



**ANALISIS SUPER  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$  ANTIMAGIC TOTAL DEKOMPOSISI  
PADA GRAF OPERASI *TENSOR PRODUCT*  $C_r \otimes P_n$**

**TESIS**

Oleh

**Agrita Kanty Purnapraja, S.Pd**

**NIM 131820101012**

**PROGRAM PASCA SARJANA MAGISTER MATEMATIKA  
JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS JEMBER**

**2015**



**ANALISIS SUPER  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$  ANTIMAGIC TOTAL DEKOMPOSISI  
PADA GRAF OPERASI *TENSOR PRODUCT*  $C_r \otimes P_n$**

**TESIS**

diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan Program Studi Matematika (S2) dan mencapai gelar Magister Sains

Oleh

**Agrita Kanty Purnapraja, S.Pd**  
**NIM 131820101012**

**PROGRAM PASCA SARJANA MAGISTER MATEMATIKA  
JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS JEMBER  
2015**

## PERSEMBAHAN

*Segala puji bagi Allah, Tuhan yang Maha Pengasih lagi Maha Penyayang, serta sholawat dan salam semoga terlimpah kepada makhluk ciptaan-Mu yang paling mulia, Nabi Muhammad S.A.W. Kupersembahkan secuil kebahagiaan penggalan syair dalam setiap detik perjalanan hidupku teriring rasa terima kasih kepada:*

- 1. Orang tuaku tercinta dan terkasih : Ayahanda Dr. Ir. Bambang Marhaenanto M.Eng dan Ibunda tercinta Suyami, dan adikku Bayu Pramudita yang senantiasa mengalirkan rasa kasih sayang, cinta, dan do'a yang tiada henti;*
- 2. Suamiku tercinta Teflano Aditya Sukarno A.Md, ayah dan ibu mertuaku Bapak Dr. H. Sukarno, M. Litt dan Ibu Dra. Hj. Idawati, serta adik iparku Clara Rasida N yang senantiasa mendukungku dalam mengerjakan tesis ini;*
- 3. Bapak Prof. Drs. Dafik, M.Sc, Ph.D dan Bapak Drs. Rusli Hidayat, M.Sc selaku dosen pembimbing tesis yang dengan sabar telah memberikan ilmu dan bimbingan selama menyelesaikan tesis ini;*
- 4. Para guru dan dosen, yang telah memberikan ilmu dan membimbing dengan penuh kesabaran;*
- 5. Teman-teman seperjuangan Magister Matematika angkatan 2013, Mbak Tanti, Mas Randhi, Mas Ilham, Hermanto, Mbak Indah, Mbak Frida, Mas Andi, Mbak Sri, Pak Imam, Pak Iman, dan Pak Nanang, terima kasih atas dorongan semangat dan bantuannya selama masa proses penyelesaian tesisku;*
- 6. Teman-teman CGANT, Fia, Diana, Lisa, Mbak Devi, dan anggota lainnya yang telah membagi ilmu dan pengalaman berharga;*
- 7. Almamater Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.*

**MOTO**

*"Pendidikan merupakan perlengkapan paling baik untuk hari tua."*

*(Aristoteles)*

*"Muliakanlah anak-anakmu dan baguskanlah pendidikan mereka."*

*(H.R.At-thabrani dan khatib)*



**PERNYATAAN**

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Agrita Kanty Purnapraja, S.Pd

NIM : 131820101012

menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang berjudul: "ANALISIS SUPER  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$  ANTIMAGIC TOTAL DEKOMPOSISI PADA GRAF OPERASI TENSOR PRODUCT  $C_r \otimes P_n$ " adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali jika dalam pengutipan substansi disebutkan sumbernya, dan belum diajukan pada instansi manapun, serta bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa adanya tekanan dan paksaan dari pihak manapun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, Juni 2015

Yang menyatakan,

Agrita Kanty Purnapraja, S.Pd

NIM. 131820101012

TESIS

ANALISIS SUPER  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$  ANTIMAGIC TOTAL DEKOMPOSISI  
PADA GRAF OPERASI *TENSOR PRODUCT*  $C_r \otimes P_n$

Oleh

Agrita Kanty Purnapraja, S.Pd  
NIM 131820101012

Dosen Pembimbing 1 : Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D.

Dosen Pembimbing 2 : Drs. Rusli Hidayat, M.Sc

**PENGESAHAN**

Tesis berjudul "ANALISIS SUPER  $(a, d) - \mathcal{H}$  ANTIMAGIC TOTAL DEKOMPOSISI PADA GRAF OPERASI *TENSOR PRODUCT*  $C_r \otimes P_n$ " telah diuji dan disahkan oleh Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam pada:

hari : Jumat

tanggal : 26 Juni 2015

tempat : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember

Tim Penguji

Ketua,

Sekretaris,

Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D  
NIP. 19680802 199303 1 004

Drs. Rusli Hidayat, M.Sc  
NIP. 19661012 199303 1 001

Anggota I,

Anggota II,

Prof. Drs. Slamini, M.Comp.Sc., Ph.D  
NIP. 19670420 199201 1 001

Kosala Dwija Purnomo, S.Si, M.Si  
NIP. 19690828 199802 1 001

Mengesahkan

Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Universitas Jember,

Prof. Drs. Kusno, DEA., Ph.D  
NIP. 19610108 198602 1 001

RINGKASAN

**Analisis Super  $(a, d) - \mathcal{H}$  Antimagic Total Dekomposisi pada Graf *Tensor Product*  $C_r \otimes P_n$** ; Agrita Kanty Purnapraja, S.Pd, 131820101012; 2015: 87 halaman; Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Jember.

Seiring berjalannya waktu, pelabelan ajaib pada graf berkembang menjadi pelabelan selimut  $\mathcal{H}$ -anti ajaib yang diperkenalkan oleh Inayah (2013). Penelitian tentang pelabelan selimut terhadap suatu graf khusus mulai berkembang ke pelabelan selimut pada hasil operasi graf. Berdasarkan konsep dekomposisi- $\mathcal{H}$  dan operasi pada graf, pada tesis ini akan menganalisis suatu pelabelan dekomposisi  $(a, d) - \mathcal{H}$ -anti ajaib pada graf operasi *tensor product*.

Graf operasi *tensor product* yang akan diteliti yaitu graf  $C_3 \otimes P_n$  untuk  $n \geq 4$  dan  $n$  genap. Gabungan saling lepas graf  $C_3 \otimes P_n$  dinotasikan dengan  $mC_3 \otimes P_n$  dengan  $n \geq 4$ ,  $n$  genap, dan  $m \geq 2$ . Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengetahui batas atas graf  $C_3 \otimes P_n$  tunggal dan gabungannya, mengetahui apakah graf  $C_3 \otimes P_n$  memiliki pelabelan super  $(a, d) - \mathcal{H}$  antimagic total dekomposisi, dan menganalisis pelabelan super  $(a, d) - \mathcal{H}$  antimagic total dekomposisi pada generalisasi graf operasi *tensor product* tunggal dan gabungannya.

Metode penelitian yang digunakan adalah metode deduktif aksiomatik, yaitu dengan menurunkan beberapa aksioma dan teorema yang sudah ada. Sehingga diperoleh teorema-teorema baru sebagai berikut:

- a. Graf  $C_3 \otimes P_n$  tunggal memiliki pelabelan super  $(a, d) - \mathcal{H}$  antimagic total dekomposisi untuk  $d \leq 54$  dan gabungannya  $mC_3 \otimes P_n$  memiliki  $d \leq 72$ .
- b. Ada pelabelan total dekomposisi pada graf  $C_3 \otimes P_n$  untuk  $d = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 36, 38, 40, 42, 44, 46, 54\}$  diantaranya  $(41n - 4, 8), (39n, 12), (33n + 12, 24), (54n - 30, 30), (18n + 42, 54) - C_6$  antimagic total dekomposisi dimana  $n \geq 4$ . Ada pelabelan total dekomposisi pada graf  $mC_3 \otimes P_n$  untuk  $d = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 38, 48\}$  diantaranya yaitu  $(39mn - 12m + 12k, 12), (41mn - 14m + 10, 8) - C_6$  antimagic total dekomposisi dimana  $n \geq 4$  dan  $m \geq 2$ .



- c. Graf *tensor product*  $C_r \otimes P_n$  konektif memiliki batas atas  $d \leq 6r^2$  dan ada pelabelan super  $(10rn+9n-4r+12+(r-3)(2rn+15n-4)+(r-3)(r-4)(3n-2), 4r), (6rn+7r+21+(r-3)(2rn+r+19)+(r-3)(r-4)(3), 6r^2), (6rn+6n+4r+18+(r-3)(2rn+6n+14)+(r-3)(r-4)(n+2), 4r^2+2r)-C_{2r}$  antimagic total dekomposisi pada graf  $C_r \otimes P_n$  untuk  $n \geq 4$  dan  $r \geq 3$ . Graf  $mC_r \otimes P_n$  memiliki batas atas  $d \leq 8r^2$  dan ada pelabelan super  $(10mrn-4mr+9mn+12+(r-3)(2mnr+15mn-8m+8)+(r-3)(r-4)(3mn-2m), 4r), (6mrn+3mr+4r+21+(r-3)(2mnr+mr+19)+(r-3)(r-4)(3), 6r^2), (6mrn+6mn+3m+4r+15+(r-3)(2mrn+6mn+m+13)+(r-3)(r-4)(mn+2), 4r^2+2r)-C_{2r}$ -antimagic total dekomposisi untuk  $n \geq 4, r \geq 3,$  dan  $m \geq 2$ .

Dari kajian diatas ada beberapa pelabelan yang belum ditemukan sehingga dalam penelitian ini diajukan *open problem* yaitu:

- a. **Masalah terbuka 4.4.1** Pelabelan super  $(a, d)-\mathcal{H}$  antimagic total dekomposisi pada graf  $C_3 \otimes P_n$  dengan  $n \geq 4$  untuk  $d \leq 54$  selain  $d \in \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 36, 38, 40, 42, 44, 46, 54\}$ .
- b. **Masalah terbuka 4.4.2** Pelabelan super  $(a, d)-\mathcal{H}$  antimagic total dekomposisi pada gabungan saling lepas graf  $mC_3 \otimes P_n$ , dengan  $n \geq 4$  dan  $m \geq 2$  untuk  $d \leq 72$  selain  $d \in \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 38, 48\}$ .
- c. **Masalah terbuka 4.4.3** Pelabelan super  $(a, d)-\mathcal{H}$  antimagic total dekomposisi pada graf  $C_r \otimes P_n$  dimana  $n \geq 4$  untuk  $d \leq 6r^2$  selain  $d \in \{4r, 4r^2+2r, 6r^2\}$ .
- d. **Masalah terbuka 4.4.4** Pelabelan super  $(a, d)-\mathcal{H}$  antimagic total dekomposisi pada graf  $mC_r \otimes P_n$  dimana  $n \geq 4, r \geq 3,$  dan  $m \geq 2$  untuk  $d \leq 8r^2$  selain  $d \in \{4r, 4r^2+2r, 6r^2\}$ .

## PRAKATA

Segala puji syukur kehadirat Allah SWT. atas segala berkah dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tesis yang berjudul "Analisis Super  $(a, d) - \mathcal{H}$  Antimagic Total Dekomposisi pada Graf Operasi *Tensor Product*" ini dengan baik.

Pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih dan penghargaan yang sebesar-besarnya atas bantuan dan bimbingan dalam penyusunan skripsi ini, terutama kepada yang terhormat:

1. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
2. Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
3. Dosen Pembimbing I dan Dosen Pembimbing II yang telah meluangkan waktu, pikiran, dan perhatian dalam penulisan tesis ini;
4. Dosen dan Karyawan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
5. Semua pihak yang telah membantu terselesainya tesis ini.

Semoga bantuan, bimbingan, dan dorongan beliau dicatat sebagai amal baik oleh Allah SWT dan mendapat balasan yang sesuai dari-Nya. Selain itu, penulis juga menerima segala kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan skripsi ini. Akhirnya penulis berharap, semoga skripsi ini dapat bermanfaat, amin yaa robbal alamin.

Jember, Juni 2015

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL . . . . .	i
HALAMAN PERSEMBAHAN . . . . .	ii
HALAMAN MOTO . . . . .	iii
HALAMAN PERNYATAAN . . . . .	iv
HALAMAN PENGESAHAN . . . . .	vi
RINGKASAN . . . . .	vii
PRAKATA . . . . .	ix
DAFTAR ISI . . . . .	xi
DAFTAR GAMBAR . . . . .	xiii
DAFTAR TABEL . . . . .	xiv
DAFTAR LAMBANG . . . . .	xv
<b>1 PENDAHULUAN . . . . .</b>	<b>1</b>
1.1 Latar Belakang Masalah . . . . .	1
1.2 Rumusan Masalah . . . . .	2
1.3 Tujuan Penelitian . . . . .	3
1.4 Hal Baru dalam Penelitian . . . . .	3
1.5 Batasan Masalah . . . . .	3
1.6 Manfaat Penelitian . . . . .	4
<b>2 TINJAUAN PUSTAKA . . . . .</b>	<b>5</b>
2.1 Konsep Dasar Graf . . . . .	5
2.2 Aplikasi Graf . . . . .	16
2.3 Graf Khusus . . . . .	21
2.4 Operasi Kombinasi Graf . . . . .	23
2.5 Batas Atas $d$ pada Graf . . . . .	24
2.6 Fungsi Bijektif dan Barisan Aritmatika . . . . .	26
2.7 Aksioma, Lemma, Teorema, Akibat, Dugaan dan Masalah Terbuka	29
2.8 Pelabelan Graf . . . . .	30
2.8.1 Definisi Pelabelan Graf . . . . .	30
2.8.2 Pelabelan Selimut- $\mathcal{H}$ . . . . .	31

2.8.3	Pelabelan Dekomposisi- $\mathcal{H}$ . . . . .	31
2.9	Hasil - hasil Penelitian Pelabelan Selimut dan Dekomposisi $\mathcal{H}$ - Antimagic . . . . .	32
<b>3</b>	<b>METODE PENELITIAN</b> . . . . .	<b>36</b>
3.1	Metode Penelitian . . . . .	36
3.2	Definisi Operasional . . . . .	36
3.2.1	Pelabelan Super $(a, d) - \mathcal{H}$ Total Dekomposisi . . . . .	36
3.2.2	Graf $C_3 \otimes P_n$ . . . . .	37
3.2.3	Gabungan Saling Lepas Graf $C_3 \otimes P_n$ ( $mC_3 \otimes P_n$ ) . . . . .	37
3.3	Teknik Penelitian . . . . .	41
<b>4</b>	<b>HASIL DAN PEMBAHASAN</b> . . . . .	<b>43</b>
4.1	Super $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ Antimagic Total Dekomposisi pada Graf $C_3 \otimes P_n$ Konektif . . . . .	43
4.2	Super $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ Antimagic Total Dekomposisi pada Graf $C_3 \otimes P_n$ Diskonektif . . . . .	58
4.3	Analisis Penelitian . . . . .	65
4.3.1	Graf <i>Tensor Product</i> Konektif . . . . .	65
4.3.2	Graf <i>Tensor Product</i> Diskonektif . . . . .	72
4.4	Hasil dan Pembahasan . . . . .	81
<b>5</b>	<b>KESIMPULAN DAN SARAN</b> . . . . .	<b>83</b>
5.1	Kesimpulan . . . . .	83
5.2	Saran . . . . .	84
	<b>DAFTAR PUSTAKA</b> . . . . .	<b>83</b>

DAFTAR GAMBAR

2.1	Graf . . . . .	5
2.2	Contoh graf tidak memiliki <i>loop</i> dan graf yang memiliki <i>loop</i> dan sisi paralel . . . . .	6
2.3	Contoh graf reguler dan graf dengan titik terisolasi . . . . .	7
2.4	Contoh graf dan komplementnya . . . . .	8
2.5	<i>Trail</i> , <i>path</i> , dan <i>cycle</i> . . . . .	8
2.6	<i>Adjacent</i> dan <i>incident</i> . . . . .	10
2.7	Contoh graf terhubung dan graf tak terhubung . . . . .	10
2.8	Graf hingga dan tak hingga . . . . .	11
2.9	Graf tak berarah dan graf berarah . . . . .	11
2.10	Graf sederhana, graf ganda, dan graf semu. . . . .	12
2.11	Graf terpotong . . . . .	12
2.12	Contoh graf dengan subgrafnya . . . . .	14
2.13	$G_{22}$ isomorfis dengan $G_{23}$ , tetapi tidak isomorfis dengan $G_{24}$ . . . . .	14
2.14	Lintasan dan Sirkuit Euler . . . . .	15
2.15	Graf dengan lintasan Euler dan lintasan Hamilton . . . . .	15
2.16	Contoh gabungan graf . . . . .	16
2.17	Struktur graf pohon . . . . .	17
2.18	Graf $C_3 \otimes P_6$ dengan $d = 12$ . . . . .	19
2.19	Graf <i>tree</i> . . . . .	20
2.20	Graf <i>path</i> $P_4$ . . . . .	21
2.21	Graf <i>cycle</i> $C_6$ . . . . .	21
2.22	Graf Komplit $K_4$ . . . . .	22
2.23	Graf <i>wheel</i> $W_7$ . . . . .	22
2.24	Graf $G = C_5 \odot P_2$ . . . . .	23
2.25	Graf $G = C_3 \times P_2$ . . . . .	24
2.26	Graf $C_3 \otimes P_2$ . . . . .	24
2.27	(a) fungsi injektif, (b) fungsi surjektif dan (c) fungsi bijektif . . . . .	28
2.28	Graf $W_7$ dan $P_4$ . . . . .	32

2.29	(i) Pelabelan titik, (ii) Pelabelan sisi, (iii) Pelabelan total antimagic selimut, (vi) Pelabelan total antimagic dekomposisi . . . . .	35
3.1	Graf $C_3 \otimes P_n$ untuk $n \geq 4$ . . . . .	37
3.2	Graf $mC_3 \otimes P_n$ untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 3$ . . . . .	38
3.3	Pelabelan super (156, 12)-antimagic total dekomposisi pada graf operasi $C_3 \otimes P_4$ . . . . .	39
3.4	Pelabelan super (444, 12)-antimagic total dekomposisi pada graf operasi $3C_3 \otimes P_4$ . . . . .	40
3.5	Bagan teknik penelitian . . . . .	42
4.1	Jumlah titik dan sisi graf pada $C_3 \otimes P_4$ . . . . .	44
4.2	Jumlah titik dan sisi graf pada $C_3 \otimes P_6$ . . . . .	45
4.3	Super (160, 8) – $C_6$ -total dekomposisi pada graf $C_3 \otimes P_4$ . . . . .	49
4.4	Super (156, 12) – $C_6$ -total dekomposisi pada graf $C_3 \otimes P_4$ . . . . .	51
4.5	Super (144, 24) – $(C_6)$ -total dekomposisi pada graf $C_3 \otimes P_4$ . . . . .	53
4.6	Super (138, 30) – $C_6$ -total dekomposisi pada graf $C_3 \otimes P_4$ . . . . .	56
4.7	Super (114, 54) – $C_6$ -total dekomposisi pada graf $C_3 \otimes P_4$ . . . . .	58
4.8	Super (444, 12) – $C_6$ -total dekomposisi pada graf $3C_3 \otimes P_4$ . . . . .	63
4.9	Super (460, 8) – $(C_6)$ -total dekomposisi pada graf $3C_3 \otimes P_4$ . . . . .	66
4.10	Super (280, 16) – $C_{2r}$ -antimagic total dekomposisi pada graf $C_4 \otimes P_4$ . . . . .	69
4.11	Super (310, 150) – $C_{2r}$ -antimagic total dekomposisi pada graf $C_5 \otimes P_4$ . . . . .	70
4.12	Super (224, 72) – $C_{2r}$ -antimagic total dekomposisi pada graf $C_4 \otimes P_4$ . . . . .	72
4.13	Super (808, 16) – $C_{2r}$ -antimagic total dekomposisi pada graf $3C_4 \otimes P_4$ . . . . .	75
4.14	Super (760, 150) – $C_{10}$ -antimagic total dekomposisi pada graf $3C_5 \otimes P_4$ . . . . .	78
4.15	Super (404, 72) – $C_8$ -antimagic total dekomposisi pada graf $2C_4 \otimes P_4$ . . . . .	80

DAFTAR TABEL

2.1 Ringkasan pelabelan selimut super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic. . . . . 32



## DAFTAR LAMBANG

$G$	=	Graf $G$
$H$	=	Subgraf $G$
$\mathcal{H}$	=	Selimut dari graf $G$
$G(V, E)$	=	Sebarang graf tak berarah dengan $V$ adalah himpunan tak kosong dari semua titik dan $E$ adalah himpunan sisi
$v_n$	=	Titik ke- $n$ pada suatu graf
$e_n$	=	Sisi ke- $n$ dari suatu graf
$ V(G) $	=	Himpunan titik pada graf $G$ dan disebut sebagai <i>order</i>
$ E(G) $	=	Himpunan sisi pada graf $G$ dan disebut sebagai <i>size</i>
$\mathcal{H}AVD$	=	$\mathcal{H}$ antimagic vertex decomposition atau pelabelan titik $\mathcal{H}$ anti-ajaib dekomposisi
$\mathcal{S}HATD$	=	Super $\mathcal{H}$ antimagic total decomposition atau super $(a, d) - \mathcal{H}$ total dekomposisi
$d$	=	Nilai beda barisan bobot sisi pada SEATL
$a$	=	Bobot sisi terkecil yang merupakan suku pertama barisan bobot sisi pada SEATL
$C_3 \otimes P_n$	=	Graf operasi <i>tensor product</i> $C_3$ dan $P_n$ dimana $n - 1$ adalah banyak selimut
$mC_3 \otimes P_n$	=	Gabungan graf operasi <i>tensor product</i> $C_3$ dan $P_n$ dimana $mn - m - 1$ adalah banyak selimut
$x_{1,i}$	=	Titik ke- $i$ baris 1 pada graf operasi <i>tensor product</i> $C_3 \otimes P_n$
$x_{2,i}$	=	Titik ke- $i$ baris 2 pada graf operasi <i>tensor product</i> $C_3 \otimes P_n$
$x_{3,i}$	=	Titik ke- $i$ baris 3 pada graf operasi <i>tensor product</i> $C_3 \otimes P_n$
$x_{1,i}^k$	=	Titik ke- $i$ baris 1 copy ke- $k$ pada gabungan graf operasi <i>tensor product</i> $mC_3 \otimes P_n$
$x_{2,i}^k$	=	Titik ke- $i$ baris 2 copy ke- $k$ pada gabungan graf operasi <i>tensor product</i> $mC_3 \otimes P_n$
$x_{3,i}^k$	=	Titik ke- $i$ baris 3 copy ke- $k$ pada gabungan graf operasi <i>tensor product</i> $mC_3 \otimes P_n$
$C_r \otimes P_n$	=	Graf operasi <i>tensor product</i> $C_r$ dan $P_n$
$mC_r \otimes P_n$	=	Gabungan graf operasi <i>tensor product</i> $C_r$ dan $P_n$
$x_{j,i}$	=	Titik ke- $i$ baris ke- $j$ pada graf operasi <i>tensor product</i> $C_r \otimes P_n$



$x_{j,i}^k$  = Titik ke- $i$  baris ke- $j$  copy ke- $k$  pada gabungan graf operasi *tensor product*  $mC_r \otimes P_n$



## BAB 1. PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang Masalah

Dewasa ini, matematika sebagai ilmu dasar (*basic science*) mempunyai peranan penting terhadap kemajuan teknologi yang berkembang dengan pesat. Matematika mampu menjawab permasalahan - permasalahan yang ada dalam kehidupan dengan cepat dan tepat serta dapat dipertanggungjawabkan. Matematika terdiri dari beberapa cabang ilmu, antara lain : matematika murni, matematika komputasi, matematika diskrit, matematika statistik, dan lain sebagainya.

Teori graf merupakan salah satu cabang ilmu dari matematika diskrit. Graf digunakan untuk mempresentasikan objek diskrit dan hubungan antara objek tersebut. Representasi visual dari graf adalah dengan menyatakan objek sebagai noktah, bulatan atau titik, sedangkan hubungan antara objek tersebut dinyatakan dengan garis atau sisi. Aplikasi teori ini telah banyak digunakan pada beberapa bidang. Beberapa aplikasi tersebut misalnya adalah pencarian lintasan terpendek, persoalan melihat hubungan pertemanan dalam suatu jaringan internet, persoalan tukang pos Cina, dan lain sebagainya

Topik yang menarik pada teori graf adalah masalah pelabelan graf. Pelabelan graf  $G$  adalah sebuah pemetaan dari elemen-elemen graf  $G$  terhadap bilangan bulat positif. Disebut pelabelan titik (*vertex labeling*) jika domainnya adalah himpunan titik pada graf  $G$ , sedangkan jika domainnya adalah himpunan sisi pada graf  $G$  maka pelabelannya disebut pelabelan sisi (*edge labeling*). Apabila domainnya adalah kedua himpunan tersebut maka disebut pelabelan total (*total labeling*). Kemudian Kotzig and Rosa (1970) dan Dougall et al. (2002) secara berturut-turut mengenalkan pelabelan total sisi-ajaib dan pelabelan total titik-ajaib.

Pelabelan total ajaib kemudian dikembangkan menjadi pelabelan selimut ajaib yang pertama kali diperkenalkan oleh Sedláček (1963). Gutierrez and Llado (2005) menyebutkan bahwa suatu graf  $G = (V(G), E(G))$  dikatakan memiliki pelabelan selimut  $\mathcal{H}$ -ajaib jika setiap garis pada  $E(G)$  termuat dalam subgraf

$\mathcal{H}$  dari  $G$  yang isomorfik dengan  $H$ . Dalam hal ini  $H$  merupakan subgraf dari  $G$ . Oleh Inayah (2013) kemudian dikembangkan suatu pelabelan selimut  $\mathcal{H}$ -anti ajaib, dengan penjelasan bahwa suatu pelabelan selimut  $\mathcal{H}$ -anti ajaib pada graf  $G$  adalah sebuah fungsi bijektif sehingga terdapat jumlahan yang merupakan deret aritmatika  $a, a + d, a + 2d, \dots, a + (t - 1)d$ .

Setiap pelabelan graf memiliki nilai batas atas  $d$  yang berbeda dan nilai  $d$  tidak tunggal (Dafik et al., 2009). Nilai  $d \leq s$  dengan  $d$  adalah bilangan bulat non negatif dan  $s$  merupakan nilai terbesar  $d$  dalam suatu graf. Tujuan menentukan batas atas untuk mengetahui nilai beda maksimum guna mencari pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic covering. Hasil-hasil pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic covering yang sudah ditemukan diantaranya adalah pelabelan selimut  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$  anti ajaib super pada graf fan, sun, dan generalized Petersen oleh Karyanti (2012). Inayah (2013) juga meneliti mengenai suatu pelabelan selimut  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic covering pada graf kipas  $F_n$  dan graf roda  $W_n$ .

Kajian graf terus bermunculan karena peneliti meninggalkan masalah terbuka. Penelitian tentang pelabelan selimut terhadap suatu graf khusus mulai berkembang ke pelabelan selimut pada hasil operasi graf. Dari banyak macam operasi graf, peneliti mengambil operasi *tensor product* yang belum pernah diteliti sebelumnya. Selimut yang terpisah sempurna disebut dekomposisi. Berdasarkan konsep dekomposisi- $H$  dan operasi pada graf, pada tesis ini akan menganalisis suatu pelabelan dekomposisi  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -anti ajaib pada graf operasi *tensor product*  $C_r \otimes P_n$ .

## 1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka dapat dirumuskan masalah dalam penelitian ini yaitu:

- a. Berapa batas atas  $d$  super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic total dekomposisi pada graf operasi *tensor product*  $C_r \otimes P_n$  tunggal dan gabungannya?
- b. Apakah graf operasi *tensor product* memiliki pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic total dekomposisi  $C_r \otimes P_n$  tunggal dan gabungannya?

- c. Bagaimana analisis pelabelan super  $(a, d) - \mathcal{H}$  antimagic total dekomposisi pada generalisasi graf operasi *tensor product*  $C_r \otimes P_n$  tunggal dan gabungannya?

### 1.3 Tujuan Penelitian

Sesuai dengan rumusan masalah dan latar belakang di atas, maka tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

- a. menentukan batas atas  $d$  super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic total dekomposisi pada graf operasi *tensor product*  $C_r \otimes P_n$  tunggal dan gabungannya;
- b. menentukan fungsi bijektif super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic total dekomposisi pada graf operasi *tensor product*  $C_r \otimes P_n$  tunggal dan gabungannya;
- c. menganalisis pelabelan super  $(a, d) - \mathcal{H}$  antimagic total dekomposisi pada generalisasi graf operasi *tensor product*  $C_r \otimes P_n$  tunggal dan gabungannya.

### 1.4 Hal Baru dalam Penelitian

Hal-hal baru dalam penelitian ini adalah disamping grafnya merupakan graf populer (*wellknown*) yaitu graf *cycle* dan graf *path*, juga dikaji tentang operasinya yang berupa *tensor product*. Selanjutnya dikaji tentang keberadaan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic total dekomposisi melalui teknik pengembangan pola pada  $(a, d) - \mathcal{H}$  antimagic titik dekomposisi.

### 1.5 Batasan Masalah

Untuk menghindari meluasnya permasalahan yang akan dipecahkan, maka dalam penelitian ini masalahnya dibatasi pada:

- a. graf yang dilabeli merupakan graf yang terhubung, graf sederhana dan tidak berarah;
- b. graf yang digunakan dalam penelitian yaitu graf operasi  $C_3 \otimes P_n$  merupakan hasil operasi *tensor product* dari graf *cycle*  $C_3$  dengan graf *path*  $P_n$  untuk tunggal dan gabungannya;

- c. gabungan graf  $C_3 \otimes P_n$  merupakan gabungan graf yang saling isomorfis;
- d. graf  $C_3 \otimes P_n$  dimana  $n$  bilangan bulat dan  $n \geq 4$
- e. graf  $mC_3 \otimes P_n$  dimana  $m$  dan  $n$  bilangan bulat,  $m \geq 2$  dan  $n \geq 4$ .

### 1.6 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari hasil penelitian ini adalah:

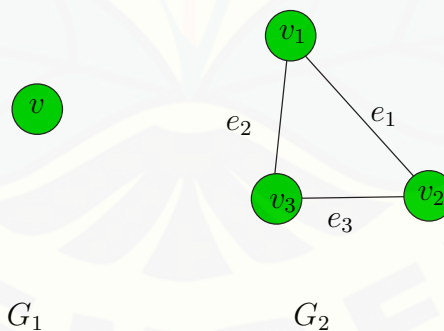
- a. menambah wawasan baru dalam bidang teori graf mengenai covering graf salah satunya adalah pengembangan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic total dekomposisi pada graf operasi *tensor product*;
- b. hasil penelitian ini diharapkan dapat digunakan sebagai perluasan ilmu atau pengembangan ilmu dalam masalah pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic total dekomposisi pada graf operasi *tensor product*;
- c. memotivasi peneliti lain untuk mengembangkan penelitian dalam bidang pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic total dekomposisi pada berbagai macam operasi graf.

## BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

### 2.1 Konsep Dasar Graf

Graf  $G$  adalah pasangan himpunan  $(V, E)$  dengan  $V$  adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut sebagai titik dan  $E$  adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di  $V$  yang disebut sebagai sisi (Harris et al., 2008). Dalam hal ini  $V$  adalah himpunan tak kosong dari semua titik ( $vertex$ )= $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  dan  $E$  adalah himpunan sisi ( $edges$ ) yang menghubungkan sepasang titik = $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ . Dalam sebuah graf, harus ada ( $vertex$ ) minimal satu sedangkan sisi ( $edge$ ) tidak ada jumlah minimal sehingga boleh kosong. Jadi satu titik ( $vertex$ ) saja sudah dapat dikatakan sebagai graf.

Titik-titik pada graf diberi simbol angka, simbol huruf, atau dengan menggunakan keduanya. Misalkan  $v_1$  dan  $v_2$  adalah titik pada suatu graf, maka sisi yang menghubungkan titik  $v_1$  dan  $v_2$  dinyatakan dengan pasangan  $(v_1, v_2)$  atau dengan lambang  $e_1, e_2, e_3, \dots, e_n$ . Pada Gambar 2.1 graf  $G_1$  merupakan graf yang terdiri dari satu  $vertex$  yaitu  $v$  dan graf  $G_2$  merupakan graf yg terdiri dari dua  $vertex$  yaitu  $v_1$  dan  $v_2$  dengan sisi  $(v_1, v_2)$  atau  $e_1$ .

