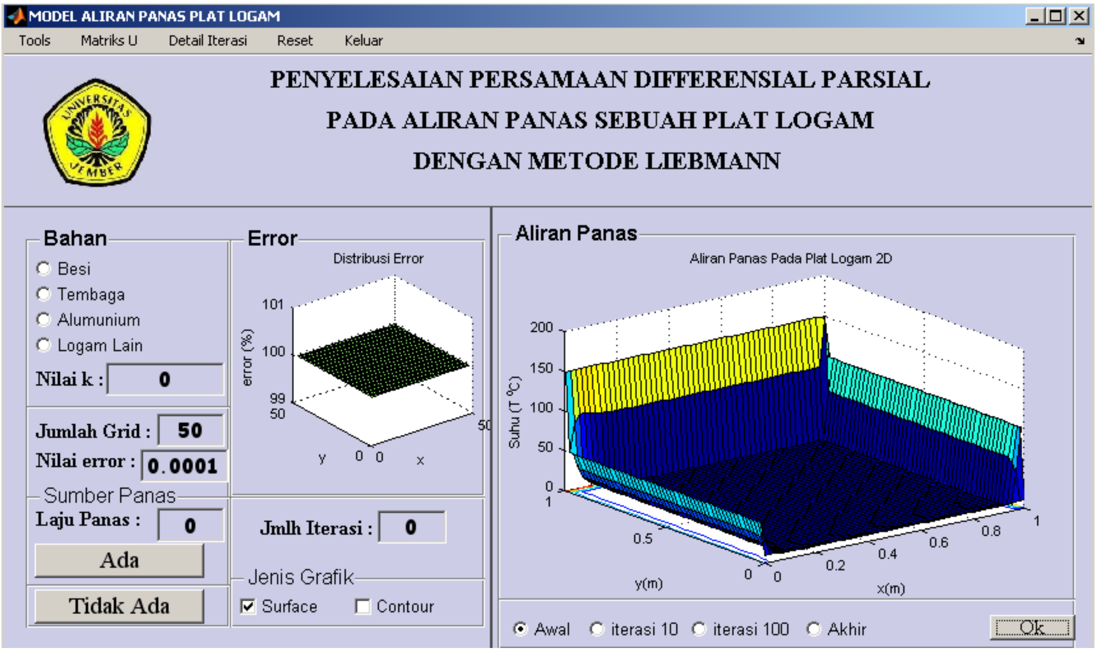
Gambar 4.7 Grafik Aliran Panas Pada Aluminium dengan Sumber Panas $50000\frac{W}{m}$ dan Nilai *error* 0,001%

Gambar diatas menjelaskan bahwa dengan memasukkan nilai-nilai parameter dihasilkan visualisasi seperti gambar 4.7. Untuk memperoleh keadaan setimbang dengan nilai *error* 0,001% pada setiap titik $T_{i,j}$, dilakukan iterasi sebanyak 1001 kali. Pada gambar aliran suhu terlihat untuk daerah yang berwarna merah adalah daerah yang mempunyai suhu tinggi yaitu suhu di atas $450℃$, untuk daerah yang berwarna orange adalah daerah yang bersuhu antara $400℃$ sampai $450℃$, untuk daerah yang berwarna kuning adalah daerah yang bersuhu antara $350℃$ sampai $400℃$, untuk daerah yang berwarna hijau adalah daerah yang bersuhu antara $300℃$ sampai $350℃$, dan untuk daerah yang berwarna biru adalah daerah yang bersuhu dibawah $300℃$, yang artinya semakin rendah suhu pada gambar tersebut maka warnanya semakin tua (biru tua).

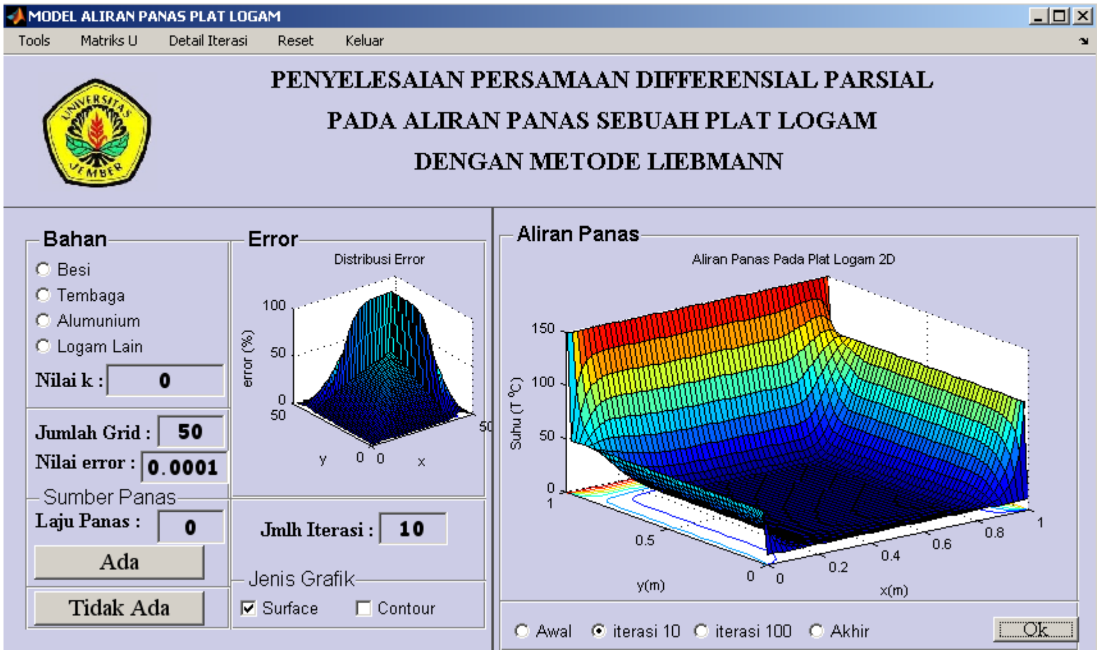
4.5.2. Plat Logam Tanpa Sumber Panas Di Dalamnya

Dalam bagian ini akan diberikan hasil simulasi serta visualisasi aliran panas pada plat logam dalam keadaan *steady* tanpa sumber panas didalamnya. Dengan jumlah *grid* 50, nilai *error* 0,01%. Karena tanpa sumber panas maka hasil dari semua logam sama. Laju perpindahan panas dan koefisien konduktivitas termal tidak diperhitungkan. Hasil simulasi serta visualisasi dapat dilihat pada gambar 4.8.

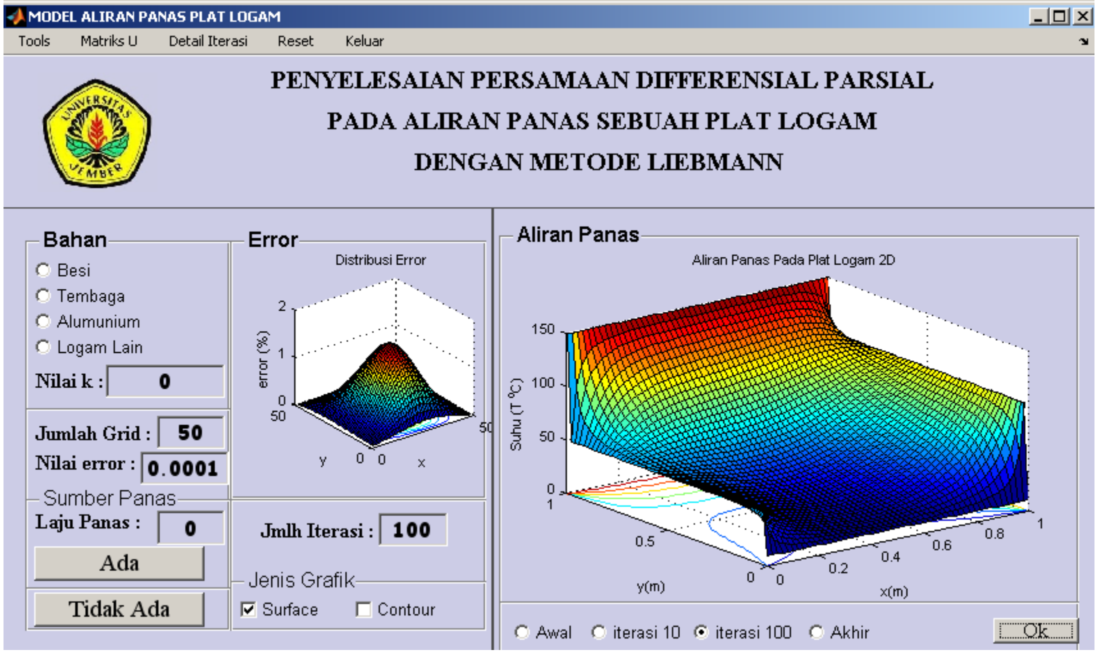
Grafik Aliran Panas Pada Kondisi Awal dari Logam Tanpa Sumber Panas



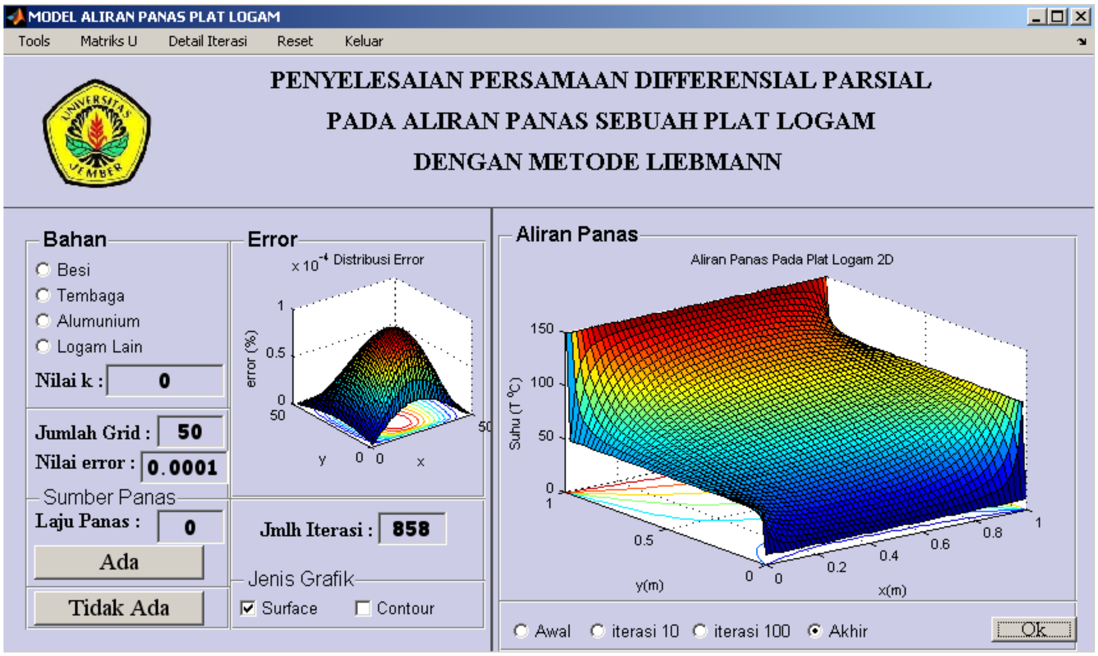
Grafik Aliran Panas Pada Saat Iterasi ke-10 dari Logam Tanpa Sumber Panas



Grafik Aliran Panas Pada Saat Iterasi ke-100 dari Logam Tanpa Sumber Panas



Grafik Aliran Panas Pada Iterasi Ke-858 dari Logam Tanpa Sumber Panas

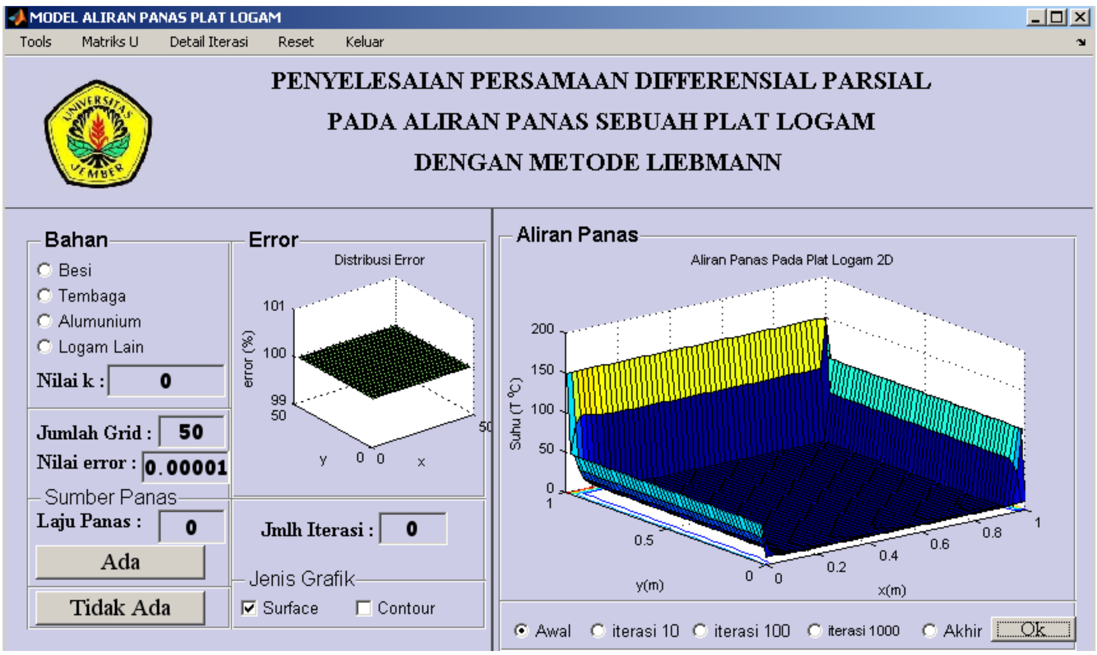


Gambar 4.8 Grafik Aliran Panas Logam Tanpa Sumber Panas dengan Nilai *error* 0,01%

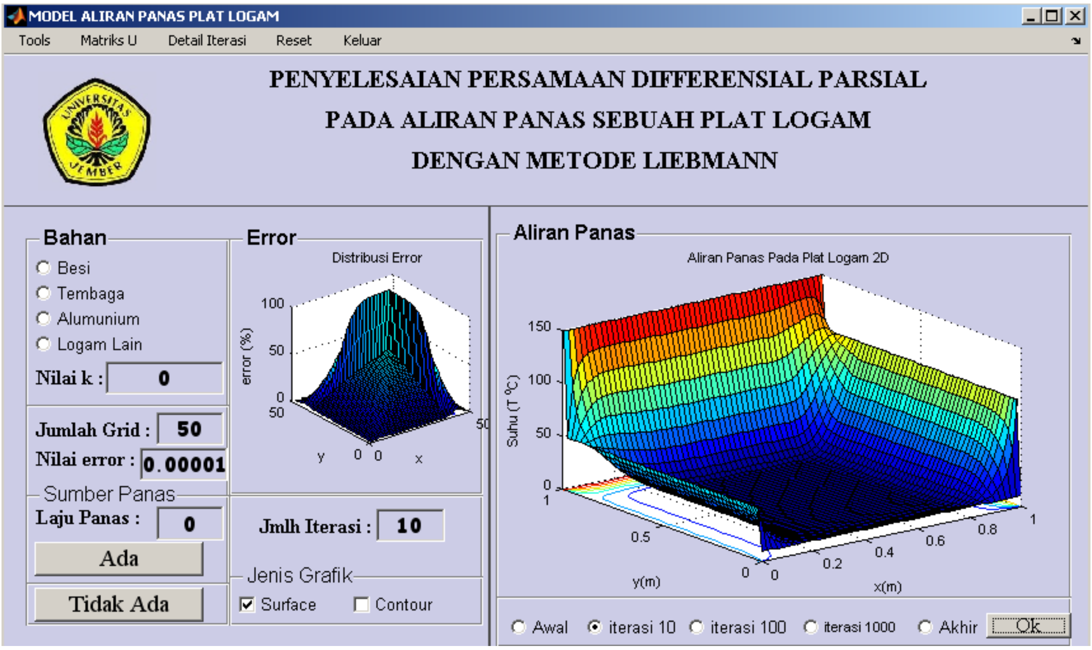
Gambar diatas menjelaskan bahwa dengan memasukkan nilai-nilai parameter dihasilkan visualisasi seperti gambar 4.8. Untuk memperoleh keadaan setimbang dengan nilai *error* 0,01% pada setiap titik $T_{i,j}$, dilakukan iterasi sebanyak 858 kali. Pada gambar aliran suhu terlihat untuk daerah yang berwarna merah adalah daerah yang mempunyai suhu tinggi yaitu suhu di atas 140℃, untuk daerah yang berwarna orange adalah daerah yang bersuhu antara 120℃ sampai 140℃, untuk daerah yang berwarna kuning adalah daerah yang bersuhu antara 100℃ sampai 120℃, untuk daerah yang berwarna hijau adalah daerah yang bersuhu antara 80℃ sampai 100℃, dan untuk daerah yang berwarna biru adalah daerah yang bersuhu dibawah 80℃, yang artinya semakin rendah suhu pada gambar tersebut maka warnanya semakin tua (biru tua).

Selanjutnya akan diberikan hasil simulasi serta visualisasi aliran panas pada plat logam dalam keadaan *steady* tanpa sumber panas didalamnya. Dengan jumlah *grid* 50, nilai *error* 0,001%. Hasil simulasi serta visualisasi dapat dilihat pada gambar 4.9.

