



**PELABELAN SUPER  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$  - ANTIMAGIC TOTAL  
DEKOMPOSISI PADA SHAKLE DARI GRAF KIPAS**

**SKRIPSI**

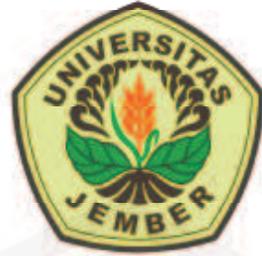
Oleh

**Fia Cholidah**

**NIM 111810101031**

**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS JEMBER**

**2015**



**PELABELAN SUPER  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$  - ANTIMAGIC TOTAL  
DEKOMPOSISI PADA SHAKLE DARI GRAF KIPAS**

**SKRIPSI**

diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan Program Studi Matematika (S1) dan mencapai gelar Sarjana

Sains

Oleh

**Fia Cholidah**

**NIM 111810101031**

**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS JEMBER**

**2015**

## PERSEMBAHAN

Dengan menyebut nama Allah yang Maha Pengasih lagi Maha Penyayang, Sholawat serta salam kepada junjungan Rosulullah Muhammad S.A.W, kupersembahkan suatu kebahagiaan penggalan bait dalam perjalanan hidupku teriring rasa terima kasih kepada:

1. Ayahanda tercinta Bapak Muhammad Ludfi dan Ibunda tercinta Ibu Dewi Masfufah juga Mami Elly Farida yang senantiasa mendo'akan dan memberikan kasih sayang yang berlimpah serta memberikan dukungan baik secara moral maupun materi, juga adek-adekku Fatimats Zahro, Jauhar Mutamakkin, Ahsanu Nadiyya J.
2. Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si selaku Dosen Pembimbing I dan Prof. Drs. Dafik, M.Sc.,Ph.D. selaku Dosen Pembimbing II yang telah meluangkan waktu, pikiran, dan perhatian dalam penulisan skripsi ini;
3. seluruh pahlawanku tanpa tanda jasa dari TK Al-Ma'arif 01 Singosari, SDN Pagentan 2, PonPes Al-Ulya Malang, MTs. 01 Singosari, SMAN 1 Lawang, PonPes Mahasiswi Al-Husnah dan Dosen MIPA UNEJ.

MOTTO

Barangsiapa bersungguh-sungguh, sesungguhnya kesungguhannya itu  
adalah untuk dirinya sendiri.  
(Terjemahan QS. Al-Ankabut[29]: 6)\*)

"Karena itu, ingatlah kamu kepada-Ku niscaya Aku ingat (pula)  
kepadamu, dan bersyukurlah kepada-Ku, dan janganlah kamu  
mengingkari-Ku."  
(Terjemahan QS. Al Baqarah: 152)\*)

Pengalaman adalah Guru terbaik.

\*) Departemen Agama Republik Indonesia. 2004. *Al-Qur'an dan Terjemahannya*.  
Bandung. CV Penerbit J-ART.

**PERNYATAAN**

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Fia Cholidah

NIM : 111810101031

Menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang berjudul: PELABELAN SUPER  $(a,d)$ - $\mathcal{H}$ -ANTIMAGIC TOTAL DEKOMPOSISI PADA SHAKEL DARI GRAF KIPAS adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali jika dalam pengutipan substansi disebutkan sumbernya, dan belum diajukan pada instansi manapun, serta bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa adanya tekanan dan paksaan dari pihak manapun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, Juni 2015

Yang menyatakan,

Fia Cholidah

NIM. 111810101031

**SKRIPSI**

**PELABELAN SUPER  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -ANTIMAGIC TOTAL  
DEKOMPOSISI PADA SHAKEL DARI GRAF KIPAS**

Oleh

**Fia Cholidah**  
**NIM 111810101031**

Pembimbing

Dosen Pembimbing Utama : Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si  
Dosen Pembimbing Anggota : Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D.

PERSETUJUAN

PELABELAN SUPER  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -ANTIMAGIC TOTAL  
DEKOMPOSISI PADA SHAKEL DARI GRAF KIPAS

SKRIPSI

diajukan guna memenuhi syarat untuk menyelesaikan pendidikan Program  
Sarjana Strata Satu Jurusan Matematika pada Fakultas Matematika dan Ilmu  
Pengetahuan Alam Universitas Jember

Nama Mahasiswa : Fia Cholidah  
NIM : 111810101031  
Jurusan : Matematika  
Program Studi : Matematika  
Angkatan Tahun : 2011  
Daerah Asal : Malang  
Tempat, Tanggal Lahir : Malang, 5 Agustus 1992

Disetujui oleh:

Pembimbing I,

Pembimbing II,

Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si  
NIP. 19840801 200801 2 006

Drs. Dafik, M.Sc, Ph.D.  
NIP. 19680802 199303 1 004

**PENGESAHAN**

Skripsi berjudul Super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic Covering pada Shackle Graf Triangular Book telah diuji dan disahkan oleh Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam pada:

Hari / tanggal :

Tempat : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas  
Jember

Tim Penguji :

Ketua,

Sekretaris,

Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si  
NIP.19840801 200801 2 006

Prof. Drs. Dafik, M.Sc, Ph.D.  
NIP.19680802 199303 1 004

Anggota I,

Anggota 2,

Drs. Rusli Hidayat, M. Sc  
NIP.19661012 199303 1 001

Kusbudiono, S.Si., M.Si  
NIP. 19770430 200501 1001

Mengesahkan,

Dekan

Prof. Drs. Kusno, DEA, Ph.D.  
NIP. 19610108 198602 1 001

**PELABELAN SUPER  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$  - ANTIMAGIC TOTAL DEKOMPO-SISI PADA SHAKLE DARI GRAF KIPAS;** Fia Cholidah, 111810101031; 2015: 98 halaman; Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Jember.

Teori graf pertama kali diperkenalkan oleh L. Euler, matematikawan asal Swiss pada tahun 1736. Ide besarnya muncul sebagai upaya dalam menyelesaikan masalah jembatan Königsberg menggunakan graf. Permasalahan yang cukup menarik dalam teori graf adalah pelabelan graf yang diperkenalkan oleh Rosa di tahun 1967. Pada Tahun 2012 Inayah dkk mengembangkan pelabelan total antimagic *covering* yang merupakan suatu fungsi bijektif sehingga terdapat bobot yang merupakan deret aritmatika  $a, a + d, a + 2d, \dots, a + (t - 1)d$  dengan label *co-vering* pada graf selalu berbeda dan berurutan. Suatu graf  $G = (V(G), E(G))$  dengan subgraf  $H(G)$  memiliki pelabelan *covering* jika terdapat minimal satu sisinya yang digunakan bersama dalam subgraf  $H(G)$  dari  $G$  yang isomorfik dengan  $H$ . Jika tidak terdapat sisi yang digunakan bersama, maka diperoleh definisi dekomposisi graf.

Pada penelitian ini mengkaji mengenai pelabelan super  $\mathcal{H}$ -antimagic total dekomposisi pada shackle dari graf kipas tunggal  $SF_4^n$  dan gabungan saling lepas  $mSF_4^n$ . Shakel dari graf kipas tunggal  $SF_4^n$  memiliki titik  $V(SF_4^n) = \{x_i, y_j; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq 3n + 1\}$  dan sisi  $E(SF_4^n) = \{x_i y_j; 1 \leq i \leq n; 3i - 2 \leq j \leq 3i + 1\} \cup \{y_j y_{j+1}; 1 \leq i \leq n; 3i - 2 \leq j \leq 3i\}$ . Sedangkan untuk gabungan saling lepasnya memiliki titik  $V(mSF_4^n) = \{x_i^k, y_j^k; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq 3n + 1; 1 \leq k \leq m\}$  dan sisi  $E(mSF_4^n) = \{x_i^k y_j^k; 1 \leq i \leq n; 3i - 2 \leq j \leq 3i + 1; 1 \leq k \leq m\} \cup \{y_j^k y_{j+1}^k; 1 \leq i \leq n; 3i - 2 \leq j \leq 3i; 1 \leq k \leq m\}$ .

Metode yang digunakan dalam penelitian ini, metode deduktif. Langkah-langkah dalam metode deduktif yaitu memilih graf, lalu mencari kardinalitas dari elemen graf beserta batas atasnya, melabeli sampai terbentuk pola. Setelah itu

dicari pelabelan sisi pada graf sedemikian hingga menghasilkan bobot total yang membentuk barisan aritmatika. Langkah akhir dalam metode ini adalah menentukan fungsi bijektif untuk pelabelan total graf. Metode ini digunakan pada pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -dekomposisi antimagic pada shakel graf kipas tunggal dan gabungan. kemudian diterapkan dalam pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic total dekomposisi pada shackle dari graf kipas baik yang tunggal maupun gabungan saling lepasnya. Pada penelitian ini Di peroleh batas atas  $d \leq 69$  untuk konektif dan  $d < 71$  untuk diskonektif. Sehingga, teorema baru yang dihasilkan adalah sebagai berikut:

Pelabelan super  $(63n+15, 0)$ ,  $(62n+16, 2)$ ,  $(61n+17, 4)$ ,  $(60n+18, 6)$ ,  $(59n+19, 8)$ ,  $(58n+20, 10)$ ,  $(57n+21, 12)$ ,  $(56n+22, 14)$ ,  $(55n+23, 16)$ ,  $(54n+24, 18)$ ,  $(53n+25, 20)$ ,  $(39n+63, 24)$ ,  $(50n+28, 26)$ ,  $(49n+29, 28)$ ,  $(46n+32, 34)$ ,  $(32n+70, 38)$ ,  $(43n+35, 40)$ ,  $(42n+36, 42)$ ,  $(39n+39, 48)$ ,  $(36n+42, 54)$ ,  $(35n+43, 56)$ ,  $(32n+46, 62)$ , antimagic total dekomposisi untuk graf tunggal. Pada teorema yang ditemukan dapat digolongkan menjadi 4 bagian berdasarkan permutasi titik yang digunakan, yaitu ditemukan sebanyak 4 permutasi label titik. Permutasi titik pertama menghasilkan 4.1.1, 4.1.2, 4.1.3, 4.1.4, 4.1.5, 4.1.6, 4.1.7, 4.1.8, 4.1.14, 4.1.18 dan 4.1.21. Permutasi titik kedua menghasilkan 4.1.9, 4.1.10, 4.1.11, 4.1.15, 4.1.19, dan 4.1.22. Permutasi titik ketiga menghasilkan 4.1.12 dan 4.1.16. Dan untuk permutasi titik ke empat menghasilkan 4.1.13, 4.1.17, dan 4.1.20.

pelabelan super  $(62mn+10mn+6, 0)$   $(61mn+10m+7, 2)$   $(60mn+10m+8, 4)$   $(59mn+10m+9, 6)$   $(58mn+10m+10, 8)$   $(57mn+10m+11, 10)$   $(56mn+10m+12, 12)$   $(49mn+10m+19, 26)$   $(42mn+10m+26, 40)$   $(35mn+10m+33, 54)$  antimagic total dekomposisi untuk gabungan graf saling lepas. Untuk graf gabungan saling lepas hanya menggunakan 1 permutasi titik untuk mendapatkan 10 teorema.