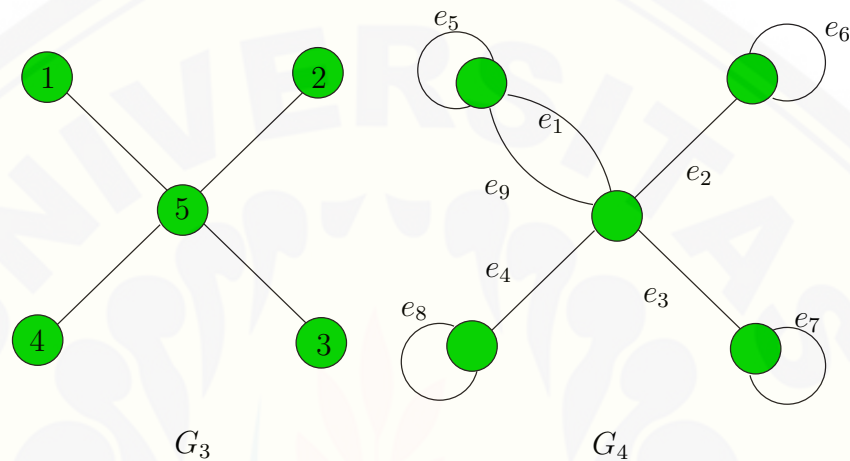


Gambar 2.1 Graf

Graf  $G_3$  adalah graf dengan :  $V(G)=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $E(G)=\{(1, 2), (1, 4), (1, 3), (2, 5), (2, 4), (5, 4), (3, 4)\}$ . Sedangkan  $G_4$  adalah graf dengan :  $V(G)=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,

$E(G)=\{(1, 2), (1, 4), (1, 3), (2, 5), (2, 4), (5, 4), (3, 4), (5, 4), (3, 3)\}$  atau dapat ditulis dengan  $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9\}$ .

Sisi yang menghubungkan dua titik yang sama disebut *loop* dan apabila ada dua buah atau lebih sisi yang menghubungkan dua titik disebut *multiple edges* (Harris et al., 2008). Pada Gambar 2.2 dapat dilihat,  $G_3$  tidak memiliki loop maupun *edge* paralel, sedangkan pada  $G_4$  memiliki loop yaitu  $e_5, e_6, e_7$  dan  $e_8$  dan *edge* paralel yaitu  $e_9$ .



Gambar 2.2 Contoh graf tidak memiliki *loop* dan graf yang memiliki *loop* dan sisi paralel

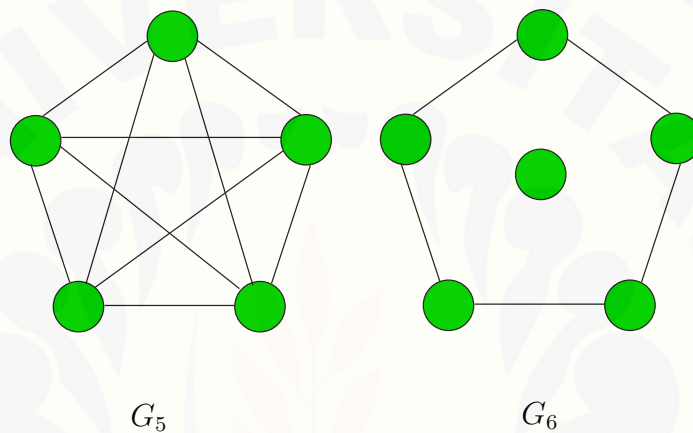
Order  $n$  dari graf  $G$  adalah banyaknya titik di  $G$ , yakni  $n = |V|$  (Harris et al., 2008). Graf yang ordernya hingga disebut dengan graf hingga. Sebagai contoh, pada Gambar 2.3  $G_5$  adalah graf yang mempunyai order 6 sedangkan  $G_6$  memiliki order 5.

Misal pada graf  $G$  terdapat 2 titik  $v_i$  dan  $v_j$ , dua buah titik pada graf  $G$  dikatakan berdekatan (*adjacent*) bila keduanya terhubung langsung dengan sebuah sisi. Atau dapat ditulis singkat dengan notasi  $e = (v_i, v_j) \in E(G)$ . Suatu graf  $G$  dengan  $(v_i, v_j) \in V(G)$  jika  $e = (v_i, v_j) \in E(G)$  maka dikatakan  $e$  insiden (*incident*) dengan titik  $v_i$  atau  $e$  insiden dengan titik  $v_j$ .

Derajat (*degree*) dari titik  $v$  di  $G$  adalah jumlah sisi yang berhubungan dengan  $v$  (Chung and Lu, 2002). Secara matematis di tulis  $deg(v)$ . Setiap titik  $v$  pada graf  $G$  mempunyai derajat yang sama, maka graf  $G$  disebut graf reguler. Jika titik  $x$  di graf  $G_6$  pada Gambar 2.3 mempunyai derajat 0 artinya tidak

mempunyai tetangga dengan titik yang lain maka titik  $x$  disebut titik terisolasi (*isolated vertex*). Titik yang mempunyai derajat satu disebut titik akhir (*end vertex*) atau daun (*leaf*). Sebuah graf  $G$  dikatakan  $r$ -reguler atau reguler pada derajat  $r$ , jika setiap titik pada  $G$  mempunyai derajat  $r$ . Sebagai contoh pada Gambar 2.3  $G_5$  adalah graf 4-reguler dan  $G_6$  adalah graf dengan titik terisolasi.

Komplemen dari graf  $G$  dinotasikan  $\overline{G}$  adalah graf dengan himpunan titik  $V(\overline{G}) = V(G)$  dimana bila titik  $u, v$  bertetangga pada  $G$  jika dan hanya jika titik  $u, v$  tidak tetangga pada  $\overline{G}$  (Harris et al., 2008). Gambar 2.4 adalah contoh graf dan komplemennya.

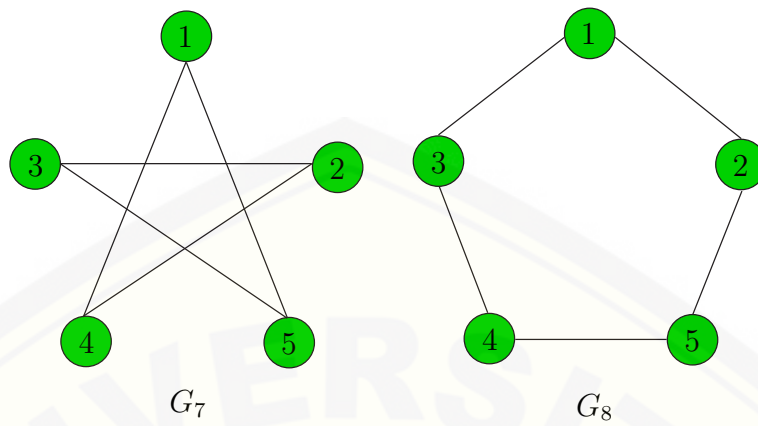


Gambar 2.3 Contoh graf reguler dan graf dengan titik terisolasi

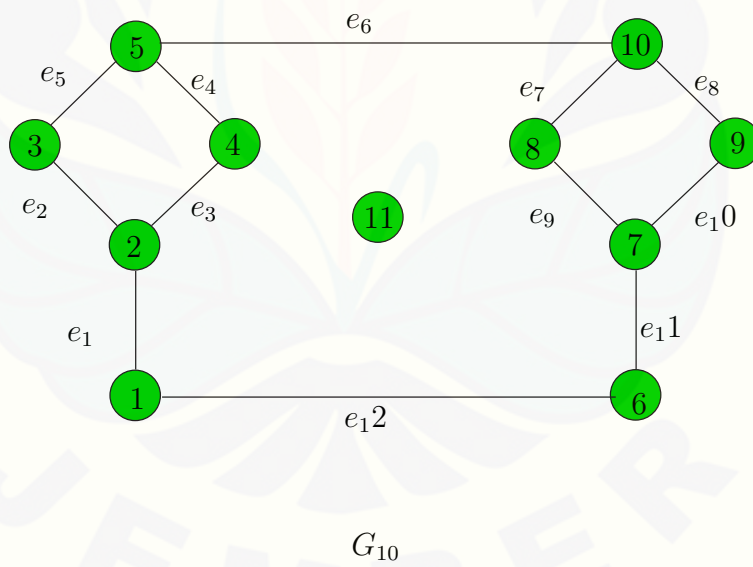
Jarak  $d(u, v)$  antara dua titik yaitu  $u$  dan  $v$  pada graf  $G$  adalah panjang lintasan terpendek dari titik  $u$  dan  $v$  (Harris et al., 2008). Jika tidak ada lintasan dari titik  $u$  ke  $v$ , maka jarak  $d(u, v) = \infty$ . Sebagai contoh pada Gambar 2.5 jarak dari titik 1 ke titik 9  $d(1, 9) = 3$  sedangkan jarak dari titik 1 ke titik 11  $d(1, 11) = \infty$

Suatu *walk* (jalan) adalah suatu barisan berhingga dari *vertex* dan *edge* secara bergantian dimulai dan diakhiri dengan *vertex*. Suatu *walk* yang memiliki *vertex* akhir dan awal sama, maka disebut dengan *closed walk* (jalan tertutup). Sedangkan apabila *vertex* awal dan akhir berbeda, maka dinamakan *open walk* (jalan terbuka). Suatu *walk* yang tiap sisinya berbeda disebut *trail* (jejak) (Biggs et al., 1986). Contoh *trail* yaitu  $v_1, e_{12}, v_6, e_{11}, v_7, e_{10}, v_9, e_8, v_{10}$  pada  $G_{10}$ . *Closed*





Gambar 2.4 Contoh graf dan komplemennya



Gambar 2.5 Trail, path, dan cycle

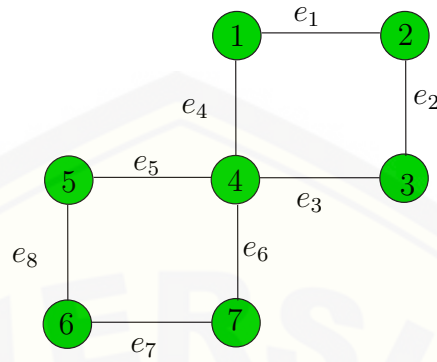
*trail* (jejak tertutup) adalah suatu *trail* dengan simpul awal dan akhir sama. Contoh *closed trail* yaitu  $v_2, e_2, v_3, e_5, v_5, e_4, v_4, e_3, v_2$  pada  $G_{10}$ . Sedangkan *path* (lintasan) merupakan suatu *walk* yang memiliki *vertex* berbeda kecuali pada *vertex* awal dan akhir. *Path* adalah *trail*, tetapi tidak semua *trail* adalah *path*. Contoh *path* yaitu  $v_1, e_{12}, v_6, e_{11}, v_7, e_9, v_8, e_7, v_{10}, e_6, v_5, e_5, v_3, e_3, v_2, e_2, v_1$  pada graf  $G_{10}$ . *Cycle* dari suatu graf  $G$  adalah suatu *closed path* (lintasan tertutup). Contoh *cycle* yaitu  $v_7, e_{10}, v_9, e_8, v_{10}, e_7, v_8, e_9, v_7$  pada graf  $G_{10}$ .

Misal  $u$  dan  $v$  titik pada graf  $G$ . Titik  $v$  dikatakan tetangga (*adjacent*)  $u$  jika ada sisi  $e$  yang menghubungkan titik  $u$  dan  $v$ , yaitu  $e = uv$ . Himpunan semua tetangga dari titik  $v$  dinotasikan dengan  $N(v)$  yang disebut *neighbourhood*. Titik  $v$  disebut tetangga *neighbour* dari  $u$ . Jika  $e = uv$  adalah sisi pada graf  $G$  maka  $e$  dikatakan menempel (*incident*) pada titik  $u$  dan  $v$ . Contohnya pada gambar 2.6, titik  $v_1$  adalah *adjacent* titik  $v_2$  dan  $v_4$  tetapi titik  $v_1$  bukan *adjacent* titik  $v_5, v_6$  dan  $v_7$ , titik  $v_3$  dan sisi  $e_3$  adalah *incident* tetapi titik  $v_2$  dan sisi  $e_6$  bukan *incident* (Harris et al., 2008).

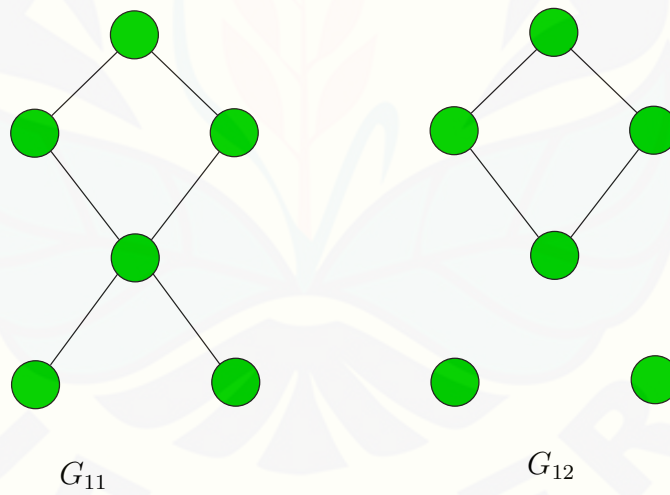
Suatu graf disebut graf terhubung (*connected graph*), jika untuk setiap pasang titik  $v_i$  dan  $v_j$  di dalam himpunan  $V$  terdapat *path* dari  $v_i$  ke  $v_j$  (Chartrand and Lesniak, 1986). Jika tidak, maka  $G$  disebut graf tak terhubung (*disconnected graph*). Graf yang hanya terdiri atas satu titik saja (tanpa sisi) tetap dikatakan terhubung, karena titik tunggalnya terhubung dengan dirinya sendiri. Graf  $G_{11}$  pada Gambar 2.7 merupakan graf terhubung, sedangkan graf  $G_{12}$  merupakan graf tak terhubung.

Graf dapat dikelompokkan menjadi beberapa kategori berdasarkan sifat dan sudut pandang pengelompokkannya. Pengelompokan graf dapat dipandang berdasarkan banyaknya titik, ada tidaknya sisi ganda atau loop, dan orientasi arah pada sisi.

Berdasarkan banyaknya titik graf dikelompokkan menjadi dua jenis yaitu graf berhingga dan graf tak berhingga. Graf hingga (*unlimited graph*) memiliki titik sebanyak  $n$  atau berhingga. Sedangkan graf tak berhingga (*limited graph*) adalah graf yang memiliki titik sebanyak  $n$  atau tak hingga. Secara umum berdasarkan orientasi arah graf dikelompokkan menjadi dua jenis yaitu graf ber-



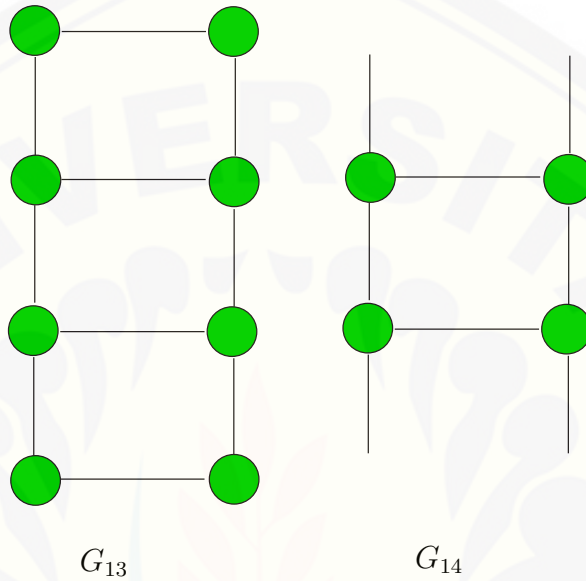
Gambar 2.6 *Adjacent dan incident*



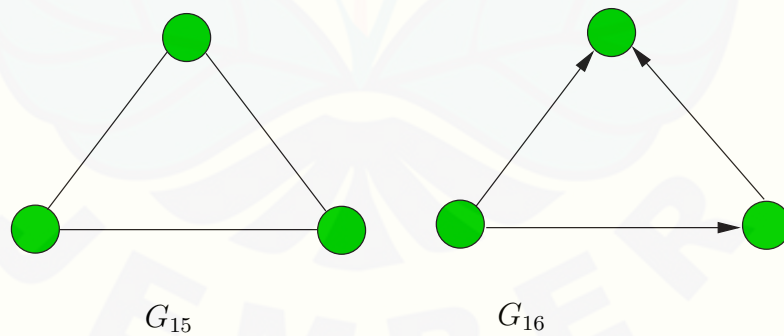
Gambar 2.7 Contoh graf terhubung dan graf tak terhubung

arah (*directed graph*) dan tak berarah (*undirected graph*) (Harris et al., 2008).

Berdasarkan ada tidaknya sisi ganda atau loop, graf dibedakan menjadi dua jenis yaitu graf sederhana (*simple graph*) dan graf tak sederhana. Graf tak sederhana dikelompokkan menjadi dua jenis lagi yaitu graf ganda (*multigraph*) yang mengandung sisi ganda saja dan graf semu (*pseudograph*) yang mengandung sisi ganda dan loop (Harris et al., 2008).



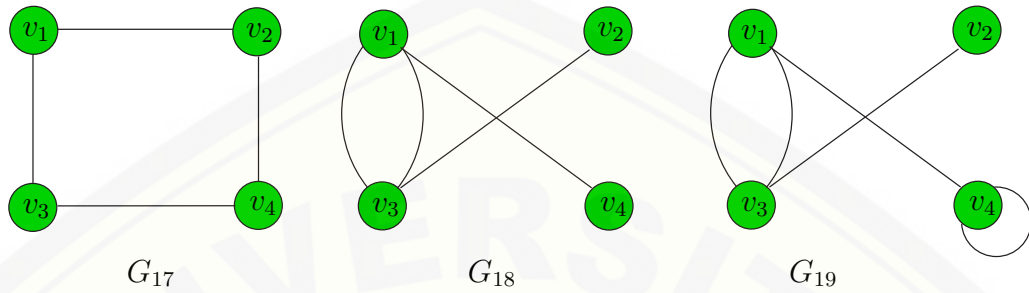
Gambar 2.8 Graf hingga dan tak hingga



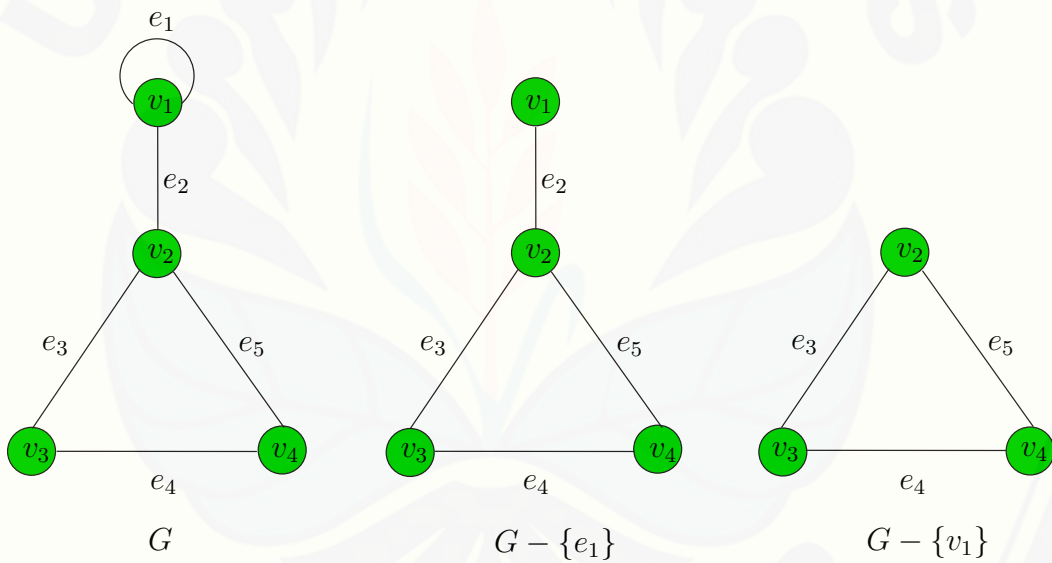
Gambar 2.9 Graf tak berarah dan graf berarah

Sebuah sisi pada graf  $G$  maka  $G - \{e\}$  adalah sebuah graf yang dihasilkan

dari  $G$  dengan menghapus sisi  $e$ . Jika  $G - \{e\}$  tidak terhubung maka  $e$  disebut jembatan (*bridge*). Secara umum, jika  $E_1$  adalah himpunan sisi dalam  $G$  maka  $G - E_1$  adalah graf yang dihasilkan dari  $G$  dengan menghapus semua sisi  $E_1$  (Harris et al., 2008).



Gambar 2.10 Graf sederhana, graf ganda, dan graf semu.



Gambar 2.11 Graf terpotong

Misal  $v$  adalah titik pada sebuah graf  $G$ , dengan  $G - \{v\}$  adalah sebuah graf yang dihasilkan dari  $G$  dengan menghapus titik  $v$  dan semua sisi yang *adjacent* pada  $v$ . Jika  $G - \{v\}$  adalah tak terhubung, maka  $v$  disebut titik potong (*cut-vertex*) (Chartrand and Oellermann, 1993). Dan jika  $V_1$  adalah himpunan titik

pada  $G$  maka  $G - V_1$  adalah graf yang dihasilkan dari  $G$  dengan menghapus semua titik pada  $V_1$  dan semua sisi yang *adjacent* pada titik tersebut. Gambar 2.11 menunjukkan contoh graf  $G - \{e_2\}$  adalah hasil penghapusan sisi  $e_2$  dari  $G$  dan graf  $G - \{v_6\}$  adalah hasil penghapusan titik  $v_6$  dari  $G$ .

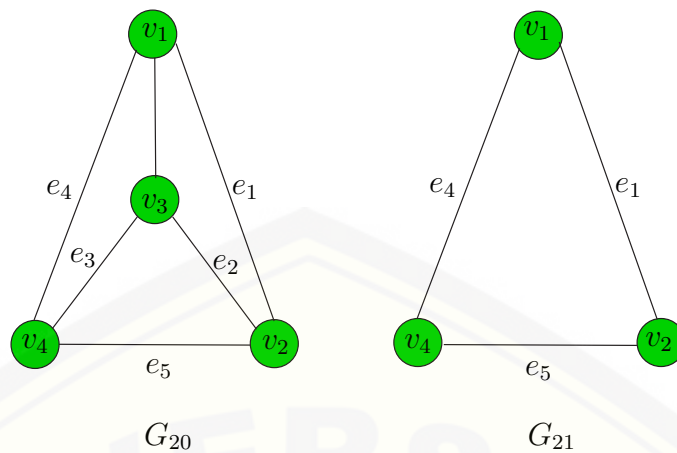
Misalkan  $G = (V, E)$ , sebuah graf  $H = (V_1, E_1)$  adalah subgraf dari  $G$  jika  $V(H) \subseteq V(G)$ , yaitu jika titik-titik dari  $H$  juga titik-titik dari  $G$  dan  $E(H) \subseteq E(G)$  yaitu, jika sisi-sisi dari  $H$  juga sisi-sisi dari  $G$ . Dengan kata lain,  $H = (V_1, E_1)$  adalah subgraf dari  $G = (V, E)$  jika  $V(H) \subseteq V(G)$  dan  $E(H) \subseteq E(G)$ .

Gambar 2.12 menunjukkan bahwa graf  $G_{20}$  memuat  $V(G_{20}) = v_1, v_2, v_3, v_4$  dan  $E(G_{20}) = e_1, e_2, e_3, e_4, e_5$ . Graf  $G_{21}$  memuat  $V(G_{21}) = v_1, v_2, v_4$  dan  $E(G_{21}) = e_2, e_5$ . Karena  $V(G_{21}) \subseteq V(G_{20})$  dan  $E(G_{21}) \subseteq E(G_{20})$  maka  $G_{21}$  merupakan subgraf dari  $G_{20}$ .

Dua buah graf yang sama tetapi secara geometri berbeda disebut graf yang saling isomorfis (*Isomorphic Graph*) (Munir, 2010). Dua buah graf,  $G_{22}$  dan  $G_{23}$  dikatakan isomorfis jika terdapat korespondensi satu-satu antara simpul-simpul keduanya dan antara sisi-sisi keduanya sedemikian sehingga hubungan kebersisian tetap terjaga. Dengan kata lain, misalkan sisi  $e$  bersisian dengan simpul  $u$  dan  $v$  di  $G_{22}$ , maka sisi  $e'$  yang berkoresponden di  $G_{23}$  harus bersisian dengan simpul  $u'$  dan  $v'$  yang di  $G_{23}$ . Dua buah graf yang isomorfis adalah graf yang sama, kecuali penamaan simpul dan sisinya saja yang berbeda. Ini benar karena sebuah graf dapat digambarkan dalam banyak cara. sebagai contoh dapat dilihat pada gambar 2.13.

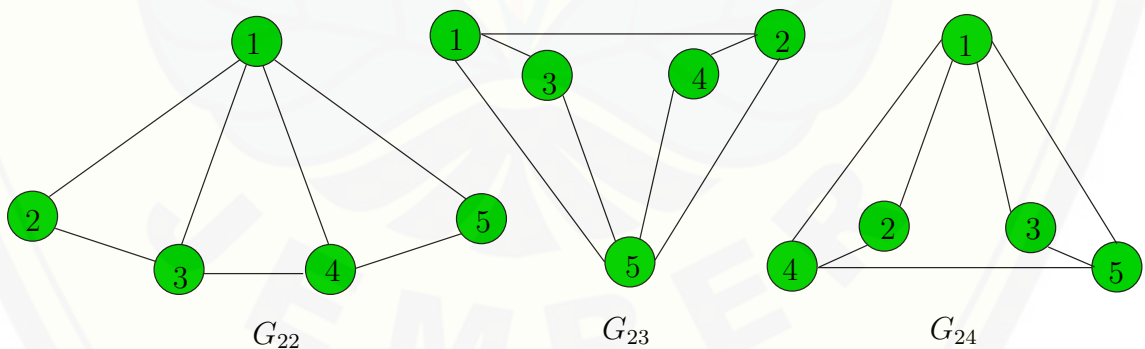
Lintasan Euler ialah lintasan yang melalui masing-masing sisi di dalam graf tepat satu kali (Harris et al., 2008). Sirkuit Euler ialah sirkuit (lintasan tertutup) yang melewati masing-masing sisi tepat satu kali. Graf yang mempunyai sirkuit Euler disebut graf Euler (*Eulerian graph*). Graf yang mempunyai lintasan Euler dinamakan juga graf semi-Euler (*semi-Eulerian graph*). Pada Gambar 2.14 Lintasan Euler pada graf  $G_{25}$ : 1, 2, 3, 4, 5, 1, sedangkan Sirkuit Euler pada graf  $G_{26}$ : 8, 1, 5, 6, 4, 3, 6, 1, 2, 3, 7, 2, 8.

Lintasan Hamilton ialah lintasan yang melalui tiap simpul di dalam graf tepat satu kali (Harris et al., 2008). Sirkuit Hamilton ialah sirkuit (lintasan ter-

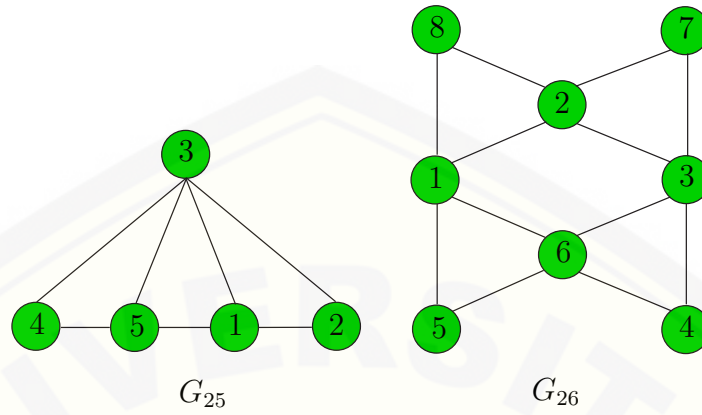


Gambar 2.12 Contoh graf dengan subgrafnya

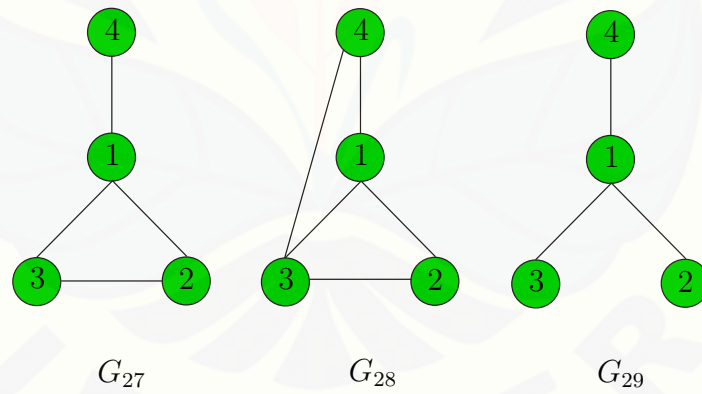
tutup) yang melalui tiap simpul di dalam graf tepat satu kali, kecuali simpul asal (sekaligus simpul akhir) yang dilalui dua kali. Graf yang memiliki sirkuit Hamilton dinamakan graf Hamilton, sedangkan graf yang hanya memiliki lintasan Hamilton disebut graf semi-Hamilton. Pada gambar 2.15, graf  $G_{27}$  memiliki lintasan Hamilton, misal 3,2,1,4. Graf  $G_{28}$  memiliki lintasan Hamilton, misal 1,2,3,4,1. Sedangkan graf  $G_{29}$  tidak memiliki lintasan maupun sirkuit Hamilton. Perbedaan sirkuit Euler dan sirkuit Hamilton yaitu, dalam sirkuit Euler semua garis harus dilalui tepat satu kali sedangkan sirkuit hamilton semua titik harus dikunjungi tepat satu kali.



Gambar 2.13  $G_{22}$  isomorfis dengan  $G_{23}$ , tetapi tidak isomorfis dengan  $G_{24}$



Gambar 2.14 Lintasan dan Sirkuit Euler

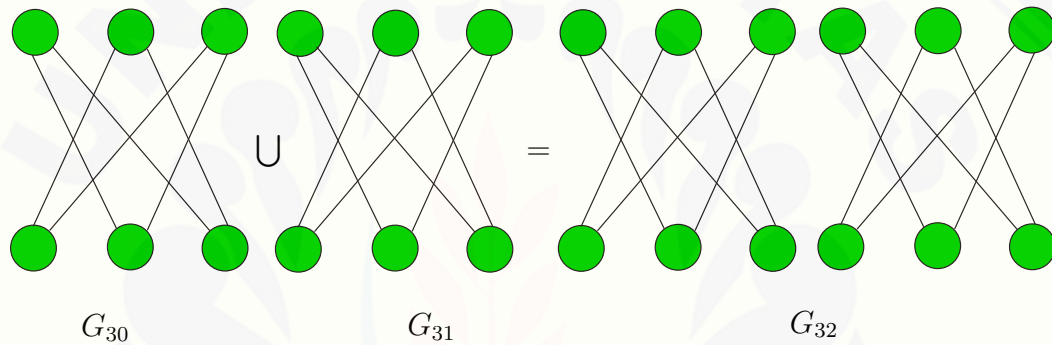


Gambar 2.15 Graf dengan lintasan Euler dan lintasan Hamilton



Gabungan dari dua graf  $G_{30}$  dan  $G_{31}$  dinotasikan dengan  $G_{30} \cup G_{31}$ , didefinisikan sebagai graf dengan himpunan titiknya adalah  $V(G_{30}) \cup V(G_{31})$  dan himpunan sisi  $E(G_{30}) \cup E(G_{31})$ . Pada Gambar 2.16, graf  $G$  merupakan gabungan graf  $G_{30}$  dan  $G_{31}$ , yaitu  $G = G_{30} \cup G_{31}$ .

Graf gabungan  $mG$  didefinisikan sebagai gabungan saling lepas dari  $m$  buah kopi graf  $G$ , atau dapat juga dikatakan sebagai graf dengan  $m$  komponen, dimana setiap komponennya adalah graf  $G$ . Dengan kata lain  $mG = G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup \dots \cup G_m$ , dengan  $G_1 = G_2 = G_3 = \dots = G_m = G$ . Misal graf  $G$  mempunyai  $p$  titik dan  $q$  sisi, maka graf  $mG$  mempunyai  $mp$  titik dan  $mq$  sisi (Wijaya and Kristiana, 2001). Gambar 2.16 merupakan contoh gabungan dua buah graf  $C_3 \otimes P_2$  yaitu graf  $G_{30}$  dan  $G_{31}$  menjadi graf  $G_{32} = 2C_3 \otimes P_2$ .