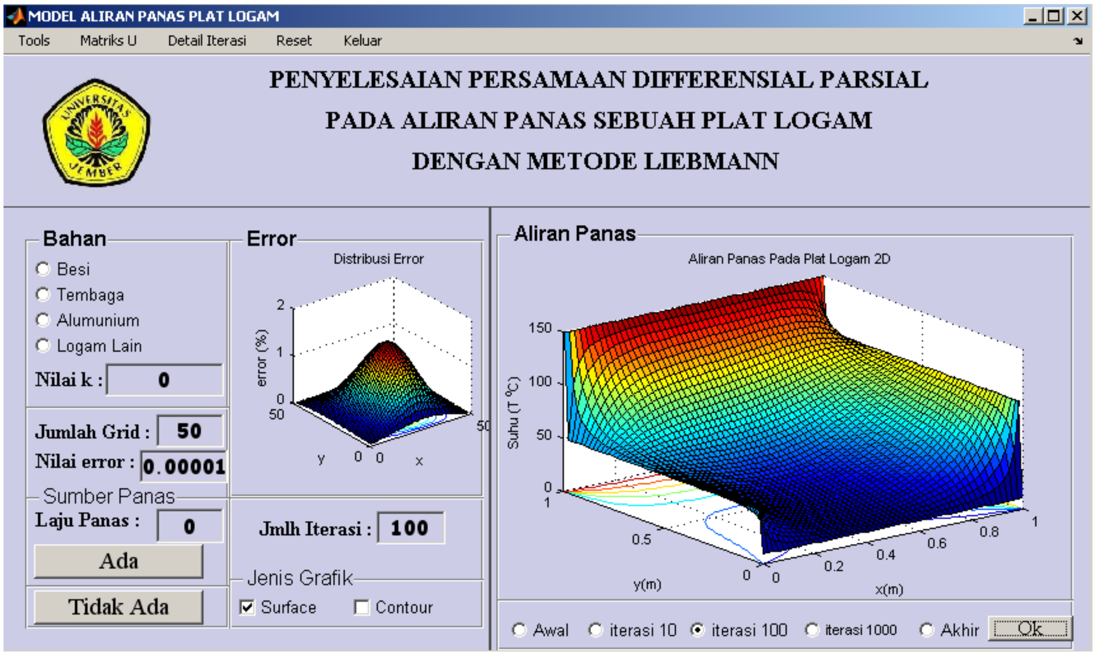
Grafik Aliran Panas Pada Kondisi Awal dari Logam Tanpa Sumber Panas



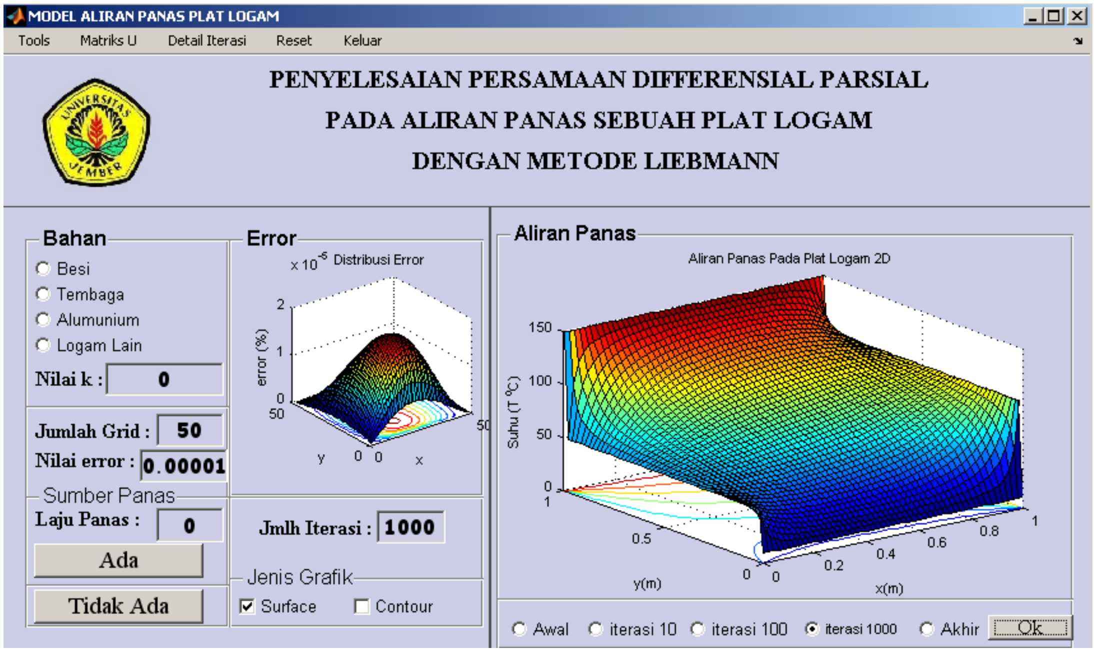
Grafik Aliran Panas Pada Saat Iterasi ke-10 dari Logam Tanpa Sumber Panas



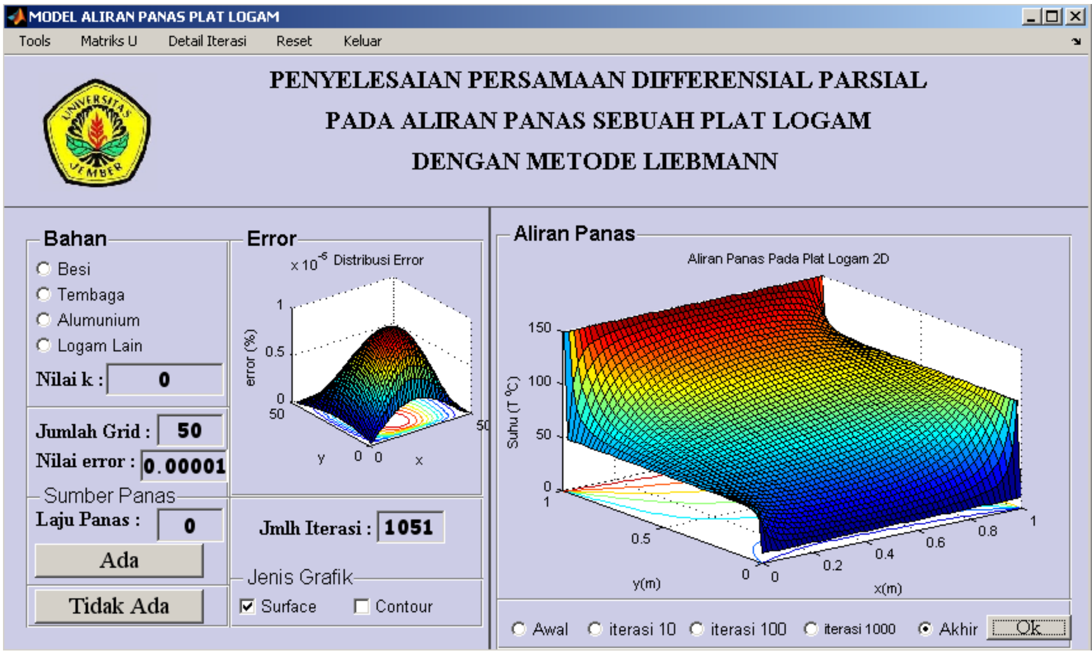
Grafik Aliran Panas Pada Saat Iterasi ke-100 dari Logam Tanpa Sumber Panas



Grafik Aliran Panas Pada Saat Iterasi ke-1000 dari Logam Tanpa Sumber Panas



Grafik Aliran Panas Pada Iterasi Ke-1051 dari Logam Tanpa Sumber Panas



Gambar 4.9 Grafik Aliran Panas Logam Tanpa Sumber Panas dengan Nilai *error* 0,001%

Gambar diatas menjelaskan bahwa dengan memasukkan nilai-nilai parameter dihasilkan visualisasi seperti gambar 4.8. Untuk memperoleh keadaan setimbang dengan nilai *error* 0,001% pada setiap titik $T_{i,j}$, dilakukan iterasi sebanyak 1051 kali. Pada gambar aliran suhu terlihat untuk daerah yang berwarna merah adalah daerah yang mempunyai suhu tinggi yaitu suhu di atas $140℃$, untuk daerah yang berwarna orange adalah daerah yang bersuhu antara $120℃$ sampai $140℃$, untuk daerah yang berwarna kuning adalah daerah yang bersuhu antara $100℃$ sampai $120℃$, untuk daerah yang berwarna hijau adalah daerah yang bersuhu antara $80℃$ sampai $100℃$, dan untuk daerah yang berwarna biru adalah daerah yang bersuhu dibawah $80℃$, yang artinya semakin rendah suhu pada gambar tersebut maka warnanya semakin tua (biru tua).

Dengan memasukkan nilai-nilai parameter untuk masing-masing logam maka akan diperoleh banyaknya iterasi untuk memperoleh keadaan setimbang. Berikut ini hasil simulasi beberapa logam dengan jumlah *grid* 50, besarnya *error* 0,01% dengan laju panas $10000\frac{W}{m}$ dan 0,001% dengan laju panas $50000\frac{W}{m}$ yang secara ringkas disajikan dalam tabel 4.1.

Tabel 4.1 Ringkasan Iterasi Untuk Memperoleh Keadaan Setimbang

Logam	Nilai *Error* 0,01%	Nilai *Error* 0,001%
Besi	814	996
Tembaga	836	1007
Aluminium	827	1001
Tanpa sumber Panas	858	1051

4.6. Analisis Hasil Simulasi

Pada subbab ini akan dibahas mengenai analisis hasil simulasi yang telah dilakukan pada subbab 4.5 penyelesaian dengan metode Liebmann. Jika diamati pada tabel 4.1 iterasi paling sedikit untuk memperoleh keadaan setimbang dengan penyelesaian menggunakan metode Liebmann dengan nilai *error* 0,01% yaitu sebanyak 814 iterasi, sedangkan dengan nilai *error* 0,001% yaitu sebanyak 996 iterasi. Iterasi dapat dihentikan jika kesalahan relatifnya sudah mencapai batas yang ditentukan. Perbedaan banyaknya iterasi untuk memperoleh keadaan setimbang dikarenakan pengaruh dari parameter-parameter yang di masukkan yaitu nilai *error*, laju panas, dan konduktivitas termal yang berbeda-beda pada setiap jenis logam. Semakin kecil nilai *error* maka akan semakin banyak iterasi, semakin banyak jumlah *grid* maka akan semakin banyak iterasi, semakin besar laju panas maka semakin sedikit iterasi dan semakin kecil konduktivitas termal maka semakin sedikit iterasi untuk memperoleh keadaan setimbang.

Titik-titik interior pada aliran panas besi, tembaga, dan aluminium dengan sumber panas di dalamnya mempunyai nilai yang lebih besar daripada titik-titik interior pada aliran panas yang tanpa sumber panas di dalamnya. Hal ini dikarenakan merupakan persamaan dengan sumber panas di dalamnya sehingga dipengaruhi oleh laju perpindahan panas dan konduktivitas termal, sedangkan pada persamaan yang tanpa mengandung sumber panas tidak dipengaruhi laju perpindahan panas dan konduktivitas termal.

Bila diamati, nilai-nilai fisik logam pada tabel 4.1 memiliki karakteristik sebagai berikut:

1. Besi memiliki konduktivitas termal yang paling kecil.
2. Tembaga memiliki konduktivitas termal yang paling besar.

Dilihat dari konsep fisika, logam yang mempunyai karakteristik nilai konduktivitas termal yang semakin besar, memiliki kemampuan mengalirankan panas yang lebih besar. Dari hasil simulasi, tembaga mempunyai nilai panas yang besar. Oleh karena itu, logam tembaga mendukung untuk melakukan perpindahan panas yang lebih cepat daripada besi dan aluminium.

Nilai kondukitivitas termal suatu bahan menunjukkan laju perpindahan panas yang mengalir dalam suatu bahan. Jika nilai konduktivitas termal suatu bahan makin besar, maka makin besar juga panas yang mengalir melalui benda tersebut. Karena itu, bahan yang harga konduktivitas termal nya besar adalah penghantar panas yang baik, sedangkan bila konduktivitas termal nya kecil bahan itu kurang menghantar atau merupakan isolator.

BAB 5. PENUTUP

Pada bab ini diperoleh kesimpulan dari hasil analisis dan pembahasan dari penyelesaian aliran panas menggunakan metode Liebmann, serta diberikan saran yang dapat dilakukan sebagai kelanjutan skripsi ini.

5.1. Kesimpulan

Kesimpulan yang diperoleh berdasarkan hasil analisis dan pembahasan adalah sebagai berikut:

Penyelesaian aliran panas pada saat *steady* menggunakan metode Liebmann dengan syarat awal nol dan syarat batas pada sekeliling plat dengan nilai $T(0,y) = 10℃, T(L,y) = 150℃, T(x,0) = 50℃, T(x,K) = 100℃$ dan jumlah *grid* 50:

1. plat logam dengan sumber panas di dalamnya
   a. logam besi dengan nilai *error* 0,01% dan laju panas $10000\frac{W}{m}$ diperoleh nilai setimbang pada iterasi ke-814, sedangkan nilai *error* 0,001% dan laju panas $50000\frac{W}{m}$ pada iterasi ke-996,
   b. logam tembaga dengan nilai *error* 0,01% dan laju panas $10000\frac{W}{m}$ diperoleh nilai setimbang pada iterasi ke-836, sedangkan nilai *error* 0,001% dan laju panas $50000\frac{W}{m}$ pada iterasi ke-1007,
   c. logam aluminium dengan nilai *error* 0,01% dan laju panas $10000\frac{W}{m}$ diperoleh nilai setimbang pada iterasi ke-827, sedangkan nilai *error* 0,001% dan laju panas $50000\frac{W}{m}$ pada iterasi ke-1001,

2. pada plat logam tanpa sumber panas didalamnya dengan nilai *error* 0,01% diperoleh nilai setimbang pada iterasi ke-858, sedangkan nilai *error* 0,001% pada iterasi ke-1051.

5.2. Saran

Persamaan diferensial parsial pada aliran panas plat logam dua dimensi dalam keadaan *steady* dapat diselesaikan secara numerik menggunakan metode Liebmann dengan bantuan s*oftware* Matlab 7.8.0. Untuk penelitian selanjutnya dapat menggunakan metode ini pada plat logam dua dimensi dalam keadaan *unsteady*, atau dapat menggunakan metode lain dan seiring perkembangan ilmu pengetahuan dapat menggunakan *software* lain yang lebih baik sebagai alat bantu sehingga diperoleh nilai yang lebih akurat lagi.

DAFTAR PUSTAKA

Culp, Archie, W. 1996. *Prinsip-Prinsip Konversi Energi.* Jakarta: Erlangga.

Dini. 2011. *Konduksi*. http://www.scribd.com/doc/49294275/Fourier-Hukum-konduksi. [6 oktober 2012].

Edwin J. Purcell, Dale Varberg. Dkk. 1990. *Kalkulus dan Geometri Analitis.* Edisi Keempat. Jakarta: Erlangga.

Hidayat, Rusli. 2009. Persamaan Diferensial Parsial. Jember: UPT Penerbitan Universitas Jember.

Holman. 2002. *Heat Transfer*. Ninth Edition. USA: Mc. Graw Hill.

Institut Pertanian Bogor. *Metode Beda Hingga*. http://repository.ipb.ac.id/bitstream/handle/123456789/10968/Bab%20III%202008sur1.pdf?sequence=10. [6 oktober 2012].

Kreith, Frank dan Arko Prijono. 1997. *Prinsip-prinsip Perpindahan Panas.* Edisi Ketiga. Jakarta: Erlangga.

Kusumah, Yaya S. 1989. *Persamaan Diferensial*. Jakarta: Erlangga.

Setiawan, Agus. 2006. *Pengantar Metode Numerik.* Yogyakarta: Andi.

Sulistyo. 2006. *Metodologi dan Metode Penelitian*. http://www.google.co.id/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=1&cad=rja&ved=0CCMQFjAA&url=http%3A%2F%2Fstaff.ui.ac.id%2Finternal%2F079203001%2Fmaterial%2FMetodologidanMetodePenelitian.ppt&ei=9zqfUPrHMsjZrQfq9oCgCg&usg=AFQjCNHZbsYYkZijNT9OqH5b2sKWiff_MQ&sig2=aoIhFPYBjz-Xh0PpA0Dvtg. [10 november 2012].

Suprapto, Edy. 2012. *Metode Numerik*. dreapacenkahait.files.wordpress.com/2012/06/metode-numerik.ppt. [10 november 2012].

Tirta, 2004, *Model Statistika Linier.* Jember:FMIPA Universitas Jember.

Triatmojo, Bambang. 2002. *Metode Numerik Dilengkapi dengan Program Komputer.* Yogyakarta: Beta Offset.