Dari kajian diatas ada beberapa pelabelan yang belum ditemukan oleh peneliti sehingga dalam penelitian ini diajukan open problem.

**Masalah terbuka 0.0.1.** *Super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic total dekomposisi pada shakel dari graf kipas  $(SF_4^n)$  untuk  $n \geq 2$  dengan  $d \in \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 22, 23, 24, 25, 27, 29, 30, 31, 32, 33, 35, 36, 37, 39, 41, 43, 44, 45, 46, 47, 49, 50, 51, 52, 53, 55, 57, 58, 59, 60, 61, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69\}$*

**Masalah terbuka 0.0.2.** *Super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic total dekomposisi pada gabungan saling lepas pada shakel dari graf kipas  $(mSF_4^n)$ , dengan  $n \geq 3$ ,  $m \geq 3$ , untuk  $d < 71$  kecuali  $d \in \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 26, 40, 54\}$*

## PRAKATA

Puji syukur ke hadirat Allah Swt atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul Super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic total dekomposisi pada Shackle dari graf kipas. Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat menyelesaikan pendidikan strata satu (S1) pada Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih atas bantuan, bimbingan dan dukungan dalam penyusunan skripsi ini, terutama kepada yang terhormat:

1. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
2. Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
3. Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si selaku Dosen Pembimbing I dan Prof. Drs. Dafik, M.Sc.,Ph.D. selaku Dosen Pembimbing II yang telah meluangkan waktu, pikiran, dan perhatian dalam penulisan skripsi ini;
4. Drs. Rusli Hidayat, M. Sc selaku Dosen Penguji I dan Kusbudiono, S.Si., M.Si selaku Dosen Penguji II;
5. Drs. Muhammad Hasan, M. Sc, Ph. D selaku Dosen Pembimbing Akademik;
6. Dosen dan karyawan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
7. Ayahanda tercinta Bapak Muhammad Ludfi dan Ibunda tercinta Ibu Dewi Masfufah juga Mami Elly Farida yang senantiasa memberikan dorongan, semangat dan kasih sayang berlimpah serta cucuran keringat dan do'a yang tak pernah putus juga Adek-adekku Ima, Jauhar, Dea terima kasih banyak atas *support* dan kasih sayangnya selama ini;

## Digital Repository Universitas Jember

8. Keluarga besar Bani Abdul Hadi dan Bani Mahfudz yang senantiasa memberikan dukungan dan do'a;
9. Pengasuh Pondok Pesantren Mahasiswi Al-Husnah Bapak KH. Hamam dan Ibu H. Isnaini yang telah memberikan banyak ilmunya;
10. Dua sahabatku Diana dan Diah, Senang bisa mengenal kalian. Terimakasih atas segala kesenangan dan kesedihan yang sudah kita lewati bersama;
11. Rempongers (Riprud, Encrung, Mprul, Pia, Onyil, Nitung, Gepeng, Endud, Rimboy, Sa'odah);
12. Keluarga Besar Matematika 2011 (KRAMAT'11 : Arum, Very, Angga, Dewi, Lina C, Upik, Ryan, Lina W, Evy, Jefri, Kiki, Ivana, Sella, Risma, Ulfa, Ivan, Haki, Potty, Eka, Rimbi, Baigon, Ayla, Darul, Elly, Sol, Fahma, Risan, Rafi, Hajar, Yulio, Zulfi, Emil, Dicky). Terima kasih telah menjadi keluarga bagiku. Kalian yang telah menemani perjalanan hidupku selama 4 tahun ini. Pengalaman yang tak akan terlupakan. Kalian adalah pelajaran hidup yang sangat berharga untukku;
13. teman - teman seperjuangan graf: (Mbak Cepha, Mbak Rida, Mb latifah, Mb Icha, Mas Anang, Hendri, Saiful, Mb Misi, Mb Sari, Mb Chusnul), terima kasih atas dorongan semangat dan bantuannya selama masa proses penyelesaian skripsiku;
14. Anggota CGANT (Mbak Agrita, Mbak Devi, Mas Randi, Mbak Putri). Terimakasih atas segala ilmu dan juga pengalaman yang diberikan;
15. Teman-temanku di Pondok Al-Husnah (Mb Riski, Endah, Arin, Siska, Maira, Ila, Tika, Leli, Sofi, Puput, Jujuk, Rohma, Faiq, Fitri, Fifin);
16. Almamater seluruh pahlawanku tanpa tanda jasa dari TK Al-Ma'arif 01 Singosari, SDN Pagentan 2, PonPes Al-Ulya Malang, MTs. 01 Singosari, SMAN 1 Lawang, PonPes Mahasiswi Al-Husnah dan Dosen MIPA UNEJ;
17. Semua pihak yang telah membantu terselesaikannya skripsi ini.

## Digital Repository Universitas Jember

Semoga bantuan, bimbingan, dan dorongan beliau dicatat sebagai amal baik oleh Allah SWT dan mendapat balasan yang sesuai dari-Nya. Selain itu, penulis juga menerima segala kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan skripsi ini. Akhirnya penulis berharap, semoga skripsi ini dapat bermanfaat.

Jember, Juni 2015

Penulis



DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL . . . . .	i
HALAMAN PERSEMBAHAN . . . . .	ii
HALAMAN MOTTO . . . . .	iii
HALAMAN PERNYATAAN . . . . .	iv
HALAMAN PEMBIMBING . . . . .	v
HALAMAN PERSETUJUAN . . . . .	vi
HALAMAN PENGESAHAN . . . . .	vii
RINGKASAN . . . . .	viii
PRAKATA . . . . .	xi
DAFTAR ISI . . . . .	xv
DAFTAR GAMBAR . . . . .	xvii
DAFTAR TABEL . . . . .	xviii
DAFTAR LAMBANG . . . . .	xix
<b>1 PENDAHULUAN . . . . .</b>	<b>1</b>
1.1 Latar Belakang Masalah . . . . .	1
1.2 Rumusan Masalah . . . . .	3
1.3 Batasan Masalah . . . . .	3
1.4 Tujuan Penelitian . . . . .	3
1.5 Manfaat Penelitian . . . . .	4
<b>2 TINJAUAN PUSTAKA . . . . .</b>	<b>5</b>
2.1 Konsep Dasar dan Terminologi Graf . . . . .	5
2.2 Graf Khusus . . . . .	9
2.3 Fungsi dan Barisan Aritmatika . . . . .	15
2.4 Pelabelan Graf . . . . .	17
2.4.1 Definisi Pelabelan Graf . . . . .	17
2.4.2 Pelabelan Selimut- $\mathcal{H}$ -Antimagic . . . . .	17
2.5 Lemma Batas Atas ( $d$ ) . . . . .	18
2.6 Aplikasi Graf . . . . .	19
2.7 Hasil - Hasil Penelitian Pelabelan Dekomposisi $\mathcal{H}$ -Antimagic . . . . .	22

<b>3 METODE PENELITIAN</b>	23
3.1 Metode Penelitian	23
3.2 Rancangan Penelitian	23
3.3 Teknik Penelitian	24
<b>4 HASIL DAN PEMBAHASAN</b>	27
4.1 Pelabelan super $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic total dekomposisi pada shakel dari graf kipas	27
4.2 Pelabelan Super $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ Antimagic Total Dekomposisi pada Shakel Graf Kipas Diskonektif	68
4.3 Generalisasi pada Pelabelan Super $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ Antimagic Total Dekomposisi pada Shakel Graf Kipas $SF_s^n$	93
4.4 Hasil dan Pembahasan	94
<b>5 KESIMPULAN DAN SARAN</b>	97
5.1 Kesimpulan	97
5.2 Saran	98
<b>DAFTAR PUSTAKA</b>	99