Gambar 2.16 Contoh gabungan graf

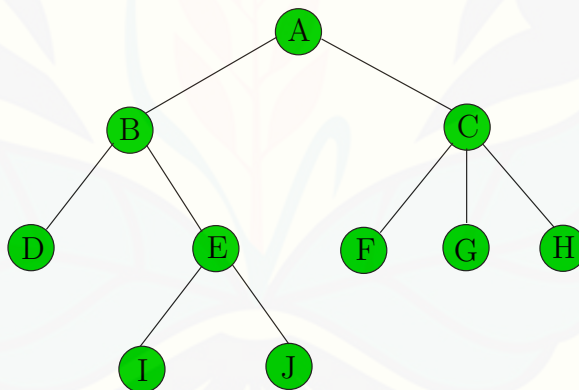
## 2.2 Aplikasi Graf

Teori graf dapat digunakan dalam berbagai bidang salah satunya kriptografi. Kriptografi (cryptography) adalah ilmu dan seni untuk menjaga keamanan pesan (Schneier, 1996). Beberapa contoh kriptografi yaitu *Caesar Chipers*, *Affine Chipers*, dan *Vigenere Chiper*. Salah satu graf yang dapat diterapkan dalam kriptografi yaitu graf pohon. Graf pohon adalah graf terhubung yang tidak mengandung sirkuit serta memiliki akar dan daun (Even, 2011). Beberapa istilah dalam graf pohon yaitu:

- a. Simpul adalah elemen pohon yang berisi informasi/data dan penunjuk per-

cabangan

- b. Tingkat (level) suatu simpul ditentukan dengan pertama kali menentukan akar sebagai bertingkat 1. Jika suatu simpul dinyatakan sebagai tingkat  $N$ , maka simpul-simpul yang merupakan anaknya dikatakan berada dalam tingkat  $N + 1$ . Ada pula yang menyatakan bahwa akar berada pada tingkat 0 dan simpul-simpul lainnya dinyatakan bertingkat 1 lebih tinggi
- c. Derajat (degree) suatu simpul dinyatakan sebagai banyaknya generasi atau turunan dari simpul tersebut. Pada gambar 2.17 simpul A mempunyai derajat 2, B mempunyai derajat 2, C mempunyai derajat 3, E mempunyai derajat 2. Simpul berderajat 0 disebut dengan daun (*leaf*). Simpul D,I,J,F,G,H berderajat 0, disebut dengan daun. Daun juga sering disebut dengan simpul luar (*external node*), sehingga simpul lain kecuali akar juga sering disebut dengan simpul dalam (*internal node*)



Gambar 2.17 Struktur graf pohon

- d. Tinggi (height) atau kedalaman (depth) dari suatu pohon adalah tingkat maksimum dari simpul dalam pohon tersebut dikurangi dengan 1. Graf pohon pada gambar 2.17 mempunyai tinggi atau kedalaman 3

Dafik (2015) memberikan contoh aplikasi dari super  $(a, d)$ -*edge antimagic graph labeling*. Aplikasi tersebut digunakan untuk membangun kalimat sandi dari sebuah pesan yang dikeluarkan oleh perusahaan perbankan agar bersifat rahasia. Dalam contoh yang dikembangkan dalam buku pidato pengukuhan profesornya dituliskan dalam kalimat berikut: **”Perubahan PIN sudah diproses, PIN baru anda adalah 702222”**. Pada thesis ini, kalimat rahasia dari pesan di atas akan dikembangkan melalui teknik pelabelan super  $(a, d) - \mathcal{H}$  antimagic total dekomposisi.

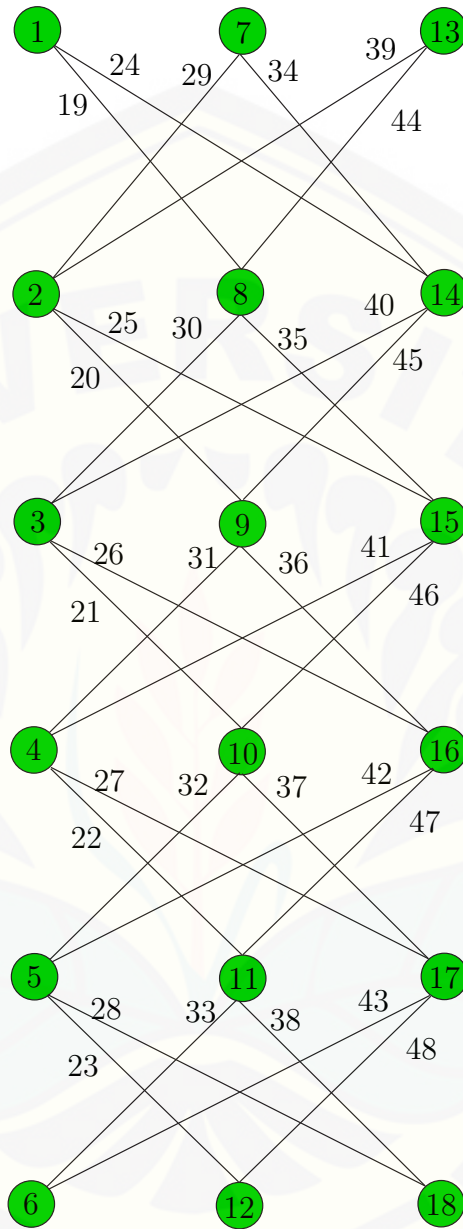
Pertama kali harus didata huruf dan angka yang digunakan dalam pesan di atas yaitu a, b, d, e, h, i, l, n, o, p, r, s, u, 2, 7, 0 (spasi dan tanda baca diabaikan). Setelah mengetahui huruf dan angka yang digunakan dibangunlah diagram pohon yang berakar di label 1, kemudian lengkapilah dengan label sisinya sedemikian hingga bobot total sisinya membentuk barisan aritmatika dengan  $d=12$ , pelabelan *antimagic* dekomposisi pada graf  $C_3 \otimes P_6$ .

Gambar 2.18 menunjukkan pelabelan pada graf  $C_3 \otimes P_6$  dengan  $d = 0$  dan gambar 2.19 adalah graf *tree* dengan pelabelan yang sama pada graf  $C_3 \otimes P_6$  dengan  $d = 12$ .

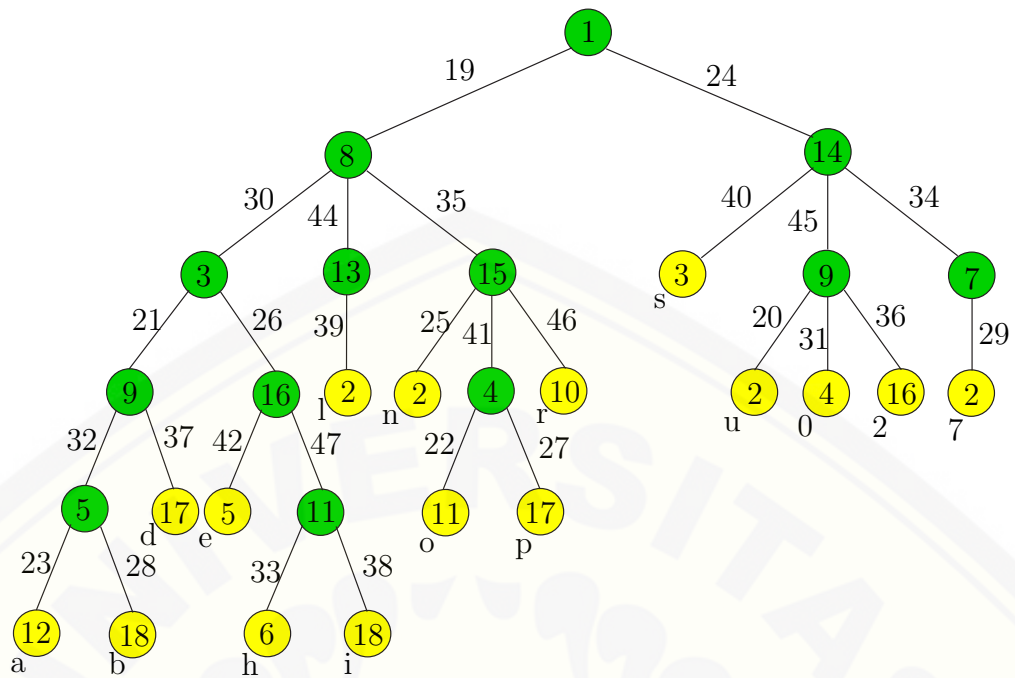
Kemudian letakkan huruf-huruf yang digunakan sesuai urutan abjad, dan urutkan label sisinya, maka terlihat bahwa ciphertext dari huruf a=1930213223 , b=1930213228 , d=19302137 , e=19302642, h=1930264733, i=1930264738, l=194439, n=193525, o=19354122, p=19354127, r=193546, s=2440, u=244520, 0=244531, 2=244536, 7=243429.

Dengan demikian pesan rahasia tanpa spasi dan tanda baca menjadi:19354127193026421935462445201930213228193021322319302647331930213223193525193541271930264738193525 2440244520193021371930213223193026473319302137193026473819354127193546193541222440193026422440193541271930264738193525193021322819302132231935462445201930213223193525193021371930213223193021322319302137193021322319443919302132231930264733243429244531244536244536244536244536.

Agar lebih efisien, kombinasikan label sisi tadi dengan cara menerapkan teknik cryptosystem mudolo 26 terhadap masing-masing hurufnya  $a = \text{mod}(1930213$



Gambar 2.18 Graf  $C_3 \otimes P_6$  dengan  $d = 12$



Gambar 2.19 Graf tree

$223,26)=3$ ,  $b=\text{mod}(1930213228,26)=8$ ,  $d=\text{mod}(19302137,26)=23$ ,  $e=\text{mod}(19302642,26)=8$ ,  $h=\text{mod}(1930264733,26)=7$ ,  $i=\text{mod}(1930264738,26)=12$ ,  $l=\text{mod}(194439,26)=11$ ,  $n=\text{mod}(193525,26)=7$ ,  $o=\text{mod}(19354122,26)=8$ ,  $p=\text{mod}(19354127,26)=13$ ,  $r=\text{mod}(193546,26)=2$ ,  $s=\text{mod}(2440,26)=22$ ,  $u=\text{mod}(244520,26)=16$ ,  $0=\text{mod}(244531,26)=1$ ,  $2=\text{mod}(244536,26)=6$ ,  $7=\text{mod}(243429,26)=17$ . Berdasarkan pengkodean *polyalphabetic* dimana  $0=a$ ,  $1=b$ ,  $2=c$ ,  $3=d$ ,  $4=e$ ,  $5=f$ ,  $6=g$ ,  $7=h$ ,  $8=i$ ,  $9=j$ ,  $10=k$ ,  $11=l$ ,  $12=m$ ,  $13=n$ ,  $14=o$ ,  $15=p$ ,  $16=q$ ,  $17=r$ ,  $18=s$ ,  $19=t$ ,  $20=u$ ,  $21=v$ ,  $22=w$ ,  $23=x$ ,  $24=y$ , dan  $25=z$ , maka hasil konversinya yaitu  $a=d$ ,  $b=i$ ,  $d=x$ ,  $e=i$ ,  $h=h$ ,  $i=m$ ,  $l=l$ ,  $n=h$ ,  $o=i$ ,  $p=n$ ,  $r=c$ ,  $s=w$ ,  $u=q$ ,  $0=b$ ,  $2=g$ , dan  $7=r$ . Sehingga dihasilkan pesan rahasia sebagai berikut: "nicqidhdh nmh wxqdh xmnciwiw, nmh idcq dhxd dxldlh rbgggg". Apabila pesan rahasia tersebut dikembalikan ke pesan semula menjadi "Perubahan PIN sudah diproses, PIN baru anda adalah 702222"

### 2.3 Graf Khusus

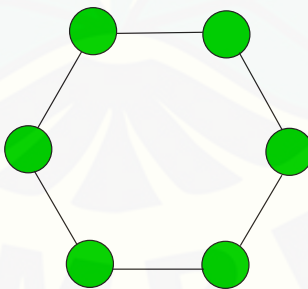
Terdapat beberapa jenis graf khusus. Berikut didefinisikan beberapa graf khusus yaitu :

- Graf *path* yang dilambangkan dengan  $P_n$  dimana  $n \geq 1$ . Graf *path* mempunyai  $n$  titik, dan  $n - 1$  sisi (Diestel, 2005). Gambar 2.22 menunjukkan satu contoh graf *path* dengan  $n = 4$ .



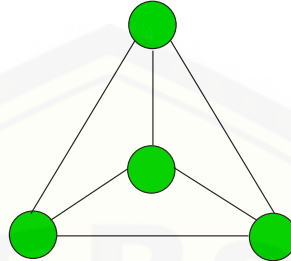
Gambar 2.20 Graf *path*  $P_4$

- Graf *cycle* yang dilambangkan dengan  $C_n$  dimana  $n \geq 3$ . Graf Cycle mempunyai  $n$  titik, dan  $n$  sisi (Pemmaraju and Skiena, 2003). Gambar 2.21 menunjukkan satu contoh graf cycle dengan  $n = 6$ .



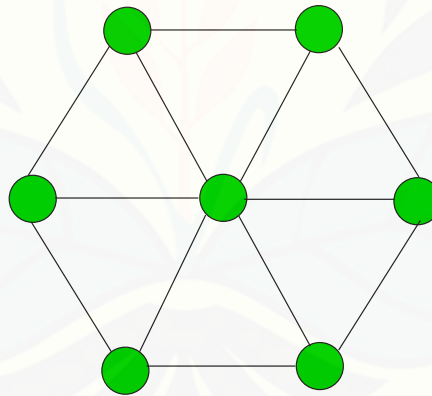
Gambar 2.21 Graf *cycle*  $C_6$

- c. Graf komplit yang dilambangkan dengan  $K_n$  dimana  $n \geq 1$ . Graf komplit mempunyai  $n$  titik, dan  $\frac{n(n-1)}{2}$  sisi (Pirnot and Thomas, 2000). Gambar 2.20 menunjukkan satu contoh graf komplit dengan  $n = 4$ .



Gambar 2.22 Graf Komplit  $K_4$

- d. Graf *wheel* yang dilambangkan dengan  $W_n$  adalah sebuah graf yang terdiri dari graf *cycle* dengan jumlah titik  $n - 1$  dan masing-masing terhubung dengan satu titik yang disebut *hub* (Pemmaraju and S.Skiena, 2003). Jumlah sisinya yaitu sebanyak  $2n - 2$ . Gambar 2.23 menunjukkan satu contoh graf *wheel* dengan  $n = 7$ .

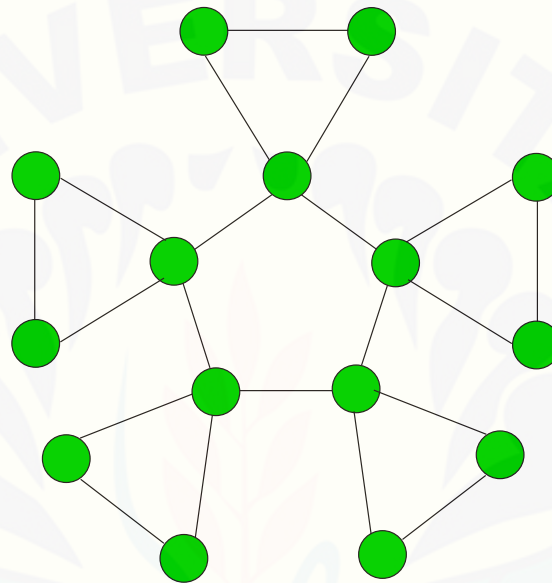


$W_7$

Gambar 2.23 Graf *wheel*  $W_7$

## 2.4 Operasi Kombinasi Graf

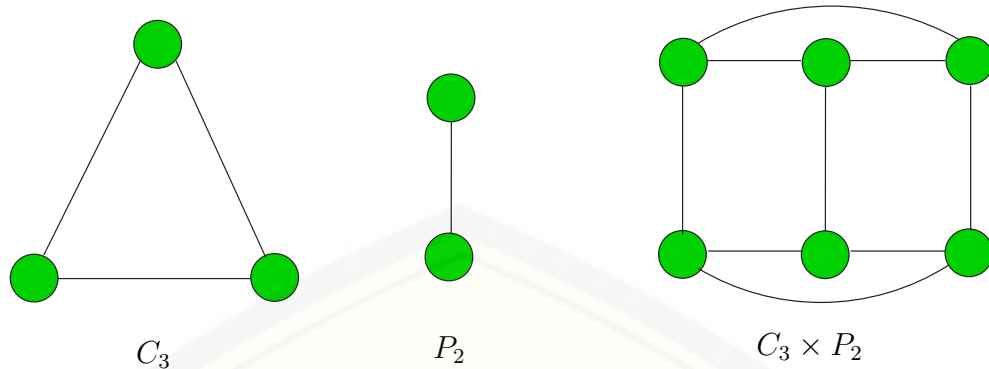
- a. *Crown product*  $G = G_1 \odot G_2$  adalah operasi *crown* dua buah graf. Operasi *crown* diperoleh dengan menempatkan salinan  $G_1$  dan  $|V(G_1)|$  salinan dari  $G_2$  dan kemudian digabungkan ke setiap titik  $G_1$  dengan simpul dalam satu salinan  $G_2$  sedemikian rupa sehingga semua simpul dalam salinan yang sama pada  $G_2$  bergabung dengan tepat satu titik dari  $G_1$  (Chartrand and Zhang, 2008). Gambar 2.26 menunjukkan contoh graf  $G = C_5 \odot K_2$  dimana  $C$  adalah graf *circle*.



Gambar 2.24 Graf  $G = C_5 \odot P_2$

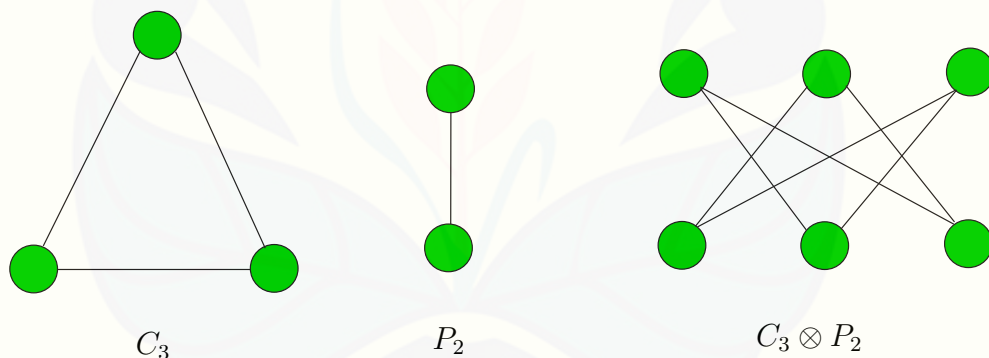
- b. *Cartesian Product*  $G = G_1 \square G_2$  adalah operasi *cartesian* dua buah graf. Cartesian product dari  $G_1$  dan  $G_2$  adalah graf yang sedemikian hingga himpunan titiknya merupakan Cartesian product dari  $V(G_1) \times V(G_2)$  dan sembarang dua titik yaitu  $(u, u')$  dan  $(v, v')$  adjacent di  $G_1 \square G_2$  jika dan hanya jika  $u = v$  dan  $u'$  adjacent dengan  $v'$  pada  $G_2$  atau  $u' = v'$  dan  $u$  adjacent dengan  $v$  pada  $G_1$  (Imrich et al., 2008). Gambar 2.25 menunjukkan contoh graf  $G = C_3 \times P_2$  dimana  $P$  adalah graf *path* dan  $C$  adalah graf *cycle*.
- c. *Tensor Product*  $G = G_1 \otimes G_2$  adalah operasi *tensor* dua buah graf. *Ten-*





Gambar 2.25 Graf  $G = C_3 \times P_2$

*Cartesian product* dari  $G_1$  dan  $G_2$  adalah graf yang sedemikian hingga himpunan titiknya merupakan Cartesian product dari  $V(G_1) \times V(G_2)$  dan sembarang dua titik yaitu  $(u, u')$  dan  $(v, v')$  adjacent di  $G_1 \otimes G_2$  jika dan hanya jika  $u'$  adjacent dengan  $v'$  dan  $u$  adjacent dengan  $v$  (Hahn and Sabidussi, 1997). Gambar 2.25 menunjukkan contoh graf  $G = C_3 \times P_2$  dimana  $P$  adalah graf *path* dan  $C$  adalah graf *cycle*.



Gambar 2.26 Graf  $C_3 \otimes P_2$

### 2.5 Batas Atas $d$ pada Graf

Sebelum pelabelan selimut  $(a, d) - H$ -anti ajaib (super) untuk suatu kelas graf dikonstruksi, dicari batas atas  $d$ . Batas atas  $d$  untuk pelabelan selimut  $(a, d) - H$ -anti ajaib disajikan pada Lema Misalkan  $G = (V(G), E(G))$  dan

$H = (V(H); E(H))$  adalah graf sederhana dan berhingga dengan  $|V(G)| = v_G$ ,  $|E(G)| = e_G$ ,  $|V(H)| = v_H$ , dan  $|E(H)| = e_H$ .

Lema berikut memuat tentang batas atas  $d$  untuk pelabelan selimut  $(a, d) - H$ - anti ajaib pada graf sebarang menurut Dafik et al. (2013). Pada Lema 2.5.1 disajikan tentang batas atas  $d$  untuk pelabelan super  $(a, d) - \mathcal{H}$ -antimagic total dekomposisi disertai buktinya karena dipandang penting untuk mengarahkan peneliti pada generalisasi graf *tensor product*.

**Lemma 2.5.1.** *Jika sebuah graf  $G$  memiliki pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic total selimut maka batas atas  $d$  adalah  $d \leq \frac{(p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H}{s-1}$ , untuk  $s = |H_i|$ ,  $|V(G)| = p_G$ ,  $|E(G)| = q_G$ ,  $|V(H)| = p_H$ , dan  $|E(H)| = q_H$ .*

**Bukti.**  $f(V) = 1, 2, \dots, p$  dan  $f(E) = p + 1, \dots, p + q$

Misalkan graf  $G$  mempunyai pelabelan  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic covering dengan fungsi total  $f(\text{total}) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots, p + q\}$  maka himpunan bobot sisi sebuah graf adalah  $a, a + d, a + 2d, \dots, a + (s - 1)d$  dimana  $a$  merupakan bobot sisi terkecil yang dapat ditulis  $1 + 2 + \dots + p_H + (p_G + 1) + (p_G + 2) + \dots + (p_G + q_H)$ .

Sedangkan pada sisi yang lain, nilai maksimum yang mungkin dari sisi terbesar adalah  $p_G + p_G - 1 + p_G - 2 + \dots + (p_G - (p_H - 1)) + (p_G + q_G) + (p_G + q_G - 1) + (p_G + q_G - 2) + \dots + (p_G + q_G - (q_H - 1))$ .

Untuk nilai terkecil berlaku:

$$\begin{aligned} a &\geq 1 + 2 + \dots + p_H + (p_G + 1) + (p_G + 2) + \dots + (p_G + q_H) \\ &= \frac{p_H}{2}(1 + p_H) + q_H p_G + \frac{q_H}{2}(1 + q_H) \\ a &\geq \frac{p_H}{2} + \frac{p_H^2}{2} + q_H p_G + \frac{q_H}{2} + \frac{q_H^2}{2} \end{aligned}$$

Untuk nilai terbesar berlaku:

$$\begin{aligned}
 a + (s - 1)d &\leq p_G + p_G - 1 + p_G - 2 + \dots + (p_G - (p_H - 1)) + (p_G + q_G) \\
 &\quad + (p_G + q_G - 1) + (p_G + q_G - 2) + \dots + (p_G + q_G - (q_H - 1)) \\
 &= p_H p_G - \frac{p_H - 1}{2}(1 + (p_H - 1)) + q_H p_G + q_H p_G - \frac{q_H - 1}{2}(1 + \\
 &\quad (q_H - 1)) \\
 a + (s - 1)d &\leq p_H p_G - \frac{p_H - 1}{2}(p_H) + q_H p_G + q_H p_G - \frac{q_H - 1}{2}(q_H)
 \end{aligned}$$

Kemudian nilai  $d$  yaitu:

$$\begin{aligned}
 (s - 1)d &\leq p_H p_G - \frac{p_H - 1}{2}(p_H) + q_H p_G + q_H p_G - \frac{q_H - 1}{2}(q_H) - a \\
 &\leq p_H p_G - \frac{p_H - 1}{2}(p_H) + q_H p_G + q_H p_G - \frac{q_H - 1}{2}(q_H) - \left(\frac{p_H}{2} + \frac{p_H^2}{2}\right. \\
 &\quad \left.+ q_H p_G \frac{q_H}{2} + \frac{q_H^2}{2}\right) \\
 &\leq p_H p_G - \frac{p_H^2}{2} + \frac{p_H}{2} + q_H p_G - \frac{q_H^2}{2} + \frac{q_H}{2} - \left(\frac{p_H}{2} + \frac{p_H^2}{2} + \frac{q_H}{2} + \frac{q_H^2}{2}\right) \\
 &\leq p_H p_G + q_H p_G - p_H^2 - q_H^2 \\
 &\leq p_H p_G - p_H^2 + q_H p_G - q_H^2 \\
 &\leq (p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H \\
 d &\leq \frac{(p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H}{(s - 1)}
 \end{aligned}$$

Dari persamaan diatas terbukti bahwa batas atas  $d \leq \frac{(p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H}{s - 1}$  jika graf  $G$  memiliki pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic total dekomposisi dari berbagai famili graf.  $\square$

## 2.6 Fungsi Bijektif dan Barisan Aritmatika

Secara umum, fungsi dari himpunan  $A$  ke himpunan  $B$  didefinisikan sebagai aturan yang memetakan setiap anggota himpunan  $A$ (dinamakan sebagai domain) kepada tepat satu anggota himpunan  $B$ (dinamakan sebagai kodomain) (Loehr,

2011). Istilah "fungsi", "pemetaan", "peta", "transformasi", dan "operator" biasanya dipakai secara sinonim.

Anggota himpunan yang dipetakan dapat berupa apa saja (kata, orang, atau objek lain), namun biasanya yang dibahas adalah besaran matematika seperti bilangan riil. Untuk mendefinisikan fungsi dapat digunakan notasi berikut.

$$f : A \rightarrow B$$

yang artinya bahwa fungsi  $f$  yang memetakan setiap elemen himpunan  $A$  kepada  $B$ . Jenis-jenis fungsi ada tiga, yaitu fungsi injektif, surjektif dan bijektif.

Fungsi  $f: A \rightarrow B$  disebut fungsi satu-satu atau fungsi injektif jika dan hanya jika  $\{a_1, a_2 \in A, a_1 \neq a_2\}$  maka  $f(a_1) \neq f(a_2)$ .

Fungsi  $f: A \rightarrow B$  disebut fungsi kepada atau fungsi surjektif jika dan hanya jika untuk setiap  $b$  dalam kodomain  $B$  terdapat paling tidak satu  $a$  dalam domain  $A$  sehingga berlaku  $f(a) = b$ . Dengan kata lain, suatu kodomain fungsi surjektif sama dengan kisarannya (range).

Fungsi  $f: A \rightarrow B$  disebut disebut fungsi bijektif apabila fungsi tersebut merupakan fungsi injektif sekaligus surjektif. Gambar 2.27 menunjukkan fungsi injektif, surjektif dan bijektif.

Barisan yang dibentuk dengan cara menambah atau mengurangi suku sebelumnya dengan suatu bilangan tetap tertentu disebut barisan aritmatika.

$$(a) 2, 6, 10, 14, 18, \dots$$

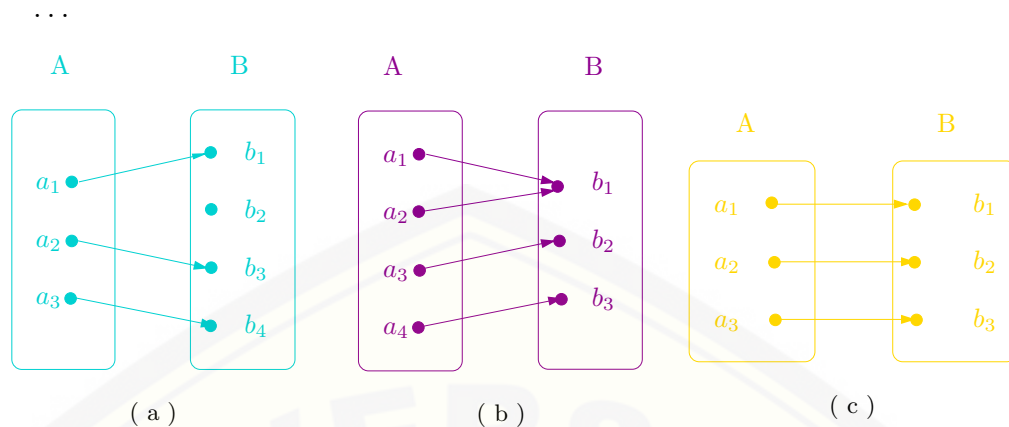
$$(b) 50, 40, 30, 20, 10, \dots$$

Barisan  $(a)$  mempunyai beda,  $b = 4$ . Barisan  $(a)$  disebut barisan aritmetika naik karena nilai suku-sukunya makin besar. Barisan  $(b)$  mempunyai beda,  $b = -10$ . Barisan  $(b)$  disebut barisan aritmetika turun karena nilai suku-sukunya makin kecil. Suatu barisan  $U_1, U_2, U_3, \dots$  disebut barisan aritmetika jika selisih dua suku yang berurutan adalah tetap. Nilai untuk menentukan suku ke- $n$  dari barisan aritmetika. perhatikan kembali contoh barisan  $(a)$ . 2, 6, 10, 14, 18, .... Misalkan  $U_1, U_2, U_3, \dots$  adalah barisan aritmetika tersebut maka

$$U_1 = 2 = 2 + 4(0)$$

$$U_2 = 6 = 2 + 4 = 2 + 4(1)$$

$$U_3 = 10 = 2 + 4 + 4 = 2 + 4(2)$$



Gambar 2.27 (a) fungsi injektif, (b) fungsi surjektif dan (c) fungsi bijektif

$$U_n = 2 + 4(n - 1).$$

Secara umum, jika suku pertama ( $U_1$ ) =  $a$  dan beda suku yang berurutan adalah  $b$  maka dari rumus  $U_n = 2 + 4(n - 1)$  diperoleh 2 adalah  $a$  dan 4 adalah  $b$ . Oleh sebab itu, suku ke- $n$  dapat dirumuskan

$$U_n = a + b(n - 1)$$

Barisan aritmatika yang mempunyai beda positif disebut barisan aritmatika, sedangkan jika bedanya negatif disebut barisan aritmatika turun.  $U_1, U_2, U_3, \dots, U_{n-1}, U_n$  disebut barisan aritmatika jika  $U_2 - U_1 = U_3 - U_2 = \dots = U_n - U_{n-1} =$  konstanta.

Barisan aritmatika juga ada yang bertingkat. Sebagai contoh ada barisan (c) 2, 4, 7, 11, ... Barisan  $c$  memiliki beda yang membentuk barisan (d) 2, 3, 4, ... dan selanjutnya barisan  $d$  mempunyai beda  $b = 1$ . Untuk mencari  $U_n$  dari barisan  $c$  dapat menggunakan rumus sebagai berikut:

$$U_n = \frac{m_0}{0!} + \frac{(n - 1)m_1}{1!} + \frac{(n - 1)(n - 2)m_2}{2!}$$

dengan  $m_0 =$  suku awal pada barisan semula,  $m_1 =$  suku awal pada barisan

tingkat pertama yang dibentuk, dan  $m_2 =$  suku awal pada barisan tingkat kedua yang dibentuk atau beda konstan yang diperoleh. Sehingga  $U_n$  barisan  $c$  yaitu

$$\begin{aligned} U_n &= \frac{m_0}{0!} + \frac{(n-1)m_1}{1!} + \frac{(n-1)(n-2)m_2}{2!} \\ &= \frac{2}{1} + \frac{(n-1)2}{1} + \frac{(n^2-3n+2)1}{2} \\ &= \frac{n^2+n+2}{2} \end{aligned}$$

Barisan ini dipakai pada saat generalisasi pelabelan super  $(a, d) - \mathcal{H}$  anti-magic total dekomposisi pada graf *tensor product*.

## 2.7 Aksioma, Lemma, Teorema, Akibat, Dugaan dan Masalah Terbuka

Aksioma adalah proposisi yang diasumsikan benar. Aksioma tidak memerlukan pembuktian kebenaran lagi. Teorema adalah proposisi yang sudah terbukti benar. Bentuk khusus dari teorema adalah lemma dan akibat. Lemma adalah teorema sederhana yang digunakan dalam pembuktian teorema lain. Lemma biasanya tidak menarik namun berguna pada pembuktian proposisi yang lebih kompleks, yang dalam hal ini pembuktian tersebut dapat lebih mudah dimengerti bila menggunakan sederetan lemma, setiap lemma dibuktikan secara individual (Munir, 2010).