Lampiran A. Skrip Program GUI MATLAB

```
clc; clear all;
close all;
ulang=0; k=0; hasil=0;
win1=figure(...
'units','points',...
'position',[50 100 640 350],...
'color',[.8 .8 .9],...
'menubar','none',...
'resize','on',...
'numbertitle','off',...
'name','MODEL ALIRAN PANAS PLAT LOGAM');
%==========================================
hp = uipanel('parent',win1,...
             'Title','Bahan','FontSize',12,...
             'units','points',...
             'fontweight','bold',...
             'BackgroundColor',[.8 .8 .9],...
             'Position',[13 13 120 237]);

hp = uipanel('parent',win1,...
             'Title','Error','FontSize',12,...
             'units','points',...
             'fontweight','bold',...
             'BackgroundColor',[.8 .8 .9],...
             'Position',[133 90 150 160]);

hp = uipanel('parent',win1,...
             'Title','','FontSize',12,...
             'units','points',...
             'BackgroundColor',[.8 .8 .9],...
             'Position',[133 13 150 77]);

hp = uipanel('parent',win1,...
             'Title','Jenis Grafik','FontSize',12,...
             'units','points',...
             'BackgroundColor',[.8 .8 .9],...
             'Position',[133 13 150 37]);

hp = uipanel('parent',win1,...
             'Title','Aliran Panas','FontSize',12,...
             'units','points',...
             'fontweight','bold',...
             'BackgroundColor',[.8 .8 .9],...
             'Position',[290 13 340 240]);

% grafik2=axes('parent',win1,...
% 'units','points',...
% 'position',[475 135 300 235],...
% 'fontsize',8,...
% 'color',[1 1 1]);
%=========================================
label1=uicontrol('parent',win1,...
'units','points',...
'position',[125 320 450 24],...
'style','Text',...
'string',' PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFFERENSIAL PARSIAL ',...
'backgroundcolor',[.8 .8 .9],...
'fontname','Times New Roman',...
'fontsize',15,...
'fontweight','bold',...
'foregroundcolor',[.0 .0 .0]);
```

```
label1=uicontrol('parent',win1,...
'units','points',...
'position',[125 296 450 24],...
'style','Text',...
'string',' PADA ALIRAN PANAS SEBUAH PLAT LOGAM ',...
'backgroundcolor',[.8 .8 .9],...
'fontname','Times New Roman',...
'fontsize',15,...
'fontweight','bold',...
'foregroundcolor',[.0 .0 .0]);

label1=uicontrol('parent',win1,...
'units','points',...
'position',[125 272 450 24],...
'style','Text',...
'string','DENGAN METODE LIEBMANN ',...
'backgroundcolor',[.8 .8 .9],...
'fontname','Times New Roman',...
'fontsize',15,...
'fontweight','bold',...
'foregroundcolor',[.0 .0 .0]);

label1=uicontrol('parent',win1,...
'units','points',...
'position',[286 0 1 260],...
'style','Text',...
'backgroundcolor',[.3 .3 .3],...
'foregroundcolor',[1 1 1]);

label1=uicontrol('parent',win1,...
'units','points',...
'position',[0 260 700 1],...
'style','Text',...
'backgroundcolor',[.3 .3 .3],...
'foregroundcolor',[1 1 1]);

% label1=uicontrol('parent',win1,...
% 'units','points',...
% 'position',[580 2 100 15],...
% 'style','Text',...
% 'string',' By Titik Eko Wati ',...
% 'backgroundcolor',[.8 .8 .9],...
% 'fontname','Arial',...
% 'fontsize',10,...
% 'fontweight','bold',...
% 'foregroundcolor',[0 0 0]);
 %============================================
hp = uipanel('parent',win1,...
             'Title','','FontSize',12,...
             'units','points',...
             'BackgroundColor',[.8 .8 .9],...
             'Position',[13 13 120 130]);
hp = uipanel('parent',win1,...
             'Title','Sumber Panas','FontSize',12,...
             'units','points',...
             'BackgroundColor',[.8 .8 .9],...
             'Position',[13 13 120 85]);
hp = uipanel('parent',win1,...
             'Title','','FontSize',12,...
             'units','points',...
             'BackgroundColor',[.8 .8 .9],...
             'Position',[13 13 120 25]);
label1=uicontrol('parent',win1,...
'units','points',...
```

```
'position',[18 110 70 25],...
'style','Text',...
'HorizontalAlignment','left',...
'string','Jumlah Grid :',...
'backgroundcolor',[.8 .8 .9],...
'fontname','Times New Roman',...
'fontsize',12,...
'fontweight','bold');

edit1=uicontrol('parent',win1,...
'units','points',...
'position',[90 119 40 20],...
'style','edit',...
'string','0',...
'backgroundcolor',[.8 .8 .9],...
'fontname','comic',...
'fontsize',12,...
'fontweight','bold');

label1=uicontrol('parent',win1,...
'units','points',...
'position',[18 98 70 20],...
'style','Text',...
'HorizontalAlignment','left',...
'string','Nilai error :',...
'backgroundcolor',[.8 .8 .9],...
'fontname','Times New Roman',...
'fontsize',12,...
'fontweight','bold');

edit4=uicontrol('parent',win1,...
'units','points',...
'position',[80 98 52 20],...
'style','edit',...
'string','0',...
'backgroundcolor',[.8 .8 .9],...
'fontname','comic',...
'fontsize',12,...
'fontweight','bold');

label1=uicontrol('parent',win1,...
'units','points',...
'position',[18 146 70 20],...
'style','Text',...
'HorizontalAlignment','left',...
'string','Nilai k :',...
'backgroundcolor',[.8 .8 .9],...
'fontname','Times New Roman',...
'fontsize',12,...
'fontweight','bold');

edit3=uicontrol('parent',win1,...
'units','points',...
'position',[60 149 70 20],...
'style','edit',...
'string','0',...
'backgroundcolor',[.8 .8 .9],...
'fontname','comic',...
'fontsize',12,...
'fontweight','bold');

label1=uicontrol('parent',win1,...
'units','points',...
'position',[150 58 70 20],...
```

```
'style','Text',...
'HorizontalAlignment','left',...
'string','Jmlh Iterasi :',...
'backgroundcolor',[.8 .8 .9],...
'fontname','Times New Roman',...
'fontsize',12,...
'fontweight','bold');

edit5=uicontrol('parent',win1,...
'units','points',...
'position',[220 62 40 20],...
'style','edit',...
'string','0',...
'backgroundcolor',[.8 .8 .9],...
'fontname','comic',...
'fontsize',12,...
'fontweight','bold');

% lstboxKet1=uicontrol('parent',win1,...
%     'units','points',...
%     'position',[135 140 145 95],...
%     'backgroundcolor',[.8 .8 .9],...
%     'foregroundcolor',[0 0 1],...
%     'style','listbox',...
%     'string','',...
%     'fontname','tahoma',...
%     'fontsize',9);
%============================================
proses=uicontrol('parent',win1,...
    'units','points',...
    'position',[18 42 100 20],...
    'style','Pushbutton',...
    'callback','titik2',...
    'string','Ada',...
    'fontname','times new roman',...
    'fontsize',14);

label1=uicontrol('parent',win1,...
'units','points',...
'position',[18 63 70 20],...
'style','Text',...
'HorizontalAlignment','left',...
'string','Laju Panas :',...
'backgroundcolor',[.8 .8 .9],...
'fontname','Times New Roman',...
'fontsize',12,...
'fontweight','bold');

edit2=uicontrol('parent',win1,...
'units','points',...
'position',[90 63 40 20],...
'style','edit',...
'string','0',...
'backgroundcolor',[.8 .8 .9],...
'fontname','comic',...
'fontsize',12,...
'fontweight','bold');
%============================================
% h1 = uibuttongroup('visible','off','units','points','Position',[13 13 120
229],'backgroundcolor',[.8 .8 .9]);
% Create three radio buttons in the button group.
u01 = uicontrol('Style','Radio','String','Besi','fontsize',10,...
    'backgroundcolor',[.8 .8 .9],...
    'pos',[25 290 80 20],'parent',win1,'callback','Besi');
```

```
u11 = uicontrol('Style','Radio','String','Tembaga','fontsize',10,...
    'backgroundcolor',[.8 .8 .9],...
    'pos',[25 270 90 20],'parent',win1,'callback','Tembaga');
u21 = uicontrol('Style','Radio','String','Alumunium','fontsize',10,...
    'backgroundcolor',[.8 .8 .9],...
    'pos',[25 250 100 20],'parent',win1,'callback','Alumunium');
u31 = uicontrol('Style','Radio','String','Logam Lain','fontsize',10,...
    'backgroundcolor',[.8 .8 .9],...
    'pos',[25 230 100 20],'parent',win1,'callback','Logam_lain');
% Initialize some button group properties.
% set(h1,'SelectionChangeFcn',@nilai_k);
% set(h1,'SelectedObject',[]);  % No selection
% set(h1,'Visible','on');
%==============================================
proses=uicontrol('parent',win1,...
    'units','points',...
    'position',[18 15 100 20],...
    'style','Pushbutton',...
    'callback','titik',...
    'string','Tidak Ada',...
    'fontname','times new roman',...
    'fontsize',14);
%============================================
u1 = uicontrol('Style','checkbox','String','Surface','value',1,'fontsize',10,...
    'backgroundcolor',[.8 .8 .9],...
    'pos',[185 25 100 20],'parent',win1,'callback','chek_surface');
u2 = uicontrol('Style','checkbox','String','Contour','fontsize',10,...
    'backgroundcolor',[.8 .8 .9],...
    'pos',[275 25 100 20],'parent',win1,'callback','chek_contur');
%============================================
grafik1=axes('parent',win1,...
'units','points',...
'position',[10 270 90 70],...
'fontsize',8,...
'color',[1 1 1]);
olmat=imread('unej.jpg');
    imshow(olmat);
        set(win1,'CurrentAxes',grafik1);

grafik3=axes('parent',win1,...
'units','points',...
'position',[330 50 270 170],...
'fontsize',8,...
'color',[1 1 1]);

grafik2=axes('parent',win1,...
'units','points',...
     'position',[170 120 105 100],...
'fontsize',8,...
'color',[1 1 1]);

menu2=uimenu('parent',win1,...
    'Label','  Tools  ');
menu1_1=uimenu('parent',menu2,...
    'Label','Zoom',...
    'Callback','besar');
menu1_1=uimenu('parent',menu2,...
    'Label','Pan',...
    'Callback','geser');
menu1_1=uimenu('parent',menu2,...
    'Label','Rotasi',...
    'Callback','Rotasi');
menu2=uimenu('parent',win1,...
    'Label','  Matriks U  ',...
```

```
    'Callback','keterangan');
menu2=uimenu('parent',win1,...
    'Label','  Detail Iterasi  ',...
    'Callback','detail');
menu2=uimenu('parent',win1,...
    'Label','  Reset  ',...
    'Callback','PANAS');
menu2=uimenu('parent',win1,...
    'Label','  Keluar  ',...
    'Callback','close');
```

Lampiran B. Skrip Program Persamaan Tanpa Sumber Panas

```
% clear;
% close;
clc;
if ulang==1
         warndlg('Reset Terlebih Dahulu','Peringatan');

    break
end
hasil=1;
m = str2num(get(edit1,'string'));%input('Masukkan banyaknya grid pada plat, grid =
');
% error=
if m <=1
        warndlg('Input Jumlah Grid >= 1','Peringatan');
          break

end
mm=length(m);
if mm==0
       warndlg('Input Grid harus angka >=1','Peringatan');
          break

end
error = str2num(get(edit4,'string'));%input('Masukkan besar error yang diinginkan,
error = ');
err=length(error);
if err==0
     warndlg('Input Error harus angka 0<error<1','Peringatan');
          break
end
if error==0 | error>=1
     warndlg('Input Error harus 0<error<1','Peringatan');
          break

end
U=[];
pil1=get(u01,'value');pil2=get(u11,'value');
pil3=get(u21,'value');pil4=get(u31,'value');

if pil1==1
    k= 73; % konduktifitas termal besi
    set(edit3,'string',k);
end
if pil2==1
    k= 385; % konduktifitas termal tembaga
    set(edit3,'string',k);
end
if pil3==1
    k= 202; % konduktifitas termal Alumunium
        set(edit3,'string',k);
```

```
end
if pil4==1
    k= str2num(get(edit3,'string')); % konduktifitas termal logam lainnya
end

% SURFACE & CONTOUR
pilh1=get(u1,'value');pilh2=get(u2,'value');

% identifikasi parameter
tic;
M=m+1; % banyaknya baris
N=M; % banyaknya kolom
U=zeros(M,N);
U(:,1)=50;
U(:,end)=100;
U(1,:)=10;
U(end,:)=150;
T_lama=U;
e=1+zeros(M-1,N-1);
h=1;

% proses
while any(any(e >= error))
%for h=1:iter
for j=2:M-1
for i=2:N-1
U(i,j)=(U(i+1,j)+U(i-1,j)+U(i,j+1)+U(i,j-1))/4; % Persamaan Liebmann tanpa sumber
panas
U(i,j)=1.5*U(i,j)+(-0.5)*T_lama(i,j); % Persamaan Over-Relaksasi
end
end
T_baru(:,:,h)=U;
ee=abs((T_baru(:,:,h)-T_lama)./T_baru(:,:,h))*100; % Kesalahan Relatif
e=ee(2:M-1,2:N-1);
T_lama=U;
%=========================================================================
if h==1
x=0:.1:m/10;
y=0:.1:m/10;
x=x./(m/10);
y=y./(m/10);

% subplot(1,2,1);
set(win1,'currentaxes',grafik3);
if pilh1==1
surfc(x,y,U); hold off;
else
   [C,h1]= contour(x,y,U); clabel(C,h1);hold off;
end
pause(0.5);
jml=2;
U1=U;
e1=e;%==========
% u02 = uicontrol('Style','Radio','String','Besi','fontsize',10,...
%     'backgroundcolor',[.8 .8 .9],...
%     'pos',[10 250 80 20],'parent',h11,'HandleVisibility','off');

elseif h==10
x=0:.1:m/10;
y=0:.1:m/10;
x=x./(m/10);
y=y./(m/10);

% subplot(1,2,1);
```

```
set(win1,'currentaxes',grafik3);
if pilh1==1
surfc(x,y,U); hold off;
else
    [C,h1]= contour(x,y,U); clabel(C,h1); hold off;
end
pause(0.5);hold off;
U2=U;jml=3;
e2=e;

elseif h==100
x=0:.1:m/10;
y=0:.1:m/10;
x=x./(m/10);
y=y./(m/10);

% subplot(1,2,1);
set(win1,'currentaxes',grafik3);
if pilh1==1
surfc(x,y,U); hold off;
else
    [C,h1]= contour(x,y,U); clabel(C,h1); hold off;
end
pause(0.5);hold off;
U3=U;jml=4;
e3=e;

elseif h==1000
    x=0:.1:m/10;
y=0:.1:m/10;

x=x./(m/10);
y=y./(m/10);
% subplot(1,2,1);
set(win1,'currentaxes',grafik3);
if pilh1==1
surfc(x,y,U); hold off;
else
    [C,h1]= contour(x,y,U); clabel(C,h1); hold off;
end
pause(5);hold off;
U4=U;jml=5;
e4=e;
end

% Tambahan Kecil
if h==20
    eror1=U;p=1;
elseif h==30
    eror2=U;p=2;
elseif h==40
    eror3=U;p=3;
elseif h==50
    eror4=U;p=4;
elseif h==60;
    eror5=U;p=5;
elseif h==70
    eror6=U;p=6;
elseif h==80
    eror7=U;p=7;
elseif h==90
    eror8=U;p=8;
elseif h==200
    eror9=U;p=9;
```

```
elseif h==300
    eror10=U;p=10;
elseif h==400
    eror11=U;p=11;
elseif h==500
    eror12=U;p=12;
elseif h==600
    eror13=U;p=13;
elseif h==700
    eror14=U;p=14;
elseif h==800;
    eror15=U;p=15;
elseif h==900
    eror16=U;p=16;
end

h=h+1;

%end
end
%================================================================
P=p;
p=ceil(p/2);

h11 = uibuttongroup('visible','off','units','points','Position',[290 0 340
30],'backgroundcolor',[.8 .8 .9]);
for i=1:jml-1
  if i==1
u11 = uicontrol('Style','Radio','String','Awal','fontsize',10,...
    'backgroundcolor',[.8 .8 .9],...
    'pos',[10 5 80 20],'parent',h11,'HandleVisibility','off');
    k=70;
  end
  if i==2
u12 = uicontrol('Style','Radio','String','iterasi 10','fontsize',10,...
    'backgroundcolor',[.8 .8 .9],...
    'pos',[70 5 80 20],'parent',h11,'HandleVisibility','off'); k=150;
  end
  if i==3
  u13 = uicontrol('Style','Radio','String','iterasi 100','fontsize',10,...
    'backgroundcolor',[.8 .8 .9],...
    'pos',[150 5 80 20],'parent',h11,'HandleVisibility','off');k=240;
  end
  if i==4
  u14 = uicontrol('Style','Radio','String','iterasi 1000','fontsize',8,...
    'backgroundcolor',[.8 .8 .9],...
    'pos',[240 5 80 20],'parent',h11,'HandleVisibility','off');k=330;

  end
  if i==jml-1
  u15 = uicontrol('Style','Radio','String','Akhir','fontsize',10,...
    'backgroundcolor',[.8 .8 .9],...
    'pos',[k 5 80 20],'parent',h11,'HandleVisibility','off');
set(h11,'SelectedObject',[u15]);  % No selection

  end
% set(h11,'SelectedObject',[]);  % No selection
set(h11,'Visible','on');
end

proses=uicontrol('parent',win1,...
    'units','points',...
    'position',[580 5 50 15],...
    'style','Pushbutton',...
```

```
    'callback','gambar',...
    'string','Ok',...
    'fontname','times new roman',...
    'fontsize',12);
%=============================================================
e5=e;
U5=U;
jumlah_iter = h-1;
% disp(' ');
% disp(['Banyaknya iterasi yang dilakukan = : ',num2str(jumlah_iter)]);
set(edit5,'string',jumlah_iter);

% Plotting Grafik
x=0:.1:m/10;
y=0:.1:m/10;
x=x./(m/10);
y=y./(m/10);
% subplot(1,2,1);
set(win1,'currentaxes',grafik3);
if pilh1==1
surfc(x,y,U);
% axis([0 m/10 0 m/10 0 150])
xlabel('x(m)')
ylabel('y(m)')
zlabel('Suhu (T ^oC)')
else
   [C,h1]= contour(x,y,U); clabel(C,h1);
xlabel('x(m)')
ylabel('y(m)')
end
title('Aliran Panas Pada Plat Logam 2D')
% subplot(1,2,2);
set(win1,'currentaxes',grafik2);
surfc(e);
xlabel('x')
ylabel('y')
zlabel('error (%)')
title('Distribusi Error')
ulang=1;
```