## DAFTAR GAMBAR

2.1	Contoh graf secara umum . . . . .	5
2.2	(a) Subgraf dari $G$ , (b) Spanning Subgraf dari $G$ . . . . .	7
2.3	Contoh graf isomorfis . . . . .	8
2.4	Contoh graf beserta matriks ketetanggaannya . . . . .	8
2.5	Contoh gabungan graf . . . . .	9
2.6	Contoh <i>TensorProduct</i> ( $P_3 \otimes C_6$ ) . . . . .	10
2.7	Contoh Shakel Graf ( <i>triangularbook</i> ) . . . . .	11
2.8	Contoh <i>Graph Joint</i> ( $P_3 + C_6$ ) . . . . .	12
2.9	Contoh operasi ( $S_3 \square P_4$ ) . . . . .	13
2.10	Contoh Operasi <i>Crown</i> ( $P_3 \square C_6$ ) . . . . .	14
2.11	Contoh graf kipas . . . . .	14
2.12	Contoh graf kipas . . . . .	15
2.13	Contoh Grafik Fungsi . . . . .	16
2.14	Shakel dari Graf Kipas $SF_4^3$ dengan $d = 62$ . . . . .	20
2.15	Graf <i>tree</i> . . . . .	21
3.1	Flowchart teknik penelitian . . . . .	25
3.2	Super $(a, d)$ - $SF_4^n$ -antimagic dekomposisi pada graf konektif . . . . .	26
3.3	Super $(a, d)$ - $mSF_4^n$ -antimagic dekomposisi pada graf diskonektif . . . . .	26
4.1	Jumlah titik dan sisi graf pada (a) $SF_4^2$ dan (b) $SJ_4^3$ . . . . .	28
4.2	Super $(204, 0)$ - $(F_4)$ antimagic total dekomposisi pada $SF_4^3$ . . . . .	31
4.3	Super $(202, 2)$ - $(F_4)$ antimagic total dekomposisi pada $SF_4^3$ . . . . .	33
4.4	Super $(200, 4)$ - $(F_4)$ antimagic total dekomposisi pada $SF_4^3$ . . . . .	35
4.5	Super $(198, 6)$ - $(F_4)$ antimagic total dekomposisi pada $SF_4^3$ . . . . .	37
4.6	Super $(196, 8)$ - $(F_4)$ antimagic total dekomposisi pada $SF_4^3$ . . . . .	39
4.7	Super $(194, 10)$ - $(F_4)$ antimagic total dekomposisi pada $SF_4^3$ . . . . .	41
4.8	Super $(192, 12)$ - $(F_4)$ antimagic total dekomposisi pada $SF_4^3$ . . . . .	43
4.9	Super $(190, 14)$ - $(F_4)$ antimagic total dekomposisi pada $SF_4^3$ . . . . .	44
4.10	Super $(188, 16)$ - $(F_4)$ antimagic total dekomposisi pada $SF_4^3$ . . . . .	47

4.11	Super (186, 18)-( $F_4$ ) antimagic total dekomposisi pada $SF_4^3$ . . . .	48
4.12	Super (184, 20)-( $F_4$ ) antimagic total dekomposisi pada $SF_4^3$ . . . .	50
4.13	Super (180, 24)-( $F_4$ ) antimagic total dekomposisi pada $SF_4^3$ . . . .	52
4.14	Super (178, 26)-( $F_4$ ) antimagic total dekomposisi pada $SF_4^3$ . . . .	54
4.15	Super (176, 28)-( $F_4$ ) antimagic total dekomposisi pada $SF_4^3$ . . . .	56
4.16	Super (170, 34)-( $F_4$ ) antimagic total dekomposisi pada $SF_4^3$ . . . .	57
4.17	Super (166, 38)-( $F_4$ ) antimagic total dekomposisi pada $SF_4^3$ . . . .	59
4.18	Super (164, 40)-( $F_4$ ) antimagic total dekomposisi pada $SF_4^3$ . . . .	60
4.19	Super (162, 42)-( $F_4$ ) antimagic total dekomposisi pada $SF_4^3$ . . . .	62
4.20	Super (156, 48)-( $F_4$ ) antimagic total dekomposisi pada $SF_4^3$ . . . .	63
4.21	Super (150, 54)-( $F_4$ ) antimagic total dekomposisi pada $SF_4^3$ . . . .	65
4.22	Super (148, 56)-( $F_4$ ) antimagic total dekomposisi pada $SF_4^3$ . . . .	66
4.23	Super (142, 62)-( $F_4$ ) antimagic total dekomposisi pada $SF_4^3$ . . . .	68
4.24	Super (142, 62)-( $F_4$ ) antimagic total dekomposisi pada $3SF_4^3$ . . . .	73
4.25	Super (586, 2)-( $F_4$ ) antimagic total dekomposisi pada $3SF_4^3$ . . . .	76
4.26	Super (578, 4)-( $F_4$ ) antimagic total dekomposisi pada $3SF_4^3$ . . . .	78
4.27	Super (570, 6)-( $F_4$ ) antimagic total dekomposisi pada $3SF_4^3$ . . . .	80
4.28	Super (570, 6)-( $F_4$ ) antimagic total dekomposisi pada $3SF_4^3$ . . . .	82
4.29	Super (554, 10)-( $F_4$ ) antimagic total dekomposisi pada $3SF_4^3$ . . . .	84
4.30	Super (548, 12)-( $F_4$ ) antimagic total dekomposisi pada $3SF_4^3$ . . . .	86
4.31	Super (490, 26)-( $F_4$ ) antimagic total dekomposisi pada $3SF_4^3$ . . . .	88
4.32	Super (434, 40)-( $F_4$ ) antimagic total dekomposisi pada $3SF_4^3$ . . . .	90
4.33	Super (378, 54)-( $F_4$ ) antimagic total dekomposisi pada $3SF_4^3$ . . . .	92

DAFTAR TABEL

2.1 Ringkasan pelabelan selimut super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic. . . . . 22



DAFTAR LAMBANG

$G$	=	Graf $G$
$G(V, E)$	=	Sebarang graf tak berarah dengan $V$ adalah himpunan tak kosong dari semua titik dan $E$ adalah himpunan sisi
$v_n$	=	Titik ke- $n$ pada suatu graf
$e_n$	=	Sisi ke- $n$ dari suatu graf
$ V(G) $	=	Himpunan titik dari graf $G$ yang disebut <i>order</i>
$ E(G) $	=	Himpunan sisi dari graf $G$ yang disebut ukuran ( <i>size</i> )
$\mathcal{H}AVC$	=	$\mathcal{H}$ antimagic vertex covering atau pelabelan titik $\mathcal{H}$ antiajaib selimut
$\mathcal{SHATC}$	=	<i>Super <math>\mathcal{H}</math> antimagic total covering</i> atau super $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ antiajaib total selimut
$d$	=	Nilai beda barisan bobot total selimut pada $\mathcal{SHATC}$
$a$	=	Bobot total selimut terkecil yang merupakan suku pertama barisan
$F_t$	=	Lambang untuk graf kipas
$SF_t^n$	=	Lambang untuk shakel graf kipas
$mSF_t^n$	=	Lambang untuk gabungan saling lepas shakel graf kipas
$n$	=	Banyaknya expand dari samping kiri ke kanan shakel graf kipas
$m$	=	Banyaknya gabungan saling lepas pada shakel graf kipas
$x_i$	=	Titik ke- $i$ pada bagian bawah graf $SF_t^n$
$y_j$	=	Titik ke- $j$ pada bagian atas graf $SF_t^n$
$x_i^k$	=	Titik ke- $i$ dalam komponen ke- $k$ pada bagian bawah graf $mSF_t^n$
$y_j^k$	=	Titik ke- $i$ dalam komponen ke- $k$ pada bagian bawah atas $mSF_t^n$
$\alpha(x_i)$	=	Fungsi bijektif pelabelan titik $x$ untuk shakel graf kipas
$\alpha(y_j)$	=	Fungsi bijektif pelabelan titik $y$ untuk shakel graf kipas
$w_{\alpha_1}$	=	Fungsi bijektif bobot selimut untuk shakel graf kipas
$\alpha(x_i y_j)$	=	Fungsi bijektif pelabelan sisi $x_i y_j$ untuk shakel graf kipas
$\alpha(y_j y_{j+1})$	=	Fungsi bijektif pelabelan sisi $y_j y_{j+1}$ untuk shakel graf kipas
$W_{\alpha_1}$	=	Fungsi bijektif bobot total selimut untuk shakel graf kipas

## BAB 1. PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang Masalah

Teori graf merupakan bagian dari matematika diskrit dengan sebuah pokok bahasan yang sudah tua usianya namun banyak digunakan sebagai alat bantu untuk menggambarkan suatu persoalan agar lebih mudah dimengerti dan diselesaikan. Kegunaan graf sangat banyak. Umumnya graf digunakan untuk memodelkan suatu masalah sehingga menjadi lebih mudah, yaitu dengan cara merepresentasikan objek-objek tersebut. Contoh pemodelan suatu masalah dengan menggunakan graf dapat dilihat pada penggambaran rangkaian listrik, senyawa kimia, jaringan komunikasi, jaringan *network* komputer, peta, struktur hierarki sosial, dan lain-lain. Pada abad ke 18, terjadi suatu permasalahan yang berhubungan dengan jembatan Knigsberg . Kasus ini terpecahkan pada tahun 1736 oleh matematikawan Swiss, yaitu Leonhard Euler. Saat itu dia memikirkan kemungkinan untuk menyeberangi semua jembatan tepat satu kali dan kembali ke tempat semula.

Meskipun pada awalnya graf diciptakan untuk diterapkan dalam penyelesaian masalah rute terpendek, namun graf telah mengalami perkembangan yang sangat luas di dalam teori graf itu sendiri. Salah satu topik yang menarik untuk dikaji adalah dekomposisi graf. Dalam dekomposisi graf terdapat pelabelan, yaitu merupakan pemetaan yang membentuk himpunan dari beberapa bagian graf yang dilabeli menggunakan bilangan bulat positif. Pada pertengahan tahun 1960-an Pelabelan pertama kali diperkenalkan oleh Sedlacek (1964) dan Stewart (1966). Terdapat 3 bagian pelabelan, yaitu pelabelan titik, pelabelan sisi, dan pelabelan total. Pelabelan titik merupakan suatu pelabelan dengan daerah asal himpunan titik yang membentuk barisan aritmatika. Pelabelan sisi suatu pelabelan dengan daerah asal himpunan sisi yang membentuk barisan aritmatika. Sedangkan pelabelan total merupakan suatu pelabelan dengan daerah asal himpunan titik dan sisi. Pada tahun 1970, Kotzig dan Rosa mengembangkan pelabelan menjadi pela-

belan super, pelabelan magic, pelabelan antimagic. Pelabelan magic merupakan pelabelan dengan jumlah bobot total yang sama. Sedangkan pelabelan antimagic merupakan pelabelan yang terdapat bobot total berbeda dan membentuk barisan aritmatika dengan  $a$  adalah suku pertama dan  $d$  adalah beda yang akan dicari nilai batas atasnya. Dimana  $a, d \in$  bilangan bulat tak negatif dan  $a \neq 0$ . Pada pelabelan setiap graf, nilai  $d$  untuk barisan aritmatika adalah  $d \leq s$ , dimana  $s$  merupakan batas atas nilai beda dan  $s \in$  bilangan bulat positif. Sedangkan pelabelan super adalah pelabelan titik dengan  $f(V) = \{v_i | v_i \in \text{bilangan bulat positif}\}$  dan sisi dengan  $f(E) = \{e_i | e_i \in \text{bilangan bulat positif}\}$  dimana label titik kurang dari label sisi ( $f(V) < f(E)$ ).