Akibat adalah teorema yang dapat dibentuk langsung dari teorema yang telah dibuktikan, atau dapat dikatakan akibat adalah teorema yang mengikuti dari teorema lain. Dugaan adalah sebuah proposisi yang dipradugakan sebagai hal yang nyata, benar, atau asli, sebagian besarnya didasarkan pada landasan inkonklusif (tanpa simpulan). Dugaan bertentangan dengan hipotesis (oleh karenanya bertentangan pula dengan teori, aksioma, atau prinsip), yang merupakan pernyataan yang mengandung perjanjian menurut landasan yang dapat diterima. Di dalam matematika, dugaan adalah proposisi yang tidak terbukti atau tidak memerlukan bukti atau juga teorema yang dianggap pasti benar adanya. Masalah terbuka adalah beberapa masalah yang dapat secara akurat dinyatakan,

dan belum diselesaikan (tidak ada solusi untuk diketahui). Contoh masalah terbuka dalam matematika, yang telah diselesaikan dan ditutup oleh peneliti di akhir abad kedua puluh, adalah Teorema Terakhir Fermat dan empat warna teorema peta.

## 2.8 Pelabelan Graf

### 2.8.1 Definisi Pelabelan Graf

Pelabelan graf adalah suatu pemetaan satu-satu dan onto (fungsi bijektif) yang memetakan himpunan dari elemen-elemen graf (titik dan sisi) ke himpunan bilangan bulat positif (Dafik, 2007). Secara umum, fungsi  $f$  yang memetakan himpunan  $A$  ke dalam  $B$  disebut fungsi satu-satu jika setiap elemen dalam  $A$  mempunyai bayangan yang berbeda pada  $B$  dan disebut onto jika dan hanya jika range  $f$  sama dengan  $B$ . Secara lebih singkat,  $f : A \rightarrow B$  adalah satu-satu jika  $f(a) = f(a')$  maka  $a = a'$  dan merupakan onto jika  $f(A) = B$ . Sehingga, fungsi yang memetakan himpunan elemen-elemen graf ke himpunan bilangan bulat positif disebut fungsi bijektif jika tidak ada dua buah elemen yang berbeda pada graf yang mempunyai bayangan yang sama atau dengan kata lain semua elemen pada graf dinomori dengan bilangan bulat positif yang berbeda. Secara matematik, definisi pelabelan graf dapat dituliskan sebagai berikut:

Pelabelan graf  $G = (V, E)$  adalah suatu pemetaan :  $D \rightarrow N$ , dimana  $D$  : domain,  $N$  : himpunan label dari  $G$ . Jika,

- ▶  $D = V$  maka disebut pelabelan titik
- ▶  $D = E$  maka disebut pelabelan sisi
- ▶  $D = V \cup E$  maka disebut pelabelan total

Pada pelabelan titik, jumlah label dua titik yang menempel pada suatu sisi disebut *bobot sisi*. Jika semua sisi mempunyai bobot sisi yang sama maka disebut pelabelan titik sisi ajaib. Jika semua sisi mempunyai bobot sisi yang berbeda dan himpunan bobot sisi dari semua sisi membentuk barisan aritmatika dengan suku pertama  $a$  dan beda  $d$  maka pelabelan tersebut disebut pelabelan titik sisi anti ajaib (*edge antimagic vertex labelling* (EAVL) (Dafik et al., 2008).

Sedangkan dalam pelabelan total, bobot sisi diartikan sebagai jumlah label

sisi dan label dua titik yang menempel pada suatu sisi. Jika semua sisi mempunyai bobot sisi yang sama maka pelabelan tersebut disebut pelabelan total-sisi-ajaib. Jika semua sisi mempunyai bobot sisi yang berbeda dan himpunan bobot sisi dari semua sisi membentuk barisan aritmetika dengan suku pertama  $a$  dan beda  $d$  maka pelabelan tersebut disebut pelabelan total sisi anti ajaib (pelabelan total sisi antimagic) (Dafik et al., 2008).

### 2.8.2 Pelabelan Selimut- $\mathcal{H}$

Sebuah graf  $G$  dikatakan memuat selimut  $H = \{H_1, H_2, H_3, \dots, H_k\}$  dengan sifat setiap sisi di  $G$  termuat sekurang-kurangnya satu graf  $H_i$  yang isomorfik dengan subgraf  $H$  untuk suatu  $i \in \{1, 2, \dots, h\}$  (Gutierrez and Llado, 2005). Pelabelan selimut- $\mathcal{H}$  pada graf  $G$  didefinisikan bahwa  $G = (V, E)$  memuat sebuah selimut  $H$  maka sebuah fungsi bijektif  $f : V \cup E \rightarrow 1, 2, \dots, |V| + |E|$  adalah sebuah pelabelan ajaib- $\mathcal{H}$  dari  $G$  jika terdapat bilangan bulat positif yang disebut jumlah-ajaib sedemikian sehingga untuk setiap subgraf  $H' = (V', E')$  dari  $G$  isomorfik terhadap  $H$  yang mempunyai total label  $\omega(H)$  konstan dimana diperoleh

$$\omega(H) = \sum_{v \in V(H)} f(v) + \sum_{e \in E(H)} f(e)$$

Jika himpunan titik merupakan pemetaan bijektif  $f$  ke himpunan  $1, 2, \dots, |G|$  maka dinamakan pelabelan  $\mathcal{H}$ -ajaib super.

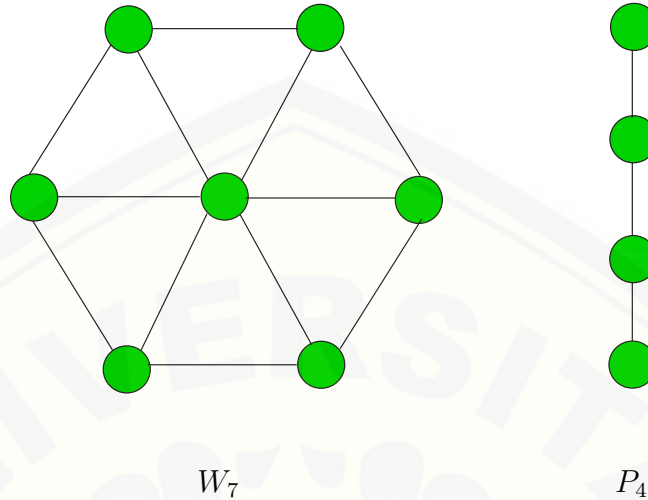
### 2.8.3 Pelabelan Dekomposisi- $\mathcal{H}$

Jika selimut- $\mathcal{H}$  dari  $G$  memiliki sifat yaitu setiap sisi  $G$  termuat dalam tepat satu graf  $H_i$  untuk suatu  $i \in \{1, 2, \dots, h\}$ , maka selimut- $\mathcal{H}$  disebut dekomposisi- $\mathcal{H}$  jika semua subgraf isomorfik dengan graf  $H$ ,  $E(H_i) \cap E(H_j) = \emptyset$  untuk  $i \neq j$  dan  $\bigcup_{i=1}^h E(H_i) = E(G)$  (Subbiaha and Pandimadevib, 2014). Dalam hal ini,  $G$  dikatakan memuat dekomposisi- $\mathcal{H}$  atau  $G$  terdekomposisi atas  $H$ . Dengan kata lain, dekomposisi dari graf  $G$  didefinisikan dengan jumlah dari subgraf  $H_i$  pada graf  $G$  yang merupakan suatu dekomposisi jika dan hanya jika tidak ada penggunaan sisi secara bersama dalam dua subgraf  $H_i$ .

Gambar 2.28 menunjukkan bahwa graf  $W_6$  memuat selimut- $C_3$  dan  $P_4$  memuat



dekomposisi- $P_2$  sedangkan dan Gambar 2.29 menunjukkan pelabelan titik, pelabelan sisi, pelabelan selimut, dan pelabelan dekomposisi.



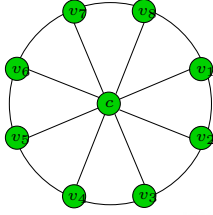
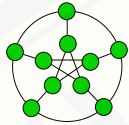
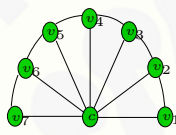
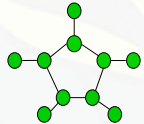
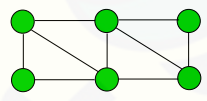
Gambar 2.28 Graf  $W_7$  dan  $P_4$

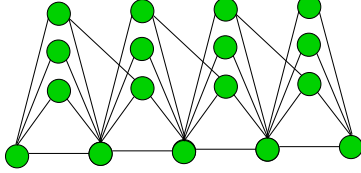
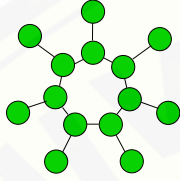
### 2.9 Hasil - hasil Penelitian Pelabelan Selimut dan Dekomposisi $\mathcal{H}$ -Antimagic

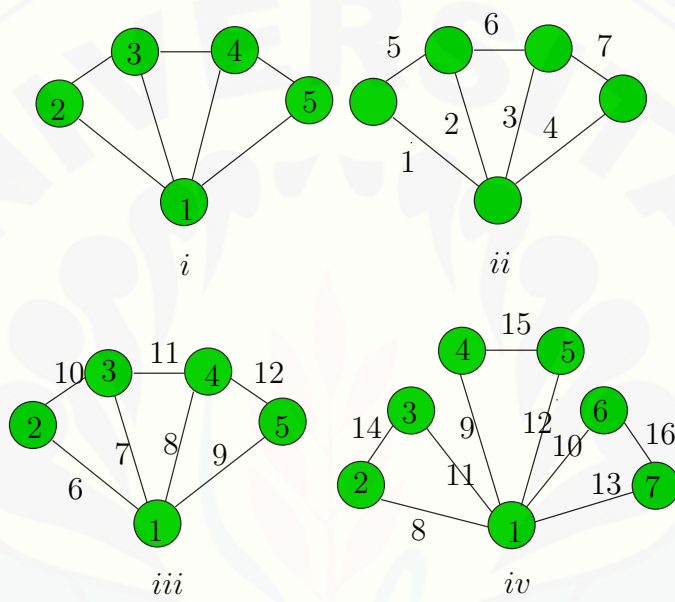
Beberapa rangkuman hasil pelabelan selimut dan dekomposisi super  $(a, d) - \mathcal{H}$ -antimagic pada graf konektif dan diskonektif yang dapat digunakan sebagai rujukan penelitian ini. Beberapa ringkasan hasil penelitian pelabelan selimut  $H$ -Antimagic yang juga dapat digunakan sebagai rujukan dalam penelitian ini akan disajikan sebagai berikut :

Tabel 2.1: Ringkasan pelabelan selimut super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic.

Graf	$a$	$d$	Hasil
$W_n$ ( <i>Wheel</i> )	$3hn + 5$	$d = 3$	$\mathcal{H} = C_3$
	$2hn + 3h + n$	$d = 1$	

Graf	$a$	$d$	Hasil
 <p>(Inayah, 2013)</p> <p><math>GP_{n,k}</math> (Generalized Petersen )</p>	$3 + 14n - 3\lfloor n/2 \rfloor$	$d = 2$	$\mathcal{H} = K_{1,3}$
 <p>(Karyanti, 2012)</p> <p><math>F_n</math> (Fan)</p>	$12 + 4n + \lfloor n/2 \rfloor$ $8 + 6n + \lfloor n/2 \rfloor$	$d = 4$ $d = 2$	$\mathcal{H} = C_3$
 <p>(Karyanti, 2012)</p> <p><math>S_n</math> (Sun)</p>	$13n + 4$ $12n + 5 + \lfloor n/2 \rfloor$	$d = 1$ $d = 2$	$\mathcal{H} = K_{1,3}$
 <p>(Karyanti, 2012)</p> <p><math>L_n</math> (Triangular Ladder)</p>	$16n - 3$ $15n - 1$	$d = 0$ $d = 1$	$\mathcal{H} = C_3$
 <p>(Jamil, 2014)</p> <p><math>SBt_n</math> (Shackle Graf Triangular book)</p>	$36n + 84$ $73n + 47$	$d = 96$ $d = 15$	$\mathcal{H} = Bt_3 + 2e$

Graf	$a$	$d$	Hasil
	$\frac{25n+11}{2}$ $\frac{29n+17}{2}$	$d = 1$ $d = 3$	$\mathcal{H} = S_3$
<p>(Rizky, 2014)</p>	$H_n(\text{Helm})$		
			
<p>(Rosyidah, 2014)</p>			



Gambar 2.29 (i) Pelabelan titik, (ii) Pelabelan sisi, (iii) Pelabelan total antimagic selimut, (vi) Pelabelan total antimagic dekomposisi

## BAB 3. METODE PENELITIAN

### 3.1 Metode Penelitian

Metode penelitian yang digunakan adalah Metode deduktif aksiomatik, yaitu dengan menurunkan beberapa aksioma dan teorema yang sudah ada, kemudian menerapkan pengertian dasar dekomposisi- $\mathcal{H}$ -antimagic dalam pelabelan super  $(a, d) - \mathcal{H}$ -antimagic total dekomposisi graf *tensor product*  $C_3 \otimes P_n$ . Tujuan menurunkan teorema yang ada adalah untuk memperoleh pelabelan titik dan pelabelan sisi pada graf *tensor product*  $C_3 \otimes P_n$ . Dalam penelitian ini, langkah awal yang dilakukan adalah menentukan atau menghitung nilai  $d$  (nilai beda) pada graf  $C_3 \otimes P_n$ . Setelah didapatkan beberapa pelabelan super  $(a, d) - \mathcal{H}$ -antimagic, maka dirumuskan pola pelabelan menggunakan metode pendeteksian pola (pattern recognition) yaitu menentukan perumusan pelabelan super  $(a, d) - \mathcal{H}$ -antimagic total dekomposisi untuk menentukan pola umumnya.

### 3.2 Definisi Operasional

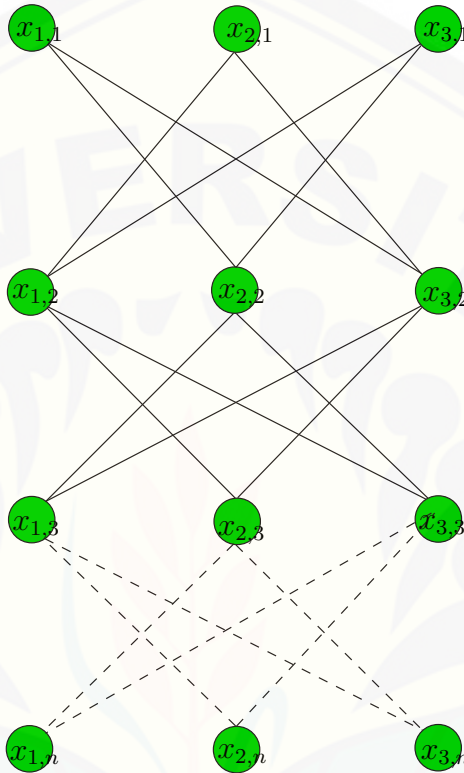
Kegunaan definisi operasional variabel dalam rancangan penelitian ini adalah untuk memberikan gambaran secara sistematis dan untuk menghindari terjadinya perbedaan pengertian makna. Definisi operasional variabel yang dimaksud adalah sebagai berikut:

#### 3.2.1 Pelabelan Super $(a, d) - \mathcal{H}$ Total Dekomposisi

Pelabelan selimut dari  $G$  adalah  $H = \{H_1, H_2, H_3, \dots, H_k\}$  keluarga subgraf dari  $G$  dengan sifat setiap sisi di  $G$  termuat pada sekurang-kurangnya satu graf  $H_i$  untuk suatu  $i \in \{1, 2, 3, \dots, k\}$ . Jika untuk setiap  $i \in \{1, 2, 3, \dots, k\}$ ,  $H_i$  isomorfik dengan suatu subgraf  $H$ , maka  $H$  dikatakan selimut- $\mathcal{H}$  dari  $G$ . Selanjutnya, jika selimut- $\mathcal{H}$  dari  $G$  memiliki sifat yaitu setiap sisi  $G$  termuat dalam tepat satu graf  $H_i$  untuk suatu  $i \in \{1, 2, 3, \dots, k\}$ , maka selimut- $\mathcal{H}$  disebut dekomposisi- $\mathcal{H}$ .

**3.2.2 Graf  $C_3 \otimes P_n$**

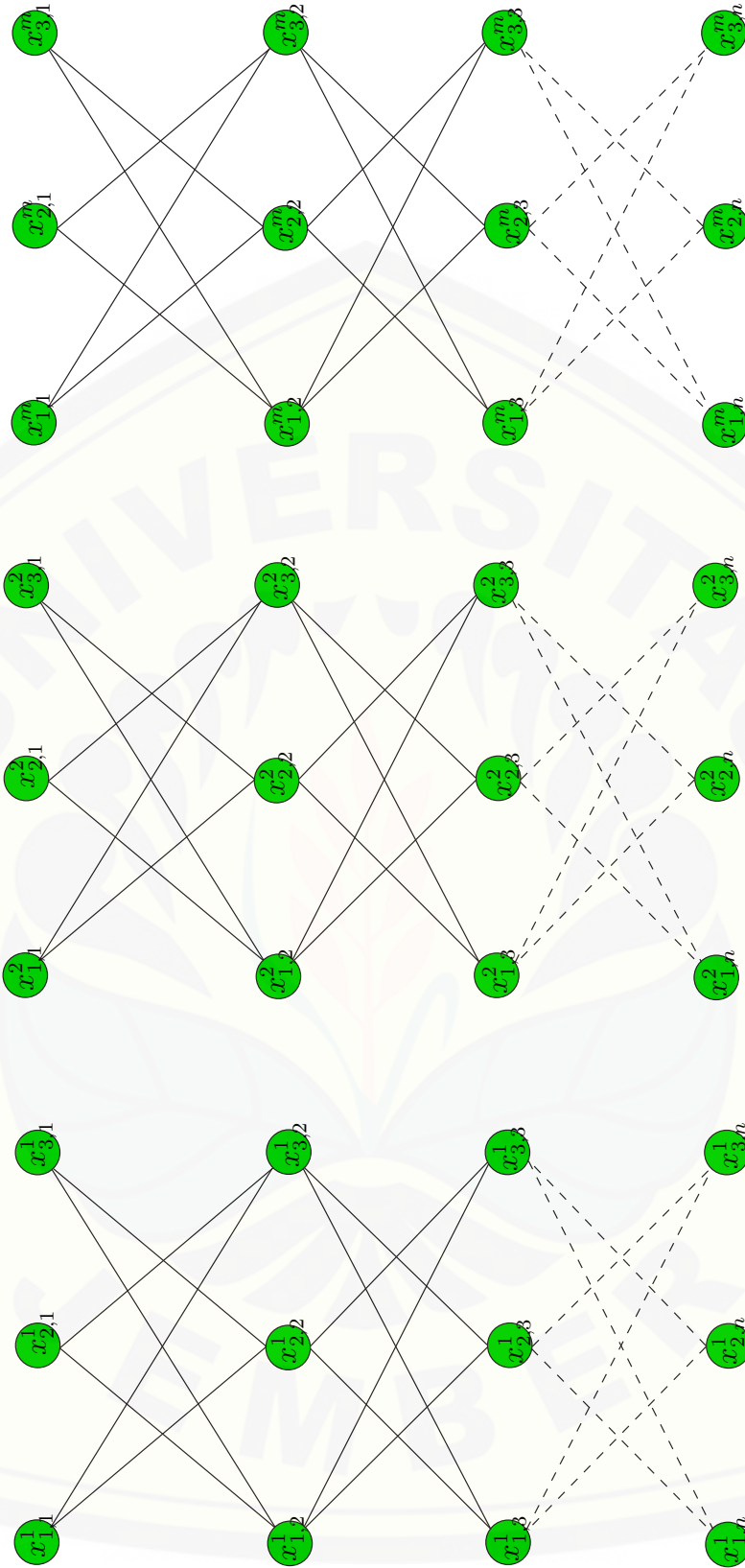
Graf  $C_3 \otimes P_n$  adalah graf *tensor product* graf  $C_3$  dan  $P_n$ , dengan  $|V| = 3n$  dan  $|E| = 6n - 6$  dimana himpunan titiknya yaitu  $V(C_3 \otimes P_n) = \{x_{1,i}, x_{2,i}, x_{3,i}; 1 \leq i \leq n\}$  dan himpunan sisi  $E(C_3 \otimes P_n) = \{x_{1,i}x_{2,i+1}, x_{1,i}x_{3,i+1}, x_{2,i}x_{1,i+1}, x_{2,i}x_{3,i+1}, x_{3,i}x_{1,i+1}, x_{3,i}x_{2,i+1}; 1 \leq i \leq n - 1\}$ . Gambar 3.1 merupakan graf  $C_3 \otimes P_n$  tunggal.



Gambar 3.1 Graf  $C_3 \otimes P_n$  untuk  $n \geq 4$

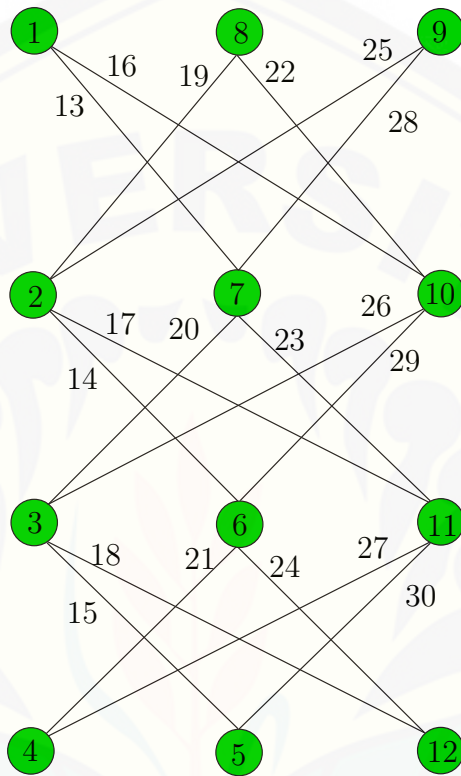
**3.2.3 Gabungan Saling Lepas Graf  $C_3 \otimes P_n$  ( $mC_3 \otimes P_n$ )**

Graf  $mC_3 \otimes P_n$  adalah gabungan saling lepas graf *tensor product* graf  $C_3$  dan  $P_n$  dengan  $|V| = 3mn$  dan  $|E| = 6mn - 6m$  dimana himpunan titiknya yaitu  $V(mC_3 \otimes P_n) = \{x_{1,i}^k, x_{2,i}^k, x_{3,i}^k; 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m\}$  dan himpunan sisi  $E(C_3 \otimes P_n) = \{x_{1,i}^k x_{2,i+1}^k, x_{1,i}^k x_{3,i+1}^k, x_{2,i}^k x_{1,i+1}^k, x_{2,i}^k x_{3,i+1}^k, x_{3,i}^k x_{1,i+1}^k, x_{3,i}^k x_{2,i+1}^k; 1 \leq i \leq n - 1, 1 \leq k \leq m\}$ . Gambar 3.2 merupakan gabungan saling lepas graf  $mC_3 \otimes P_n$ .



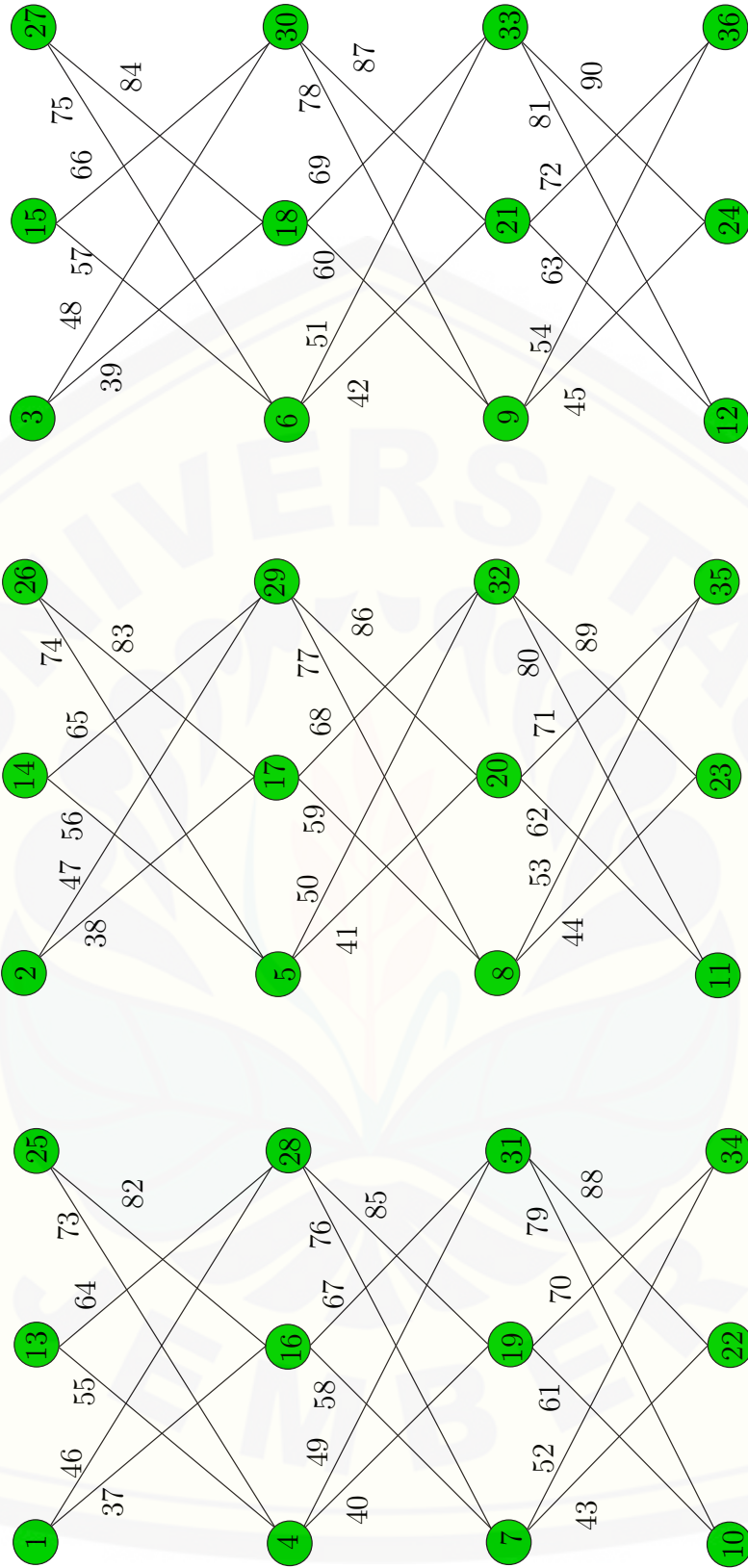
Gambar 3.2 Graf  $mC_3 \otimes P_n$  untuk  $n \geq 2$  dan  $m \geq 3$

Observasi telah dilakukan pada graf  $C_3 \otimes P_4$  dan gabungannya  $3C_3 \otimes P_4$ . Pada graf  $C_3 \otimes P_4$  ditemukan pelabelan dengan  $a = 180$  dan  $d = 0$  dimana dekomposisinya berupa graf  $C_6$ . Sedangkan untuk gabungannya, ditemukan pelabelan dengan  $a = 444$  dan  $d = 12$  dimana dekomposisinya berupa graf  $C_6$ . Pelabelan ditunjukkan pada Gambar 3.3 dan 3.4.



Gambar 3.3 Pelabelan super  $(156,12)$ -antimagic total dekomposisi pada graf operasi  $C_3 \otimes P_4$





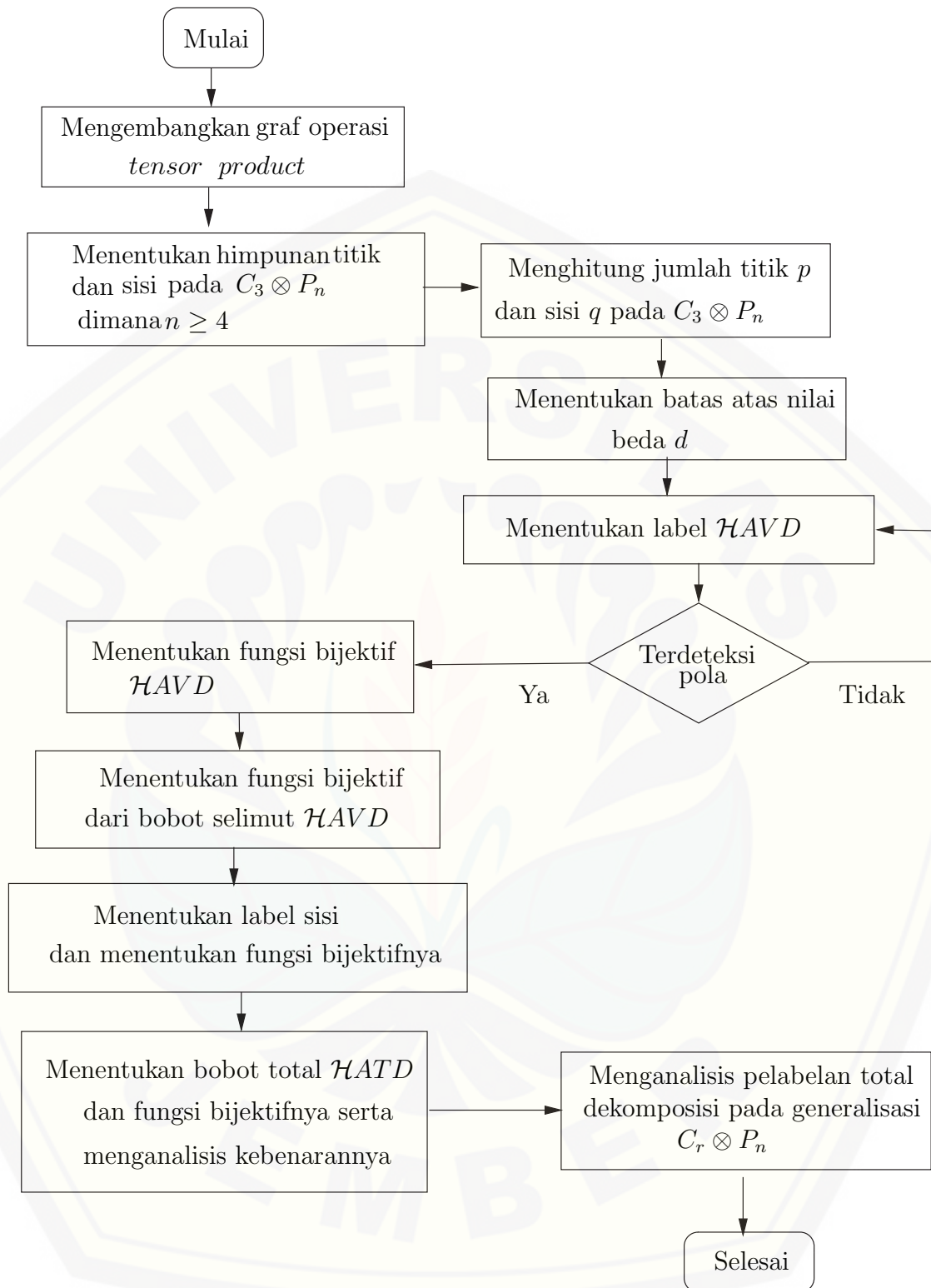
Gambar 3.4 Pelabelan super (444, 12)-antimagic total dekomposisi pada graf operasi  $3C_3 \otimes P_4$

### 3.3 Teknik Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada graf  $C_3 \otimes P_n$  dan gabungan graf  $mC_3 \otimes P_n$ . Jika pada graf tersebut ditemukan pelabelan total super  $(a, d) - \mathcal{H}$ -total dekomposisi maka dilanjutkan dengan pendeteksian pola (*patternrecognition*). Adapun teknik penelitian adalah sebagai berikut:

- menghitung jumlah titik  $p_G$  dan sisi  $q_G$  pada graf  $C_3 \otimes P_n$ , serta menghitung jumlah dekomposisi titik  $p_H$ , jumlah dekomposisi sisi  $q_H$ , dan jumlah dekomposisi pada graf  $C_3 \otimes P_n$ ;
- menentukan batas atas nilai beda  $d$  pada graf  $C_3 \otimes P_n$  sesuai dengan Lemma 2.5.1 kemudian mengembangkan permutasi  $d$  yang satu dengan yang lain;
- menentukan label  $\mathcal{H}AVD$  ( $\mathcal{H}$  Antimagic Vertex Decomposition) atau pelabelan titik  $(a, d)$ -dekomposisi antimagic pada graf  $C_3 \otimes P_n$ ;
- apabila label  $\mathcal{H}AVD$  berlaku untuk beberapa graf maka dikatakan pelabelan itu *expandable* sehingga dilanjutkan menentukan fungsi bijektif dari  $\mathcal{H}ATD$  pada graf  $C_3 \otimes P_n$ ;
- menentukan fungsi bijektif  $\mathcal{H}AVD$  pada graf  $C_3 \otimes P_n$ ;
- melabeli gabungan graf  $mC_3 \otimes P_n$  dengan  $\mathcal{S}HATD$  (Super  $\mathcal{H}$  Antimagic Total Decomposition) atau pelabelan total super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic dekomposisi dengan nilai beda  $d$  yang *feasible*;

Penelitian ini akan dilakukan dengan menemukan berbagai pola pelabelan super  $(a, d) - \mathcal{H}$ -total dekomposisi dengan banyak jenis nilai awal  $a$  serta nilai beda  $d$  yang ditentukan berdasarkan Lemma 2.5.1 sehingga penelitian juga dapat dinyatakan dalam pelabelan super  $(a, d) - \mathcal{H}$ -total dekomposisi pada graf  $C_3 \otimes P_n$ . Teknik penelitian yang dilakukan pada pelabelan tunggal juga dapat dilakukan pada gabungan saling lepas graf  $mC_3 \otimes P_n$ . Secara umum, langkah- langkah penelitian diatas dapat dilihat dalam *flowchart* pada Gambar 3.5.