Lampiran C. Skrip Program Persamaan Dengan Sumber Panas

```
% clear all;
% close all;
clc;
if ulang==1
         warndlg('Reset Terlebih Dahulu','Peringatan');

    break
end
hasil=1;
% disp('============================================================')
% disp(' ')
% disp('Program Penyelesaian Persamaan Diferensial Parsial')
% disp('Pada Aliran Panas Pada Sebuah Plat Logam')
% disp('Dengan Metode Liebmann')
% disp('Dengan Sumber Panas Di Dalamnya')
% disp(' ')
% disp('============================================================')
% disp('Persamaan Diferensial parsial :')
% disp(' d^2T/dx^2+d^2T/dy^2+q/k=0');
% disp('Kondisi Batas :');
% disp(' dx = dy = 0.1 m');
```

```
% disp('===========================================================')
% disp('===========================================================')
% disp(' ');
m =str2num(get(edit1,'string')) ;%input('Masukkan banyaknya grid pada plat, grid =
');
if m <=1
        warndlg('Input Jumlah Grid >= 1','Peringatan');
          break

end
mm=length(m);
if mm==0
       warndlg('Input Grid harus angka >=1','Peringatan');
          break

end

dx =0.1 ;%input('Masukkan jarak interval x, dx = ');
q = str2num(get(edit2,'string'));%input('Masukkan nilai q, q= ');
if q <=0
        warndlg('Laju Panas harus > 0','Peringatan');
          break

end
mm=length(q);
if mm==0
       warndlg('Laju Panas harus angka > 0','Peringatan');
          break

end

U=[];
pil1=get(u01,'value');pil2=get(u11,'value');
pil3=get(u21,'value');pil4=get(u31,'value');

if pil1==1
    k= 73; % konduktifitas termal besi
        set(edit3,'string',k);
end
if pil2==1
    k= 385; % konduktifitas termal tembaga
    set(edit3,'string',k);
end
if pil3==1
    k= 202; % konduktifitas termal Alumunium
    set(edit3,'string',k);
end
if pil4==1
    k= str2num(get(edit3,'string')); % konduktifitas termal logam lainnya
if k <=0
        warndlg('Konduktifitas Termal > 0','Peringatan');
          break
end
mm=length(k);
if mm==0
       warndlg('Input Konduktifitas Termal harus angka > 0','Peringatan');
          break

end
end

error = str2num(get(edit4,'string'));%input('Masukkan besar error yang diinginkan,
error = ');
err=length(error);
```

```
if err==0
     warndlg('Input Error harus angka 0<error<1','Peringatan');
          break
end
if error==0 | error>=1
     warndlg('Input Error harus 0<error<1','Peringatan');
          break

end
pilh1=get(u1,'value');pilh2=get(u2,'value');

% identifikasi parameter
tic;
M=m+1; % banyaknya baris
N=M; % banyaknya kolom
U=zeros(M,N);
U(:,1)=50;
U(:,end)=100;
U(1,:)=10;
U(end,:)=150;
T_lama=U;
e=1+zeros(M-1,N-1);
h=1;

% proses
while any(any(e >= error))
%for h=1:iter
for j=2:M-1
for i=2:N-1
U(i,j)=(U(i+1,j)+U(i-1,j)+U(i,j+1)+U(i,j-1)+(q*dx^2)/k)/4; % Persamaan Liebmann
dengan sumber panas
U(i,j)=1.5*U(i,j)+(-0.5)*T_lama(i,j); % Persamaan Over-Relaksasi
end
end
T_baru(:,:,h)=U;
ee=abs((T_baru(:,:,h)-T_lama)./T_baru(:,:,h))*100; % Kesalahan Relatif
e=ee(2:M-1,2:N-1);
T_lama=U;
%=========================================================================
if h==1
x=0:.1:m/10;
y=0:.1:m/10;
x=x./(m/10);
y=y./(m/10);

% subplot(1,2,1);
set(win1,'currentaxes',grafik3);
if pilh1==1
surfc(x,y,U); hold off;
else
   [C,h1]= contour(x,y,U); clabel(C,h1);hold off;
end
pause(0.5);
jml=2;
U1=U;
e1=e;
% u02 = uicontrol('Style','Radio','String','Besi','fontsize',10,...
%     'backgroundcolor',[.8 .8 .9],...
%     'pos',[10 250 80 20],'parent',h11,'HandleVisibility','off');

elseif h==10
x=0:.1:m/10;
y=0:.1:m/10;
x=x./(m/10);
```

```
y=y./(m/10);

% subplot(1,2,1);
set(win1,'currentaxes',grafik3);
if pilh1==1
surfc(x,y,U); hold off;
else
   [C,h1]= contour(x,y,U); clabel(C,h1);hold off;
end
pause(0.5);hold off;
U2=U;jml=3;
e2=e;
elseif h==100
x=0:.1:m/10;
y=0:.1:m/10;
x=x./(m/10);
y=y./(m/10);

% subplot(1,2,1);
set(win1,'currentaxes',grafik3);
if pilh1==1
surfc(x,y,U); hold off;
else
   [C,h1]= contour(x,y,U); clabel(C,h1);hold off;
end
pause(0.5);hold off;
U3=U;jml=4;
e3=e;
elseif h==1000
x=0:.1:m/10;
y=0:.1:m/10;
x=x./(m/10);
y=y./(m/10);

% subplot(1,2,1);
set(win1,'currentaxes',grafik3);
if pilh1==1
surfc(x,y,U); hold off;
else
   [C,h1]= contour(x,y,U); clabel(C,h1);hold off;
end
pause(5);hold off;
U4=U;jml=5;
e4=e;
end
% Tambahan Kecil
if h==20
    eror1=U;p=1;
elseif h==30
    eror2=U;p=2;
elseif h==40
    eror3=U;p=3;
elseif h==50
    eror4=U;p=4;
elseif h==60;
    eror5=U;p=5;
elseif h==70
    eror6=U;p=6;
elseif h==80
    eror7=U;p=7;
elseif h==90
    eror8=U;p=8;
elseif h==200
    eror9=U;p=9;
```

```
elseif h==300
    eror10=U;p=10;
elseif h==400
    eror11=U;p=11;
elseif h==500
    eror12=U;p=12;
elseif h==600
    eror13=U;p=13;
elseif h==700
    eror14=U;p=14;
elseif h==800;
    eror15=U;p=15;
elseif h==900
    eror16=U;p=16;
end

h=h+1;

%end
end
%================================================================
h11 = uibuttongroup('visible','off','units','points','Position',[290 0 340
30],'backgroundcolor',[.8 .8 .9]);
for i=1:jml-1
  if i==1
u11 = uicontrol('Style','Radio','String','Awal','fontsize',10,...
    'backgroundcolor',[.8 .8 .9],...
    'pos',[10 5 80 20],'parent',h11,'HandleVisibility','off');
    k=70;
  end
  if i==2
u12 = uicontrol('Style','Radio','String','iterasi 10','fontsize',10,...
    'backgroundcolor',[.8 .8 .9],...
    'pos',[70 5 80 20],'parent',h11,'HandleVisibility','off'); k=150;
  end
  if i==3
  u13 = uicontrol('Style','Radio','String','iterasi 100','fontsize',10,...
    'backgroundcolor',[.8 .8 .9],...
    'pos',[150 5 80 20],'parent',h11,'HandleVisibility','off');k=240;
  end
  if i==4
  u14 = uicontrol('Style','Radio','String','iterasi 1000','fontsize',8,...
    'backgroundcolor',[.8 .8 .9],...
    'pos',[240 5 80 20],'parent',h11,'HandleVisibility','off');k=330;
  end
  if i==jml-1
  u15 = uicontrol('Style','Radio','String','Akhir','fontsize',10,...
    'backgroundcolor',[.8 .8 .9],...
    'pos',[k 5 80 20],'parent',h11,'HandleVisibility','off');
set(h11,'SelectedObject',[u15]);  % No selection

  end
% set(h11,'SelectedObject',[]);  % No selection
set(h11,'Visible','on');
end

proses=uicontrol('parent',win1,...
    'units','points',...
    'position',[580 5 50 15],...
    'style','Pushbutton',...
    'callback','gambar',...
    'string','Ok',...
    'fontname','times new roman',...
    'fontsize',12);
```

```
U5=U; e5=e;
jumlah_iter = h-1;
disp(' ');
% disp(['Banyaknya iterasi yang dilakukan = : ',num2str(jumlah_iter)]);
set(edit5,'string',jumlah_iter);

% Plotting Grafik
x=0:.1:m/10;
y=0:.1:m/10;
x=x./(m/10);
y=y./(m/10);

% subplot(1,2,1);
set(win1,'currentaxes',grafik3);
if pilh1==1
surfc(x,y,U);
% axis([0 m/10 0 m/10 0 150])
xlabel('x(m)')
ylabel('y(m)')
zlabel('Suhu (T ^oC)')
else
   [C,h1]= contour(x,y,U); clabel(C,h1);
xlabel('x(m)')
ylabel('y(m)')
end
title('Aliran Panas Pada Plat Logam 2D')
% subplot(1,2,2);
set(win1,'currentaxes',grafik2);
surfc(e);
xlabel('x')
ylabel('y')
zlabel('error (%)')
title('Distribusi Error')
P=p;p=ceil(p/2);
ulang=1;
```

Lampiran D. Skrip Program Menampilkan Matriks

```
f = figure('units','point',...
    'Position',[150 100 600 250],'name','Matriks Aliran Panas dengan Metode
Liebmann');
cnames = {'Himpunan G','Himpunan U,C'};
t = uitable('Data',U,...
    'Parent',f,...
    'units','point',...
    'hitTest','on',...
    'backgroundcolor',[1 1 1],...
    'fontname','times new roman',...
    'foregroundcolor',[1 0 0],...
    'fontsize',14,...
    'Position',[0 0 600 250]);
```

Lampiran E. Skrip Program Menampilakan Grafik Pada Beberapa Iterasi

```
hold off;
for i=1:jml-1
    if i==1
    pil11=get(u11,'value');
        if pil11==1
        set(win1,'currentaxes',grafik3);
        surfc(x,y,U1)
```

```
        end
    end
    if i==2
    pil12=get(u12,'value');
        if pil12==1
        set(win1,'currentaxes',grafik3);
        surfc(x,y,U2)
        end
    end
    if i==3
        pil13=get(u13,'value');
        if pil13==1
        set(win1,'currentaxes',grafik3);
        surfc(x,y,U3)
        end
    end
    if i==4
        pil14=get(u14,'value');
        if pil14==1
        set(win1,'currentaxes',grafik3);
        surfc(x,y,U4)
        end
    end
    if i==jml-1
        pil15=get(u15,'value');
        if pil15==1
        set(win1,'currentaxes',grafik3);
        surfc(x,y,U5)
        end
    end

end
```

Lampiran F. Skrip Untuk Melihat Detail Masing-Masing Iterasi

```
win11=figure(...
'units','points',...
'position',[50 100 640 350],...
'color',[.8 .8 .9],...
'menubar','none',...
'resize','off',...
'numbertitle','off',...
'name','Detail Aliran Panas');
grafik1=axes('parent',win11,...
'units','points',...
'position',[0 0 640 350],...
'fontsize',8,...
'color',[1 1 1]);
 if P<=8
for i=1:P
    if i==1
        subplot(2,p,1),surfc(x,y,eror1);
        title('Iterasi Ke-20');
    elseif i==2
        subplot(2,p,2),surfc(x,y,eror2);
    title('Iterasi Ke-30');
    elseif i==3
        subplot(2,p,3),surfc(x,y,eror3);
    title('Iterasi Ke-40');
    elseif i==4
        subplot(2,p,4),surfc(x,y,eror4);
    title('Iterasi Ke-50');
    elseif i==5
```

```
        subplot(2,p,5),surfc(x,y,eror5);
    title('Iterasi Ke-60');
    elseif i==6
        subplot(2,p,6),surfc(x,y,eror6);
    title('Iterasi Ke-70');
    elseif i==7
        subplot(2,p,7),surfc(x,y,eror7);
    title('Iterasi Ke-80');
    elseif i==8
        subplot(2,p,8),surfc(x,y,eror8);
    title('Iterasi Ke-90');
    end
end
 end

 if P>8
for i=1:8
    if i==1
        subplot(2,4,1),surfc(x,y,eror1);
        title('Iterasi Ke-20');
    elseif i==2
        subplot(2,4,2),surfc(x,y,eror2);
    title('Iterasi Ke-30');
    elseif i==3
        subplot(2,4,3),surfc(x,y,eror3);
    title('Iterasi Ke-40');
    elseif i==4
        subplot(2,4,4),surfc(x,y,eror4);
    title('Iterasi Ke-50');
    elseif i==5
        subplot(2,4,5),surfc(x,y,eror5);
    title('Iterasi Ke-60');
    elseif i==6
        subplot(2,4,6),surfc(x,y,eror6);
    title('Iterasi Ke-70');
    elseif i==7
        subplot(2,4,7),surfc(x,y,eror7);
    title('Iterasi Ke-80');
    elseif i==8
        subplot(2,4,8),surfc(x,y,eror8);
    title('Iterasi Ke-90');
    end
end
for i=9:P
    if i==9
        p=ceil((P-8)/2);
        win11=figure(...
'units','points',...
'position',[50 100 640 350],...
'color',[.8 .8 .9],...
'menubar','none',...
'resize','off',...
'numbertitle','off',...
'name','Detail Aliran Panas');
grafik1=axes('parent',win11,...
'units','points',...
'position',[0 0 640 350],...
'fontsize',8,...
'color',[1 1 1]);

        subplot(2,p,1),surfc(x,y,eror9);
    title('Iterasi Ke-200');
    elseif i==10
        subplot(2,p,2),surfc(x,y,eror10);
```

```
    title('Iterasi Ke-300');
    elseif i==11
        subplot(2,p,3),surfc(x,y,eror11);
    title('Iterasi Ke-400');
    elseif i==12
        subplot(2,p,4),surfc(x,y,eror12);
    title('Iterasi Ke-500');
    elseif i==13
        subplot(2,p,5),surfc(x,y,eror13);
    title('Iterasi Ke-600');
    elseif i==14
        subplot(2,p,6),surfc(x,y,eror14);
    title('Iterasi Ke-700');
    elseif i==15
        subplot(2,p,7),surfc(x,y,eror15);
    title('Iterasi Ke-800');
    elseif i==16
        subplot(2,p,8),surfc(x,y,eror16);
    title('Iterasi Ke-900');
    end
end
end

% end
% if p>8
% for i=1:8
%     if i==1
%         subplot(2,4,1),surfc(x,y,eror1);
%     elseif i==2
%         subplot(2,4,2),surfc(x,y,eror2);
%     elseif i==3
%         subplot(2,4,3),surfc(x,y,eror3);
%     elseif i==4
%         subplot(2,4,4),surfc(x,y,eror4);
%     elseif i==5
%         subplot(2,4,5),surfc(x,y,eror5);
%     elseif i==6
%         subplot(2,4,6),surfc(x,y,eror6);
%     elseif i==7
%         subplot(2,4,7),surfc(x,y,eror7);
%     elseif i==8
%         subplot(2,4,8),surfc(x,y,eror8);
%     end
% end
% end
```

Lampiran G. Skrip Program Untuk Memutar Grafik/Rotasi

```
zoom off; rotate3d on;
pan off; brush off;
```

Lampiran H. Skrip Program Untuk Menggeser Grafik

```
pan on; rotate3d off;
zoom off; brush off;
```

Lampiran I. Skrip Program Untuk Memperbesar Grafik

```
zoom on; rotate3d off;
pan off; brush off;
```

Lampiran J. Skrip Program Untuk Memberi Label Pada Gambar

```
hold off;
pilh1=get(u1,'value');pilh2=get(u2,'value');

for i=1:jml-1
    if i==1
    pil11=get(u11,'value');
        if pil11==1
        set(win1,'currentaxes',grafik3);
        if pilh1==1
        surfc(x,y,U1)
        xlabel('x(m)')
        ylabel('y(m)')
        zlabel('Suhu (T ^oC)')
        else
           [C,h1]= contour(x,y,U1); clabel(C,h1);
            xlabel('x(m)')
            ylabel('y(m)')
        end
        title('Aliran Panas Pada Plat Logam 2D')
        set(win1,'currentaxes',grafik2);
        surfc(e1);
        xlabel('x')
        ylabel('y')
        zlabel('error (%)')
        title('Distribusi Error')
set(edit5,'string','0');
        end
    end
    if i==2
    pil12=get(u12,'value');
        if pil12==1
        set(win1,'currentaxes',grafik3);
        if pilh1==1
        surfc(x,y,U2)
        xlabel('x(m)')
        ylabel('y(m)')
        zlabel('Suhu (T ^oC)')
        else
           [C,h1]= contour(x,y,U2); clabel(C,h1);
            xlabel('x(m)')
            ylabel('y(m)')
        end
        title('Aliran Panas Pada Plat Logam 2D')

set(win1,'currentaxes',grafik2);
surfc(e2);
xlabel('x')
ylabel('y')
zlabel('error (%)')
title('Distribusi Error')
set(edit5,'string','10');

        end
    end
    if i==3
```

```
        pil13=get(u13,'value');
        if pil13==1
        set(win1,'currentaxes',grafik3);
        if pilh1==1
        surfc(x,y,U3)
        xlabel('x(m)')
        ylabel('y(m)')
        zlabel('Suhu (T ^oC)')
        else
           [C,h1]= contour(x,y,U3); clabel(C,h1);
            xlabel('x(m)')
            ylabel('y(m)')
        end
        title('Aliran Panas Pada Plat Logam 2D')

set(win1,'currentaxes',grafik2);
surfc(e3);
xlabel('x')
ylabel('y')
zlabel('error (%)')
title('Distribusi Error')
set(edit5,'string','100');

        end
    end
    if i==4
        pil14=get(u14,'value');
        if pil14==1
        set(win1,'currentaxes',grafik3);
        if pilh1==1
        surfc(x,y,U4)
        xlabel('x(m)')
        ylabel('y(m)')
        zlabel('Suhu (T ^oC)')
        else
           [C,h1]= contour(x,y,U4); clabel(C,h1);
            xlabel('x(m)')
            ylabel('y(m)')
        end
        title('Aliran Panas Pada Plat Logam 2D')

set(win1,'currentaxes',grafik2);
surfc(e4);
xlabel('x')
ylabel('y')
zlabel('error (%)')
title('Distribusi Error')
set(edit5,'string','1000');

        end
    end
    if i==jml-1
        pil15=get(u15,'value');
        if pil15==1
        set(win1,'currentaxes',grafik3);
        if pilh1==1
        surfc(x,y,U5)
        xlabel('x(m)')
        ylabel('y(m)')
        zlabel('Suhu (T ^oC)')
        else
           [C,h1]= contour(x,y,U5); clabel(C,h1);
            xlabel('x(m)')
            ylabel('y(m)')
```

```
        end
        title('Aliran Panas Pada Plat Logam 2D')

set(win1,'currentaxes',grafik2);
surfc(e5);
xlabel('x')
ylabel('y')
zlabel('error (%)')
title('Distribusi Error')
set(edit5,'string',jumlah_iter);

        end
    end

end
```

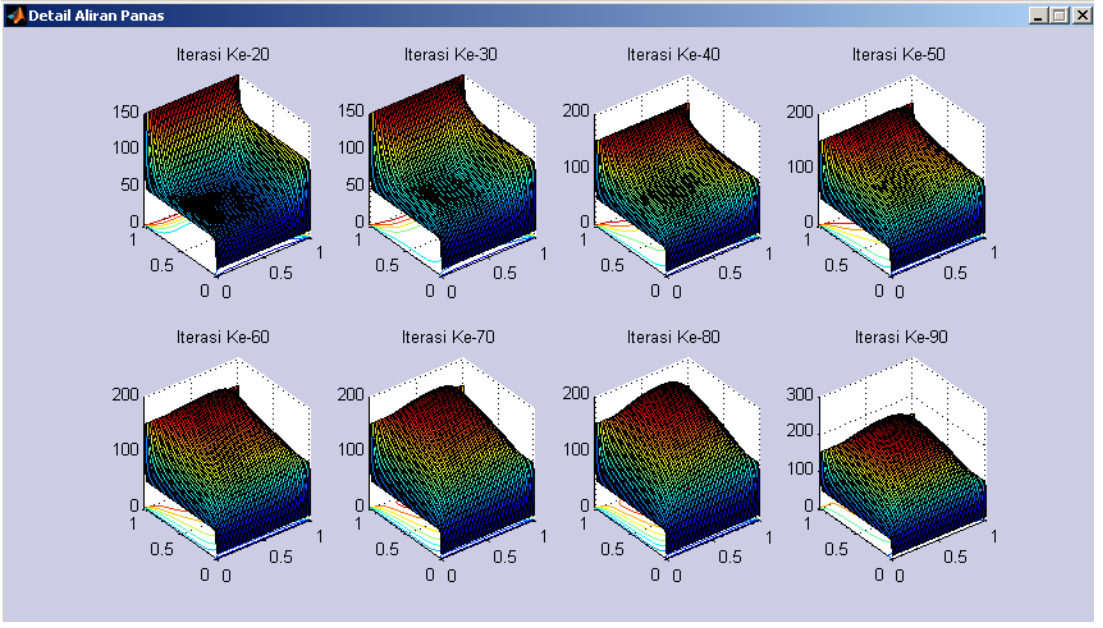
Lampiran K. Skrip Program Untuk Memberi Check Surface