Kemudian pelabelan total magic dikembangkan menjadi pelabelan total magic (*covering*) yang pertama kali diperkenalkan oleh GutiLerrez dan LladLo pada tahun 2005. Pada Tahun 2012 Inayah dkk mengembangkan pelabelan total antimagic *covering* yang merupakan suatu fungsi bijektif sehingga terdapat bobot yang merupakan baris aritmatika  $a, a+d, a+2d, \dots, a+(t-1)d$  dengan label *co-vering* pada graf selalu berbeda dan berurutan. Suatu graf  $G = (V(G), E(G))$  dengan subgraf  $H(G)$  memiliki pelabelan *covering* jika terdapat minimal satu sisinya yang digunakan bersama dalam subgraf  $H(G)$  dari  $G$  yang isomorfik dengan  $H$ . Jika tidak terdapat sisi yang digunakan bersama, maka diperoleh definisi dekomposisi graf. Dekomposisi dari graf  $G$  juga dapat didefinisikan sebagai selimut sempurna, yaitu kumpulan atau jumlah dari subgraf  $H_i$  pada  $G$  merupakan suatu dekomposisi jika dan hanya jika tidak ada pemakaian sisi bersama.

Terdapat beberapa hasil pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic total dekomposisi yang ditemukan oleh Inayah (2013) yaitu pelabelan dekomposisi  $(a, d)$ - $SF_4$ -anti ajaib super pada graf belunggu  $Shack(SF_4; n)$  dan pelabelan dekomposisi  $(a, d)$ - $P_4$ -anti ajaib super pada graf prisma  $C_n \times P_m$ . Am-supermagic decomposition of the Cartesian product of a path and a sun graph oleh Hader(2013). Oleh karena itu, penelitian ini mengembangkan pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic total dekomposisi pada shakle graf kipas, karena dekomposisi pada shakle graf kipas masih belum ditemukan. Shakle graf kipas dinotasikan dengan  $SF_t^n$  merupakan graf yang terdiri dari beberapa partisi himpunan bagian titik-titik  $v_1, v_2, v_3, v_4, \dots, v_n$

yang terhubung dengan titik pusat  $p$ . Oleh karena itu pada graf tersebut akan dicari batas atas  $d$  dan fungsi bijektif untuk pelabelan dekomposisinya.

## 1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah dipaparkan, maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah :

- Berapa batas atas  $d$  pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic total dekomposisi pada shakel dari graf kipas konektif dan diskonektif?
- Apakah shakel graf kipas konektif dan diskonektif memiliki pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic total dekomposisi?
- Apakah terdapat generalisasi pada shakel dari graf kipas dalam pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic total dekomposisi?

## 1.3 Batasan Masalah

Sedangkan untuk batasan masalah dalam penelitian ini adalah :

- Graf yang dilabeli merupakan graf yang terhubung, sederhana dan tidak berarah;
- Super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic total dekomposisi pada shakle graf kipas tunggal disimbolkan dengan  $SF_t^n$  sedangkan untuk gabungan disimbolkan dengan  $mSF_t^n$ , dengan  $n$  ganjil dan  $m \geq 2$ .

## 1.4 Tujuan Penelitian

Adapun Tujuan dari penelitian ini adalah :

- Menentukan batas atas  $d$  super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic total dekomposisi pada shakel graf kipas konektif dan diskonektif ;
- Mencari pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic total dekomposisi pada shakel dari graf kipas konektif dan diskonektif;
- Mencari generalisasi pada shakel dari graf kipas dalam pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic total dekomposisi.

### 1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari hasil penelitian ini, yaitu:

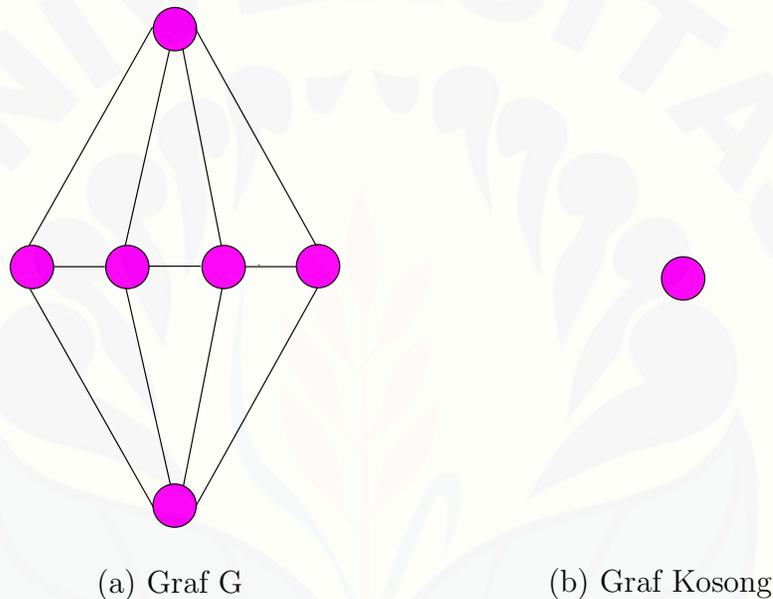
- a. Menambah wawasan baru dalam bidang teori graf mengenai dekomposisi graf salah satunya adalah pengembangan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic total dekomposisi shakle graf kipas.
- b. Hasil penelitian ini diharapkan dapat digunakan sebagai perluasan ataupun pengembangan ilmu dalam masalah pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic total dekomposisi.



BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Konsep Dasar dan Terminologi Graf

Graf  $G$  adalah pasangan  $(V;E)$  dimana  $V$  adalah himpunan tak kosong yang anggotanya disebut himpunan titik (*vertex*) dan  $E$  adalah himpunan sisi (*edges*). Definisi graf diatas menyatakan bahwa  $V$  tidak boleh kosong, sedangkan  $E$  boleh kosong. Jadi sebuah graf dimungkinkan tidak mempunyai sisi, tetapi harus memiliki titik minimal satu (Slamin, 2009).



Gambar 2.1 Contoh graf secara umum

Graf  $G=(V;E)$  diatas terdiri atas himpunan titik  $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, \dots, v_9\}$  dan himpunan sisi  $|E(G)| = \{e_1, e_2, e_3, e_4, \dots, e_{16}\}$ . Graf yang himpunan sisinya kosong disebut graf kosong (dapat dilihat pada titik  $v_1$ ). Banyaknya titik pada graf dinyatakan dengan  $|V|$  sedangkan banyaknya sisi dinyatakan dengan  $|E|$ . Contoh graf secara umum dapat di lihat pada Gambar 2.1

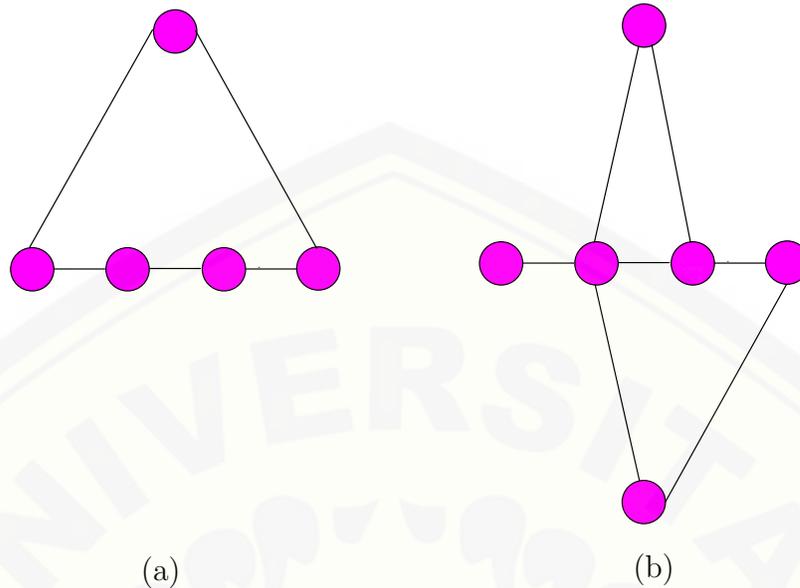
Graf  $G$  yang memiliki barisan berhingga ( tak kosong ) disebut dengan jalan

atau *walk* dimana elemen pada titik (*vertex*) dan sisi (*edge*) saling bergantian. Sehingga  $W = (e_1; v_1, e_2; v_2, e_3; v_3, \dots, e_n; v_n)$ . Banyaknya sisi dalam  $W$  merupakan panjang jalan  $W$ .  $W$  disebut jalan tertutup bila  $v_0 = v_k$ .  $W$  disebut jejak (*trail*) jika semua sisi dalam jalan berbeda. Sedangkan  $W$  disebut lintasan (*path*) jika semua titik dan sisi dalam jalan  $W$  berbeda. Dengan kata lain, *path* adalah *trail* yang tidak memiliki titik yang berulang. Jika lintasan (*path*) berawal dan berakhir pada titik yang sama, yaitu  $A_1 = A_n$ , maka lintasan tersebut membentuk suatu lintasan tertutup yang disebut siklus. Derajat (*degree*) yang dinotasikan dengan  $d_i$  (index  $i$  menunjukkan titik ke- $i$  pada graf) merupakan jumlah sisi yang menempel pada titik tersebut. Titik pada graf  $G$  dikatakan bertetangga (*adjacent*) jika terdapat dua titik yang terhubung oleh sisi. Dan jika sebuah titik tidak mempunyai tetangga dengan kata lain berderajat 0, maka titik tersebut disebut titik terisolasi (*isolated vertex*).