Gambar 3.5 Bagan teknik penelitian

## BAB 4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dijelaskan mengenai mengenai pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$  antimagic total dekomposisi pada graf *tensor product*  $C_3 \otimes P_n$  tunggal maupun gabungannya yaitu  $mC_3 \otimes P_n$ . Penelitian ini diawali dengan menentukan nilai batas atas ( $d$ ), menentukan  $\mathcal{H}AV$  dan bobot dekomposisi  $\mathcal{H}AV$  kemudian menentukan  $\mathcal{SHATD}$  dan selanjutnya bobot total dekomposisi  $\mathcal{SHATD}$  tunggal maupun gabungan saling lepasnya. Penelitian tersebut dilakukan untuk membuktikan bahwa graf *tensor product*  $C_3 \otimes P_n$  tunggal maupun gabungannya memiliki pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$  antimagic total dekomposisi.

Hasil penelitian pada pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$  antimagic total dekomposisi pada graf *tensor product*  $C_3 \otimes P_n$  tunggal maupun gabungan saling lepasnya berupa 13 teorema. Penyajian pada penelitian ini, dengan menuliskan teorema terlebih dahulu dilanjutkan dengan bukti mengenai teorema tersebut kemudian disertakan bukti berupa contoh gambar atau ilustrasi sebagai visualisasi pembuktian teorema.

### 4.1 Super $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ Antimagic Total Dekomposisi pada Graf $C_3 \otimes P_n$ Konektif

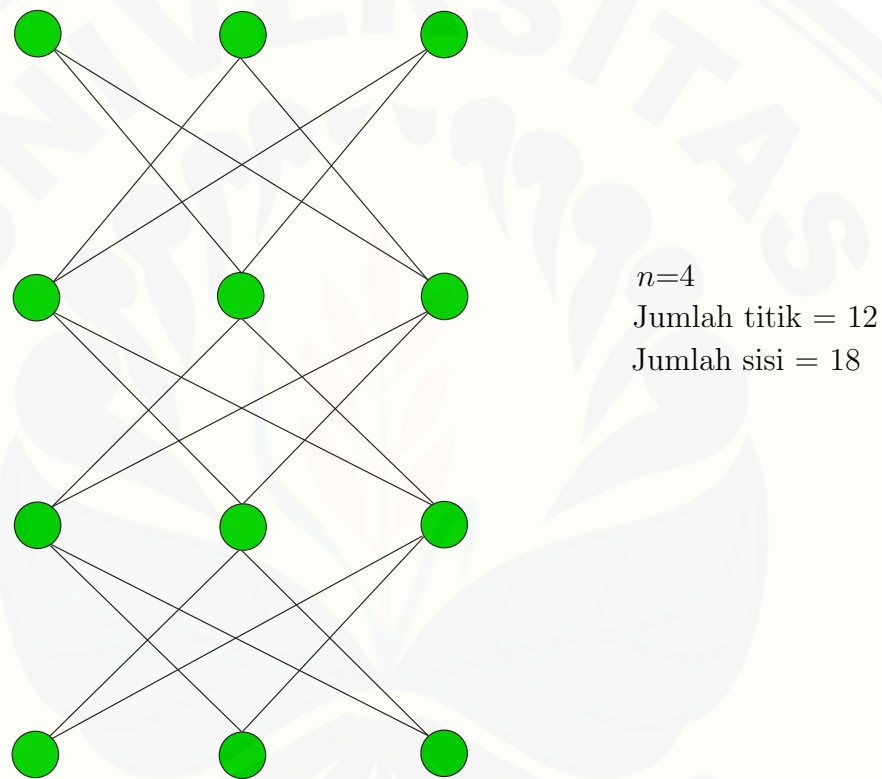
Penentuan batas atas  $d$  merupakan hal yang penting dalam penelitian ini. Batas atas adalah titik penting yang mengisyaratkan seberapa banyak nilai beda yang mungkin dimiliki oleh graf  $C_3 \otimes P_n$  maupun gabungannya dalam pelabelan super antimagic dekomposisi. Untuk menentukan nilai-nilai  $d$  tersebut, perlu diketahui jumlah titik ( $p_G$ ) dan jumlah sisi ( $q_G$ ) pada graf  $C_3 \otimes P_n$  tunggal maupun gabungannya, serta perlu diketahui jumlah titik ( $p_H$ ) dan jumlah sisi ( $q_H$ ) pada subgraf atau dekomposisi graf  $C_3 \otimes P_n$  tunggal maupun gabungannya beserta jumlah dekomposisinya ( $s$ ).

Berdasarkan definisi, graf  $C_3 \otimes P_n$  adalah graf operasi *tensor* antara graf  $C_3$  dan  $P_n$  dengan titik  $V(C_3 \otimes P_n) = \{x_{1,i}, x_{2,i}, x_{3,i}; 1 \leq i \leq n\}$  dan  $E(C_3 \otimes P_n) =$

$\{x_{1,i}x_{2,i+1}, x_{1,i}x_{3,i+1}, x_{2,i}x_{1,i+1}, x_{2,i}x_{3,i+1}, x_{3,i}x_{1,i+1}, x_{3,i}x_{2,i+1}; 1 \leq i \leq n - 1\}$ . Nilai  $n$  yang dimaksudkan adalah banyaknya *expand* graf  $C_3 \otimes P_n$  dari atas ke bawah.

Berdasarkan definisi dari graf  $C_3 \otimes P_n$  dengan  $n$  yang berbeda, didapatkan rumusan jumlah titik pada graf  $C_3 \otimes P_n$  adalah  $p_G = 3n$ . Sedangkan jumlah sisi pada graf  $C_3 \otimes P_n$  adalah  $q_G = 6n - 6$ . Gambar 4.1 dan 4.2 sebagai merupakan ilustrasi dari penentuan jumlah titik dan jumlah sisi pada graf  $C_3 \otimes P_n$ .

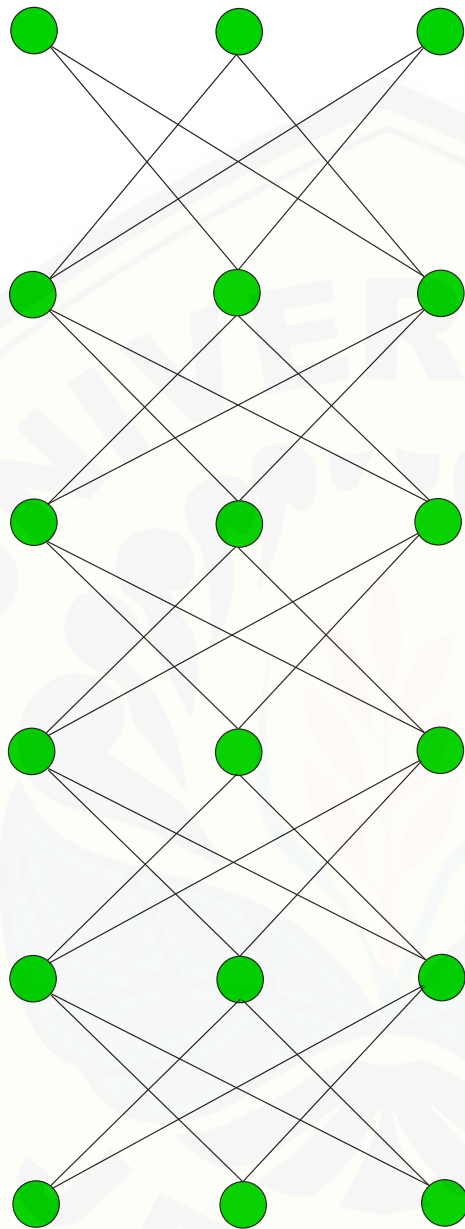
Dekomposisi pada graf  $C_3 \otimes P_n$  berupa subgraf dari graf  $C_3 \otimes P_n$  yang berupa  $C_6$ , maka jumlah titik dekomposisi  $p_H = 6$ , sedangkan jumlah sisi dekomposisi  $q_H = 6$  dan rumusan jumlah selimut graf  $C_3 \otimes P_n$  adalah  $n - 1$ .



Gambar 4.1 Jumlah titik dan sisi graf pada  $C_3 \otimes P_4$

**Observasi 4.1.1.** Jika graf  $C_3 \otimes P_n$  memiliki pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$  antimagic total dekomposisi maka  $d \leq 54$ .

**Bukti.** Graf  $C_3 \otimes P_n$  memiliki himpunan titik  $V(C_3 \otimes P_n) = \{x_{1,i}, x_{2,i}, x_{3,i}; 1 \leq i \leq$



$n=6$   
Jumlah titik = 18  
Jumlah sisi = 36

Gambar 4.2 Jumlah titik dan sisi graf pada  $C_3 \otimes P_6$

$n$ } dan sisi  $E(C_3 \otimes P_n) = \{x_{1,i}x_{2,i+1}, x_{1,i}x_{3,i+1}, x_{2,i}x_{1,i+1}, x_{2,i}x_{3,i+1}, x_{3,i}x_{1,i+1}, x_{3,i}x_{2,i+1}; 1 \leq i \leq n-1\}$ . Sedangkan jumlah titik  $p_G = 3n$  dan sisi  $q_G = 6n - 6$ , dan jumlah titik dekomposisi adalah  $p_H = 6$  serta jumlah sisi dekomposisi adalah  $q_H = 6$  dengan jumlah dekomposisi  $n - 1$ . Sesuai dengan Lemma 2.5.1, batas atas nilai beda  $d$  adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} d &\leq \frac{(p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H}{s - 1} \\ &= \frac{(3n - 6)6 + (6n - 6 - 6)6}{(n - 2)} \\ &= \frac{18n - 36 + 36n - 72}{n - 2} \\ &= \frac{54n - 108}{n - 2} \\ &= \frac{54(n - 2)}{n - 2} \\ d &\leq 54 \end{aligned}$$

Karena pelabelan  $\mathcal{SHAT}$  selalu menggunakan bilangan bulat positif, maka nilai  $d \geq 0$  dan  $d$  adalah bilangan bulat, sehingga  $d \in \{0, 1, 2, 3, \dots, 54\}$ .  $\square$

Selanjutnya penentuan fungsi bijektif pelabelan dekomposisi super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic akan disesuaikan dengan nilai  $d$  yang telah ditetapkan. Untuk menentukan pelabelan dekomposisi super  $\mathcal{H}$  antimagic pada graf  $C_3 \otimes P_n$  digunakan metode yang terdiri dari beberapa langkah. Metode ini diawali dengan menggunakan pendeteksian pola (*pattern recognition*) untuk menentukan pelabelan yang berlaku pada batas  $i$  yang telah ditemukan. Untuk penentuan pola secara umum digunakan fungsi-fungsi barisan aritmatika, fungsi ini pada akhirnya merupakan fungsi bijektif pada graf yang diteliti. Setelah fungsi bijektif diketahui selanjutnya dilakukan pembuktian secara deduktif matematik untuk membuktikan kebenaran dari teorema yang didapat. Sebagai catatan, teorema dalam penelitian ini adalah bukan teorema yang *biimplikatif* atau karakteristik sehingga pembuktiannya hanya dilakukan satu arah.

Berdasarkan hasil penggabungan pola melalui *pattern recognition* dan konsep barisan aritmatika, maka diperoleh beberapa teorema dan akibat sebagai

berikut. Teorema yang ditemukan dalam penelitian ini tidak bersifat tunggal (berkenaan dengan sifat ketunggalan) melainkan hanya bersifat keberadaan (*existence but not unique*).

Setelah mengetahui batas atas nilai  $d$ , langkah selanjutnya adalah menentukan pelabelan total super  $\mathcal{H}$  antimagic dekomposisi dengan terlebih dahulu menentukan fungsi bijektif melalui pengamatan pola dan penggunaan konsep barisan aritmatika dari titik dan sisi graf  $C_3 \otimes P_n$ , dimana titik  $V(C_3 \otimes P_n) = \{x_{1,i}, x_{2,i}, x_{3,i}; 1 \leq i \leq n\}$  dan sisi  $E(C_3 \otimes P_n) = \{x_{1,i}x_{2,i+1}, x_{1,i}x_{3,i+1}, x_{2,i}x_{1,i+1}, x_{2,i}x_{3,i+1}, x_{3,i}x_{1,i+1}, x_{3,i}x_{2,i+1}; 1 \leq i \leq n-1\}$  untuk  $n \geq 4$ .

◇ **Teorema 4.1.** *Ada pelabelan super  $(41n-4, 8)-C_6$ -antimagic total dekomposisi pada graf  $C_3 \otimes P_n$  untuk  $n \geq 4$ .*

**Bukti.** Labeli titik graf  $C_3 \otimes P_n$  dengan fungsi bijektif  $f_1$  dengan label sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f_1(x_{1,i}) &= i, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ f_1(x_{2,i}) &= 2n - i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ f_1(x_{3,i}) &= 2n + i, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Dapat dilihat bahwa  $f_1$  adalah fungsi bijektif yang memetakan  $C_3 \otimes P_n$  ke himpunan bilangan bulat  $1, 2, \dots, 3n$ . Jika  $w_{f_1}$  didefinisikan sebagai bobot dekomposisi dari pelabelan total dekomposisi pada graf  $C_3 \otimes P_n$  dimana bobot dekomposisi tersebut adalah  $\mathcal{H} = C_6$  sebagai dekomposisinya, maka fungsi bijektif  $w_{f_1}$  dapat ditentukan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} w_{f_1} &= f_1(x_{1,i}) + f_1(x_{1,i+1}) + f_1(x_{2,i}) + f_1(x_{2,i+1}) + f_1(x_{3,i}) + f_1(x_{3,i+1}) \\ &= 8n + 2i + 3, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n-1 \end{aligned}$$

Labeli sisi graf  $C_3 \otimes P_n$  dengan fungsi bijektif  $f_1$  dengan label sebagai berikut:



$$\begin{aligned}
 f_1(x_{1,i}x_{2,i+1}) &= 3n + i, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n - 1 \\
 f_1(x_{1,i}x_{3,i+1}) &= 4n + i - 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n - 1 \\
 f_1(x_{2,i}x_{1,i+1}) &= 5n + i - 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n - 1 \\
 f_1(x_{2,i}x_{3,i+1}) &= 6n + i - 3, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n - 1 \\
 f_1(x_{3,i}x_{1,i+1}) &= 7n + i - 4, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n - 1 \\
 f_1(x_{3,i}x_{2,i+1}) &= 8n + i - 5, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n - 1
 \end{aligned}$$

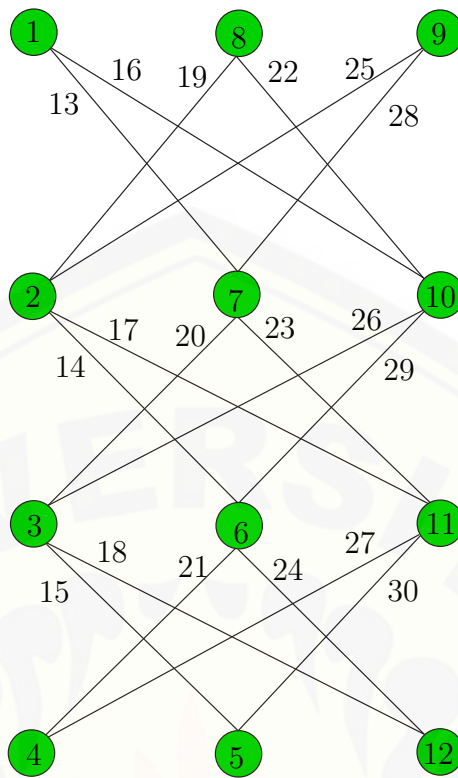
Jika  $W_{f_1}$  didefinisikan sebagai bobot total dekomposisi pada graf  $C_3 \otimes P_n$  berdasarkan penjumlahan bobot dekomposisi dengan label sisinya maka  $W_{f_1}$  dapat diperoleh dengan merumuskan jumlah bobot dekomposisi  $w_{f_1}$  dan rumus label sisi  $f_1$  dengan syarat batas  $i$  yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 W_{f_1} &= w_{f_1} + f_1(x_{1,i}x_{2,i}) + f_1(x_{1,i}x_{3,i}) + f_1(x_{2,i}x_{1,i}) + f_1(x_{2,i}x_{3,i}) + f_1(x_{3,i}x_{1,i}) + \\
 &\quad f_2(x_{3,i}x_{2,i}) \\
 &= 41n + 8i - 12
 \end{aligned}$$

Dengan demikian maka didapatkan himpunan bobot total dekomposisi  $W_{f_1} = \{41n - 4, 41n + 4, \dots, 49n - 20\}$ . Sehingga terbukti bahwa ada pelabelan super  $(41n - 4, 8) - C_6$ -total dekomposisi pada graf  $C_3 \otimes P_n$  untuk  $n \geq 4$ .  $\square$

Gambar 4.3 merupakan contoh super  $(41n - 4, 8) - C_6$  antimagic total dekomposisi  $\mathcal{SHATD}$  pada graf  $C_3 \otimes P_n$ .

$\diamond$  **Teorema 4.2.** *Ada pelabelan super  $(39n, 12) - C_6$ -antimagic total dekomposisi pada graf  $C_3 \otimes P_n$  untuk  $n \geq 4$ .*



Gambar 4.3 Super  $(160, 8) - C_6$ -total dekomposisi pada graf  $C_3 \otimes P_4$

**Bukti.** Labeli titik graf  $C_3 \otimes P_n$  dengan fungsi bijektif  $f_2$  dengan label sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 f_2(x_{1,i}) &= i, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
 f_2(x_{2,i}) &= n + i, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
 f_2(x_{3,i}) &= 2n + i, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n
 \end{aligned}$$

Dapat dilihat bahwa  $f_2$  adalah fungsi bijektif yang memetakan  $C_3 \otimes P_n$  ke himpunan bilangan bulat  $1, 2, \dots, 3n$ . Jika  $w_{f_2}$  didefinisikan sebagai bobot dekomposisi dari pelabelan total dekomposisi pada graf  $C_3 \otimes P_n$  dimana bobot dekomposisi tersebut adalah  $\mathcal{H} = C_6$  sebagai dekomposisinya, maka fungsi bijektif  $w_{f_2}$  dapat ditentukan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} w_{f_2} &= f_2(x_{1,i}) + f_2(x_{1,i+1}) + f_2(x_{2,i}) + f_2(x_{2,i+1}) + f_2(x_{3,i}) + f_2(x_{3,i+1}) \\ &= 6n + 6i + 3, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n - 1 \end{aligned}$$

Labeli sisi graf  $C_3 \otimes P_n$  dengan fungsi bijektif  $f_2$  sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f_2(x_{1,i}x_{2,i+1}) &= 3n + i, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n - 1 \\ f_2(x_{1,i}x_{3,i+1}) &= 4n + i - 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n - 1 \\ f_2(x_{2,i}x_{1,i+1}) &= 5n + i - 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n - 1 \\ f_2(x_{2,i}x_{3,i+1}) &= 6n + i - 3, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n - 1 \\ f_2(x_{3,i}x_{1,i+1}) &= 7n + i - 4, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n - 1 \\ f_2(x_{3,i}x_{2,i+1}) &= 8n + i - 5, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n - 1 \end{aligned}$$

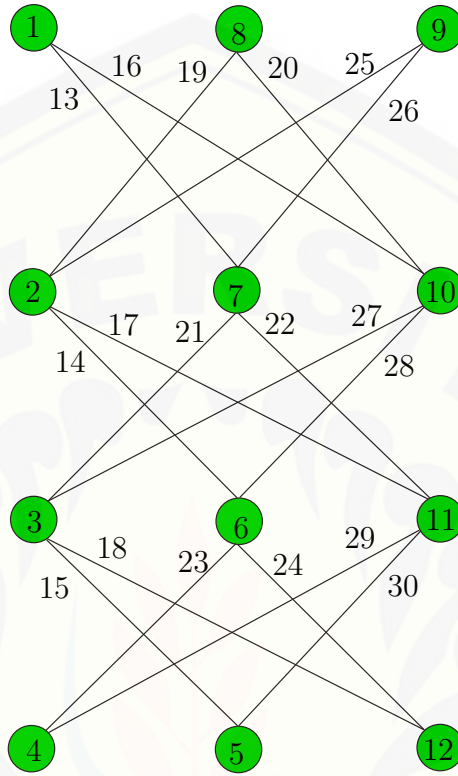
Jika  $W_{f_2}$  didefinisikan sebagai bobot total dekomposisi pada graf  $C_3 \otimes P_n$  berdasarkan penjumlahan bobot dekomposisi dengan label sisinya maka  $W_{f_2}$  dapat diperoleh dengan merumuskan jumlah bobot dekomposisi  $w_{f_2}$  dan rumus label sisi  $f_2$  dengan syarat batas  $i$  yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} W_{f_2} &= w_{f_2} + f_2(x_{1,i}x_{2,i}) + f_2(x_{1,i}x_{3,i}) + f_2(x_{2,i}x_{1,i}) + f_2(x_{2,i}x_{3,i}) + f_2(x_{3,i}x_{1,i}) + \\ &\quad f_2(x_{3,i}x_{2,i}) \\ &= 39n + 12i - 12, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n - 1 \end{aligned}$$

Dengan demikian maka didapatkan himpunan bobot total dekomposisi  $W_{f_2} = \{39n, 39n + 12, \dots, 51n - 24\}$ . Sehingga terbukti bahwa ada pelabelan super

$(39n, 12) - C_6$ -total dekomposisi pada graf  $C_3 \otimes P_n$  untuk  $n \geq 4$ . □

Gambar 4.4 merupakan contoh super  $(39n, 12)$ - $C_6$  antimagic total dekomposisi  $SHATD$  pada graf  $C_3 \otimes P_n$ .



Gambar 4.4 Super  $(156, 12) - C_6$ -total dekomposisi pada graf  $C_3 \otimes P_4$

◇ **Teorema 4.3.** *Ada pelabelan super  $(33n + 12, 24) - C_6$ -antimagic total dekomposisi pada graf  $C_3 \otimes P_n$  untuk  $n \geq 4$ .*

**Bukti.** Labeli titik graf  $C_3 \otimes P_n$  dengan fungsi bijektif  $f_3$  dengan label sebagai berikut:

$$f_3(x_{1,i}) = 2i - 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$f_3(x_{2,i}) = 2i, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$f_3(x_{3,i}) = 2n + i, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

Dapat dilihat bahwa  $f_3$  adalah fungsi bijektif yang memetakan  $C_3 \otimes P_n$  ke himpunan bilangan bulat  $1, 2, \dots, 3n$ . Jika  $w_{f_3}$  didefinisikan sebagai bobot dekomposisi dari pelabelan total dekomposisi pada graf  $C_3 \otimes P_n$  dimana bobot dekomposisi tersebut adalah  $\mathcal{H} = C_6$  sebagai dekomposisinya, maka fungsi bijektif  $w_{f_3}$  dapat ditentukan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} w_{f_3} &= f_3(x_{1,i}) + f_3(x_{1,i+1}) + f_3(x_{2,i}) + f_3(x_{2,i+1}) + f_3(x_{3,i}) + f_3(x_{3,i+1}) \\ &= 4n + 10i + 3, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n - 1 \end{aligned}$$

Labeli sisi graf  $C_3 \otimes P_n$  dengan fungsi bijektif  $f_3$  sebagai berikut:

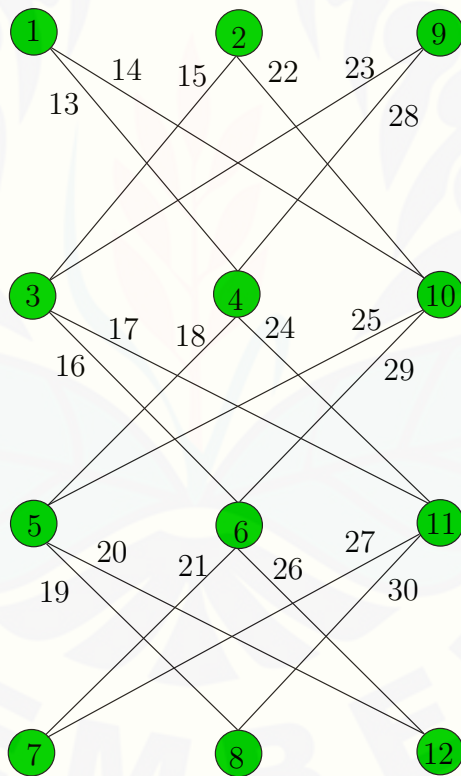
$$\begin{aligned} f_3(x_{1,i}x_{2,i+1}) &= 3n + 3i - 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n - 1 \\ f_3(x_{1,i}x_{3,i+1}) &= 3n + 3i - 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n - 1 \\ f_3(x_{2,i}x_{1,i+1}) &= 3n + 3i, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n - 1 \\ f_3(x_{2,i}x_{3,i+1}) &= 6n + 2i - 4, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n - 1 \\ f_3(x_{3,i}x_{1,i+1}) &= 6n + 2i - 3, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n - 1 \\ f_3(x_{3,i}x_{2,i+1}) &= 8n + i - 5, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n - 1 \end{aligned}$$

Jika  $W_{f_3}$  didefinisikan sebagai bobot total dekomposisi pada graf  $C_3 \otimes P_n$  berdasarkan penjumlahan bobot dekomposisi dengan label sisinya maka  $W_{f_3}$  dapat diperoleh dengan merumuskan jumlah bobot dekomposisi  $w_{f_3}$  dan rumus label sisi  $f_3$  dengan syarat batas  $i$  yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 W_{f_3} &= w_{f_3} + f_3(x_{1,i}x_{2,i}) + f_3(x_{1,i}x_{3,i}) + f_3(x_{2,i}x_{1,i}) + f_3(x_{2,i}x_{3,i}) + f_3(x_{3,i}x_{1,i}) + \\
 &\quad f_4(x_{3,i}x_{2,i}) \\
 &= 33n + 24i - 12, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n - 1
 \end{aligned}$$

Dengan demikian  $W_{f_3} = \{33n + 12, 33n + 36, \dots, 57n - 36\}$ . Sehingga terbukti bahwa ada pelabelan super  $(33n + 12, 24) - C_6$ -total dekomposisi pada graf  $C_3 \otimes P_n$  untuk  $n \geq 4$ .  $\square$

Gambar 4.5 merupakan contoh super  $(33n+12, 24)$ - $C_6$  antimagic total dekomposisi *SHATD* pada graf  $C_3 \otimes P_n$ .



Gambar 4.5 Super  $(144, 24) - (C_6)$ -total dekomposisi pada graf  $C_3 \otimes P_4$

◇ **Teorema 4.4.** *Ada pelabelan super  $(30n + 18, 30) - C_6$ -antimagic total dekomposisi pada graf  $C_3 \otimes P_n$  untuk  $n \geq 4$ .*

**Bukti.** Labeli titik graf  $C_3 \otimes P_n$  dengan fungsi bijektif  $f_4$  dengan label sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f_4(x_{1,i}) &= 2i - 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ f_4(x_{2,i}) &= \begin{cases} \frac{2n+i+1}{2}, & \text{untuk } 1 \leq i \leq n, i \text{ ganjil} \\ \frac{4n+i}{2}, & \text{untuk } 1 \leq i \leq n, i \text{ genap} \end{cases} \\ f_4(x_{3,i}) &= \begin{cases} \frac{3n+i+1}{2}, & \text{untuk } 1 \leq i \leq n, i \text{ ganjil} \\ \frac{5n+i}{2}, & \text{untuk } 1 \leq i \leq n, i \text{ genap} \end{cases} \end{aligned}$$

Dapat dilihat bahwa  $f_4$  adalah fungsi bijektif yang memetakan  $C_3 \otimes P_n$  ke himpunan bilangan bulat  $1, 2, \dots, 3n$ . Jika  $w_{f_4}$  didefinisikan sebagai bobot dekomposisi dari pelabelan total dekomposisi pada graf  $C_3 \otimes P_n$  dimana bobot dekomposisi tersebut adalah  $\mathcal{H} = C_6$  sebagai dekomposisinya, maka fungsi bijektif  $w_{f_4}$  dapat ditentukan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} w_{f_4} &= f_4(x_{1,i}) + f_4(x_{1,i+1}) + f_4(x_{2,i}) + f_4(x_{2,i+1}) + f_4(x_{3,i}) + f_4(x_{3,i+1}) \\ &= 7n + 4i + 3, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n - 1 \end{aligned}$$

Labeli sisi graf  $C_3 \otimes P_n$  dengan fungsi bijektif  $f_4$  sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f_4(x_{1,i}x_{2,i+1}) &= 3n + 5i - 4, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n - 1 \\ f_4(x_{1,i}x_{3,i+1}) &= 3n + 5i - 3, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n - 1 \\ f_4(x_{2,i}x_{1,i+1}) &= 3n + 5i - 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n - 1 \\ f_4(x_{2,i}x_{3,i+1}) &= 3n + 5i - 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_4(x_{3,i}x_{1,i+1}) &= 3n + 5i, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n - 1 \\ f_4(x_{3,i}x_{2,i+1}) &= 8n - 5i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n - 1 \end{aligned}$$

Jika  $W_{f_4}$  didefinisikan sebagai bobot total dekomposisi pada graf  $C_3 \otimes P_n$  berdasarkan penjumlahan bobot dekomposisi dengan label sisinya maka  $W_{f_4}$  dapat diperoleh dengan merumuskan jumlah bobot dekomposisi  $w_{f_4}$  dan rumus label sisi  $f_4$  dengan syarat batas  $i$  yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} W_{f_4} &= w_{f_4} + f_4(x_{1,i}x_{2,i}) + f_4(x_{1,i}x_{3,i}) + f_4(x_{2,i}x_{1,i}) + f_4(x_{2,i}x_{3,i}) + f_4(x_{3,i}x_{1,i}) + \\ &\quad f_4(x_{3,i}x_{2,i}) \\ &= 30n + 24i - 6, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n - 1 \end{aligned}$$

Dengan demikian  $W_{f_4} = \{30n + 18, 30n + 48, \dots, 54n - 30\}$ . Sehingga terbukti bahwa ada pelabelan super  $(30n + 18, 30) - C_6$ -total dekomposisi pada graf  $C_3 \otimes P_n$  untuk  $n \geq 4$ .  $\square$

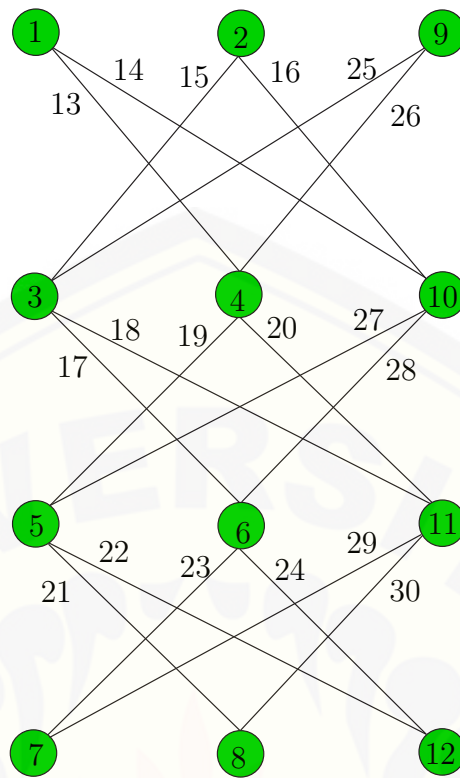
Gambar 4.6 merupakan contoh super  $(30n+18, 30) - C_6$  antimagic total dekomposisi *SHATD* pada graf  $C_3 \otimes P_n$ .