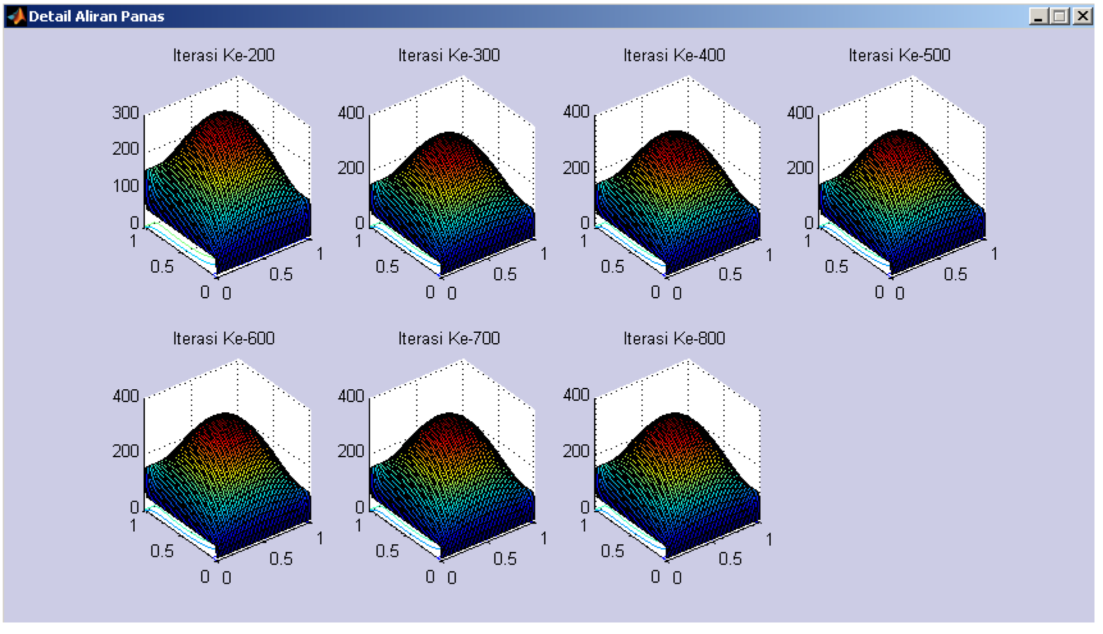
```
if hasil==0
   set(u2,'value',0);
   set(u1,'value',1);

else
   set(u2,'value',0);
   set(u1,'value',1);
    gambar;
end
```

Lampiran L. Skrip Program Untuk Memberi Check Contour

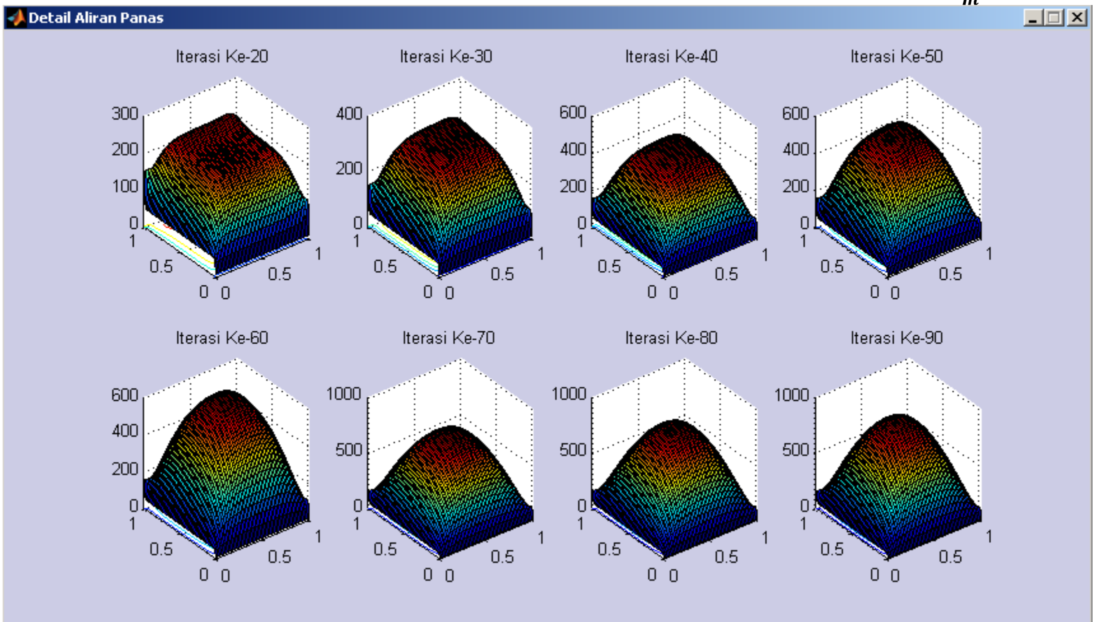
```
if hasil==0
   set(u1,'value',0);
   set(u2,'value',1);

else
   set(u1,'value',0);
   set(u2,'value',1);
    gambar;
end
```

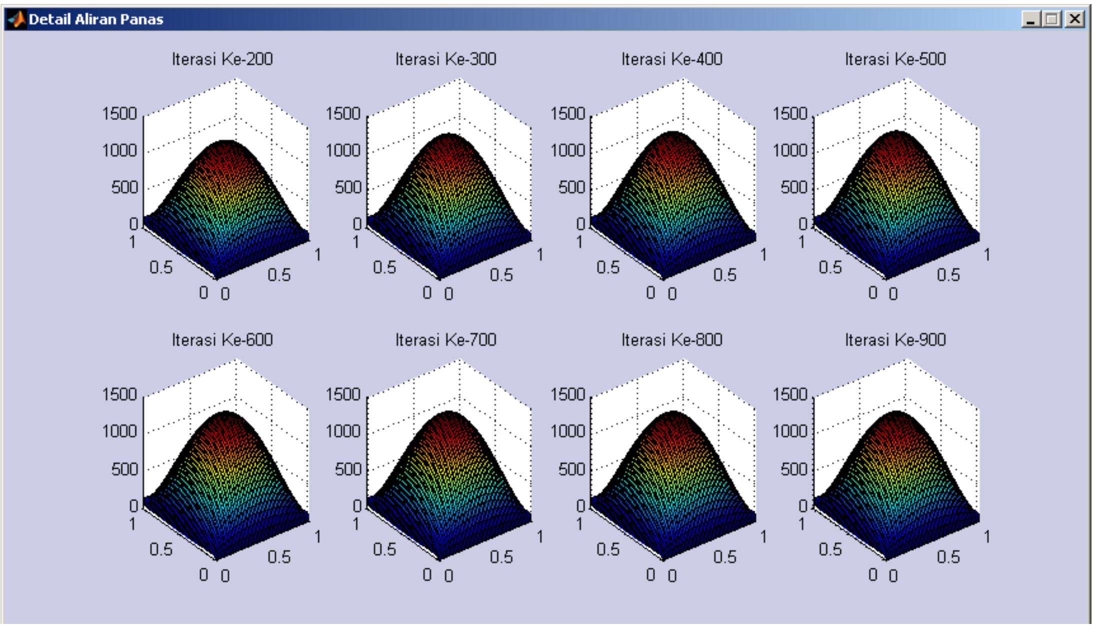
Lampiran M. Gambar Detail Iterasi Pada Plat Logam Besi dalam keadaan *steady* dengan sumber panas didalamnya, nilai *error* 0,01%, dan laju panas $10000\,\frac{W}{m}$



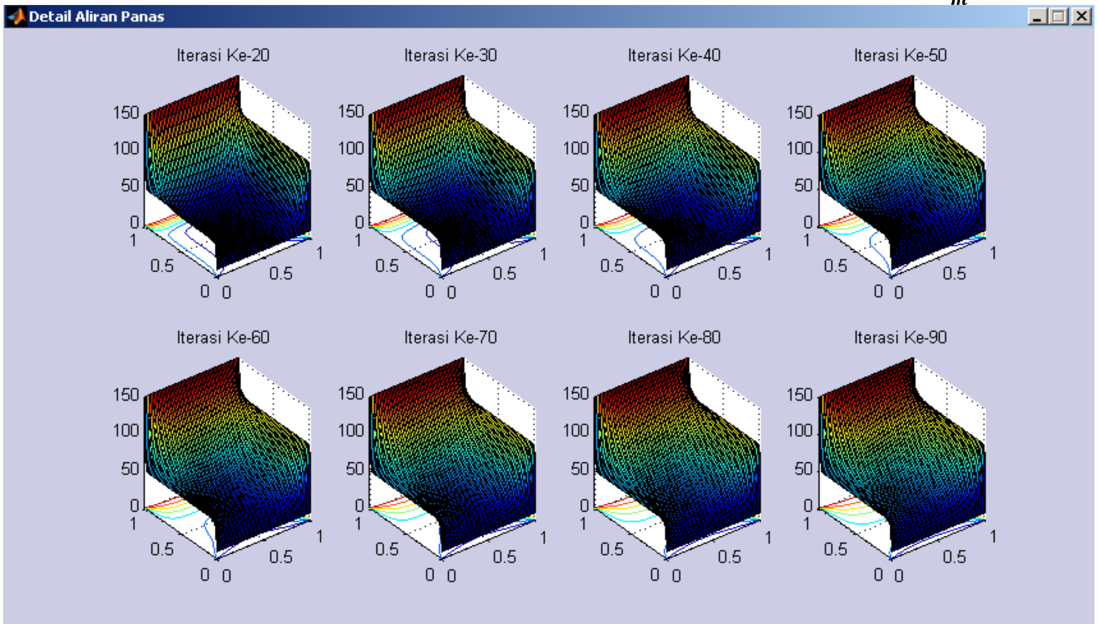


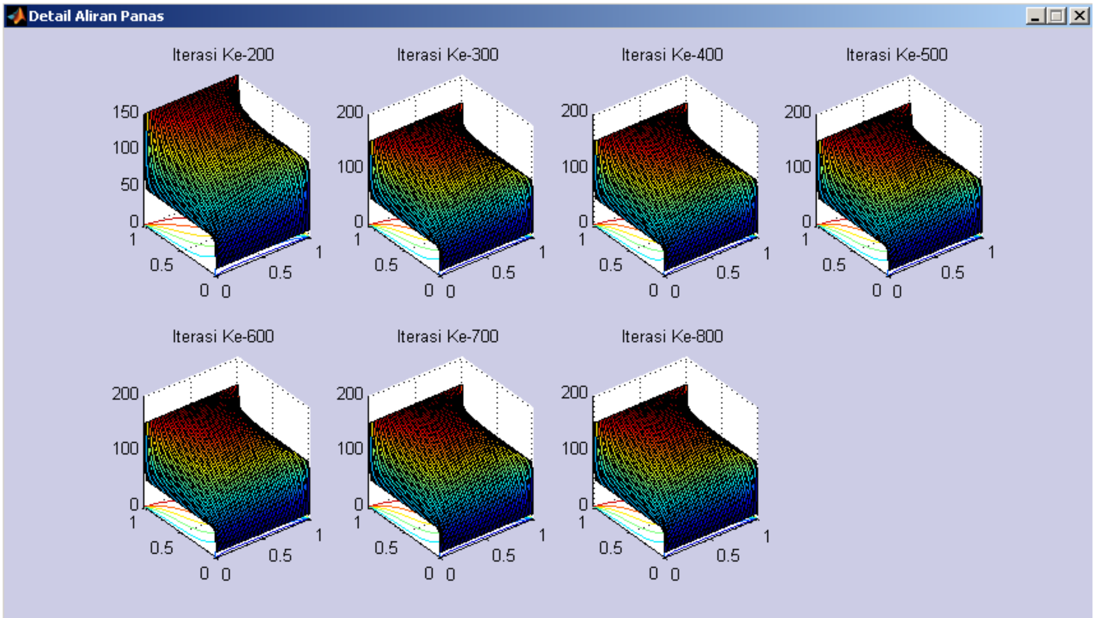
Lampiran N. Gambar Detail Iterasi Pada Plat Logam Besi dalam keadaan *steady* dengan sumber panas didalamnya, nilai *error* 0,001%, dan laju panas $50000\frac{W}{m}$



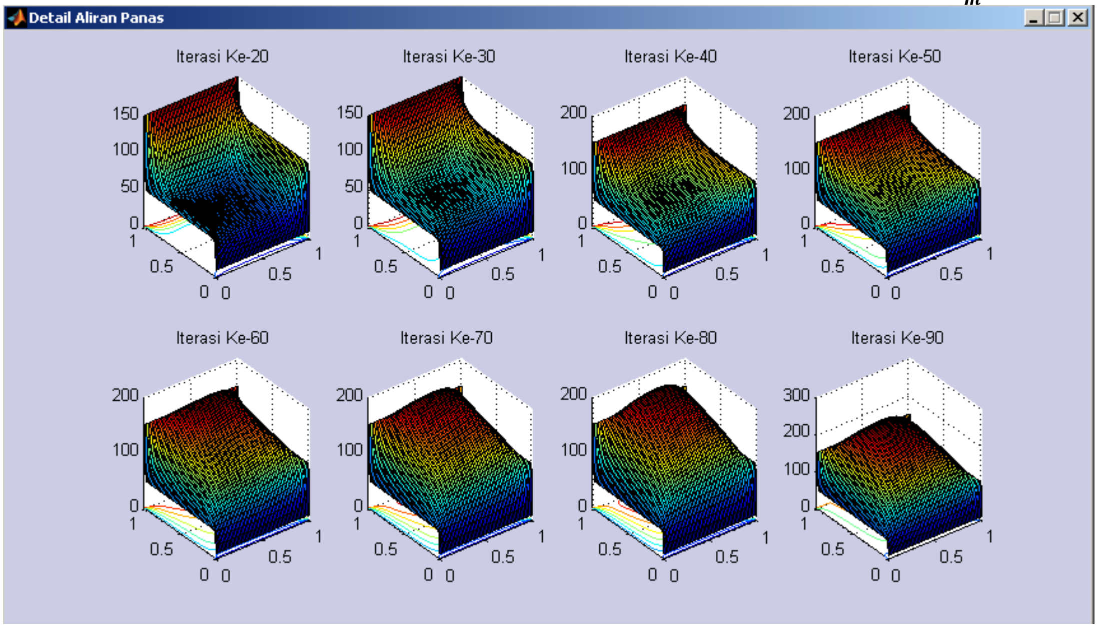


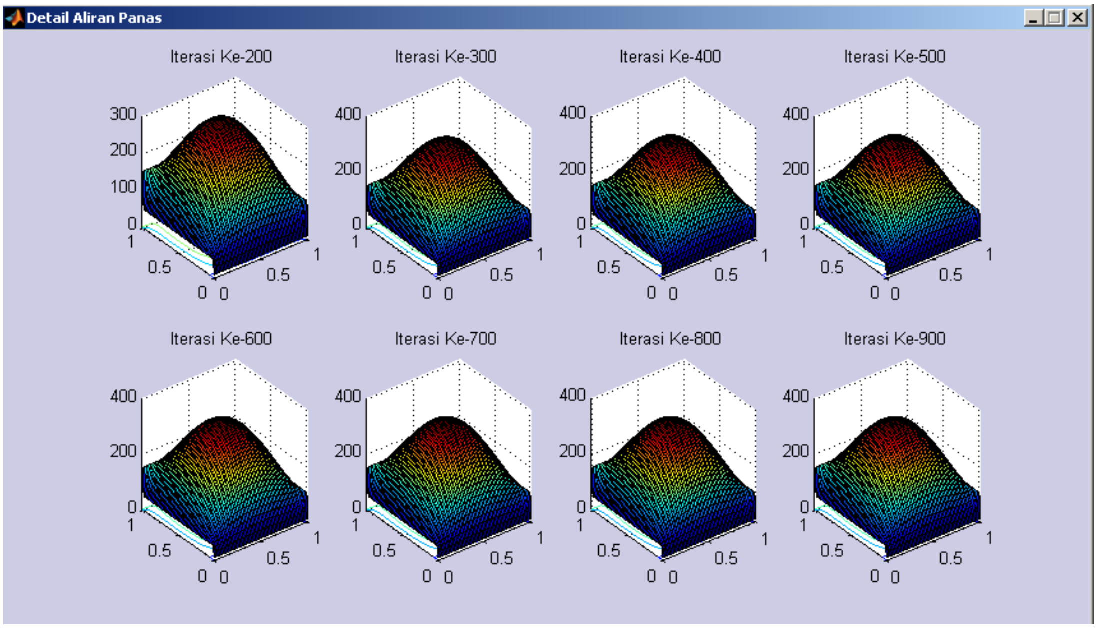
Lampiran O. Gambar Detail Iterasi Pada Plat Logam Tembaga dalam keadaan *steady* dengan sumber panas didalamnya, nilai *error* 0,01%, dan laju panas $10000\frac{W}{m}$