Jarak atau *distance* dari suatu graf dinotasikan dengan  $\delta(u, v)$ , adalah panjang lintasan (*path*) terpendek dari dua buah titik sembarang pada graf. Diameter dari sebuah graf adalah jarak terpanjang antara dua buah titik sembarang pada graf. Dan dinotasikan sebagai  $diamG = \max\{e(v) : v \in V\}$ . Sedangkan *girth* dari sebuah graf merupakan panjang dari siklus terpendek pada graf. Berdasarkan ada tidaknya gelang atau sisi ganda pada graf, maka graf digolongkan menjadi dua jenis, yaitu Graf sederhana (*simplegraph*) dan Graf tak sederhana (*unsimplegraph*). Graf sederhana merupakan graf yang tidak mengandung gelang maupun sisi ganda. Sedangkan tak sederhana merupakan graf yang mengandung sisi ganda atau gelang dinamakan graf tak sederhana. Berdasarkan orientasi arah pada sisi, maka secara umum graf dibedakan atas dua jenis, yaitu graf tak berarah (*undirected graph*) dan Graf berarah (*directed graph*). Sebuah graf  $G$  juga mungkin mengandung loop yaitu sisi yang hanya terhubung dengan satu titik, dan struktur graf yang mengandung loop disebut sebagai Pseudograph. Sebuah graf  $G$  selalu memiliki subgraf  $H$ , jika setiap titik pada  $H$  adalah titik dari  $G$ , dan setiap sisi dari  $H$  adalah sisi dari  $G$ . Dengan kata lain,  $V(H) \subseteq V(G)$  dan  $E(H) \subseteq E(G)$ .

Dafik (2008:17) mengungkapkan bahwa subgraph  $H$  adalah sebuah spanning

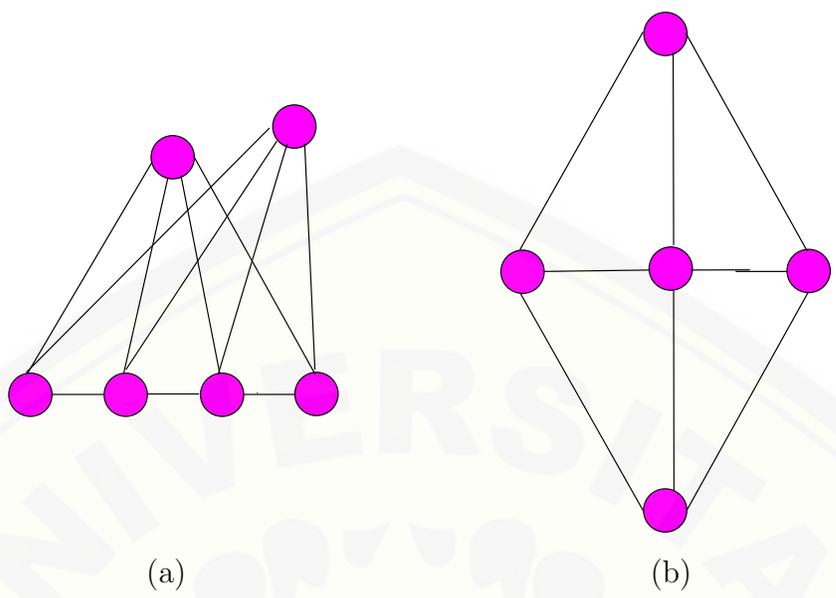
subgraph dari  $G$  jika  $H$  mengandung semua titik dari graf  $G$ , atau  $V(H) \subseteq V(G)$ . Pada gambar 2.2 menunjukkan subgraf dan spanning subgraf dari gambar 2.1



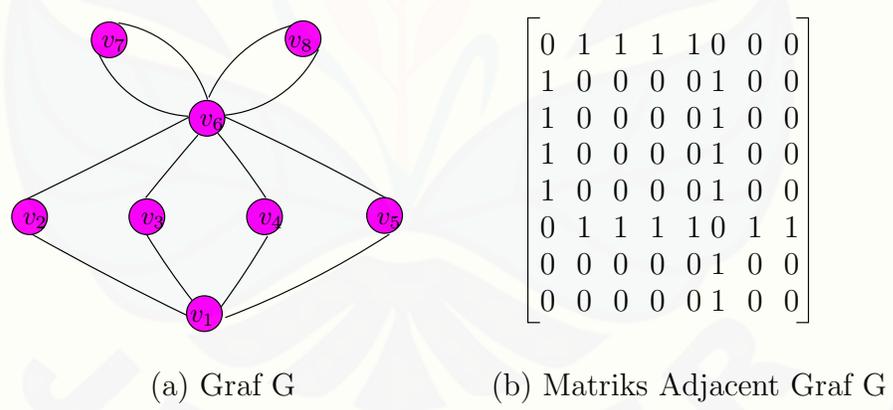
Gambar 2.2 (a) Subgraf dari  $G$  , (b) Spanning Subgraf dari  $G$

Graf  $G$  dikatakan isomorfis jika dua buah graf atau lebih mempunyai jumlah titik, sisi, dan derajat yang sama. Sedangkan graf  $G$  dikatakan homomorfis jika dua buah graf atau lebih mempunyai bentuk geometri yang sama, tetapi jumlah titik, sisi dan berbeda. Perhatikan gambar 2.3 , pada gambar (a) isomorfis dengan gambar 2.1 sedangkan gambar (b) tidak isomorfis.

Sebuah graf dapat direpresentasikan dalam bentuk matrik jika dan hanya jika titik-titiknya saling bertetangga (*Adjacent*). Matriks ketetanggaan selalu berordo  $n \times n$  dan dinotasikan dengan  $A = [a_{ij}]$  . Dimana  $a_{ij}$  bernilai 1 jika titik  $i$  dan  $j$  bertetangga. Sebaliknya, jika titik  $i$  dan  $j$  tak bertetangga maka  $a_{ij}$  bernilai 0. Pada gambar 2.4 akan diberikan contoh Graf dengan matriks ketetanggaannya.

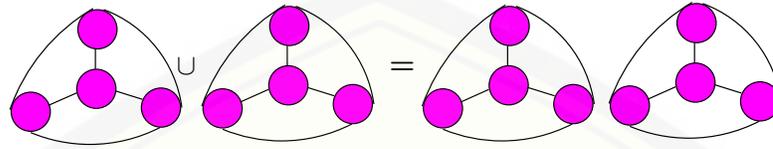


Gambar 2.3 Contoh graf isomorfis



Gambar 2.4 Contoh graf beserta matriks ketetanggaannya

Graf  $G$  terhubung (*connected*) jika terdapat lintasan (*path*) yang menghubungkan titik-titik pada graf  $G$ . Jika tidak terdapat lintasan, maka disebut graf tak terhubung (*disconnected*). Sedangkan gabungan dua graf atau lebih dinotasikan dengan  $mG$  merupakan gabungan saling lepas (*Disjoint*) salinan graf  $G$  sebanyak  $m$  komponen. Berikut adalah contoh graf gabungan :



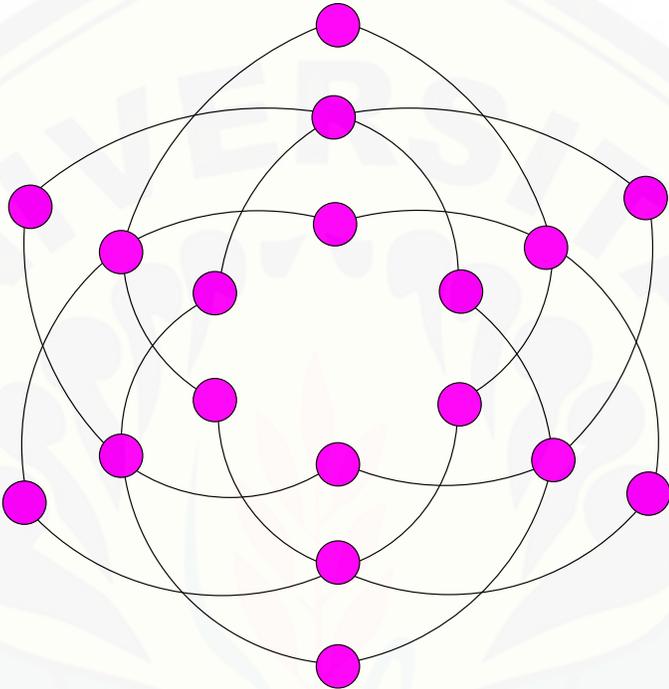
Gambar 2.5 Contoh gabungan graf

## 2.2 Graf Khusus

Graf khusus merupakan graf yang mempunyai keunikan dan karakteristik bentuk khusus. Keunikan graf khusus dapat dilihat bahwa graf tersebut tidak isomorfis dengan graf lain. Sedangkan untuk karakteristiknya dapat dilihat bahwa graf khusus tetap simetris meskipun diperluas sampai  $n$ . Berikut beberapa contoh dari graf khusus.

### 1. Tensor Product ( $P_n \otimes C_m$ )

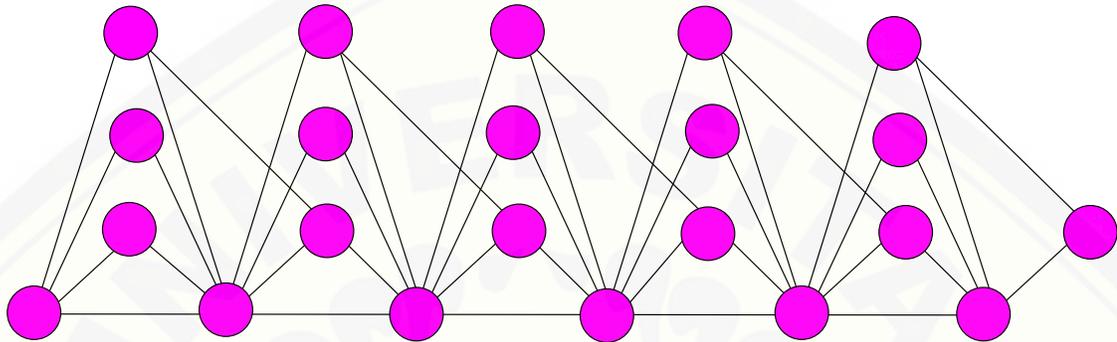
Tensor product dari dua graf  $G_1$  dan  $G_2$  adalah penggabungan dari dua graf  $G_1$  dan  $G_2$  yang dinotasikan oleh  $G_1 \otimes G_2$  mempunyai himpunan titik  $V(G_1 \otimes G_2) = V(G_1) \times V(G_2)$  dan himpunan sisi  $E(G_1 \otimes G_2) = (u_1, v_2)(u_2, v_2) | u_1 u_2 \in E(G_1) \text{ dan } v_1 v_2 \in E(G_2)$  Contoh graf lintasan dapat dilihat pada gambar 2.6 (Harsya, 2014).