$\diamond$  **Teorema 4.5.** *Ada pelabelan super  $(18n + 42, 54) - C_6$ -antimagic total dekomposisi pada graf  $C_3 \otimes P_n$  untuk  $n \geq 4$ .*

**Bukti.** Labeli titik graf  $C_3 \otimes P_n$  dengan fungsi bijektif  $f_5$  dengan label sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f_5(x_{1,i}) &= 3i - 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ f_5(x_{2,i}) &= 3i - 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ f_5(x_{3,i}) &= 3i, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$





Gambar 4.6 Super  $(138, 30) - C_6$ -total dekomposisi pada graf  $C_3 \otimes P_4$

Dapat dilihat bahwa  $f_5$  adalah fungsi bijektif yang memetakan  $C_3 \otimes P_n$  ke himpunan bilangan bulat  $1, 2, \dots, 3n$ . Jika  $w_{f_5}$  didefinisikan sebagai bobot dekomposisi dari pelabelan total dekomposisi pada graf  $C_3 \otimes P_n$  dimana bobot dekomposisi tersebut adalah  $\mathcal{H} = C_6$  sebagai dekomposisinya, maka fungsi bijektif  $w_{f_5}$  dapat ditentukan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} w_{f_5} &= f_5(x_{1,i}) + f_5(x_{1,i+1}) + f_5(x_{2,i}) + f_5(x_{2,i+1}) + f_5(x_{3,i}) + f_5(x_{3,i+1}) \\ &= 18i + 3, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n - 1 \end{aligned}$$

Labeli sisi graf  $C_3 \otimes P_n$  dengan fungsi bijektif  $f_5$  sebagai berikut:

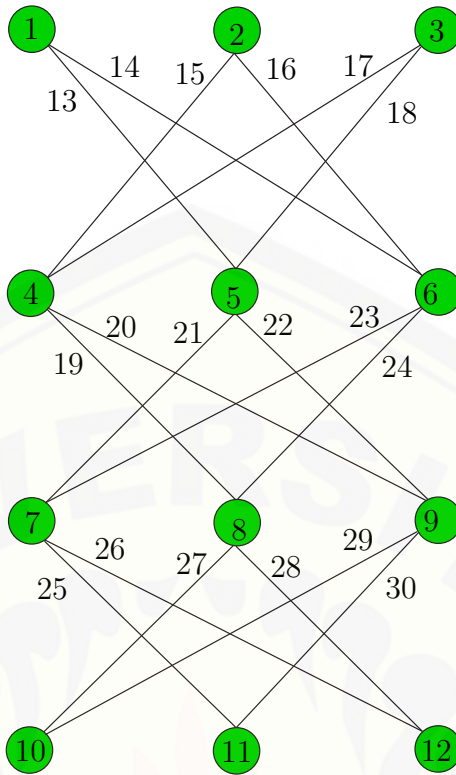
$$\begin{aligned}
 f_5(x_{1,i}x_{2,i+1}) &= 3n + 6i - 5, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n - 1 \\
 f_5(x_{1,i}x_{3,i+1}) &= 3n + 6i - 4, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n - 1 \\
 f_5(x_{2,i}x_{1,i+1}) &= 3n + 6i - 3, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n - 1 \\
 f_5(x_{2,i}x_{3,i+1}) &= 3n + 6i - 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n - 1 \\
 f_5(x_{3,i}x_{1,i+1}) &= 3n + 6i - 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n - 1 \\
 f_5(x_{3,i}x_{2,i+1}) &= 3n + 6i, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n - 1
 \end{aligned}$$

Jika  $W_{f_5}$  didefinisikan sebagai bobot total dekomposisi pada graf  $C_3 \otimes P_n$  berdasarkan penjumlahan bobot dekomposisi dengan label sisinya maka  $W_{f_5}$  dapat diperoleh dengan merumuskan jumlah bobot dekomposisi  $w_{f_5}$  dan rumus label sisi  $f_5$  dengan syarat batas  $i$  yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 W_{f_5} &= w_{f_5} + f_5(x_{1,i}x_{2,i}) + f_5(x_{1,i}x_{3,i}) + f_5(x_{2,i}x_{1,i}) + f_5(x_{2,i}x_{3,i}) + f_5(x_{3,i}x_{1,i}) + \\
 &\quad f_5(x_{3,i}x_{2,i}) \\
 &= 18n + 54i - 12, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n - 1
 \end{aligned}$$

Dengan demikian  $W_{f_5} = \{18n + 42, 18n + 96, \dots, 62n - 66\}$ . Sehingga terbukti bahwa ada pelabelan super  $(18n + 42, 54) - C_6$ -total dekomposisi pada graf  $C_3 \otimes P_n$  untuk  $n \geq 4$ .  $\square$

Gambar 4.7 merupakan contoh super  $(18n+42, 54)$ - $C_6$  antimagic total dekomposisi  $\mathcal{SHATD}$  pada graf  $C_3 \otimes P_n$ .



Gambar 4.7 Super  $(114, 54) - C_6$ -total dekomposisi pada graf  $C_3 \otimes P_4$

#### 4.2 Super $(a,d)\text{-}\mathcal{H}$ Antimagic Total Dekomposisi pada Graf $C_3 \otimes P_n$ Diskonektif

Selanjutnya peneliti melakukan penelitian terkait dengan gabungan saling lepas pada super  $(a,d)\text{-}\mathcal{H}$  antimagic total dekomposisi pada graf  $mC_3 \otimes P_n$ . Gabungan saling lepas graf  $mC_3 \otimes P_n$  merupakan shackle graf triangular book dengan salinan sebanyak  $m$ . Salinan dari graf  $C_3 \otimes P_n$  diletakkan sejajar ke arah samping sebanyak  $m$ . Gabungan graf  $mC_3 \otimes P_n$  didefinisikan sebagai gabungan dari sebanyak  $m$  graf  $C_3 \otimes P_n$  yang mempunyai titik  $V(C_3 \otimes P_n) = \{x_{1,i}^k, x_{2,i}^k, x_{3,i}^k; 1 \leq i \leq n; 1 \leq k \leq m\}$  dan  $E(C_3 \otimes P_n) = \{x_{1,i}^k x_{2,i+1}^k, x_{1,i}^k x_{3,i+1}^k, x_{2,i}^k x_{1,i+1}^k, x_{2,i}^k x_{3,i+1}^k, x_{3,i}^k x_{1,i+1}^k, x_{3,i}^k x_{2,i+1}^k; 1 \leq i \leq n - 1; 1 \leq k \leq m\}$ .

Sama seperti penelitian pada graf  $C_3 \otimes P_n$ , ditentukan terlebih dahulu rumusan jumlah titik ( $p_G$ ) dan jumlah sisi ( $q_G$ ) pada gabungan saling lepas graf

$C_3 \otimes P_n$ . Jumlah titik dan jumlah sisi pada graf  $C_3 \otimes P_n$  dapat ditentukan terlebih dahulu dengan mencermati definisi gabungan saling lepas pada suatu graf. Gabungan  $m$  graf  $C_3 \otimes P_n$  yang dinotasikan  $mC_3 \otimes P_n$  didefinisikan sebagai gabungan saling lepas dari  $m$  buah salinan graf  $C_3 \otimes P_n$  dengan  $1 \leq k \leq m$ , ditulis:  $C_3 \otimes P_n^1 \cup C_3 \otimes P_n^2 \cup C_3 \otimes P_n^3 \cup \dots \cup C_3 \otimes P_n^k$ . Sehingga jumlah titik graf  $mC_3 \otimes P_n$  adalah  $m$  kali jumlah titik graf  $C_3 \otimes P_n$  dapat dituliskan sebagai  $p_G = m(3n) = 3mn$ . Dan jumlah sisi graf  $mC_3 \otimes P_n$  adalah  $m$  kali jumlah sisi graf  $C_3 \otimes P_n$  dituliskan dengan  $q_G = m(6n - 6) = 6mn - 6m$ .

Sedangkan jumlah titik pada dekomposisi graf  $mC_3 \otimes P_n$  adalah  $m$  kali jumlah titik pada dekomposisi graf  $C_3 \otimes P_n$ , yaitu  $p_H = m(6) = 6m$ . Dan jumlah sisi pada dekomposisi graf  $mC_3 \otimes P_n$  adalah  $m$  kali jumlah sisi pada dekomposisi graf  $C_3 \otimes P_n$ , dapat ditulis dengan  $q_H = m(6) = 6m$ . Serta jumlah dekomposisi graf  $mC_3 \otimes P_n$  adalah  $m$  kali jumlah dekomposisi graf  $C_3 \otimes P_n$ , dapat dituliskan  $s = m(n - 1) = mn - m$ .

Untuk menentukan batas atas  $d$  gabungan saling lepas graf  $C_3 \otimes P_n$  sesuai dengan Lemma 2.5.1 adalah sebagai berikut:

◇ **Observasi 4.2.1.** *Jika gabungan saling lepas graf  $mC_3 \otimes P_n$  memiliki pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$  antimagic total dekomposisi maka  $d \leq 54m$ .*

**Bukti.** Gabungan graf  $mC_3 \otimes P_n$  memiliki himpunan titik  $V(mC_3 \otimes P_n) = \{x_{1,i}^k, x_{2,i}^k, x_{3,i}^k; 1 \leq i \leq n; 1 \leq k \leq m\}$  dan sisi  $E(mC_3 \otimes P_n) = \{x_{1,i}^k x_{2,i+1}^k, x_{1,i}^k x_{3,i+1}^k, x_{2,i}^k x_{1,i+1}^k, x_{2,i}^k x_{3,i+1}^k, x_{3,i}^k x_{1,i+1}^k, x_{3,i}^k x_{2,i+1}^k; 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq k \leq m\}$ . Sedangkan jumlah titik  $p_G = 3mn$  dan sisi  $q_G = 6mn - 6m$ , dan jumlah titik dekomposisi adalah  $p_H = 6$  serta jumlah sisi dekomposisi adalah  $q_H = 6$  dengan jumlah dekomposisi  $mn - m$ . Sesuai dengan Lemma 2.5.1, batas atas nilai beda  $d$  adalah sebagai berikut:

$$d \leq \frac{(p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H}{s - 1}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(3mn - 6)6 + (6mn - 6m - 6)6}{(n - 1)m - 1} \\
 &= \frac{54mn - 30m - 72}{mn - m - 1} \\
 d &\leq 54 + \frac{18m - 18}{mn - m - 1}
 \end{aligned}$$

Karena  $0 < \frac{(m-1)}{mn-m-1} < 1$ , maka  $d \leq 72$  sehingga  $d \in \{0, 1, 2, 3, \dots, 72\}$ .  $\square$

Selanjutnya penentuan fungsi bijektif pelabelan dekomposisi super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic akan disesuaikan dengan nilai  $d$  yang telah ditetapkan. Sama seperti graf  $C_3 \otimes P_n$  tunggal, metode yang digunakan dalam menemukan pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$  antimagic total dekomposisi pada gabungan saling lepas graf  $mC_3 \otimes P_n$  terdiri dari beberapa langkah yang diawali dengan menggunakan pendeteksian pola (*pattern recognition*) untuk menentukan pelabelan yang berlaku sampai dengan batas  $i, j$  dan  $k$  yang telah ditemukan. Kemudian untuk menentukan pola secara umum digunakan fungsi-fungsi dalam barisan aritmatika untuk menentukan fungsi bijektifnya. Setelah fungsi bijektif diketahui maka harus dibuktikan secara deduktif matematik untuk membuktikan kebenaran dari teorema tersebut.

Perlu diketahui bahwa teorema dalam penelitian ini adalah bukan teorema yang biimplikatif atau karakteristik sehingga pembuktiannya hanya dilakukan satu arah. Dari hasil penggabungan pola melalui *pattern recognition* dan konsep barisan aritmatika, maka diperoleh teorema dan akibat sebagai berikut. Teorema yang ditemukan dalam penelitian ini tidak bersifat tunggal (berkenaan dengan sifat ketunggalan) melainkan hanya bersifat keberadaan (*existence but not unique*). Langkah selanjutnya adalah menentukan pelabelan total super  $\mathcal{H}$  antimagic dekomposisi pada graf  $mC_3 \otimes P_n$  dengan terlebih dahulu menentukan fungsi bijektif melalui pengamatan pola dan penggunaan konsep barisan aritmatika.

$\diamond$  **Teorema 4.6.** *Ada pelabelan super  $(39mn - 12m + 12, 12) - C_6$ -antimagic total dekomposisi pada gabungan saling lepas graf  $mC_3 \otimes P_n$  untuk  $n \geq 4$ , dan  $m \geq 2$ .*

**Bukti.** Definisikan titik pada graf  $mC_3 \otimes P_n$  dengan fungsi  $f_6$  sebagai berikut:

$$f_6(x) = \begin{cases} m[f_2(x) - 1] + k, & x \in V(C_3 \otimes P_n) \\ m[f_2(x) - 1] + k, & x \in E(C_3 \otimes P_n) \end{cases}$$

Sedemikian hingga fungsi titik pada graf  $mC_3 \otimes P_n$  adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f_6(x_{1,i}) &= m[i - 1] + k \\ f_6(x_{2,i}) &= m[n + i - 1] + k \\ f_6(x_{3,i}) &= m[2n + i - 1] + k \end{aligned}$$

dan fungsi sisi pada graf  $mC_3 \otimes P_n$  yaitu:

$$\begin{aligned} f_6(x_{1,i}x_{2,i+1}) &= m[3n + i - 1] + k \\ f_6(x_{1,i}x_{3,i+1}) &= m[4n + i - 1 - 1] + k \\ f_6(x_{2,i}x_{1,i+1}) &= m[5n + i - 2 - 1] + k \\ f_6(x_{2,i}x_{3,i+1}) &= m[6n + i - 3 - 1] + k \\ f_6(x_{3,i}x_{1,i+1}) &= m[7n + i - 4 - 1] + k \\ f_6(x_{3,i}x_{2,i+1}) &= m[8n + i - 5 - 1] + k \end{aligned}$$

Jika  $w_{f_6}$  didefinisikan sebagai bobot dekomposisi dari pelabelan total dekomposisi pada graf  $mC_3 \otimes P_n$ , maka fungsi bijektif  $w_{f_6}$  dapat ditentukan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} w_{f_6} &= f_6(x_{1,i}) + f_6(x_{1,i+1}) + f_6(x_{2,i}) + f_6(x_{2,i+1}) + \\ &\quad f_6(x_{3,i}) + f_6(x_{3,i+1}) \\ &= 6mn - 3m + 6im + 6k, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n - 1 \end{aligned}$$

Jika  $W_{f_6}$  didefinisikan sebagai bobot total dekomposisi pada graf  $mC_3 \otimes P_n$  berdasarkan penjumlahan bobot dekomposisi dengan label sisinya maka  $W_{f_6}$  dapat diperoleh dengan merumuskan jumlah bobot dekomposisi  $w_{f_6}$  dan rumus label sisi  $f_6$  dengan syarat batas  $i$  dan  $k$  yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

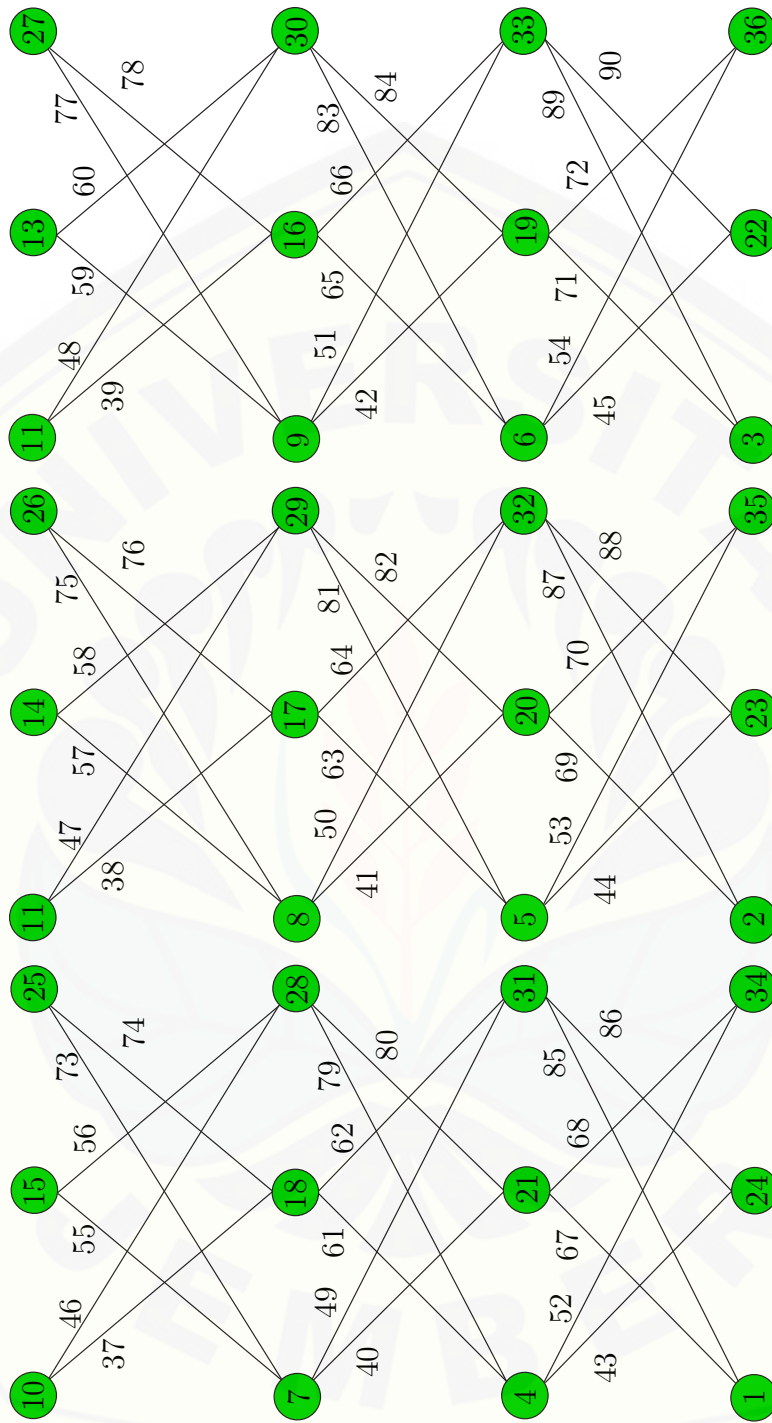
$$\begin{aligned} W_{f_6} &= w_{f_6} + f_6(x_{1,i}^k x_{2,i}^k) + f_6(x_{1,i}^k x_{3,i}^k) + f_6(x_{2,i}^k x_{1,i}^k) + f_6(x_{2,i}^k x_{3,i}^k) + f_6(x_{3,i}^k \\ &\quad x_{1,i}^k) + f_6(x_{3,i}^k x_{2,i}^k) \\ &= 39mn - 24m + 12im + 12k, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n - 1, 1 \leq k \leq m \end{aligned}$$

Dengan demikian  $W_{f_6} = \{39mn - 12m + 12, 39mn - 12m + 24, \dots, 51mn - 24m\}$ . Sehingga terbukti bahwa ada pelabelan super  $(39mn - 12m + 12, 12) - C_6$ -total dekomposisi pada gabungan saling lepas graf  $mC_3 \otimes P_n$  untuk  $n \geq 4$ , dan  $m \geq 2$ .  $\square$

Gambar 4.8 merupakan contoh super  $(39mn - 12m + 12, 12) - C_6$  antimagic total dekomposisi  $SHATD$  pada graf  $mC_3 \otimes P_n$ .

$\diamond$  **Teorema 4.7.** *Ada pelabelan super  $(41mn - 14m + 10, 8) - C_6$ -antimagic total dekomposisi pada gabungan saling lepas graf  $mC_3 \otimes P_n$  untuk  $n \geq 4$ , dan  $m \geq 2$ .*

**Bukti.** Labeli titik graf  $C_3 \otimes P_n$  dengan fungsi bijektif  $f_7$  dengan label sebagai berikut:



Gambar 4.8 Super  $(444, 12) - C_6$ -total dekomposisi pada graf  $3C_3 \otimes P_4$



$$\begin{aligned} f_7(x_{1,i}^k) &= mn - im + k, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq n \\ f_7(x_{2,i}^k) &= mn + im - k - 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq n \\ f_7(x_{3,i}^k) &= 2mn + im - m + k, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq n \end{aligned}$$

Dapat dilihat bahwa  $f_7$  adalah fungsi bijektif yang memetakan  $mC_3 \otimes P_n$  ke himpunan bilangan bulat  $1, 2, \dots, 3mn$ . Jika  $w_{f_7}$  didefinisikan sebagai bobot dekomposisi dari pelabelan total dekomposisi pada graf  $mC_3 \otimes P_n$  dimana bobot dekomposisi tersebut diperoleh dari penjumlahan beberapa buah label titik dari  $\mathcal{H} = C_6$  yang menjadi dekomposisi pada graf  $mC_3 \otimes P_n$ , maka fungsi bijektif  $w_{f_7}$  dapat ditentukan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} w_{f_7} &= f_7(x_{1,i}^k) + f_7(x_{1,i+1}^k) + f_7(x_{2,i}^k) + f_7(x_{2,i+1}^k) + f_7(x_{3,i}^k) + f_7(x_{3,i+1}^k) \\ &= 8mn + 2im - m + 2k + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n - 1, 1 \leq k \leq m \end{aligned}$$

Untuk melabeli sisi graf  $mC_3 \otimes P_n$  gunakan label sisi yang terdapat pada teorema 4.6 ke dalam teorema 4.7 dimana  $f_7 = f_6$ . Sehingga  $f_7(x_{1,i}^k x_{2,i+1}^k) = f_6(x_{1,i}^k x_{2,i+1}^k)$ ,  $f_7(x_{1,i}^k x_{3,i+1}^k) = f_6(x_{1,i}^k x_{3,i+1}^k)$ ,  $f_7(x_{2,i}^k x_{1,i+1}^k) = f_6(x_{2,i}^k x_{1,i+1}^k)$ ,  $f_7(x_{2,i}^k x_{3,i+1}^k) = f_6(x_{2,i}^k x_{3,i+1}^k)$ ,  $f_7(x_{3,i}^k x_{1,i+1}^k) = f_6(x_{3,i}^k x_{1,i+1}^k)$ , dan  $f_7(x_{3,i}^k x_{2,i+1}^k) = f_6(x_{3,i}^k x_{2,i+1}^k)$ .

Jika  $W_{f_7}$  didefinisikan sebagai bobot total dekomposisi pada graf  $mC_3 \otimes P_n$  berdasarkan penjumlahan bobot dekomposisi dengan label sisinya maka  $W_{f_7}$  dapat diperoleh dengan merumuskan jumlah bobot dekomposisi  $w_{f_7}$  dan rumus label sisi  $f_7$  dengan syarat batas  $i$  dan  $k$  yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 W_{f_7} &= w_{f_7} + f_7(x_{1,i}^k x_{2,i}^k) + f_7(x_{1,i}^k x_{3,i}^k) + f_7(x_{2,i}^k x_{1,i}^k) + f_{12}(x_{2,i}^k x_{3,i}^k) + f_7(x_{3,i}^k \\
 &\quad x_{1,i}^k) + f_7(x_{3,i}^k x_{2,i}^k) \\
 &= 41mn - 22m + 8im + 8k + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n - 1, 1 \leq k \leq m
 \end{aligned}$$

Dengan demikian  $W_{f_7} = \{41mn - 14m + 10, 41mn - 14m + 18, \dots, 49mn - 30m + 10\}$ . Sehingga terbukti bahwa ada pelabelan super  $(41mn - 14m + 10, 8) - (C_6)$ -total dekomposisi pada gabungan saling lepas graf  $mC_3 \otimes P_n$  untuk  $n \geq 4$ , dan  $m \geq 2$ .  $\square$

Gambar 4.9 merupakan contoh super  $(41mn - 14m + 10, 8) - C_6$  antimagic total dekomposisi  $\mathcal{SHATD}$  pada graf  $mC_3 \otimes P_n$ .

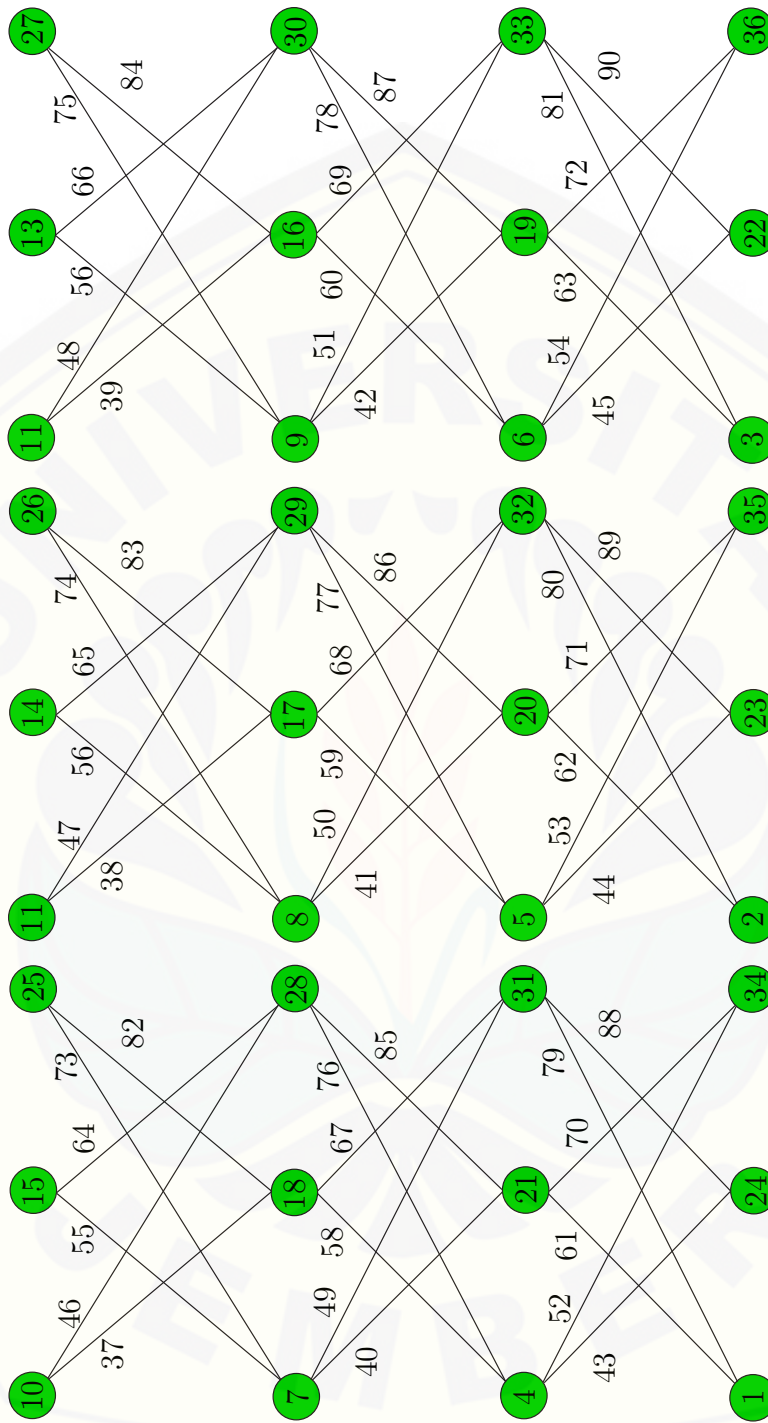
### 4.3 Analisis Penelitian

Dalam analisis ini, peneliti menemukan fungsi pelabelan super  $(a, d) - \mathcal{H}$  antimagic total dekomposisi pada graf  $C_3 \otimes P_n$  secara umum yaitu  $C_r \otimes P_n$  untuk  $r \geq 3$  dan  $n \geq 4$  dan gabungan saling lepasnya  $mC_r \otimes P_n$  untuk  $r \geq 3$ ,  $n \geq 4$ , dan  $m \geq 2$ .

#### 4.3.1 Graf *Tensor Product* Konektif

Graf *tensor product* dari  $C_r$  and  $P_n$ , dinotasikan  $C_r \otimes P_n$ , adalah graf konektif dengan himpunan titik  $V(C_r \otimes P_n) = \{x_{j,i}; 1 \leq j \leq r; 1 \leq i \leq n\}$  dan himpunan sisi  $E(C_r \otimes P_n) = \{x_{1,i}x_{2,i+1}, x_{1,i}x_{r,i+1}, x_{j,i}x_{j-1,i+1}, x_{j,i}x_{j+1,i+1}, x_{r,i}x_{1,i+1}, x_{r,i}x_{r-1,i+1}; 2 \leq j \leq r - 1, 1 \leq i \leq n - 1\}$ .

Jika graf *tensor product*  $C_r \otimes P_n$  memiliki pelabelan super  $(a, d) - C_{2r}$ -antimagic total dekomposisi maka  $p_G = |V(C_r \otimes P_n)| = rn$ ,  $q_G = |E(C_r \otimes P_n)| = 2r(n - 1)$ ,  $p_H = |V(C_{2r})| = 2r$ ,  $q_H = |E(C_{2r})| = 2r$ ,  $s = n - 1$ , dan sesuai



Gambar 4.9 Super  $(460, 8) - (C_6)$ -total dekomposisi pada graf  $3C_3 \otimes P_4$

dengan Lemma 2.5.1, batas atas nilai beda  $d$  adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 d &\leq \frac{(p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H}{s - 1} \\
 &= \frac{(rn - 2r)2r + (2rn - 2r - 2r)2r}{n - 2} \\
 &= \frac{6r^2n - 12r^2}{n - 2} \\
 &= 6r^2 \\
 d &\leq 6r^2
 \end{aligned}$$

Kemudian hasil penelitian pada pelabelan super  $(a, d)$ - $C_{2r}$ -antimagic total dekomposisi pada graf *tensor product* konektif  $C_r \otimes P_n$  dijelaskan pada teorema-teorema berikut.