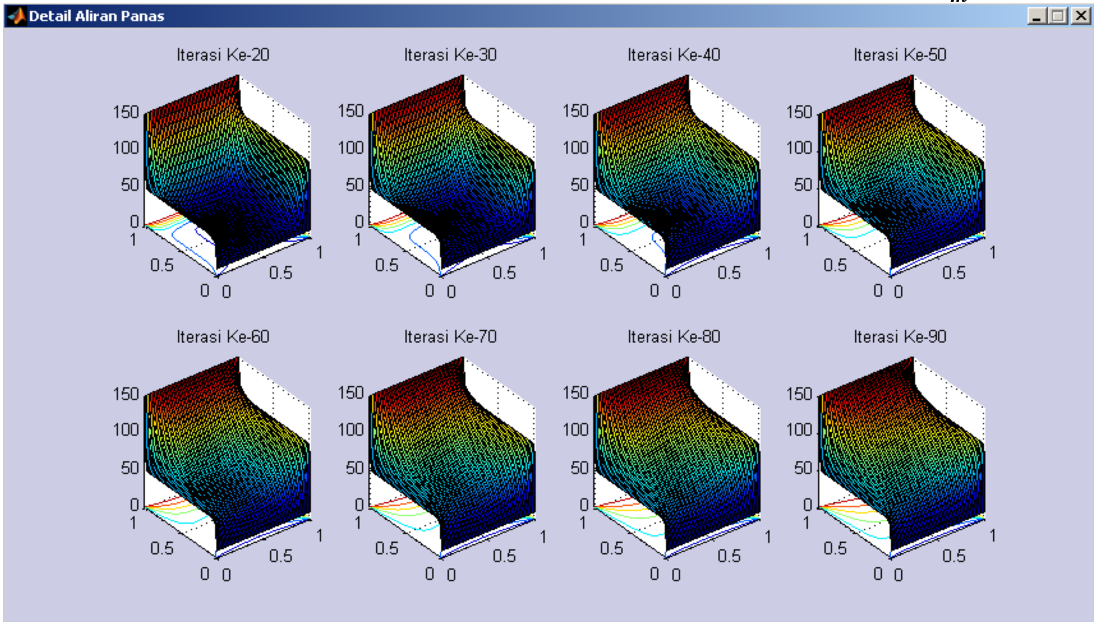


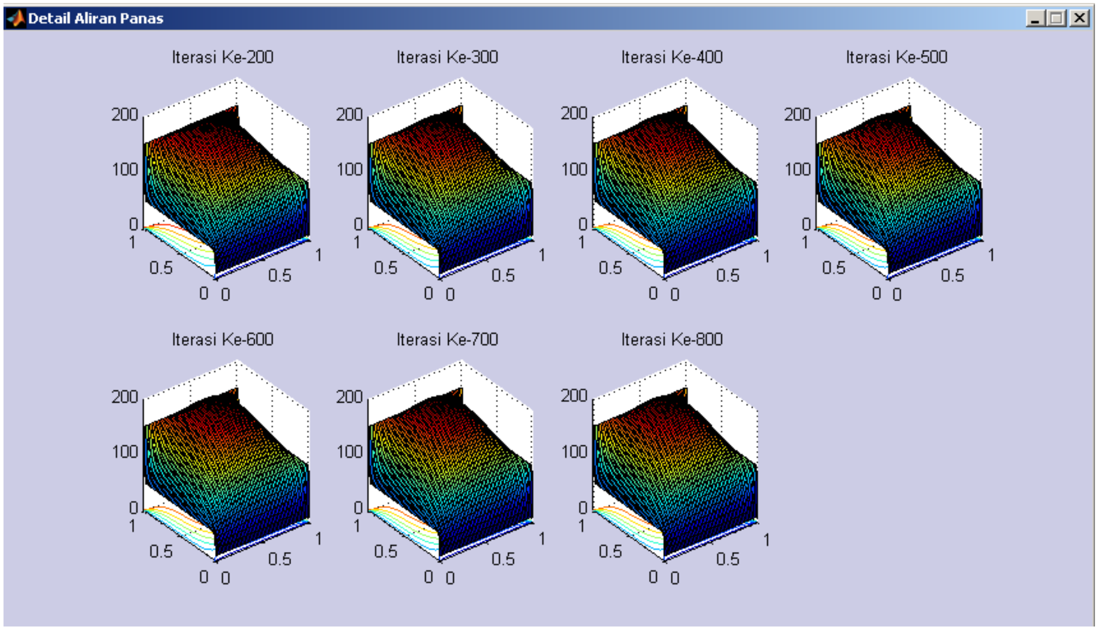
Lampiran P. Gambar Detail Iterasi Pada Plat Logam Tembaga dalam keadaan *steady* dengan sumber panas didalamnya, nilai *error* 0,001%, dan laju panas $50000\frac{W}{m}$



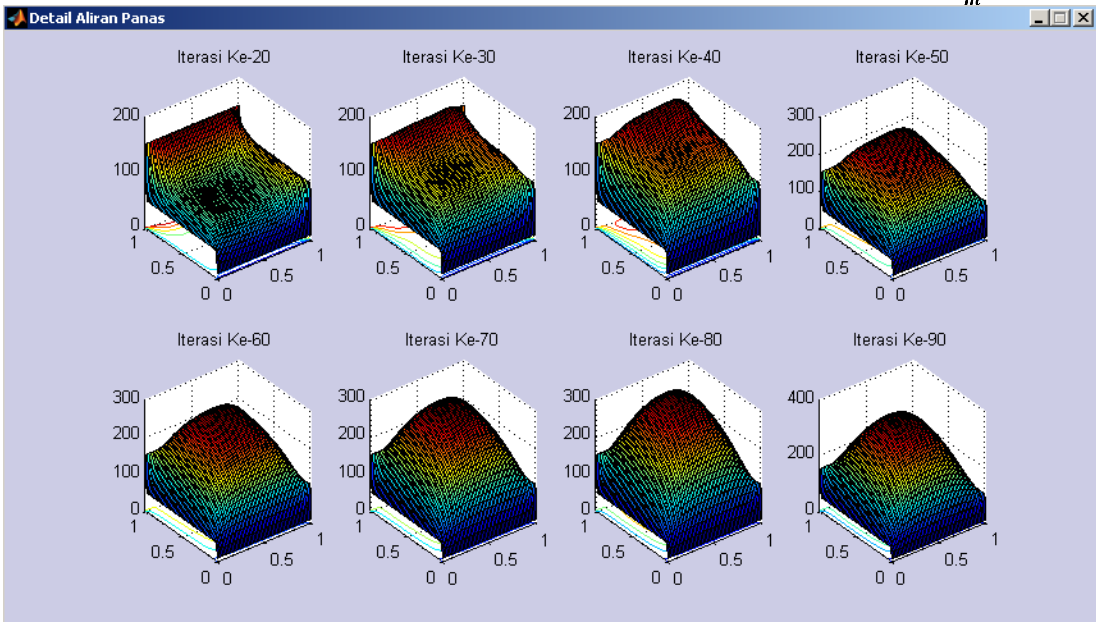


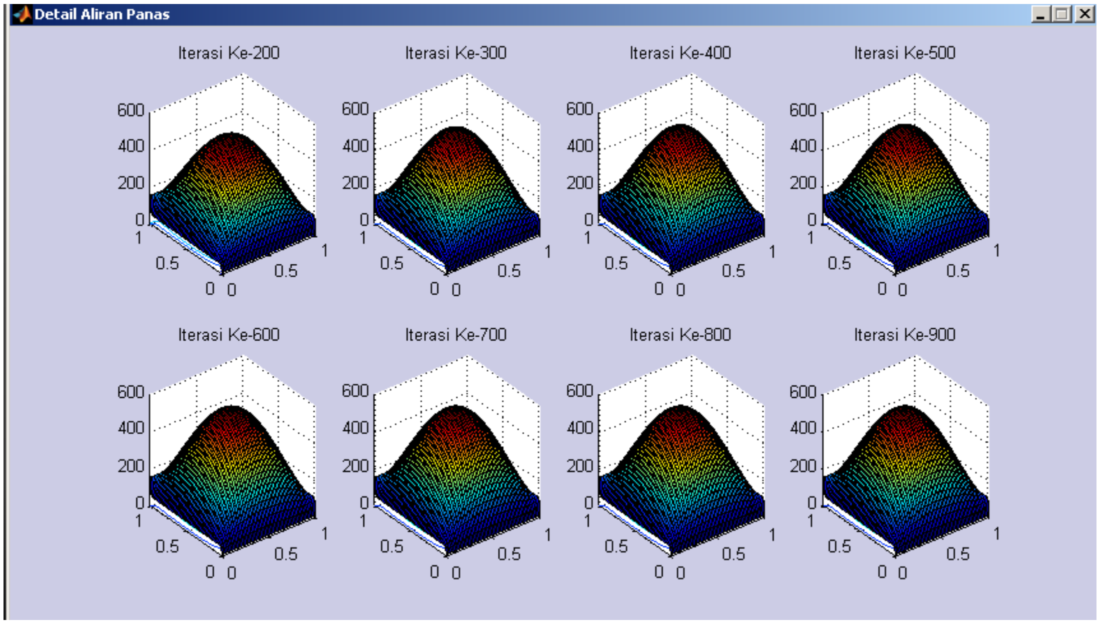
Lampiran Q. Gambar Detail Iterasi Pada Plat Logam Aluminium dalam keadaan *steady* dengan sumber panas didalamnya, nilai *error* 0,01%, dan laju panas $10000\frac{W}{m}$



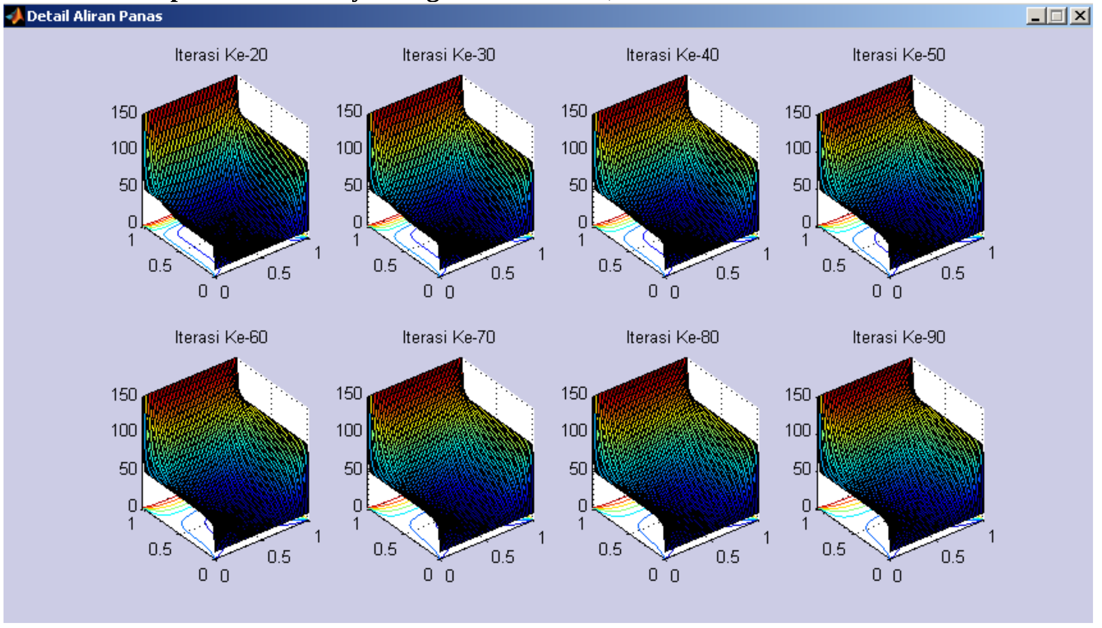


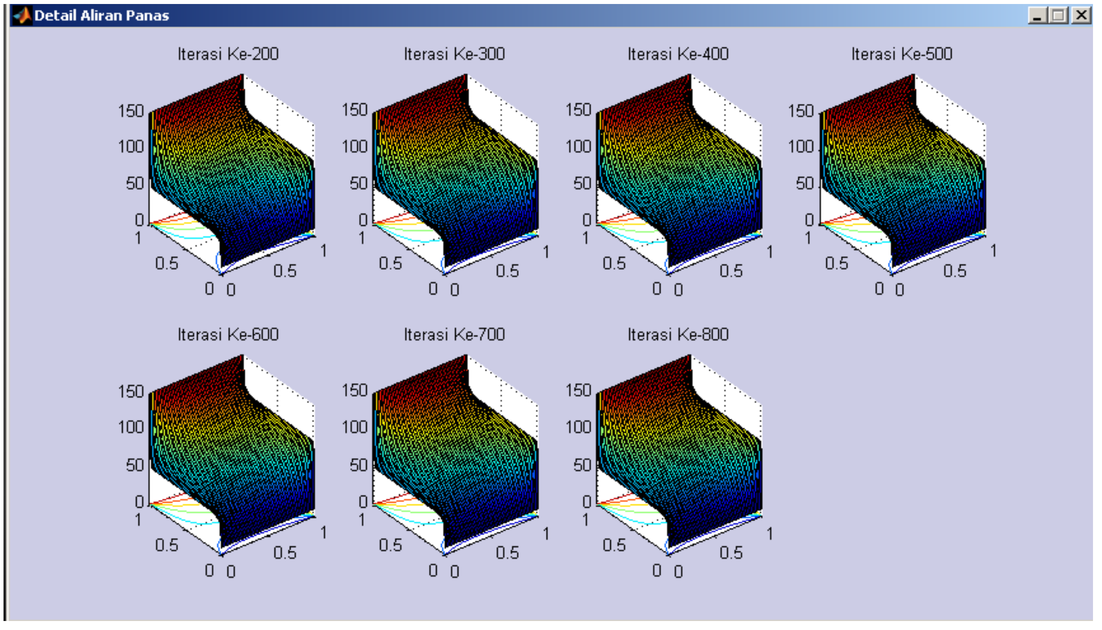
Lampiran R. Gambar Detail Iterasi Pada Plat Logam Aluminium dalam keadaan *steady* dengan sumber panas didalamnya, nilai *error* 0,001%, dan laju panas $50000\frac{W}{m}$



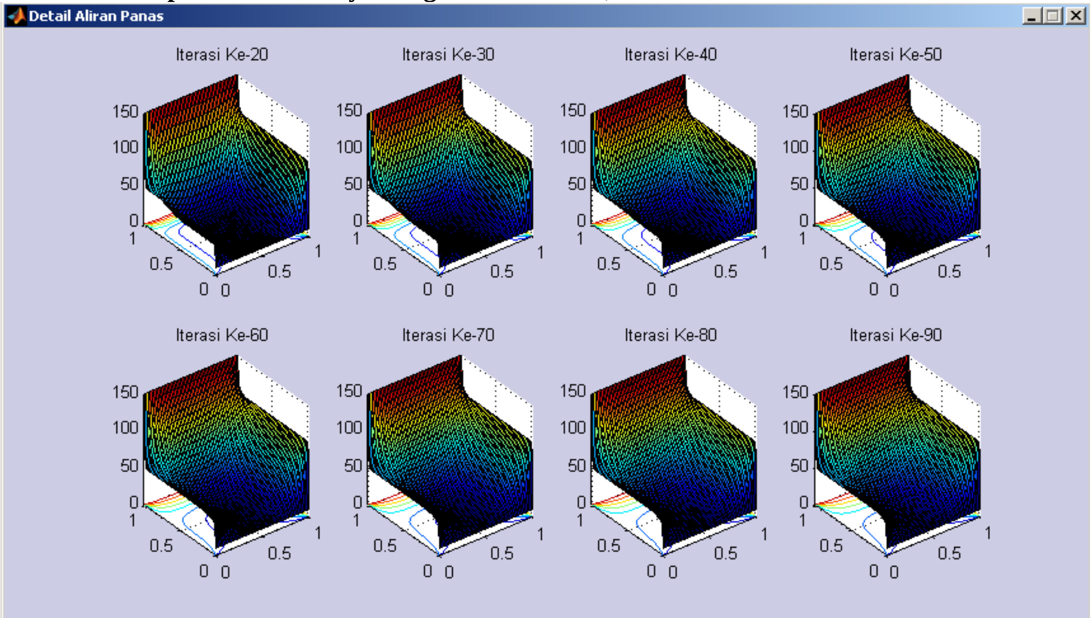


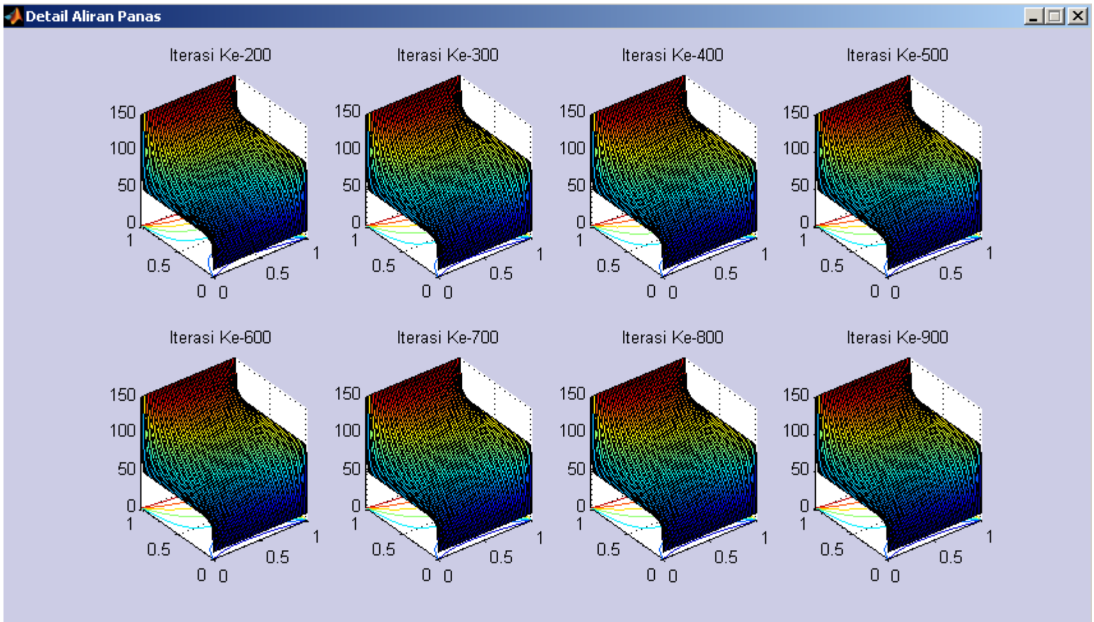
Lampiran S. Gambar Detail Iterasi Pada Plat Logam dalam keadaan *steady* tanpa sumber panas didalamnya dengan nilai *error* 0,01%