Gambar 2.6 Contoh *Tensor Product* ( $P_3 \otimes C_6$ )

## 2. Shaket Graf Triangular Book ( $SBt_n$ )

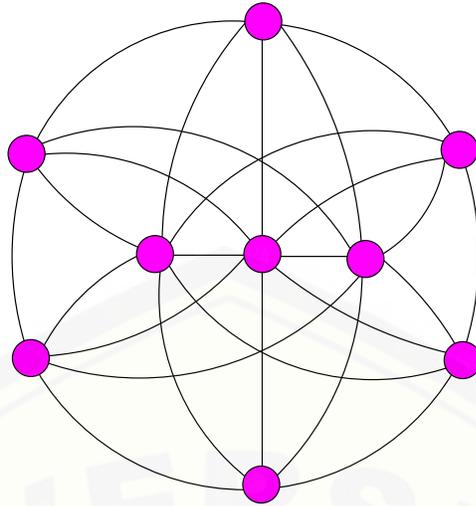
shakle graf triangular book merupakan graf yang terbentuk dari beberapa graf triangular book dimana mempunyai tepat satu titik yang sama. Shaklegraf triangular book adalah graf  $SBt_n$  dengan  $4n + 2$  titik  $V = \{x_i, y_i, z_j, p_j; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq n + 1\}$  dan  $8n + 1$  sisi  $E = \{p_i z_i; 1 \leq i \leq n + 1\} \cup \{p_i y_i \cup p_i x_i \cup p_i p_{i+1} \cup p_{i+1} z_i \cup p_{i+1} y_i \cup p_{i+1} x_i \cup x_i z_{i+1}; 1 \leq i \leq n\}$  (Pudianing,2014).



Gambar 2.7 Contoh Shakel Graf (*triangularbook*)

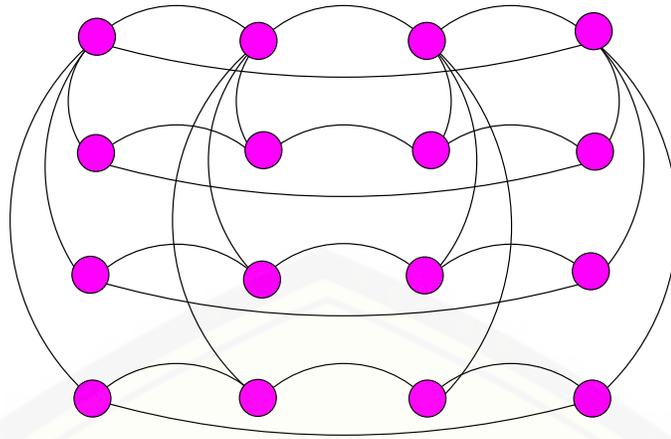
## 3. Graph Joint ( $P_n + C_m$ )

*Graph Joint* ( $G_1 + G_2$ ) *Joint* dari graf  $G_1$  dan  $G_2$ , dinotasikan dengan  $G = G_1 + G_2$ , adalah graf  $G$  dimana  $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$  dan  $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{uv | u \in V(G_1), v \in V(G_2)\}$ . Contoh dari operasi *joint* dapat dilihat pada Gambar 2.8(Alfian,2014).

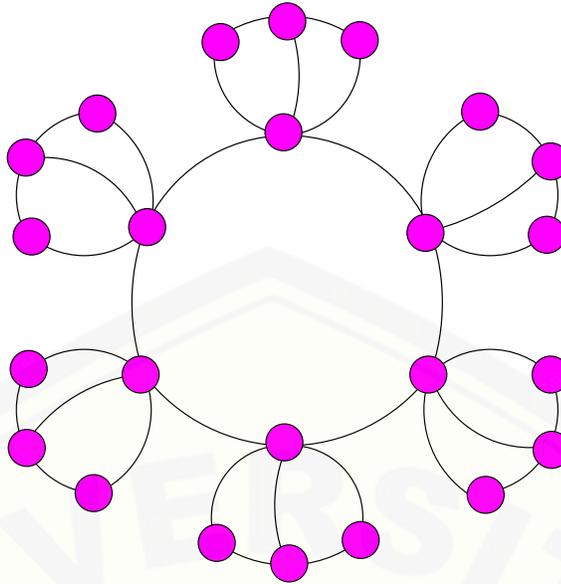
Gambar 2.8 Contoh *Graph Joint* ( $P_3 + C_6$ )

#### 4. *Cartesian Product* Graf $C(S_3 \square P_4)$

Operasi *cartesian product* merupakan operasi perkalian, titik-titik pada graf lingkaran dikalikan sebanyak titik-titik pada graf lintasan. Kemudian titik-titiknya dihubungkan sesuai dengan bentuk graf lintasan dan graf lingkaran. Apabila titik-titiknya dikembangkan maka gambar juga akan berkembang sesuai dengan pola mengikuti graf lintasan dan graf lingkaran. Memperhatikan Gambar 2.9 maka diperoleh  $V = \{x_{i,j}; 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n\}$  dan  $E = \{x_{i,j}x_{i+1,j}; 1 \leq i \leq m - 1; 1 \leq j \leq n\} \cup \{x_{m,n}x_{i,j}; 1 \leq j \leq n\} \cup \{x_{i,j}x_{i,j+1}; 1 \leq i \leq m \ 1 \leq j \leq n\}$ . (Alfian,2014).

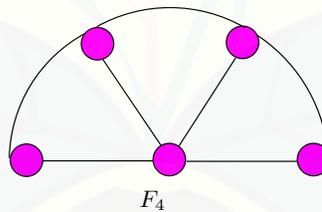
Gambar 2.9 Contoh operasi  $(S_3 \square P_4)$ 5. *Crown Product*  $P_n \odot C_m$ 

*Crown Product*  $P \odot C$  dari dua graf  $P$  dan  $C$  didefinisikan sebagai graf yang diperoleh dengan mengambil sebuah duplikat dari graf  $C$  dan  $|V(P)|$  duplikat  $C_1, C_2, \dots, C_{|V(C)|}$  dari  $H$ , kemudian menghubungkan titik ke- $i$  dari  $P$  ke setiap titik di  $C_i$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots, V(C)$  (Alfian, 2014). Sebagai contoh pada gambar 2.10.

Gambar 2.10 Contoh Operasi *Crown* ( $P_3 \square C_6$ )

#### 6. Graf Kipas

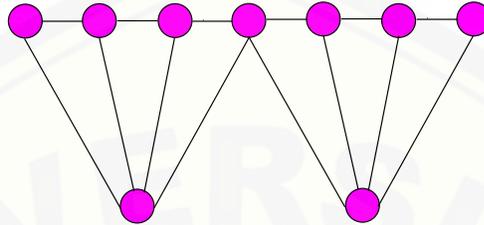
Graf kipas atau *fan graph*, dinotasikan dengan  $F_n$  dimana  $n \geq 2$ , adalah graf yang didapat dengan menghubungkan semua titik dari graf lintasan  $P_n$  pada satu titik pusat. Sehingga  $F_n$  terdiri dari  $n + 1$  titik, yaitu  $p, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  dengan  $p$  merupakan titik pusat, dan  $2n - 1$  sisi, yaitu  $px_i, 1 \leq i \leq n, x_i x_{i+1}, 1 \leq i \leq n - 1$  (Bača dkk. 2007:1235).



Gambar 2.11 Contoh graf kipas

Shakel pada suatu graf didefinisikan oleh Maryanti dkk (2010) sebuah graf yang dibentuk dari  $k$  graf tak terhubung tak trivial  $G_1, G_2, \dots, G_k$  sehingga untuk setiap  $s, t \in [1, k]$  dengan  $|s, t| \geq 2$  berlaku  $G_s$  dan  $G_t$  tidak mem-

punyai titik yang sama, dan untuk setiap  $i \in [1, k - 1]$ ,  $G_i$  dan  $G_{i+1}$  mempunyai tepat satu titik yang sama, disebut titik penghubung, dan  $k - 1$  titik penghubung itu semua berbeda. Shackle graf kipas merupakan graf yang terbentuk dari beberapa graf kipas dengan tepat satu titik yang sama akan dijadikan objek penelitian kali ini. Contoh graf kipas dan shakel graf kipas dapat dilihat pada Gambar 2.12 dibawah ini.



Gambar 2.12 Contoh graf kipas

### 2.3 Fungsi dan Barisan Aritmatika

Fungsi merupakan suatu relasi yang memetakan anggota dari satu himpunan dengan tepat satu anggota pada himpunan lainnya. Misal terdapat himpunan  $A$  yang disebut sebagai daerah asal fungsi atau disebut juga dengan domain dan himpunan  $B$  disebut sebagai daerah kawan fungsi atau disebut juga dengan kodomain. Atau dapat juga dinotasikan sebagai berikut :

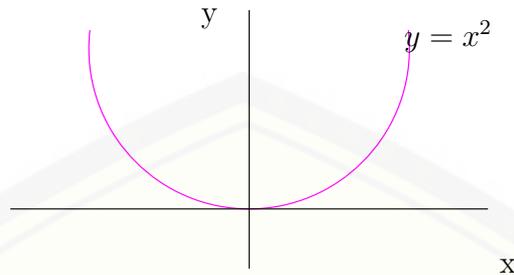
$$f : A \rightarrow B$$

Fungsi  $f$  diatas merupakan fungsi yang memetakan setiap anggota himpunan  $A$  dengan tepat satu pasangan anggota himpunan  $B$ . Fungsi dibedakan menjadi 3, diantaranya adalah fungsi injektif, fungsi surjektif, dan fungsi bijektif.