◇ **Teorema 4.8.** *Ada pelabelan super  $(10rn + 9n - 4r + 12 + (r - 3)(2rn + 15n - 4) + (r - 3)(r - 4)(3n - 2), 4r)$ - $C_{2r}$  antimagic total dekomposisi pada graf  $C_r \otimes P_n$  untuk  $n \geq 4$  dan  $r \geq 3$ .*

**Bukti.** Untuk  $G = C_r \otimes P_n$ , labeli fungsi titik dengan  $f_8$  sedemikian hingga:  $f_8(x_{j,i}) = jn - n + i$ , untuk  $1 \leq j \leq r, 1 \leq i \leq n$ , dan label sisi, untuk  $2 \leq j \leq r - 1$  yaitu:

$$\begin{aligned}
 f_8(x_{1,i}x_{2,i+1}) &= rn + i, \text{ for } 1 \leq i \leq n - 1 \\
 f_8(x_{1,i}x_{r,i+1}) &= rn + n + i - 1, \text{ for } 1 \leq i \leq n - 1 \\
 f_8(x_{j,i}x_{j-1,i+1}) &= rn - 2n + 2jn - 2j + i + 2, \text{ for } 1 \leq i \leq n - 1 \\
 f_8(x_{j,i}x_{j+1,i+1}) &= rn - n + 2jn - 2j + i + 1, \text{ for } 1 \leq i \leq n - 1 \\
 f_8(x_{1,i}x_{1,i+1}) &= 3rn - 2n - 2r + i + 2, \text{ for } 1 \leq i \leq n - 1 \\
 f_8(x_{r,i}x_{r-1,i+1}) &= 3rn - n - 2r + i + 1, \text{ for } 1 \leq i \leq n - 1
 \end{aligned}$$

Pelabelan titik dan sisi  $f_8$  adalah fungsi bijektif  $f_8 : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, 3rn - 2r\}$ . Bobot dekomposisi pada graf  $C_r \otimes P_n$ , for  $1 \leq j \leq r, 1 \leq i \leq n$  yaitu  $w_{f_8} = \cup_{j=1}^r (f_8(x_{j,i}) + f_8(x_{j,i+1})) = \cup_{j=1}^r (2jn - 2n + 2i + 1)$ , dan

bobot total dekomposisinya yaitu:

$$\begin{aligned} W_{f_8} &= w_{f_8} + f_8(x_{1,i}x_{2,i+1}) + f_8(x_{1,i}x_{r,i+1}) + \cup_{j=2}^{r-1}(f_8(x_{j,i}x_{j-1,i+1}) + \\ &\quad f_1(x_{j,i}x_{j+1,i+1})) + f_8(x_{1,i}x_{1,i+1}) + f_8(x_{r,i}x_{r-1,i+1}) \\ &= \cup_{j=1}^r(2jn - 2n + 2i + 1) + 2rn + 2i + n - 1 + \\ &\quad \cup_{j=2}^{r-1}(2rn - 3n + 4j(n - 1) + 2i + 3) + 6rn - 3n - 4r + 2i + 3 \end{aligned}$$

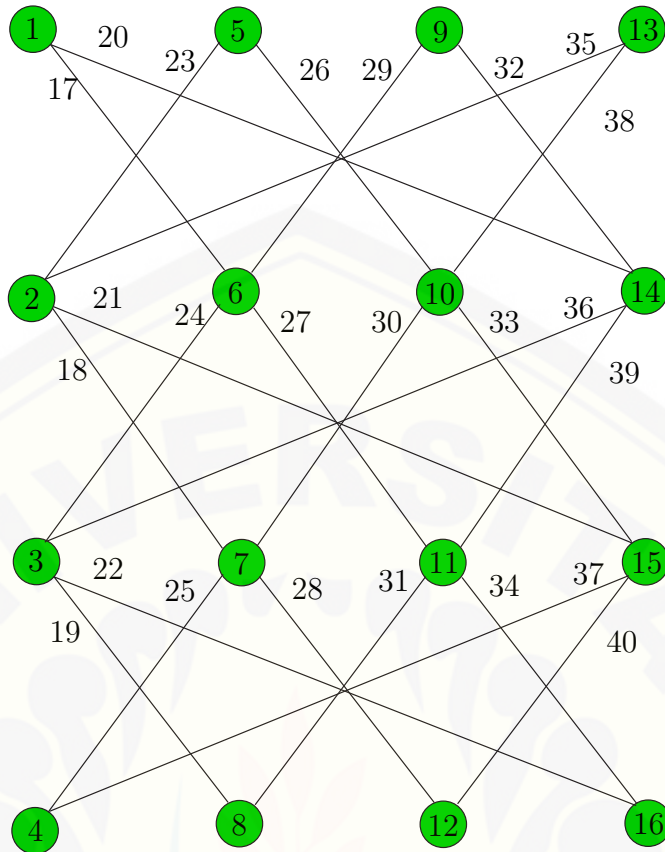
Dengan menggunakan rumus barisan tingkat dua, maka bobot total dekomposisi membentuk barisan  $W_{f_8} = \{10rn + 9n - 4r + 12 + (r - 3)(2rn + 15n - 4) + (r - 3)(r - 4)(3n - 2), 10rn + 9n - 4r + 12 + (r - 3)(2rn + 15n - 4) + (r - 3)(r - 4)(3n - 2) + 4r, \dots, 10rn + 9n - 4r + 12 + (r - 3)(2rn + 15n - 4) + (r - 3)(r - 4)(3n - 2) + (n - 2)4r\}$ . Sehingga terbukti bahwa ada pelabelan super  $(10rn + 9n - 4r + 12 + (r - 3)(2rn + 15n - 4) + (r - 3)(r - 4)(3n - 2), 4r)$ - $C_{2r}$  antimagic total dekomposisi untuk  $n \geq 4$  dan  $r \geq 3$ .  $\square$

Gambar 4.10 merupakan contoh super  $(10rn + 9n - 4r + 12 + (r - 3)(2rn + 15n - 4) + (r - 3)(r - 4)(3n - 2), 4r)$ - $C_{2r}$  antimagic total dekomposisi  $\mathcal{SHATD}$  pada graf  $C_r \otimes P_n$ .

$\diamond$  **Teorema 4.9.** *Ada pelabelan super  $(6rn + 7r + 21 + (r - 3)(2rn + r + 19) + (r - 3)(r - 4)(3), 6r^2)$ - $C_{2r}$  antimagic total dekomposisi untuk  $n \geq 4$  dan  $r \geq 3$ .*

**Bukti.** Untuk  $G = C_r \otimes P_n$ , labeli fungsi titik dengan  $f_9$  sedemikian hingga  $f_9(x_{j,i}) = ri - r + j$ , untuk  $1 \leq j \leq r, 1 \leq i \leq n$ , dan label sisi, untuk  $2 \leq j \leq r - 1$  yaitu:

$$\begin{aligned} f_9(x_{1,i}x_{2,i+1}) &= rn + 2ri - 2r + 1, \text{ for } 1 \leq i \leq n - 1 \\ f_9(x_{1,i}x_{r,i+1}) &= rn + 2ri - 2r + 2, \text{ for } 1 \leq i \leq n - 1 \\ f_9(x_{j,i}x_{j-1,i+1}) &= rn + 2ri - 2r + 2j - 1, \text{ for } 1 \leq i \leq n - 1 \\ f_9(x_{j,i}x_{j+1,i+1}) &= rn + 2ri - 2r + 2j, \text{ for } 1 \leq i \leq n - 1 \\ f_9(x_{1,i}x_{1,i+1}) &= rn + 2ri - 1, \text{ for } 1 \leq i \leq n - 1 \\ f_9(x_{r,i}x_{r-1,i+1}) &= rn + 2ri, \text{ for } 1 \leq i \leq n - 1 \end{aligned}$$



Gambar 4.10 Super  $(280, 16) - C_{2r}$ -antimagic total dekomposisi pada graf  $C_4 \otimes P_4$

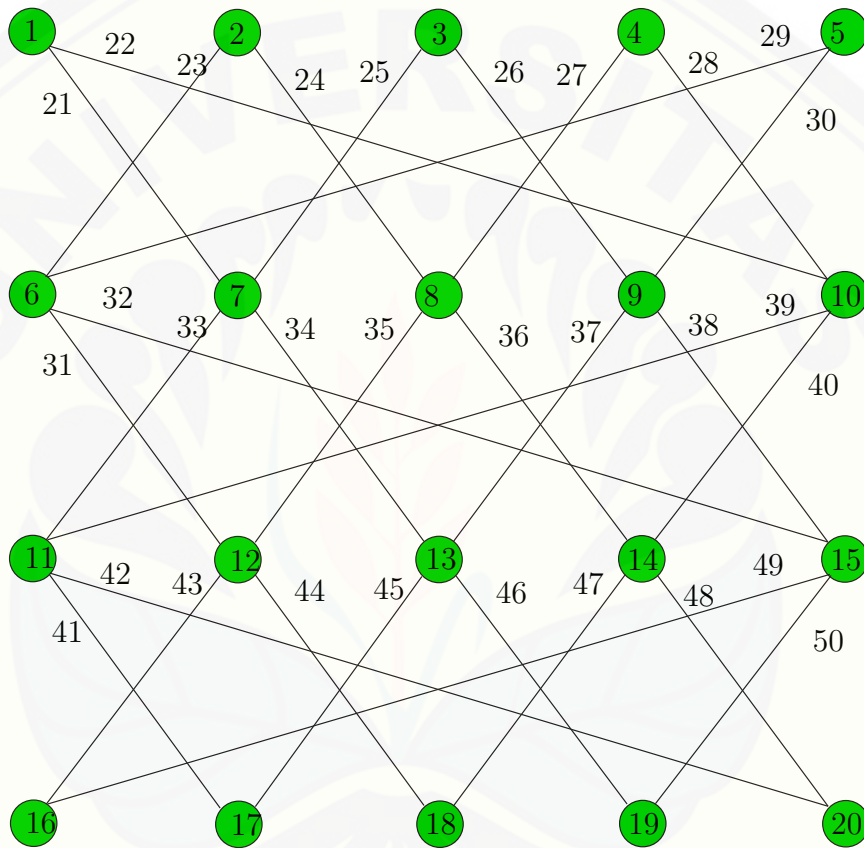
Pelabelan titik dan sisi  $f_9$  adalah fungsi bijektif  $f_9 : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, 3rn - 2r\}$ . Bobot dekomposisi pada graf  $C_r \otimes P_n$ , for  $1 \leq j \leq r$ ,  $1 \leq i \leq n$  yaitu  $w_{f_9} = \cup_{j=1}^r (f_9(x_{j,i}) + f_9(x_{j,i+1})) = \cup_{j=1}^r (2ri - r + 2j)$ , dan bobot total dekomposisinya yaitu:

$$\begin{aligned} W_{f_9} &= w_{f_9} + f_9(x_{1,i}x_{2,i+1}) + f_9(x_{1,i}x_{r,i+1}) + \cup_{j=2}^{r-1} (f_9(x_{j,i}x_{j-1,i+1}) + \\ &\quad f_9(x_{j,i}x_{j+1,i+1})) + f_9(x_{1,i}x_{1,i+1}) + f_9(x_{r,i}x_{r-1,i+1}) \\ &= \cup_{j=1}^r (2ri - r + 2j) + 2rn + 4ri + 4r + 3 + \\ &\quad \cup_{j=2}^{r-1} (2rn + 4ri - 4r + 4j - 1) + 2rn + 4ri - 1 \end{aligned}$$

Dengan menggunakan rumus barisan tingkat dua, maka bobot total dekomposisi membentuk barisan  $W_{f_9} = \{6rn + 7r + 21 + (r - 3)(2rn + r + 19) + (r - 3)(r -$

$4)(3), 6rn + 7r + 21 + (r - 3)(2rn + r + 19) + (r - 3)(r - 4)(3) + 6r^2, \dots, 6rn + 7r + 21 + (r - 3)(2rn + r + 19) + (r - 3)(r - 4)(3) + (n - 2)6r^2\}$ . Sehingga terbukti bahwa ada pelabelan super  $(6rn + 7r + 21 + (r - 3)(2rn + r + 19) + (r - 3)(r - 4)(3), 6r^2) - C_{2r}$  antimagic total dekomposisi untuk  $n \geq 4$  dan  $r \geq 3$ .  $\square$

Gambar 4.11 merupakan contoh super  $(6rn + 7r + 21 + (r - 3)(2rn + r + 19) + (r - 3)(r - 4)(3), 6r^2) - C_{2r}$  antimagic total dekomposisi  $SHATD$  pada graf  $C_r \otimes P_n$ .



Gambar 4.11 Super  $(310, 150) - C_{2r}$ -antimagic total dekomposisi pada graf  $C_5 \otimes P_4$

$\diamond$  **Teorema 4.10.** *Ada pelabelan super  $(6rn + 6n + 4r + 18 + (r - 3)(2rn + 6n + 14) + (r - 3)(r - 4)(n + 2), 4r^2 + 2r) - C_{2r}$  antimagic total dekomposisi untuk  $n \geq 4$  dan  $r \geq 3$ .*

**Bukti.** Untuk melabeli titik pada graf  $C_r \otimes P_n$  gunakan label titik yang terdapat pada teorema 4.8 ke dalam teorema 4.10 dimana  $f_{15} = f_{13}$ . Sehingga  $f_{10}(x_{j,i}) = f_8(x_{j,i})$ . Dengan demikian maka bobot dekomposisi dari pelabelan total dekomposisi pada graf  $C_r \otimes P_n$  yang didefinisikan dengan  $w_{f_{10}} = w_{f_8} = \cup_{j=1}^r 2jn - 2n + 2i + 1$ .

Untuk melabeli sisi graf  $C_r \otimes P_n$  gunakan label sisi yang terdapat pada teorema 4.9 ke dalam teorema 4.10 dimana  $f_{10} = f_9$ . Sehingga  $f_{10}(x_{1,i}x_{2,i+1}) = f_9(x_{1,i}x_{2,i+1})$ ,  $f_{10}(x_{1,i}x_{r,i+1}) = f_9(x_{1,i}x_{r,i+1})$ ,  $f_{10}(x_{j,i}x_{j-1,i+1}) = f_9(x_{j,i}x_{j-1,i+1})$ ,  $f_{10}(x_{j,i}x_{j+1,i+1}) = f_9(x_{j,i}x_{j+1,i+1})$ ,  $f_{10}((x_{1,i}x_{1,i+1})) = f_9((x_{1,i}x_{1,i+1}))$ , dan  $f_{10}(x_{r,i}x_{r-1,i+1}) = f_9(x_{r,i}x_{r-1,i+1})$ .

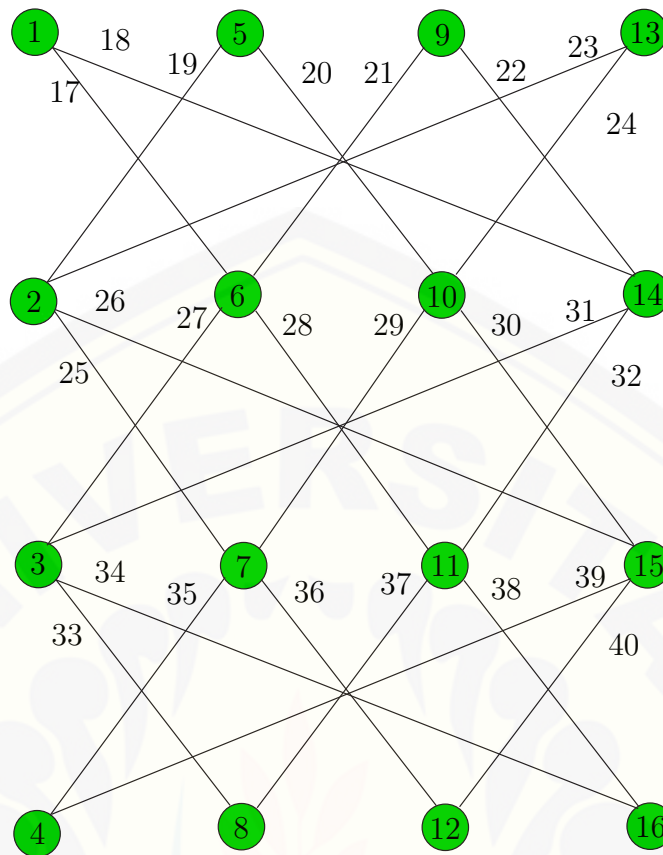
Pelabelan titik dan sisi  $f_{10}$  adalah fungsi bijektif  $f_{10} : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, 3rn - 2r\}$ . Sehingga bobot total dekomposisinya yaitu:

$$\begin{aligned} W_{f_{10}} &= w_{f_{10}} + f_{10}(x_{1,i}x_{2,i+1}) + f_{10}(x_{1,i}x_{r,i+1}) + \cup_{j=2}^{r-1} (f_{10}(x_{j,i}x_{j-1,i+1}) + \\ &\quad f_{10}(x_{j,i}x_{j+1,i+1})) + f_{10}(x_{1,i}x_{1,i+1}) + f_{10}(x_{r,i}x_{r-1,i+1}) \\ &= \cup_{j=1}^r (2jn - 2n + 2i + 1) + 2rn + 4ri - 4r + 3 + \\ &\quad \cup_{j=2}^{r-1} (2rn + 4ri - 4r + 4j - 1) + 2rn + 4ri - 1 \end{aligned}$$

Dengan menggunakan rumus barisan tingkat dua, maka bobot total dekomposisi membentuk barisan  $W_{f_{10}} = \{6rn + 6n + 4r + 18 + (r - 3)(2rn + 6n + 14) + (r - 3)(r - 4)(n + 2), 6rn + 6n + 4r + 18 + (r - 3)(2rn + 6n + 14) + (r - 3)(r - 4)(n + 2) + 4r^2 + 2r, \dots, 6rn + 6n + 4r + 18 + (r - 3)(2rn + 6n + 14) + (r - 3)(r - 4)(n + 2) + (n - 2)(4r^2 + 2r)\}$ . Sehingga terbukti bahwa ada pelabelan super  $(6rn + 7r + 21 + (r - 3)(2rn + r + 19) + (r - 3)(r - 4)(3), 6r^2) - C_{2r}$  antimagic total dekomposisi untuk  $n \geq 4$  dan  $r \geq 3$ .  $\square$

Gambar 4.12 merupakan contoh super  $(6rn + 6n + 4r + 18 + (r - 3)(2rn + 6n + 14) + (r - 3)(r - 4)(n + 2), 4r^2 + 2r) - C_{2r}$  antimagic total dekomposisi  $\mathcal{SHATD}$  pada graf  $C_r \otimes P_n$ .





Gambar 4.12 Super  $(224, 72) - C_{2r}$ -antimagic total dekomposisi pada graf  $C_4 \otimes P_4$

### 4.3.2 Graf Tensor Product Diskonektif

Gabungan saling lepas graf *tensor product* dari  $C_r$  and  $P_n$ , dinotasikan dengan  $m(C_r \otimes P_n)$ , adalah graf diskonektif yang mempunyai himpunan titik  $V(m(C_r \otimes P_n)) = \{x_{j,i}^k; 1 \leq j \leq r; 1 \leq i \leq n; 1 \leq k \leq m\}$  dan himpunan sisi  $E(m(C_r \otimes P_n)) = \{x_{1,i}^k x_{2,i+1}^k, x_{1,i}^k x_{r,i+1}^k, x_{j,i}^k x_{j-1,i+1}^k, x_{j,i}^k x_{j+1,i+1}^k, x_{r,i}^k x_{1,i+1}^k, x_{r,i}^k x_{r-1,i+1}^k; 1 \leq i \leq n - 1, 2 \leq j \leq r - 1; 1 \leq k \leq m\}$ .

Jika gabungan saling lepas graf  $m(C_r \otimes P_n)$  memiliki pelabelan super  $(a, d)$ - $C_{2r}$ -antimagic total dekomposisi maka  $p_G = |V(m(C_r \otimes P_n))| = mrn$ ,  $q_G = |E(m(C_r \otimes P_n))| = 2mr(n - 1)$ ,  $p_H = |V(C_{2r})| = 2r$ ,  $q_H = |E(C_{2r})| = 2r$ ,  $s = m(n - 1)$ .

Sesuai dengan Lemma 2.5.1, batas atas nilai beda  $d$  adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} d &\leq \frac{(p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H}{s - 1} \\ &= \frac{(mrn - 2r)2r + (2mrn - 2r - 2r)2r}{(n - 1)m - 1} \\ &= \frac{6mr^2n - 4mr^2 - 8r^2}{mn - m - 1} \\ d &\leq 6r^2 + \frac{2r^2(m - 1)}{mn - m - 1} \end{aligned}$$

Karena  $0 < \frac{(m-1)}{mn-m-1} < 1$ , maka  $d \leq 8r^2$ . Kemudian hasil penelitian pada pelabelan super  $(a, d)$ - $C_{2r}$ -antimagic total dekomposisi pada graf *tensor product* diskonektif  $mC_r \otimes P_n$  dijelaskan pada teorema-teorema berikut.

◇ **Teorema 4.11.** *Ada pelabelan super  $(10mrn - 4mr + 9mn + 12 + (r - 3)(2mnr + 15mn - 8m + 8) + (r - 3)(r - 4)(3mn - 2m), 4r)$ - $C_{2r}$ -antimagic total dekomposisi pada graf  $mC_r \otimes P_n$  untuk  $n \geq 4$ ,  $r \geq 3$ , dan  $m \geq 2$ .*

**Bukti.** Untuk  $G = mC_r \otimes P_n$ , labeli fungsi titik dengan  $f_{11}$  sedemikian hingga

$$f_{11}(x_{j,i}^k) = mnj - mn + mi - m + k, \text{ for } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq r, 1 \leq k \leq m$$

dan label sisinya yaitu:

$$\begin{aligned} f_{11}(x_{1,i}^k x_{2,i+1}^k) &= mrn - m + mi + k, \text{ for } 1 \leq i \leq n - 1, 1 \leq k \leq m \\ f_{11}(x_{1,i}^k x_{r,i+1}^k) &= mrn + mn - 2m + mi + k, \text{ for } 1 \leq i \leq n - 1, 1 \leq k \leq m \\ f_{11}(x_{j,i}^k x_{j-1,i+1}^k) &= mrn - 2mn + m + 2mj(n - 1) + mi + k, \text{ for } 1 \leq i \leq n - 1, \\ &2 \leq j \leq r - 1, 1 \leq k \leq m \\ f_{11}(x_{j,i}^k x_{j+1,i+1}^k) &= mrn - mn + 2mj(n - 1) + mi + k, \text{ for } 1 \leq i \leq n - 1, \\ &2 \leq j \leq r - 1, 1 \leq k \leq m \end{aligned}$$

$$f_{11}(x_{1,i}^k x_{1,i+1}^k) = 3mrn - 2mn - 2mr + m + mi + k, \text{ for } 1 \leq i \leq n - 1, \\ 1 \leq k \leq m$$

$$f_{11}(x_{r,i}^k x_{r-1,i+1}^k) = 3mrn - mn - 2mr + mi + k, \text{ for } 1 \leq i \leq n - 1, 1 \leq k \leq m$$

Pelabelan titik dan sisi  $f_{11}$  adalah fungsi bijektif  $f_{11} : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, 3mrn - 2mr\}$ . Bobot dekomposisi pada graf  $mC_r \otimes P_n$ , for  $1 \leq j \leq r$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $1 \leq k \leq m$  yaitu  $w_{f_{11}} = \cup_{j=1}^r (f_{16}(x_{j,i}^k) + f_{16}(x_{j,i+1}^k)) = \cup_{j=1}^r 2mnj - 2mn + 2mi - m + 2k$ , dan bobot total dekomposisi  $m(C_r \otimes P_n)$  yaitu:

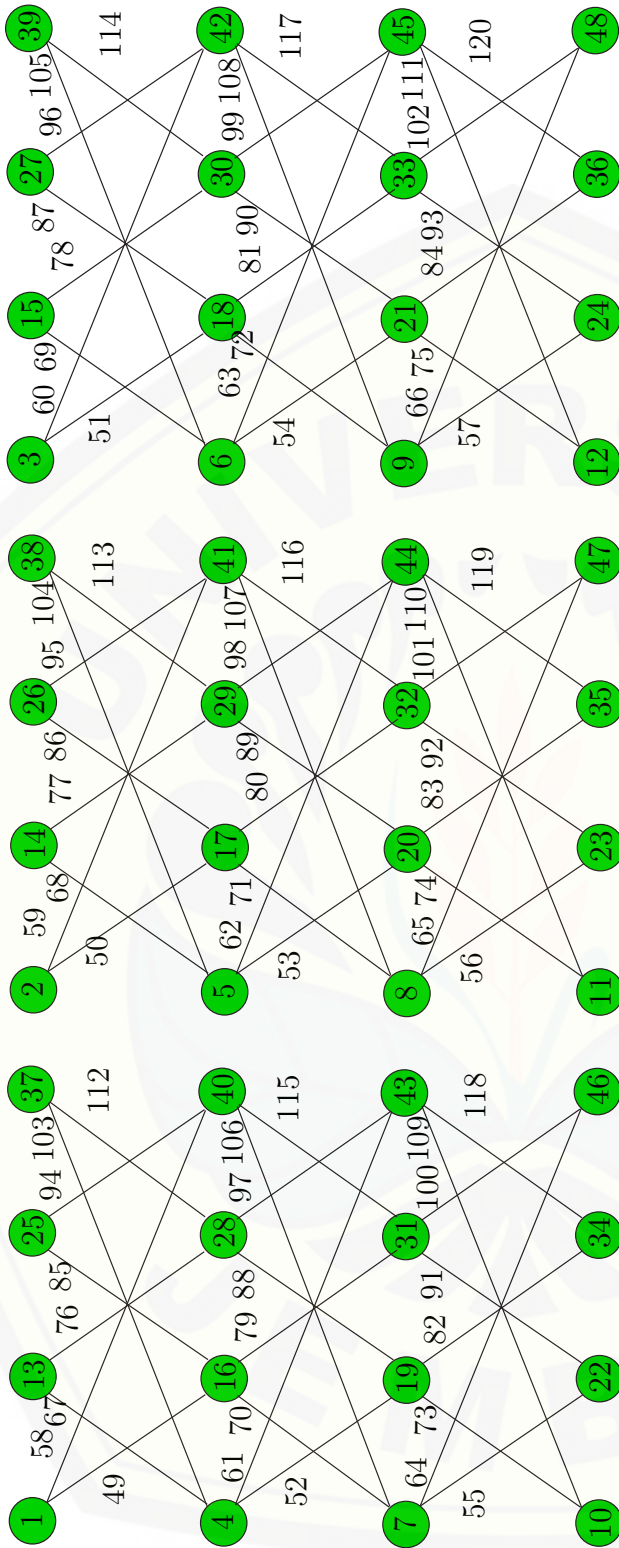
Pelabelan titik dan sisi  $f_{11}$  adalah fungsi bijektif  $f_{11} : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, 3mrn - 2mr\}$ . Sehingga bobot total dekomposisinya yaitu:

$$W_{f_{11}} = w_{f_{11}} + f_{11}(x_{1,i}^k x_{2,i+1}^k) + f_{11}(x_{1,i}^k x_{r,i+1}^k) + \cup_{j=2}^{r-1} (f_{11}(x_{j,i}^k x_{j-1,i+1}^k) + \\ f_{11}(x_{j,i}^k x_{j+1,i+1}^k)) + f_{11}(x_{1,i}^k x_{1,i+1}^k) + f_{11}(x_{r,i}^k x_{r-1,i+1}^k) \\ = \cup_{j=1}^r (2mnj - 2mn + 2mi - m + 2k) + 2mrn + mn - 3m + 2mi + 2k + \\ \cup_{j=2}^{r-1} (2mnr - 3mn + m + 4mj(n-1) + 2mi + 2k) + 6mrn - 3mn - \\ 4mr + m + 2mi + 2k$$

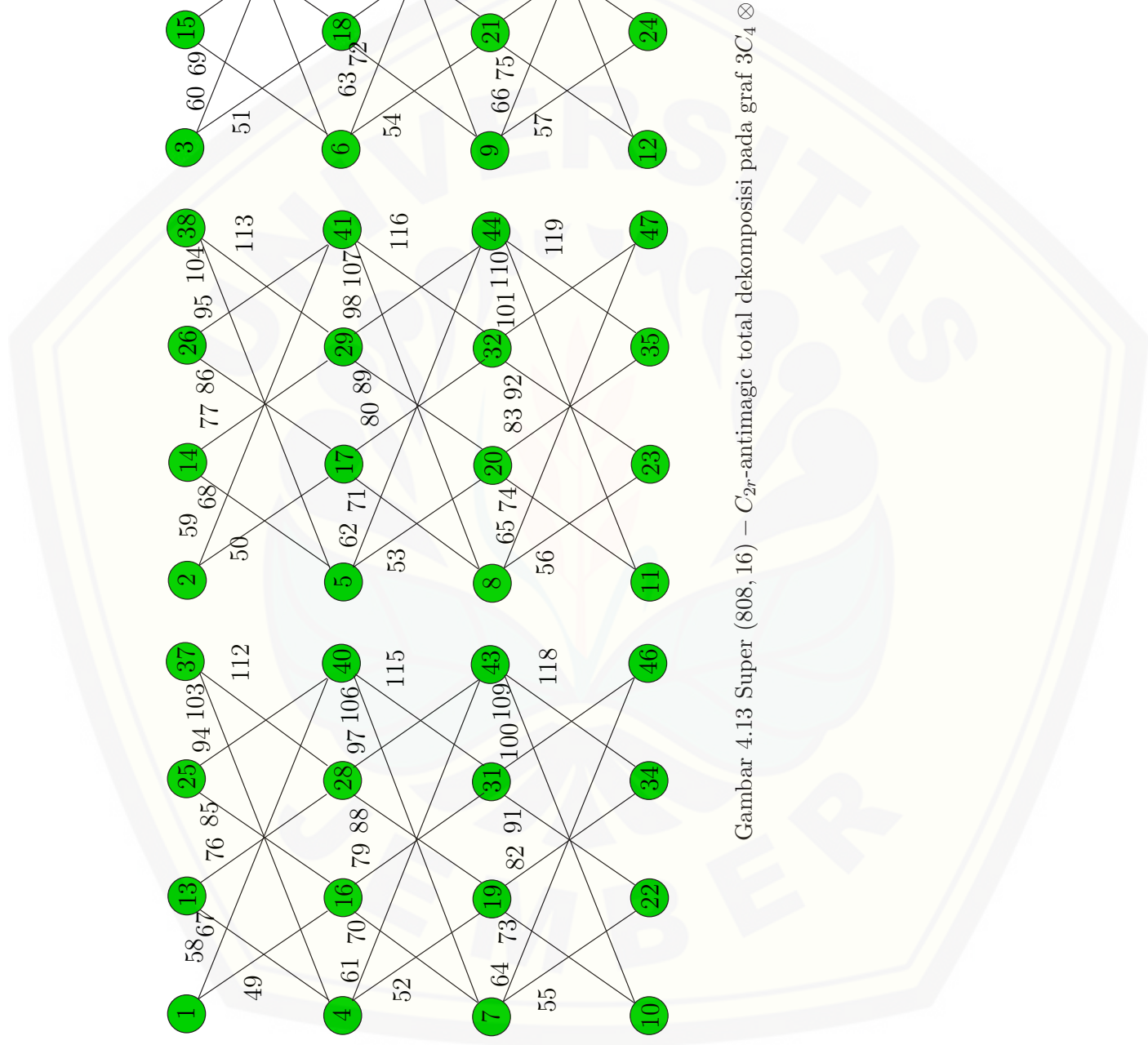
Dengan menggunakan rumus barisan tingkat dua, maka bobot total dekomposisi membentuk barisan  $W_{f_{11}} = \{10mrn - 4mr + 9mn + 12 + (r-3)(2mnr + 15mn - 8m + 8) + (r-3)(r-4)(3mn - 2m), 10mrn - 4mr + 9mn + 12 + (r-3)(2mnr + 15mn - 8m + 8) + (r-3)(r-4)(3mn - 2m) + 4r, \dots, 10mrn - 4mr + 9mn + 12 + (r-3)(2mnr + 15mn - 8m + 8) + (r-3)(r-4)(3mn - 2m) + (m(n-1) - 1)4r\}$ .

Sehingga terbukti bahwa ada pelabelan super  $(10mrn - 4mr + 9mn + 12 + (r-3)(2mnr + 15mn - 8m + 8) + (r-3)(r-4)(3mn - 2m), 4r)$ - $C_{2r}$ -antimagic total dekomposisi pada graf  $mC_r \otimes P_n$  untuk  $n \geq 4$ ,  $r \geq 3$ , dan  $m \geq 2$ .  $\square$

Gambar 4.13 merupakan contoh super  $(10mrn - 4mr + 9mn + 12 + (r-3)(2mnr + 15mn - 8m + 8) + (r-3)(r-4)(3mn - 2m), 4r)$ - $C_{2r}$  antimagic total dekomposisi  $SHATD$  pada graf  $mC_r \otimes P_n$ .



Gambar 4.13 Super  $(808, 16) - C_{2r}$ -antimagic total dekomposisi pada graf  $3C_4 \otimes P_4$



◇ **Teorema 4.12.** *Ada pelabelan super  $(6mrn+3mr+4r+21+(r-3)(2mnr+mr+19) + (r-3)(r-4)(3), 6r^2)$ - $C_{2r}$ -antimagic total dekomposisi pada graf  $mC_r \otimes P_n$  untuk  $n \geq 4$ ,  $r \geq 3$ , dan  $m \geq 2$ .*

**Bukti.** Untuk  $G = mC_r \otimes P_n$ , labeli fungsi titik dengan  $f_{12}$  sedemikian hingga

$$f_{12}(x_{j,i}^k) = mri - mr + j, \text{ for } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq r, 1 \leq k \leq m$$

dan label sisinya yaitu:

$$f_{12}(x_{1,i}^k x_{2,i+1}^k) = mri - mr + 2rk - 2r + 1, \text{ for } 1 \leq i \leq n - 1, \\ 1 \leq k \leq m$$

$$f_{12}(x_{1,i}^k x_{r,i+1}^k) = mri - mr + 2rk - 2r + 2, \text{ for } 1 \leq i \leq n - 1, \\ 1 \leq k \leq m$$

$$f_{12}(x_{j,i}^k x_{j-1,i+1}^k) = mri - mr + 2rk - 2r + 2j - 1, \text{ for } 1 \leq i \leq n - 1, \\ 2 \leq j \leq r - 1, 1 \leq k \leq m$$

$$f_{12}(x_{j,i}^k x_{j+1,i+1}^k) = mri - mr + 2rk - 2r + 2j, \text{ for } 1 \leq i \leq n - 1, \\ 2 \leq j \leq r - 1, 1 \leq k \leq m$$

$$f_{12}(x_{1,i}^k x_{1,i+1}^k) = mri - mr - 1, \text{ for } 1 \leq i \leq n - 1, \\ 1 \leq k \leq m$$

$$f_{12}(x_{r,i}^k x_{r-1,i+1}^k) = mri - mr + 2rk, \text{ for } 1 \leq i \leq n - 1, 1 \leq k \leq m$$

Pelabelan titik dan sisi  $f_{12}$  adalah fungsi bijektif  $f_{12} : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, 3mrn - 2mr\}$ . Bobot dekomposisi pada graf  $mC_r \otimes P_n$ , for  $1 \leq j \leq r$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $1 \leq k \leq m$  yaitu  $w_{f_{12}} = \cup_{j=1}^r (f_{12}(x_{j,i}^k) + f_{12}(x_{j,i+1}^k)) = \cup_{j=1}^r 2mri - mr + 2rk - 2r + 2j$ , dan bobot total dekomposisi  $m(C_r \otimes P_n)$  yaitu:

$$W_{f_{12}} = w_{f_{12}} + f_{12}(x_{1,i}^k x_{2,i+1}^k) + f_{12}(x_{1,i}^k x_{r,i+1}^k) + \cup_{j=2}^{r-1} (f_{12}(x_{j,i}^k x_{j-1,i+1}^k) + \\ f_{12}(x_{j,i}^k x_{j+1,i+1}^k)) + f_{12}(x_{1,i}^k x_{1,i+1}^k) + f_{12}(x_{r,i}^k x_{r-1,i+1}^k)$$

$$= \cup_{j=1}^r (2mri - mr + 2rk - 2r + 2j) + 2mrn + 4mri - 4mr + 4rk - 4r + 3 + \cup_{j=2}^{r-1} (2mrn + 4mri - 4mr + 4rk - 4r + 4j - 1) + 4mrn + 4mri - 4mr + 4rk - 1$$

Dengan menggunakan rumus barisan tingkat dua, maka bobot total dekomposisi membentuk barisan  $W_{f_{12}} = \{6mrn + 3mr + 4r + 21 + (r - 3)(2mnr + mr + 19) + (r - 3)(r - 4)(3), 6mrn + 3mr + 4r + 21 + (r - 3)(2mnr + mr + 19) + (r - 3)(r - 4)(3) + 6r^2, \dots, 6mrn + 3mr + 4r + 21 + (r - 3)(2mnr + mr + 19) + (r - 3)(r - 4)(3) + (m(n - 1) - 1)6r^2\}$ .