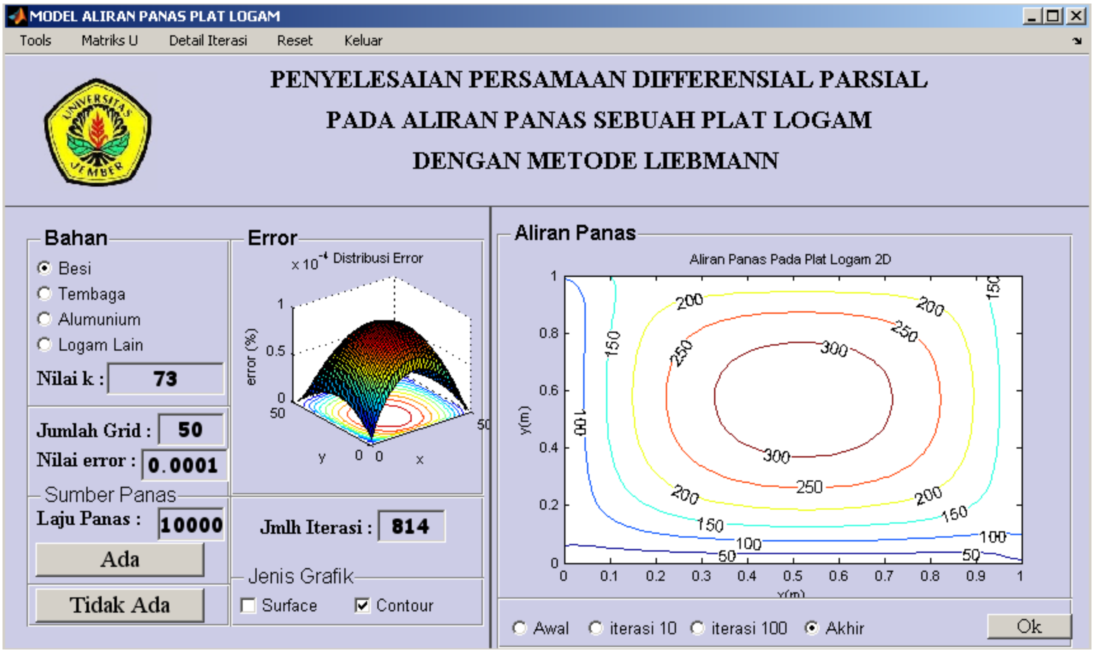
Lampiran T. Gambar Detail Iterasi Pada Plat Logam dalam keadaan *steady* tanpa sumber panas didalamnya dengan nilai *error* 0,001%



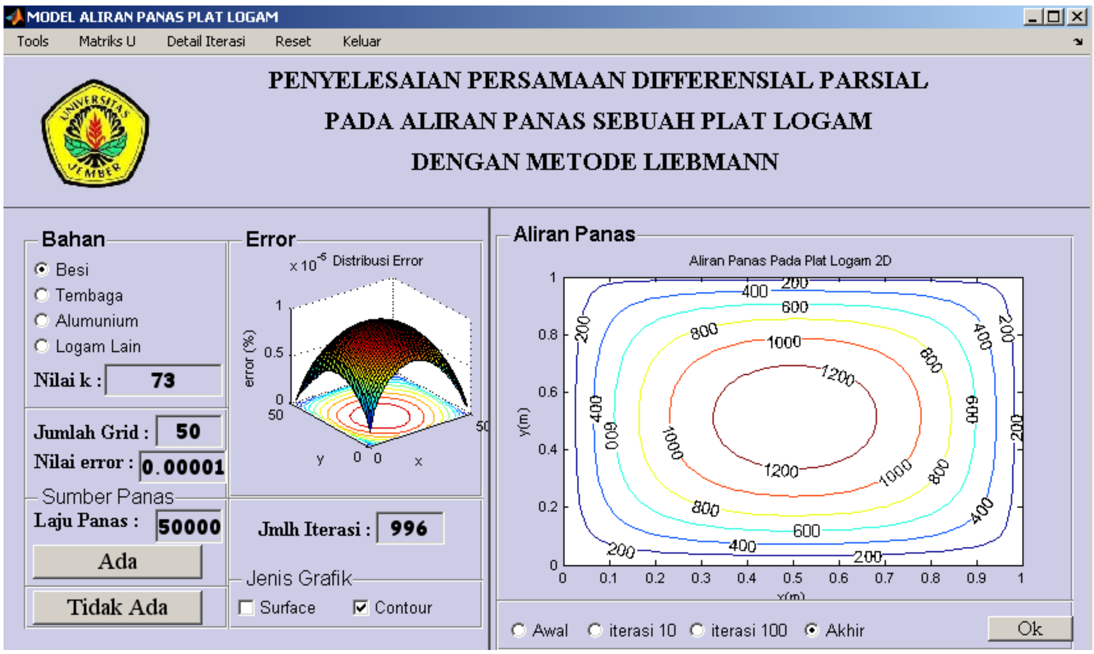


Lampiran U. Grafik Contour

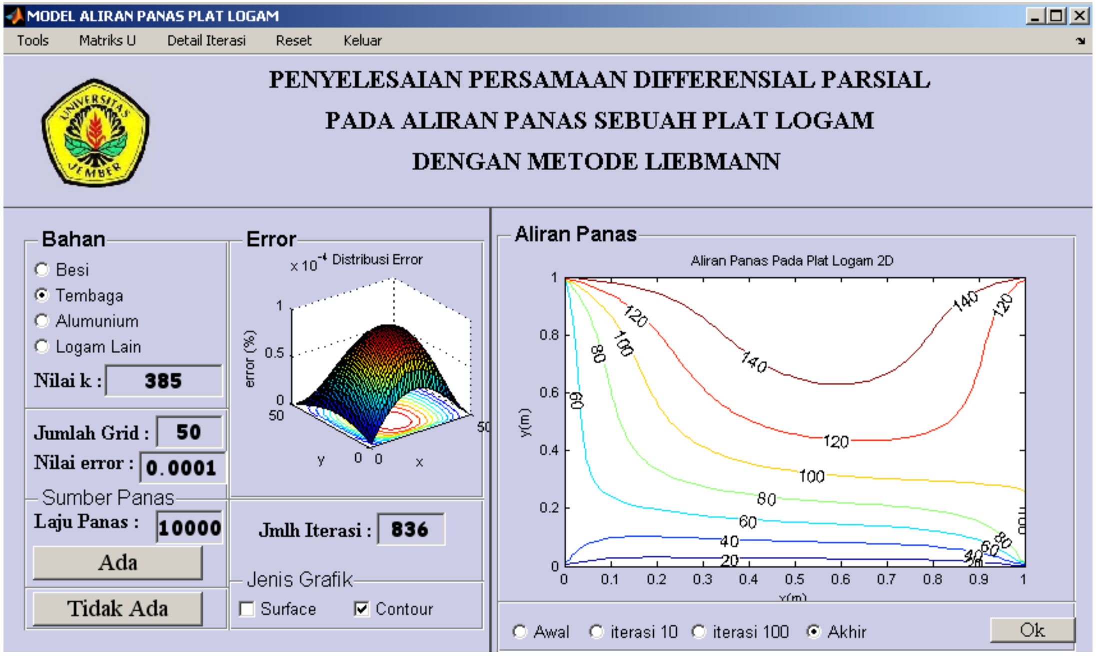
a. **Grafik Aliran Panas Pada Besi dengan Sumber Panas $10000\frac{W}{m}$ dan Nilai *error* 0,01%**



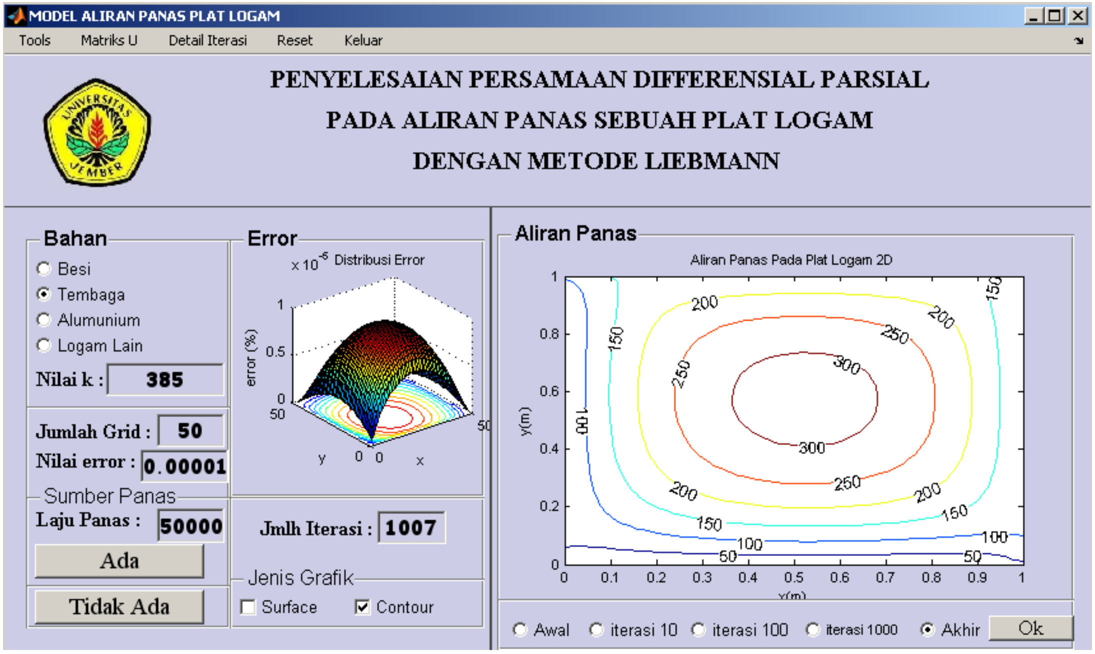
b. **Grafik Aliran Panas Pada Besi dengan Sumber Panas $50000\frac{W}{m}$ dan Nilai *error* 0,001%**



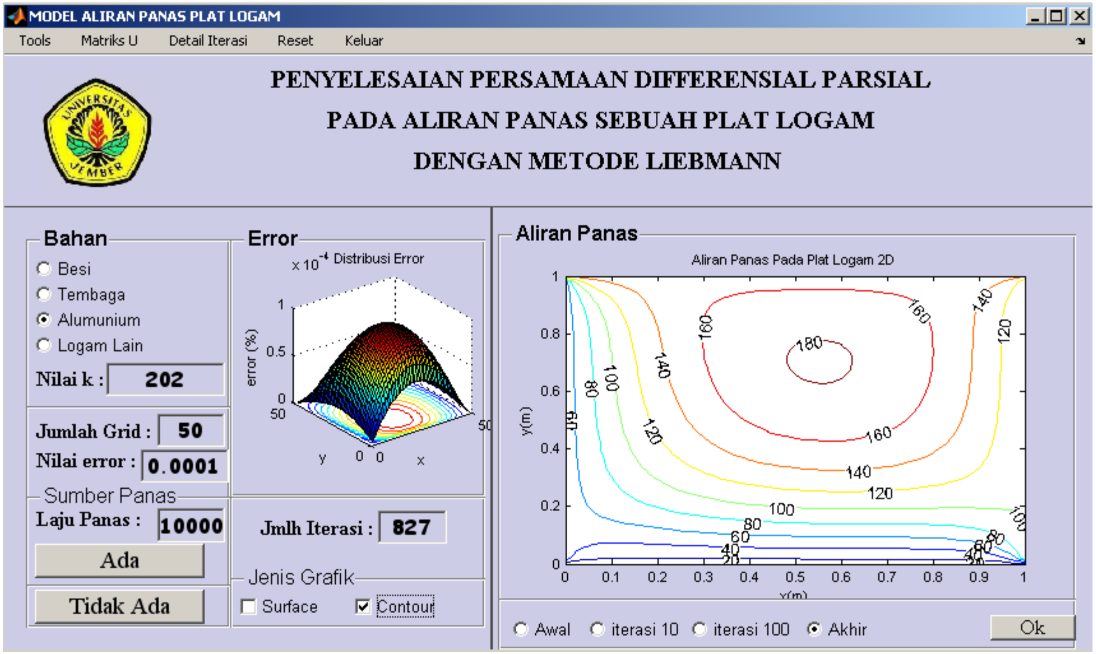
c. Grafik Aliran Panas Pada Tembaga dengan Sumber Panas 10000 $\frac{W}{m}$ dan Nilai *error* 0,01%



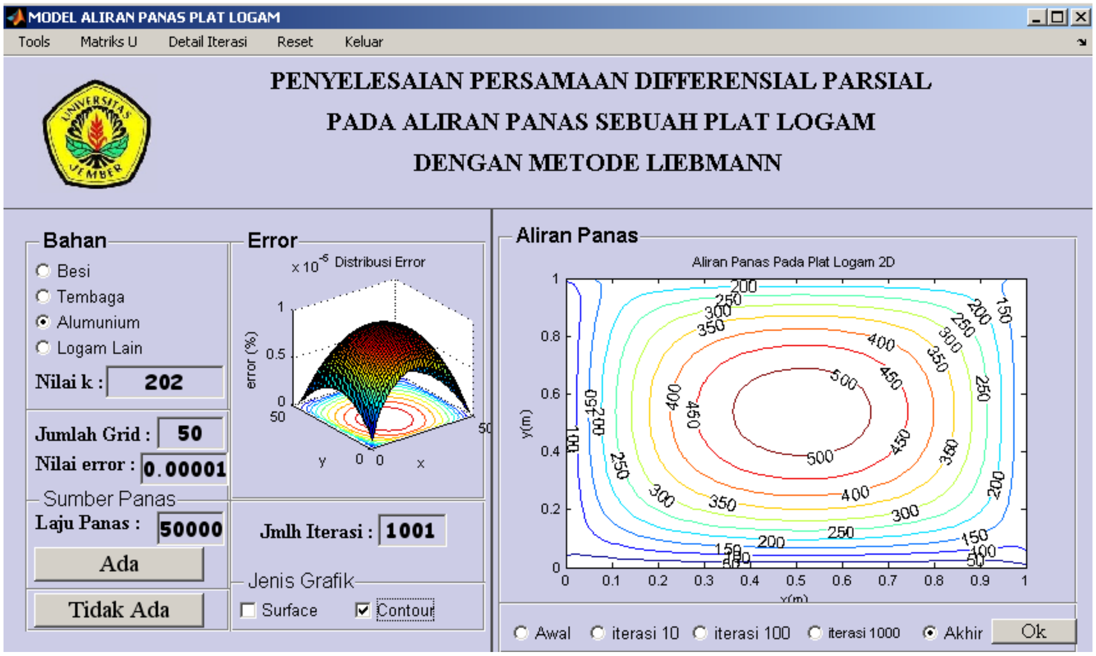
d. Grafik Aliran Panas Pada Tembaga dengan Sumber Panas 50000 $\frac{W}{m}$ dan Nilai *error* 0,001%



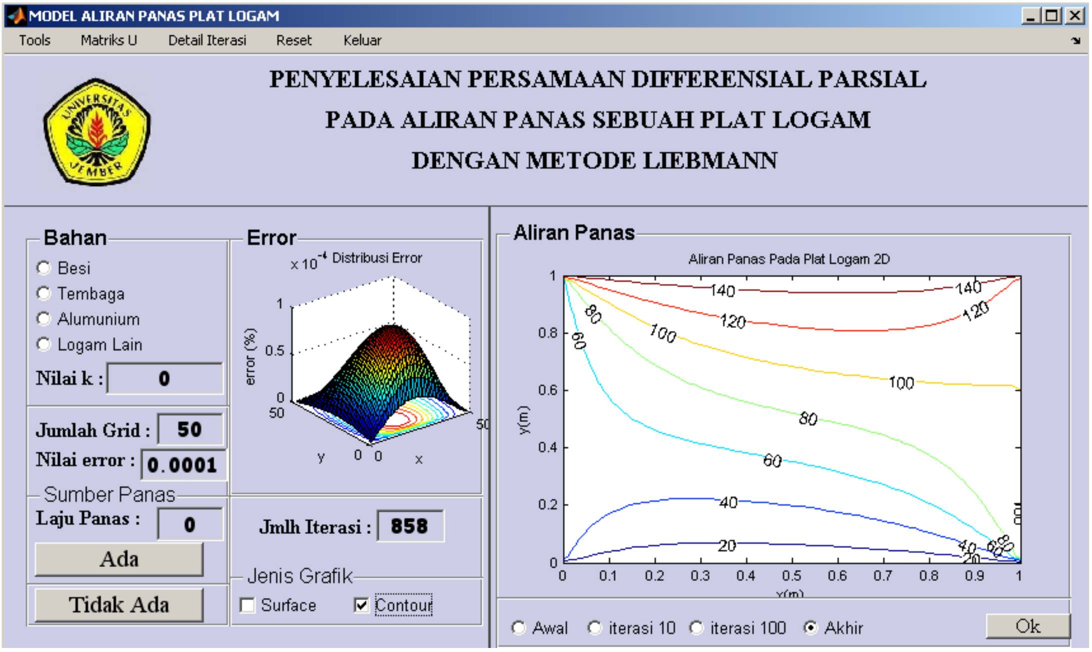
e. Grafik Aliran Panas Pada Aluminium dengan Sumber Panas 10000 $\frac{W}{m}$ dan Nilai *error* 0,01%