Fungsi injektif (fungsi into) dikenal juga dengan nama fungsi satu-satu merupakan fungsi yang memetakan  $f : A \rightarrow B$  jika dan hanya jika untuk sebarang  $a$  dan  $b$  anggota himpunan  $A$ , dimana  $a$  tidak sama dengan  $b$  maka berlaku  $f(a) \neq f(b)$ .

Fungsi surjektif (fungsi onto) dikenal juga dengan fungsi kepada. Fungsi  $f : A \rightarrow B$  disebut fungsi surjektif jika dan hanya jika range  $f(R_f)$  sama dengan  $B$  atau  $f : A \rightarrow B$  merupakan fungsi onto jika  $R_f = B, \forall x \in A$ . Dengan kata lain, suatu kodomain fungsi surjektif sama dengan range atau daerah hasil.

Fungsi  $f : A \rightarrow B$  disebut sebagai fungsi bijektif jika fungsi tersebut merupakan fungsi injektif dan fungsi surjektif. Gambar 2.13 merupakan contoh fungsi injektif, surjektif, dan bijektif.



Gambar 2.13 Contoh Grafik Fungsi

Pada gambar 2.13 menunjukkan bahwa terdapat fungsi injektif jika  $D = [0, \infty)$  dan  $K = \mathfrak{R}$ , fungsi surjektif jika  $D = \mathfrak{R}$  dan  $K = [0, \infty)$  dan merupakan fungsi bijektif jika  $D = [0, \infty)$  dan  $K = [0, \infty)$

Barisan aritmatika adalah suatu barisan yang teratur, dengan  $a$  adalah suku pertama dan  $b$  merupakan selisih antara 2 suku yang berurutan atau biasa disebut *beda* ( $b = U_n - U_{n-1}$ ) yang selalu bernilai tetap untuk membentuk sebuah barisan  $U_1, U_2, U_3, \dots, U_{n-1}, U_n$  dimana  $U_1 - U_2 = U_3 - U_2 = \dots = U_n - U_{n-1} =$  konstanta. Perhatikan contoh barisan bilangan berikut:

$$3, 8, 13, 18, \dots, n$$

Barisan bilangan di atas mempunyai beda 2 (dua). Misalkan  $U_1, U_2, U_3, \dots, U_{n-1}, U_n$  merupakan suatu Barisan aritmatika, maka untuk menentukan nilai suku ke- $n$ , perhatikan penurunan rumus berikut, jika suku pertam  $U_1 = a$ , maka didapatkan:

$$U_2 - U_1 = b \Rightarrow U_2 = U_1 + b = a + b$$

$$U_3 - U_2 = b \Rightarrow U_3 = U_2 + b = a + b + b = a + 2b$$

$$U_4 - U_3 = b \Rightarrow U_4 = U_3 + b = a + 2b + b = a + 3b$$

...

$$U_n - U_{n-1} \Rightarrow U_n = U_{n-1} + b = a + (n - 1)b$$

Sehingga rumus suku ke- $n$  dari suatu Barisan aritmatika adalah  $a + (n - 1)b$ .

## 2.4 Pelabelan Graf

### 2.4.1 Definisi Pelabelan Graf

Pelabelan pada sebuah graf merupakan suatu fungsi yang memetakan elemen-elemen pada graf berupa himpunan titik, himpunan sisi, atau gabungan himpunan keduanya ke suatu himpunan bilangan bulat positif. Elemen-elemen pada graf selalu dilabeli dengan bilangan bulat positif yang berbeda, sehingga fungsi yang memetakannya disebut fungsi bijektif. Pelabelan titik (*vertex labelling*) merupakan pelabelan dengan domain titik, jika domainnya adalah sisi, maka disebut pelabelan sisi (*edge labelling*) dan jika domainnya adalah gabungan dari titik dan sisi, maka pelabelannya disebut pelabelan total (*total labellings*) (Wallis, 2001:2). Jumlah semua label yang berkaitan dengan suatu elemen pada graf disebut bobot dari elemen tersebut.

Pada pelabelan titik, jumlah label dua titik yang menempel pada suatu sisi disebut *bobot sisi*. Jika semua bobot sisi sama disebut pelabelan titik sisi ajaib. Sebaliknya, jika semua bobot sisi berbeda dan membentuk deret aritmatika dengan suku pertama  $a$  dan beda  $d$  maka pelabelan tersebut disebut pelabelan titik sisi anti ajaib. Pada pelabelan total, bobot sisi memiliki pengertian jumlah label sisi dan label dua titik yang menempel pada suatu sisi. Jika semua bobot total sama maka pelabelan tersebut disebut pelabelan total sisi ajaib (*magic*) karena memiliki beda yang sama. Sedangkan jika terdapat bobot total berbeda dan membentuk deret aritmatika dengan suku pertama  $a$  dan beda  $d$  maka pelabelan tersebut disebut pelabelan total sisi anti ajaib (pelabelan total sisi *antimagic*). Sedangkan pelabelan super adalah pelabelan titik dengan  $f(V) = \{v_i | v_i \in \text{bilangan bulat positif}\}$  dan sisi dengan  $f(E) = \{e_i | e_i \in \text{bilangan bulat positif}\}$  dimana label titik kurang dari label sisi ( $f(V) < f(E)$ ).

### 2.4.2 Pelabelan Selimut- $\mathcal{H}$ -Antimagic

Suatu graf  $G$  dengan subgraf  $H$  memiliki keluarga subgraf  $\mathcal{H} = \{H_1, H_2, H_3, \dots, H_k\}$  dengan sifat setiap sisi di  $G$  termuat sekurang-kurangnya pada satu graf  $H_i$  untuk suatu  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$  disebut dengan pelabelan selimut (*covering*). Jika untuk setiap  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ ,  $H_i$  isomorfik dengan suatu subgraf  $H$ , maka  $H$  dikatakan suatu selimut- $H$  dari  $G$ . Selanjutnya dikatakan bahwa  $G$

memuat selimut- $H$ . Gutiérrez dan Lladó (2005) memperkenalkan pelabelan total  $\mathcal{H}$ -ajaib dengan menggunakan konsep selimut- $\mathcal{H}$ . Misalkan  $\alpha : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, v_g + e_g\}$  adalah suatu fungsi injektif. Definisikan bobot- $H_i$ ,  $\alpha(H_i)$  sebagai  $\alpha(H_i) = \sum_{v \in V(H_i)} \alpha(v) + \sum_{e \in E(H_i)} \alpha(e)$ . Fungsi  $\alpha$  disebut pelabelan  $H$ -ajaib, jika  $\{\alpha(H_i) | H_i \in H\} = k_\alpha$  untuk suatu bilangan bulat positif  $k_\alpha$ . Kemudian,  $\alpha$  dikatakan pelabelan  $H$ -ajaib super, jika  $\alpha(V(G)) = \{1, 2, \dots, v_G\}$ . Selanjutnya, pelabelan total  $\mathcal{H}$ -ajaib yang terkait dengan selimut- $\mathcal{H}$  dinamakan *pelabelan selimut  $H$ -ajaib*. Jika tidak terdapat pemakaian sisi bersama, maka graf tersebut mempunyai pelabelan selimut sempurna atau disebut dengan pelabelan dekomposisi.

### 2.5 Lemma Batas Atas ( $d$ )

Terdapat suatu Lemma untuk menentukan batas atas  $d$  pada graf, yaitu :

**Lemma 2.5.1.** *Jika sebuah graf  $G(V, E)$  adalah pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$  antimagic total covering maka*

$$d \leq \frac{(p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H}{s - 1}$$

untuk  $s = |H_i|$ ,  $p_G = |V|$ ,  $q_G = |E|$ ,  $p_H = |V'|$ ,  $q_H = |E'|$

**Bukti.**  $f(V) = 1, 2, 3, \dots, p_G$  dan  $f(E) = p_G + 1, p_G + 2, p_G + 2, \dots, p_G + q_G$ . Misalkan graf  $(p_G, q_G)$  mempunyai pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$  antimagic total dekomposisi dengan fungsi total  $f(\text{total}) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots, p_G + q_G\}$  maka himpunan bobot dekomposisi sebuah graf adalah  $\{a, a + d, a + 2d, \dots, a(s - 1)d\}$  dimana  $a$  merupakan bobot dekomposisi terkecil maka berlaku:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + p_H + (p_G + 1) + (p_G + 2) + \dots + (p_G + q_H) &\leq a \\ \frac{p_H}{2}(1 + p_H) + q_H p_G + \frac{q_H}{2}(1 + q_H) &\leq a \\ \frac{p_H}{2} + \frac{p_H^2}{2} + q_H p_G + \frac{q_H}{2} + \frac{q_H^2}{2} &\leq a \end{aligned}$$

Sedangkan untuk nilai terbesar berlaku:

$$\begin{aligned}
a + (s - 1)d &\leq p_G + p_G - 1 + p_G - 2 + \dots + (p_G - (p_H - 1)) + (p_G + q_G) \\
&\quad + (p_G + q_G - 1) + (p_G + q_G - 2) + \dots + (p_G + q_G - (q_H - 1)) \\
&= p_H p_G - \frac{p_H - 1}{2}(1 + (p_H - 1)) + q_H p_G + q_H p_G \\
&\quad - \frac{q_H - 1}{2}(1 + (q_H - 1)) \\
&= p_H p_G - \frac{p_H - 1}{2}(p_H) + q_H p_G + q_H p_G - \frac{q_H - 1}{2}(q_H)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(s - 1)d &\leq p_H p_G - \frac{p_H - 1}{2}(p_H) + q_H p_G + q_H p_G - \frac{q_H - 1}{2}(q_H) - a \\
&\leq p_H p_G - \frac{p_H - 1}{2}(p_H) + q_H p_G + q_H p_G - \frac{q_H - 1}{2}(q_H) - \\
&\quad \left(\frac{p_H}{2} + \frac{p_H^2}{2} + q_H p_G + \frac{q_H}{2} + \frac{q_H^2}{2}\right) \\
&= p_H p_G - \frac{p_H^2}{2} + \frac{p_H}{2} + q_H p_G - \frac{q_H^2}{2} + \frac{q_H}{2} - \left(\frac{p_H}{2} + \frac{p_H^2}{2} + \frac{q_H}{2} + \frac{q_H^2}{2}\right) \\
&= p_H p_G + q_H q_G - p_H^2 - q_H^2 \\
&= p_H p_G - p_H^2 + q_H q_G - q_H^2 \\
&= (p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H \\
d &\leq \frac{(p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H}{(s - 1)}
\end{aligned}$$