Sehingga terbukti bahwa ada pelabelan super  $(6mrn + 3mr + 4r + 21 + (r - 3)(2mnr + mr + 19) + (r - 3)(r - 4)(3), 6r^2)$ - $C_{2r}$ -antimagic total dekomposisi pada graf  $mC_r \otimes P_n$  untuk  $n \geq 4$ ,  $r \geq 3$ , dan  $m \geq 2$   $\square$

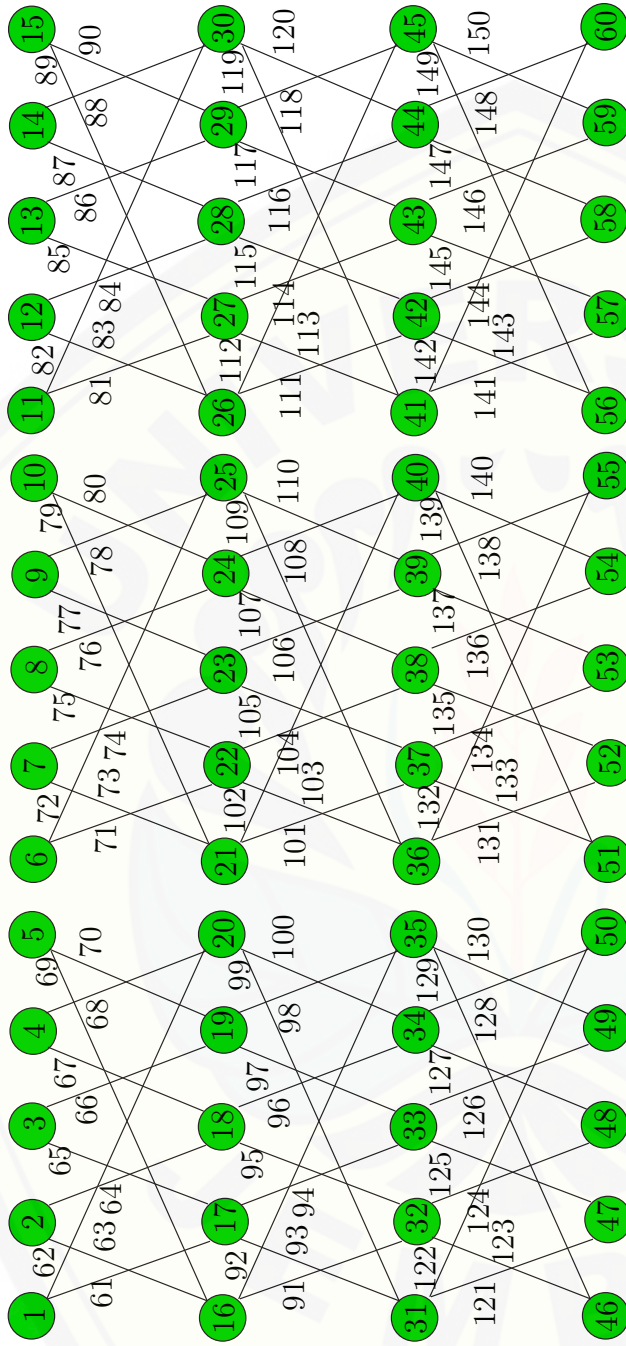
Gambar 4.14 merupakan contoh super  $(6mrn + 3mr + 4r + 21 + (r - 3)(2mnr + mr + 19) + (r - 3)(r - 4)(3), 6r^2)$ - $C_{2r}$  antimagic total dekomposisi *SHATD* pada graf  $mC_r \otimes P_n$ .

$\diamond$  **Teorema 4.13.** *Ada pelabelan super  $(6mrn + 6mn + 3m + 4r + 15 + (r - 3)(2mrn + 6mn + m + 13) + (r - 3)(r - 4)(mn + 2), 4r^2 + 2r)$ - $C_{2r}$ -antimagic total dekomposisi pada graf  $mC_r \otimes P_n$  untuk  $n \geq 4$ ,  $r \geq 3$ , dan  $m \geq 2$ .*

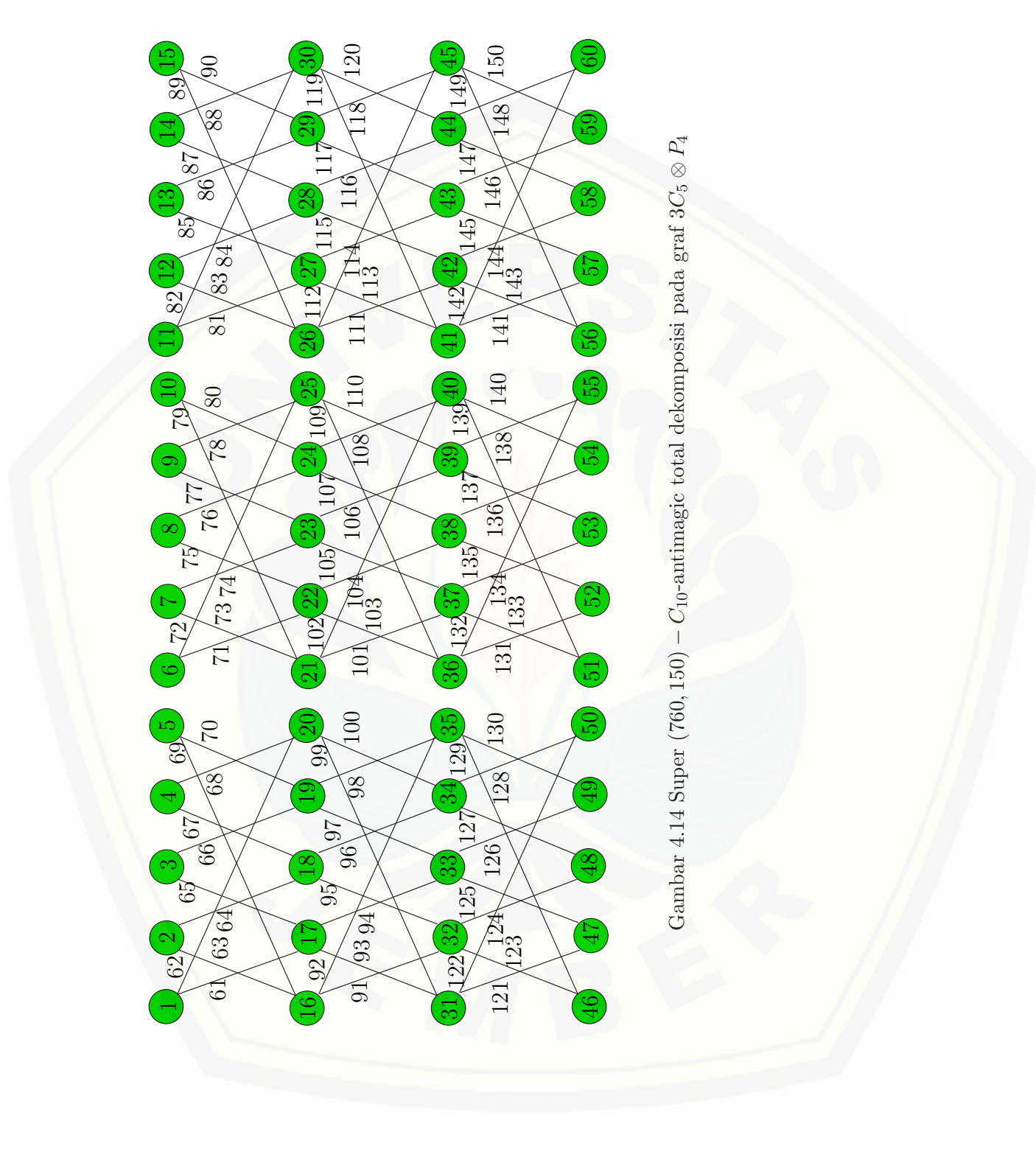
**Bukti.** Untuk melabeli titik pada graf  $mC_r \otimes P_n$  gunakan label titik yang terdapat pada teorema 4.11 ke dalam teorema 4.13 dimana  $f_{13} = f_{11}$ . Sehingga  $f_{13}(x_{j,i}^k) = f_{11}(x_{j,i}^k)$ . Dengan demikian maka bobot dekomposisi dari pelabelan total dekomposisi pada graf  $mC_r \otimes P_n$  yang didefinisikan dengan  $w_{f_{13}} = w_{f_{11}} = \cup_{j=1}^r 2mnj - 2mn + 2mi - m + 2k$ .

Untuk melabeli sisi graf  $C_r \otimes P_n$  gunakan label sisi yang terdapat pada teorema 4.12 ke dalam teorema 4.13 dimana  $f_{13} = f_{12}$ . Sehingga  $f_{13}(x_{1,i}^k x_{2,i+1}) = f_{12}(x_{1,i}^k x_{2,i+1})$ ,  $f_{13}(x_{1,i}^k x_{r,i+1}) = f_{12}(x_{1,i}^k x_{r,i+1})$ ,  $f_{13}(x_{j,i}^k x_{j-1,i+1}) = f_{12}(x_{j,i}^k x_{j-1,i+1})$ ,  $f_{13}(x_{j,i}^k x_{j+1,i+1}) = f_{12}(x_{j,i}^k x_{j+1,i+1})$ ,  $f_{13}(x_{1,i}^k x_{1,i+1}) = f_{12}(x_{1,i}^k x_{1,i+1})$ , dan  $f_{13}(x_{r,i}^k x_{r-1,i+1}) = f_{12}(x_{r,i}^k x_{r-1,i+1})$ .

Pelabelan titik dan sisi  $f_{13}$  adalah fungsi bijektif  $f_{13} : V(G) \cup E(G) \rightarrow$



Gambar 4.14 Super (760, 150) –  $C_{10}$ -antimagic total dekomposisi pada graf  $3C_5 \otimes P_4$



$\{1, 2, 3, \dots, 3mrn - 2mr\}$ . Sehingga bobot total dekomposisi  $m(C_r \otimes P_n)$  yaitu:

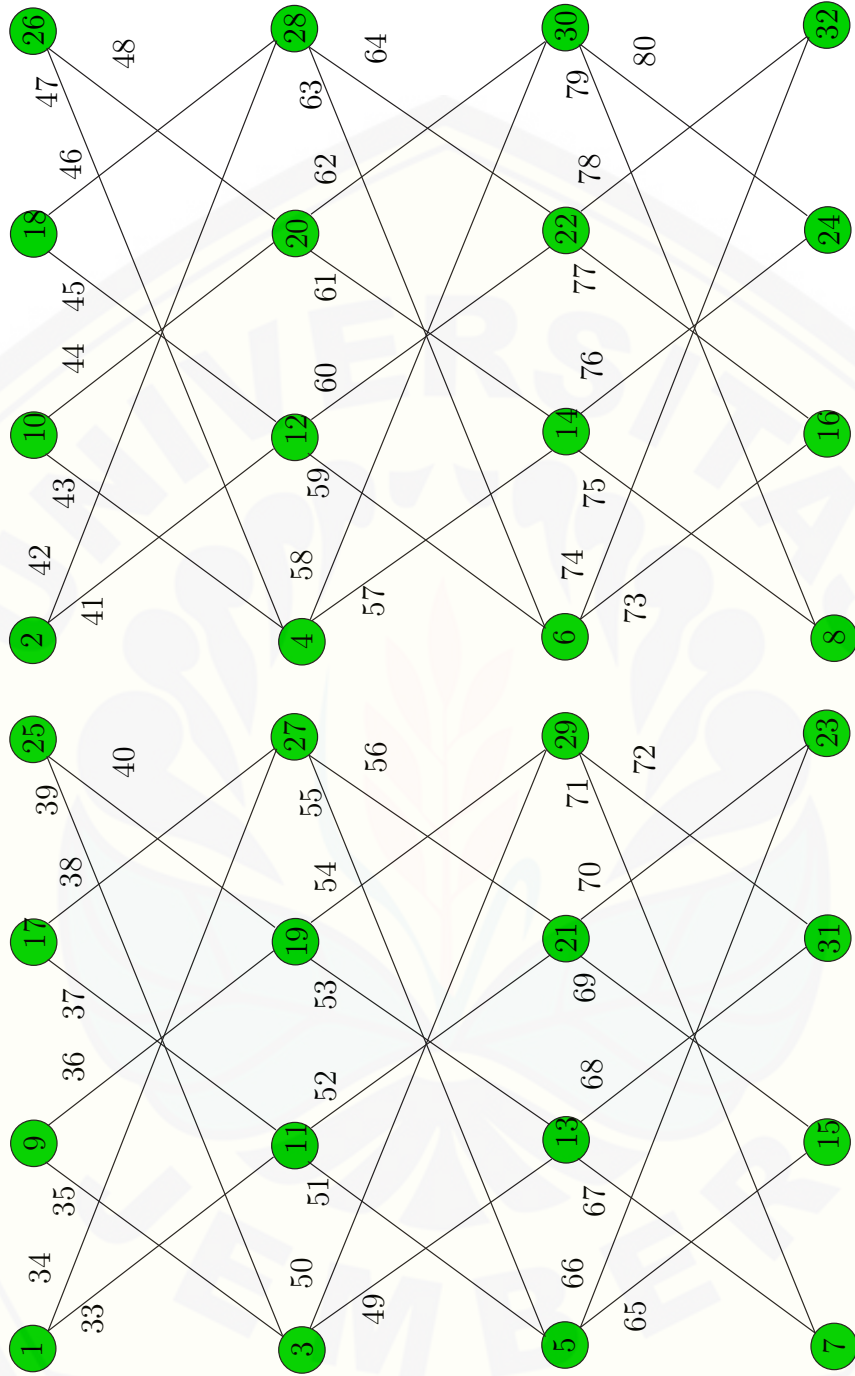
$$\begin{aligned} W_{f_{13}} &= w_{f_{13}} + f_{13}(x_{1,i}^k x_{2,i+1}^k) + f_{13}(x_{1,i}^k x_{r,i+1}^k) + \cup_{j=2}^{r-1} (f_{13}(x_{j,i}^k x_{j-1,i+1}^k) + \\ & f_{13}(x_{j,i}^k x_{j+1,i+1}^k)) + f_{13}(x_{1,i}^k x_{1,i+1}^k) + f_{13}(x_{r,i}^k x_{r-1,i+1}^k) \\ &= \cup_{j=1}^r (2mri - mr + 2rk - 2r + 2j) + 2mrn + 4mri - 4mr + 4rk - 4r + \\ & 3 + \cup_{j=2}^{r-1} (2mrn + 4mri - 4mr + 4rk - 4r + 4j - 1) + 4mrn + 4mri - \\ & 4mr + 4rk - 1 \end{aligned}$$

Dengan menggunakan rumus barisan tingkat dua, maka bobot total dekomposisi membentuk barisan  $W_{f_{13}} = \{6mrn + 6mn + 3m + 4r + 15 + (r - 3)(2mrn + 6mn + m + 13) + (r - 3)(r - 4)(mn + 2), 6mrn + 6mn + 3m + 4r + 15 + (r - 3)(2mrn + 6mn + m + 13) + (r - 3)(r - 4)(mn + 2) + 4r^2 + 2r, \dots, 6mrn + 6mn + 3m + 4r + 15 + (r - 3)(2mrn + 6mn + m + 13) + (r - 3)(r - 4)(mn + 2) + (m(n - 1) - 1)(4r^2 + 2r)\}$ .

Sehingga terbukti bahwa ada pelabelan super  $(6mrn + 6mn + 3m + 4r + 15 + (r - 3)(2mrn + 6mn + m + 13) + (r - 3)(r - 4)(mn + 2), 4r^2 + 2r)$ - $C_{2r}$ -antimagic total dekomposisi pada graf  $mC_r \otimes P_n$  untuk  $n \geq 4$ ,  $r \geq 3$ , dan  $m \geq 2$   $\square$

Gambar 4.15 merupakan contoh super  $(6mrn + 6mn + 3m + 4r + 15 + (r - 3)(2mrn + 6mn + m + 13) + (r - 3)(r - 4)(mn + 2), 4r^2 + 2r)$ - $C_{2r}$  antimagic total dekomposisi *SHATD* pada graf  $mC_r \otimes P_n$ .





Gambar 4.15 Super (404, 72) –  $C_8$ -antimagic total dekomposisi pada graf  $2C_4 \otimes P_4$

#### 4.4 Hasil dan Pembahasan

Berdasarkan hasil penelitian untuk memperoleh nilai  $d$  yang mungkin untuk super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$  antimagic total dekomposisi pada graf  $C_3 \otimes P_n$  adalah  $d \in \{0, 1, 2, \dots, 54\}$  sedangkan untuk gabungannya  $mC_3 \otimes P_n$  diperoleh  $d \in \{0, 1, 2, \dots, 72\}$ . Setelah menentukan nilai  $d$ , peneliti mencari pelabelan sesuai dengan nilai  $d$  yang telah ditentukan tersebut.

Nilai batas atas  $d$  yang sudah diketahui berbeda maka nilai awal  $a$  juga akan berbeda. Namun demikian seluruh label titik dan seluruh label sisi yang digunakan sama. Untuk semua nilai beda  $d$ , label titik yang digunakan adalah dari 1 hingga  $p_G$  dimana  $p_G$  adalah jumlah titik pada graf sedangkan label untuk sisi yang digunakan adalah dimulai dari  $p_G + 1$  hingga  $p_G + q_G$  dimana  $q_G$  merupakan jumlah sisi. Label titik yang dijumlahkan berdasarkan jumlah titik dekomposisinya yaitu  $p_H$  menghasilkan bobot titik dekomposisi ( $w$ ). Sedangkan label sisi yang dijumlahkan berdasarkan jumlah sisi dekomposisinya yaitu  $q_H$  menghasilkan bobot sisi dekomposisi. Jumlah dekomposisi pada suatu graf yaitu  $s$ . Apabila bobot titik dekomposisi ( $w$ ) dan bobot sisi dekomposisi dijumlahkan akan menghasilkan suatu pelabelan total dekomposisi.

Pada graf  $C_3 \otimes P_n$  untuk  $n \geq 4$ , peneliti menemukan pelabelan untuk  $d = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 36, 38, 40, 42, 44, 46, 54\}$ . Teorema 4.1, 4.2, 4.3, 4.4 dan 4.5 menunjukkan sebagian hasil dari penelitian yaitu pada  $d = 8, 12, 24, 30, 54$ .

Sedangkan pada graf  $mC_3 \otimes P_n$  untuk  $n \geq 4$ , dan  $m \geq 2$  peneliti menemukan nilai beda yaitu  $d = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 38, 48\}$ . Teorema 4.6 dan 4.7 menunjukkan sebagian hasil dari penelitian. Label titik dan sisi pada Teorema 4.6 didapatkan dari label titik dan sisi pada Teorema 4.2 sehingga dapat dikatakan bahwa jika ada pelabelan super  $(39n, 12) - C_6$  antimagic total dekomposisi pada graf  $C_3 \otimes P_n$  maka gabungannya memiliki pelabelan super  $(39mn - 12m + 12, 12) - C_6$  pada graf  $mC_3 \otimes P_n$ .

Kemudian peneliti menganalisis pelabelan total dekomposisi pada graf operasi *tensor product* secara umum yaitu  $C_r \otimes P_n$  dan gabungannya  $mC_r \otimes P_n$ . Nilai  $d$  yang mungkin yaitu  $d \leq 8r^2$  untuk graf  $C_r \otimes P_n$  dan  $d \leq 6r^2$  untuk graf

$mC_r \otimes P_n$ . Teorema 4.8, Teorema 4.9, dan Teorema 4.10 menunjukkan pelabelan super total dekomposisi dengan  $d \in \{4r, 4r^2 + 2r, 6r^2\}$  pada graf  $C_r \otimes P_n$  untuk  $n \geq 4$  dan  $r \geq 3$ . Sedangkan Teorema 4.11, Teorema 4.12, dan Teorema 4.13 menunjukkan pelabelan super total dekomposisi dengan  $d \in \{4r, 4r^2 + 2r, 6r^2\}$  pada graf  $mC_r \otimes P_n$  untuk  $n \geq 4$ ,  $r \geq 3$ ,  $m \geq 2$ .

Pada penelitian ini, terdapat beberapa pelabelan total super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic dekomposisi pada graf  $C_3 \otimes P_n$ ,  $mC_3 \otimes P_n$ ,  $C_r \otimes P_n$ , dan  $mC_r \otimes P_n$  yang belum ditemukan oleh peneliti. Berdasarkan visualisasi pelabelan graf  $C_3 \otimes P_n$  hasil penelitian yang telah ditemukan, diharapkan dapat membantu peneliti lain yang akan melakukan penelitian sejenis. Beberapa pelabelan yang belum ditemukan oleh penulis disajikan pada open problem berikut:

**Masalah terbuka 4.4.1.** *Pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$  antimagic total dekomposisi pada graf  $C_3 \otimes P_n$  dengan  $n \geq 4$  untuk  $d \leq 54$  selain  $d \in \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 36, 38, 40, 42, 44, 46, 54\}$ .*

**Masalah terbuka 4.4.2.** *Pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$  antimagic total dekomposisi pada gabungan saling lepas graf  $mC_3 \otimes P_n$ , dengan  $n \geq 4$  dan  $m \geq 2$  untuk  $d \leq 72$  selain  $d \in \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 38, 48\}$ .*

**Masalah terbuka 4.4.3.** *Pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$  antimagic total dekomposisi pada graf  $C_r \otimes P_n$  dimana  $n \geq 4$  untuk  $d \leq 6r^2$  selain  $d \in \{4r, 4r^2 + 2r, 6r^2\}$ .*

**Masalah terbuka 4.4.4.** *Pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$  antimagic total dekomposisi pada graf  $mC_r \otimes P_n$  dimana  $n \geq 4$ ,  $r \geq 3$ , dan  $m \geq 2$  untuk  $d \leq 8r^2$  selain  $d \in \{4r, 4r^2 + 2r, 6r^2\}$ .*

## BAB 5. KESIMPULAN DAN SARAN

### 5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dari pembahasan pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa:

- a. Graf  $C_3 \otimes P_n$  tunggal memiliki pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$  antimagic total dekomposisi untuk  $d \leq 54$  dan gabungannya  $mC_3 \otimes P_n$  memiliki  $d \leq 72$ .
- b. Ada pelabelan total dekomposisi pada graf  $C_3 \otimes P_n$  untuk  $d = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 36, 38, 40, 42, 44, 46, 54\}$  diantaranya  $(41n - 4, 8), (39n, 12), (33n + 12, 24), (54n - 30, 30), (18n + 42, 54) - C_6$  antimagic total dekomposisi dimana  $n \geq 4$ . Ada pelabelan total dekomposisi pada graf  $mC_3 \otimes P_n$  untuk  $d = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 38, 48\}$  diantaranya yaitu  $(39mn - 12m + 12k, 12), (41mn - 14m + 10, 8) - C_6$  antimagic total dekomposisi dimana  $n \geq 4$  dan  $m \geq 3$ .
- c. Graf *tensor product*  $C_r \otimes P_n$  konektif memiliki batas atas  $d \leq 6r^2$  dan ada pelabelan super  $(10rn + 9n - 4r + 12 + (r - 3)(2rn + 15n - 4) + (r - 3)(r - 4)(3n - 2), 4r), (6rn + 7r + 21 + (r - 3)(2rn + r + 19) + (r - 3)(r - 4)(3), 6r^2), (6rn + 6n + 4r + 18 + (r - 3)(2rn + 6n + 14) + (r - 3)(r - 4)(n + 2), 4r^2 + 2r) - C_{2r}$  antimagic total dekomposisi pada graf  $C_r \otimes P_n$  untuk  $n \geq 4$  dan  $r \geq 3$ . Graf  $mC_r \otimes P_n$  memiliki batas atas  $d \leq 8r^2$  dan ada pelabelan super  $(10mrn - 4mr + 9mn + 12 + (r - 3)(2mnr + 15mn - 8m + 8) + (r - 3)(r - 4)(3mn - 2m), 4r), (6mrn + 3mr + 4r + 21 + (r - 3)(2mnr + mr + 19) + (r - 3)(r - 4)(3), 6r^2), (6mrn + 6mn + 3m + 4r + 15 + (r - 3)(2mrn + 6mn + m + 13) + (r - 3)(r - 4)(mn + 2), 4r^2 + 2r) - C_{2r}$ -antimagic total dekomposisi untuk  $n \geq 4, r \geq 3$ , dan  $m \geq 2$ .

## 5.2 Saran

Berdasarkan hasil penelitian mengenai pelabelan super  $(a, d) - \mathcal{H}$  antimagic total dekomposisi pada graf operasi *tensor product*  $C_r \otimes P_n$  serta mengacu pada *open problem* dari hasil penelitian yang telah ditemukan, maka peneliti memberikan saran pembaca dapat melakukan penelitian tentang:

- a. pelabelan super  $(a, d) - \mathcal{H}$  antimagic total dekomposisi pada graf  $C_3 \otimes P_n$  dengan  $n \geq 4$  untuk  $d \leq 54$  selain  $d \in \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 36, 38, 40, 42, 44, 46, 54\}$ .
- b. pelabelan super  $(a, d) - \mathcal{H}$  antimagic total dekomposisi pada gabungan saling lepas graf  $mC_3 \otimes P_n$ , dengan  $n \geq 4$  dan  $m \geq 2$  untuk  $d \leq 72$  selain  $d \in \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 38, 48\}$ .
- c. pelabelan super  $(a, d) - \mathcal{H}$  antimagic total dekomposisi pada graf  $C_r \otimes P_n$  dimana  $n \geq 4$  untuk  $d \leq 6r^2$  selain  $d \in \{4r, 4r^2 + 2r, 6r^2\}$ .
- d. pelabelan super  $(a, d) - \mathcal{H}$  antimagic total dekomposisi pada graf  $mC_r \otimes P_n$  dimana  $n \geq 4$ ,  $r \geq 3$ , dan  $m \geq 2$  untuk  $d \leq 8r^2$  selain  $d \in \{4r, 4r^2 + 2r, 6r^2\}$ .

DAFTAR PUSTAKA



DAFTAR PUSTAKA

- Biggs, N., Lloyd, E., and Wilson, R. (1986). *Graph Theory*. Oxford University Press.
- Chartrand, G. and Lesniak, L. (1986). *Graphs and Digraphs Second Edition*. California: a Division of Wadsworth.Inc.
- Chartrand, G. and Oellermann, O. R. (1993). *Applied and Algorithmic Graph Theory*. McGraw-Hill, New York.
- Chartrand, G. and Zhang, P. (2008). *Chromatic Graph Theory*. Chapman and Hall.
- Chung, F. and Lu, L. (2002). The average distances in random graphs with given expected degrees. *Proceeding of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 99(25):15879–15882.
- Dafik (2007). Structural properties and labeling of graphs. *School of Information Technology and Mathematical Sciences University of Ballarat, Australia*, Ph.D Thesis, November:1–140.
- Dafik (2015). *Pidato Pengukuhan Guru Besar*. Universitas Jember.
- Dafik, Miller, M., Ryan, J., and Bača, M. (2008). Antimagic labeling of union of stars. *The Australasian Journal of Combinatorics*, 42:35–44.
- Dafik, Mirka, M., Ryan, J., and Baca, M. (2009). On super  $(a, d)$ -edge-antimagic total labeling of disconnected graphs. *Discrete Mathematics*, 309(15):4909–4915.
- Dafik, Slamain, Fuad, M., and Rahmad, R. R. (2013). Super antimagicness of triangular book and diamond ladder graphs. *Proceeding of IndoMS International Conference of Mathematics and Applications (IICMA)*, UGM Yogyakarta:1–11.
- Diestel, R. (2005). Graph theory (3rd ed. ed.). *Graduate Texts in Mathematics*, 173:6–9.

- Dougall, J. A. M., Miller, M., Slamin, , and Wallis, W. D. (2002). Vertex magic total labelings of graphs. *Util. Math.*, 61:3–27.
- Even, S. (2011). *Graph Algorithms, 2nd Edition*. Cambridge University Press.
- Gutierrez, A. and Llado, A. (2005). Magic coverings. *The Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, 55:43–56.
- Hahn, G. and Sabidussi, G. (1997). *Graph symmetry: algebraic methods and applications*. NATO Advanced Science Institutes Series 497, Springer.
- Harris, J. M., Mossinghoff, M. J., and Hirst, J. L. (2008). *Combinatorics and Graph Theory Second Edition*. Springer Science+Business Media.
- Imrich, W., Klavzar, S., and Rall, D. F. (2008). *The Cartesian Product of Graphs*. A K Peters, Wellesley, MA.
- Inayah, N. (2013). Pelabelan  $(a, d) - h$ -anti ajaib pada beberapa kelas graf. *Tidak dipublikasikan (Disertasi)*.
- Jamil, N. A. (2014). Super  $(a, d)$ - $h$ -antimagic covering pada graf triangular ladder. *Prosiding Seminar Nasional Matematika*, 1(1):110–118.
- Karyanti (2012). Pelabelan selimut  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -anti ajaib super pada graf fan, sun, dan generalized petersen. *Tidak dipublikasikan (Skripsi)*.
- Kotzig, A. and Rosa, A. (1970). Magic valuations of finite graph. *Canada Mathematics Bulletin*, 13:451–461.
- Loehr, N. (2011). *Discrete mathematics and its application : Bijective Combinatorics*. Taylor and Francis Group, LLC.
- Munir, R. (2010). *Matematika Diskrit*. Informatika Bandung.
- Pemmaraju, S. and Skiena, S. (2003). *Cycles, Stars, and Wheels*. Cambridge University Press.



- Pemmaraju, S. and S.Skienna (2003). *Computational Discrete Mathematics: Combinatorics and Graph Theory in Mathematica*. Cambridge University Press.
- Pirnot and Thomas, L. (2000). *Mathematics All Around*. Addison Wesley.
- Rizky, P. (2014). Super (a,d)-h-antimagic covering pada shackle graf triangular book. *Prosiding Seminar Nasional Matematika*, 1(1):68–77.
- Rosyidah, K. (2014). Super (a,d)-h-antimagic dekomposisi pada graf helm. *Prosiding Seminar Nasional Matematika*, 1(1):155–160.
- Schneier, B. (1996). *Applied Cryptography 2nd*. John Wiley and Sons.
- Sedláček, J. (1963). *Pearls in Graph Theory*. Proceeding of the Symposium held in Smolenice Praha.
- Subbiaha, S. P. and Pandimadevib, J. (2014).  $h - e$ -super magic decomposition of graphs. *Electronic Journal of Graph Theory and Applications* 2, 2:115128.
- Wijaya and Kristiana (2001). Pelabelan total sisi ajaib pada gabungan suns graf. *Tidak dipublikasikan (Skripsi)*.

**Publikasi yang Dihasilkan Selama Menjadi Kandidat Gelar Master**

1. Agrita Kanty Purnapraja, Fia Cholidah, Dafik. (2014). Super  $(a, d) - \mathcal{H}$  Antimagic Total Selimut pada Graf Centipede. *Prosiding Seminar Nasional Matematika*, 667-681.
2. Dafik, A.K. Purnapraja, R. Hidayat. (2015). Cycle Super Antimagicness of Connected and Disconnected Tensor Product of Graphs. *ICGTIS Conference-ITB. Procedia Computer Science ELSEVIER*. submitted.