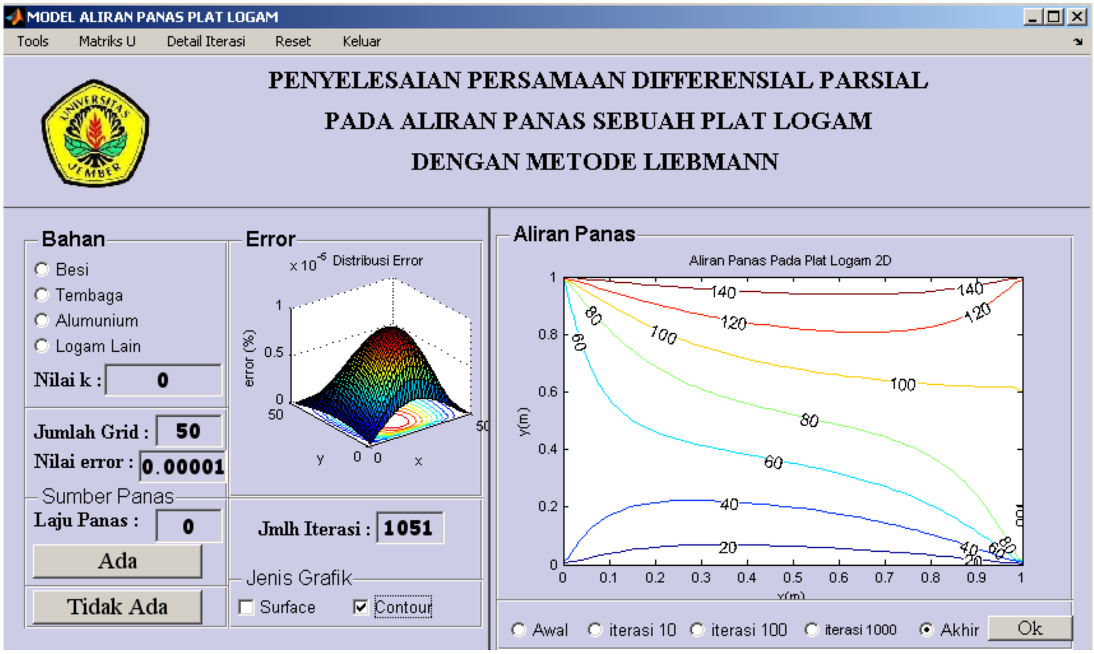
f. Grafik Aliran Panas Pada Aluminium dengan Sumber Panas 50000 $\frac{W}{m}$ dan Nilai *error* 0,001%



g. Grafik Tanpa Sumber Panas dengan Nilai *error* 0,01%

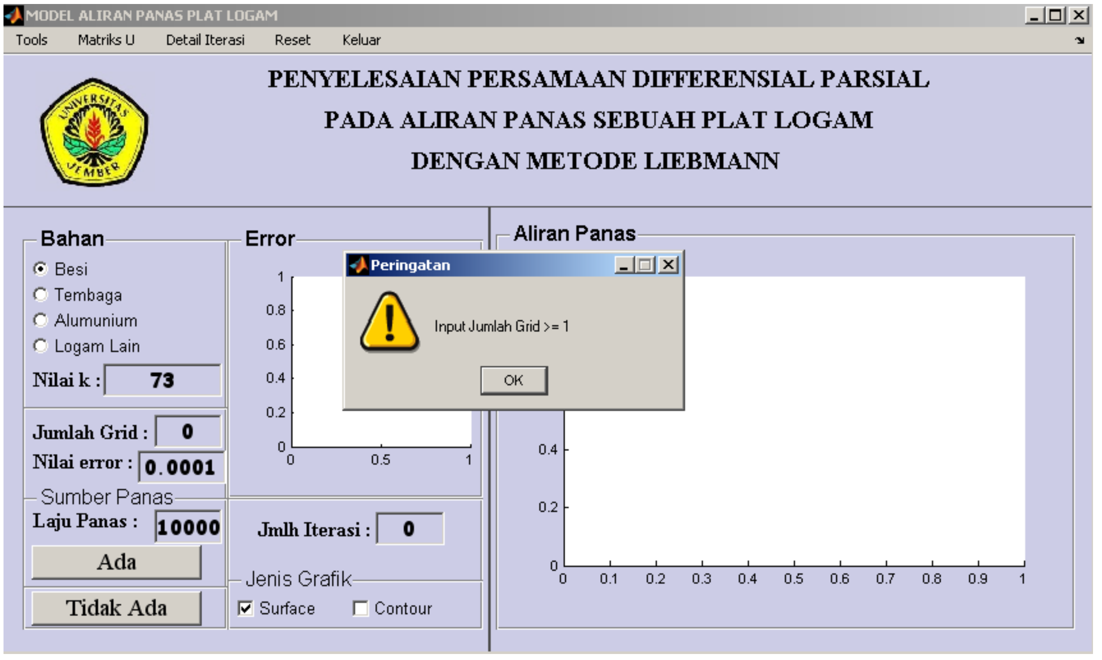


h. Grafik Tanpa Sumber Panas dengan Nilai *error* 0,001%

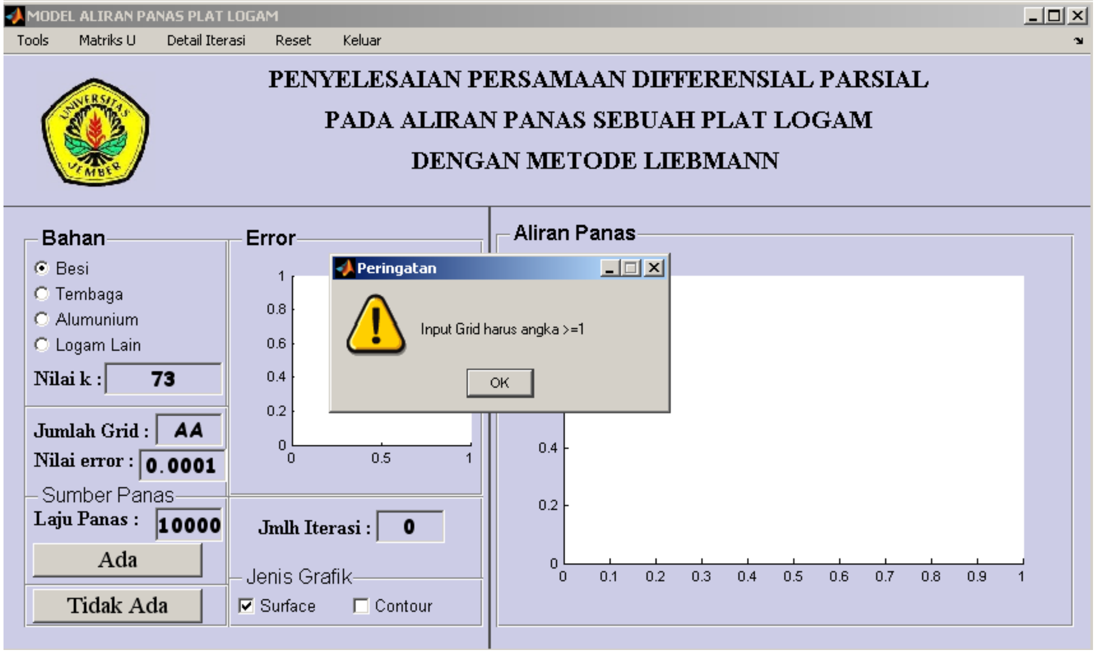


Lampiran V. Pesan Kesalahan Pada Program

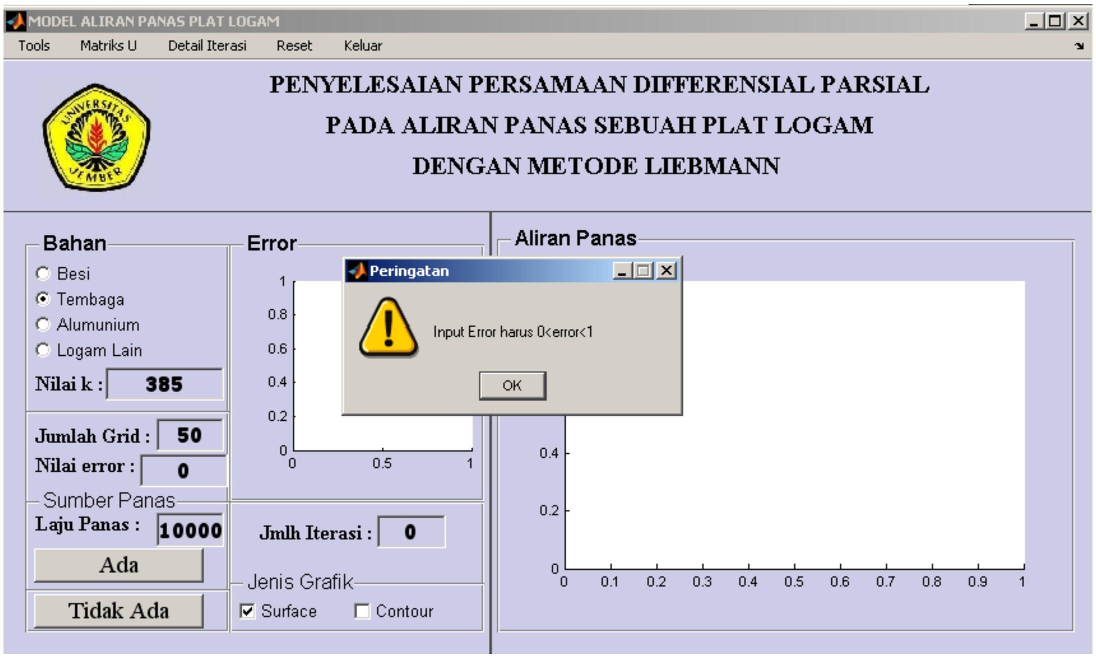
a. Pesan Kesalahan Jika Input Jumlah Grid = 0



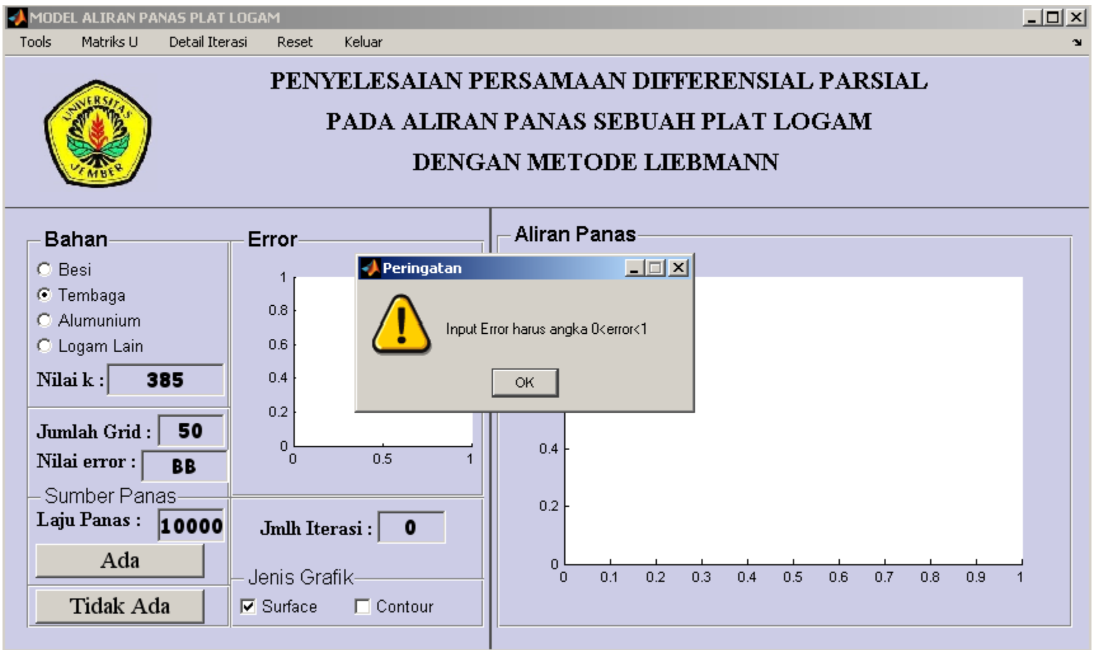
b. Pesan Kesalahan Jika Input Jumlah Grid Salah Memasukkan Huruf



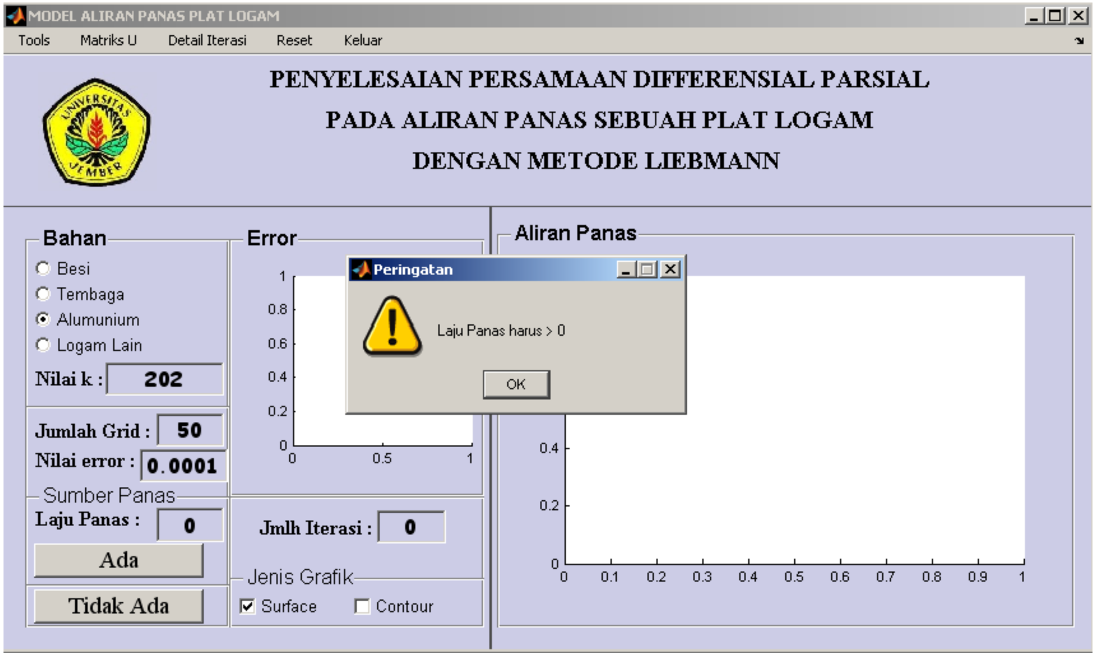
c. Pesan Kesalahan Jika Input Nilai *Error* = 0



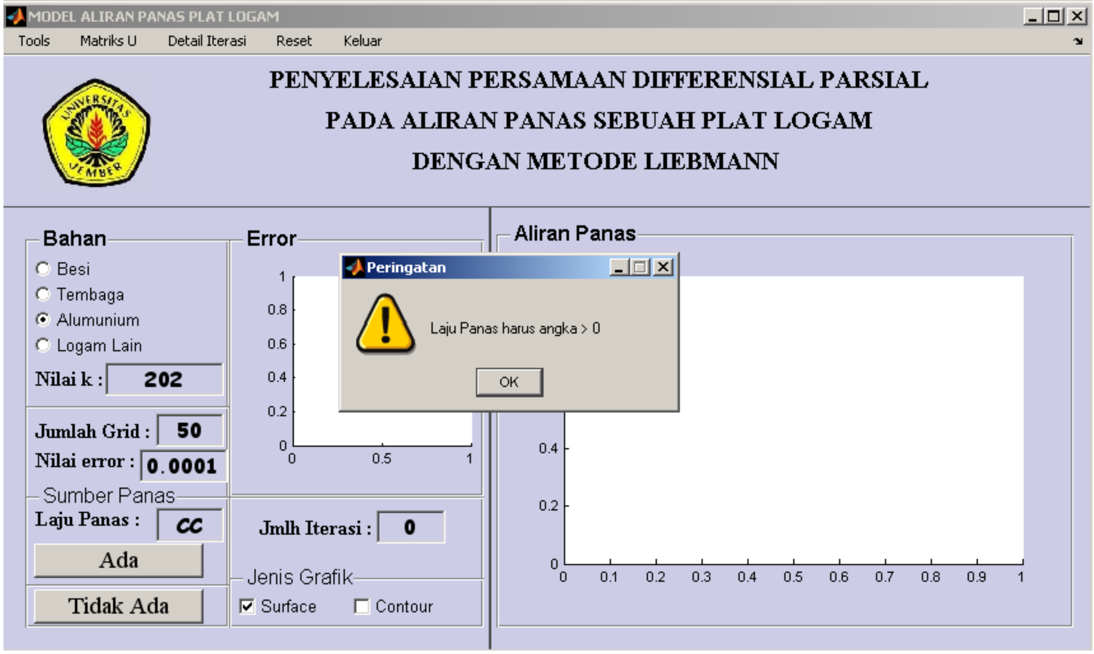
d. Pesan Kesalahan Jika Input Nilai *Error* Salah Memasukkan Huruf



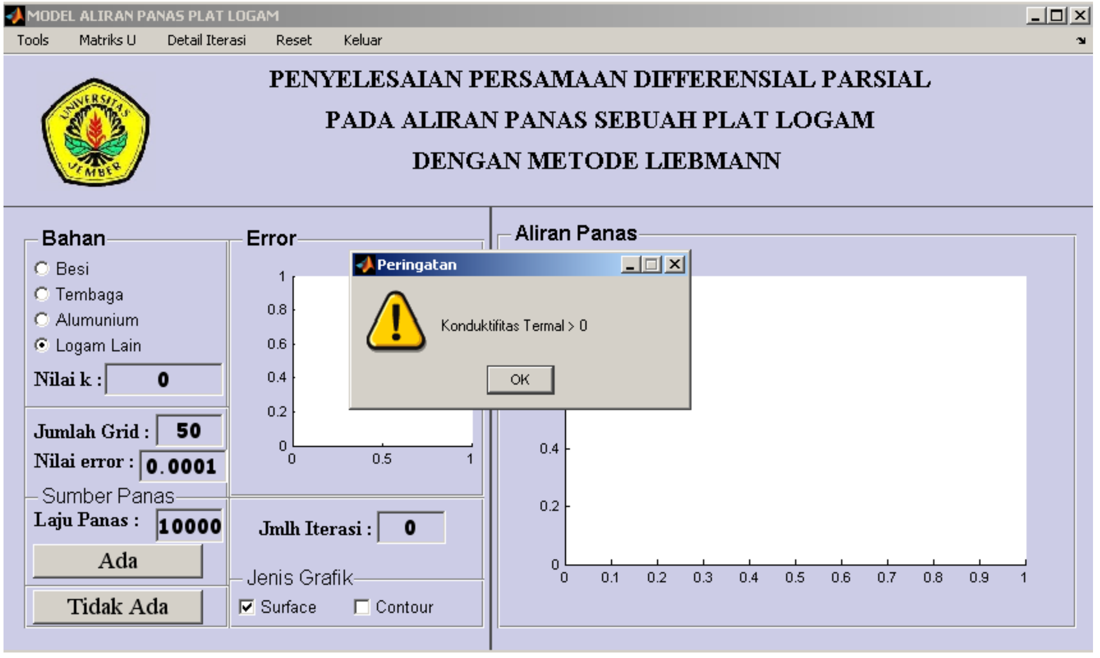
e. Pesan Kesalahan Jika Input Laju Panas = 0



f. Pesan Kesalahan Jika Input Laju Panas Salah Memasukkan Huruf



g. Pesan Kesalahan Jika Input Nilai Konduktifitas Termal = 0



h. Pesan Kesalahan Jika Input Konduktifitas Termal Salah Memasukkan Huruf