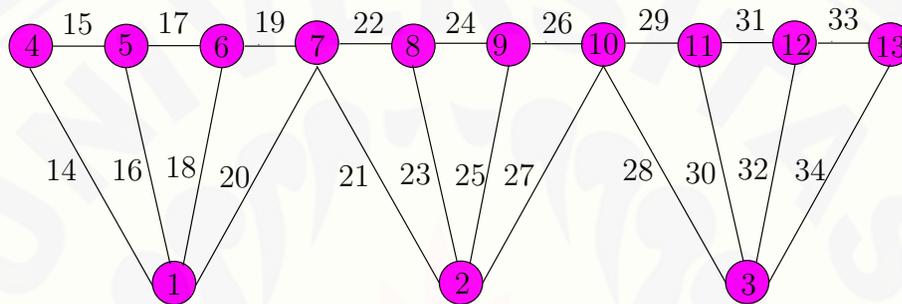
Persamaan diatas membuktikan bahwa batas atas  $d \leq \frac{(p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H}{s - 1}$  jika graf  $G$  memiliki pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic total dekomposisi dari berbagai famili graf (Dafik. 2007).  $\square$

## 2.6 Aplikasi Graf

Dafik(2015) memberikan contoh aplikasi dari super  $(a, d)$ -edge antimagic graph labeling. Aplikasi tersebut digunakan untuk membangun kalimat sandi dari sebuah pesan agar bersifat rahasia. Misalkan terdapat sebuah pesan : "Waktunya Eksekusi". Kalimat rahasia dari pesan tersebut akan dikembangkan melalui

teknik pelabelan super  $(a, d) - \mathcal{H}$  antimagic total dekomposisi. Pertama kali harus didata huruf yang digunakan dalam pesan di atas yaitu a, e, i, k, n, s, t, u, w, y (spasi dan tanda baca diabaikan). Setelah mengetahui huruf dan angka yang digunakan dibangunlah diagram pohon yang berakar di label 1, kemudian lengkapilah dengan label sisinya sedemikian hingga bobot total sisinya membentuk barisan aritmatika dengan  $d=62$ , pelabelan *antimagic* dekomposisi pada shakel dari graf kipas.

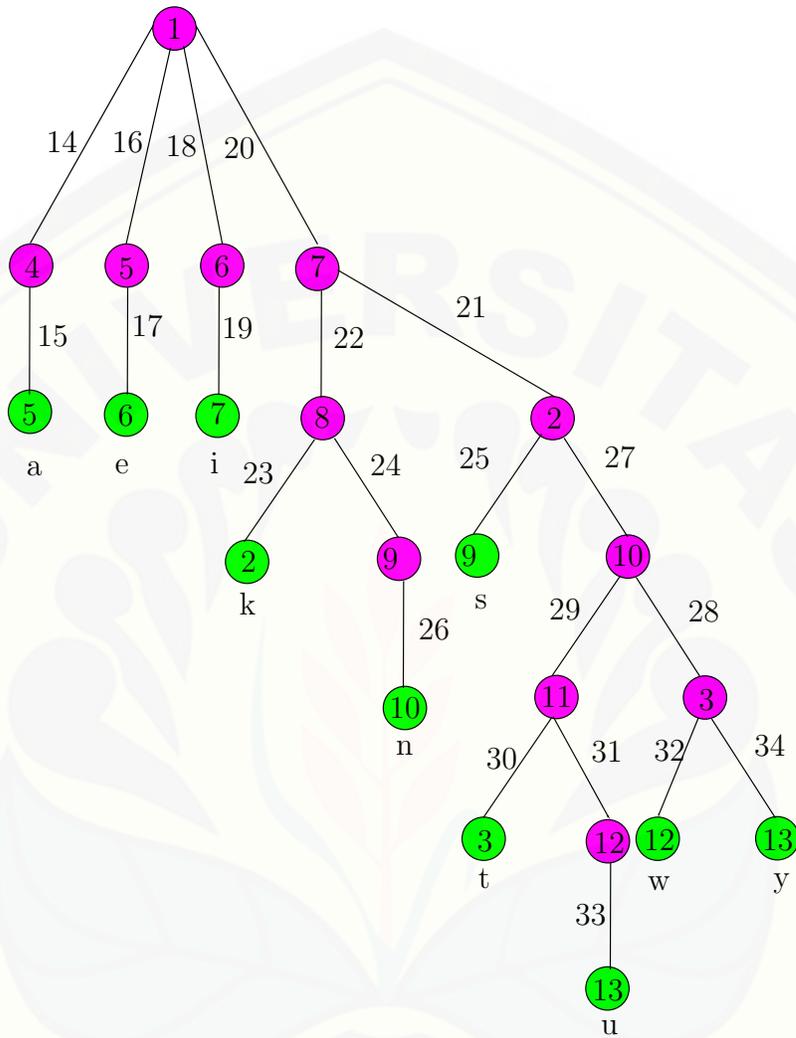
Gambar 2.14 menunjukkan pelabelan pada shakel dari graf kipas  $SF_4^3$  dengan  $d = 62$  dan gambar 2.15 adalah graf *tree* dengan pelabelan yang sama pada graf  $SF_4^3$  dengan  $d = 62$ .



Gambar 2.14 Shakel dari Graf Kipas  $SF_4^3$  dengan  $d = 62$

Selanjutnya adalah mengkombinasikan label sisi tadi dengan cara menerapkan teknik cryptosystem modulo 26 terhadap masing-masing hurufnya  $a = \text{mod}(1415, 26) = 11$ ,  $e = \text{mod}(1617, 26) = 5$ ,  $i = \text{mod}(1819, 26)$ ,  $k = \text{mod}(202223, 26)$ ,  $n = \text{mod}(20222426, 26)$ ,  $s = \text{mod}(202125, 26)$ ,  $t = \text{mod}(2021272930, 26)$ ,  $u = \text{mod}(2021272931, 26)$ ,  $w = \text{mod}(2021272832, 26)$ ,  $y = \text{mod}(2021272834, 26)$ .

Berdasarkan pengkodean *polyalphabetic* dimana  $0=a, 1=b, 2=c, 3=d, 4=e, 5=f, 6=g, 7=h, 8=i, 9=j, 10=k, 11=l, 12=m, 13=n, 14=o, 15=p, 16=q, 17=r, 18=s, 19=t, 20=u, 21=v, 22=w, 23=x, 24=y$ , dan  $25=z$ , maka hasil konversinya yaitu  $a=l, e=f, i=z, k=v, n=q, s=b, t=o, u=p, w=u, y=w$ . Sehingga dihasilkan pesan rahasia sebagai berikut: **ulvopqwl fvbfpbzb**. Apabila pesan rahasia tersebut dikembalikan ke pesan semula menjadi "Waktunya Eksekusi"

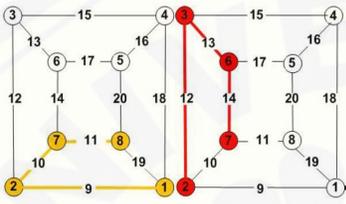
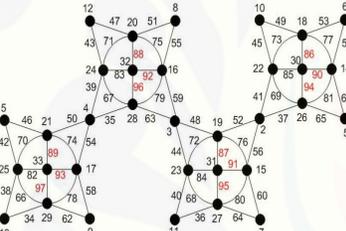
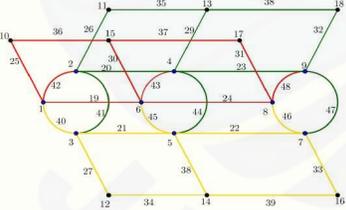


Gambar 2.15 Graf tree

2.7 Hasil - Hasil Penelitian Pelabelan Dekomposisi  $\mathcal{H}$ -Antimagic

Beberapa ringkasan hasil penelitian pelabelan selimut  $H$ -Antimagic yang juga dapat digunakan sebagai rujukan dalam penelitian ini akan disajikan sebagai berikut :

Tabel 2.1: Ringkasan pelabelan selimut super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic.

Graf	$a$	$d$	Hasil
<p><math>C_n \times P_m</math> (Graf Prisma)</p>  <p>(Inayah, 2013)</p>	$10k + 8 \lfloor n/2 \rfloor$	$d = 9$	$\mathcal{H} = P_4$
<p><math>Shack(SF_4; n)</math> (Graf Belunggu)</p>  <p>(Inayah, 2013)</p>	$1189 \lfloor n/2 \rfloor$	$d = 1$	$\mathcal{H} = F_4$
<p>(Cartesian of path and sun graph)</p>  <p>(Hader, 2013)</p>	$13n + 4$ $12n + 5 + \lfloor n/2 \rfloor$	$d = 1$ $d = 2$	$\mathcal{H} = S_3$

## BAB 3. METODE PENELITIAN

### 3.1 Metode Penelitian

Dalam penelitian ini digunakan metode deduktif. Langkah-langkah dalam metode deduktif yaitu memilih graf, lalu mencari kardinalitas dari elemen graf beserta batas atasnya, melabeli sampai terbentuk pola. Setelah itu dicari pelabelan sisi pada graf sedemikian hingga menghasilkan bobot total yang membentuk barisan aritmatika. Langkah akhir dalam metode ini adalah menentukan fungsi bijektif untuk pelabelan total graf. Metode ini digunakan pada pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -dekomposisi antimagic pada shakel graf kipas tunggal dan gabungan.

### 3.2 Rancangan Penelitian

untuk memberikan gambaran secara sistematis dalam penelitian ini maka dibuat rancangan penelitian sebagai berikut :

#### 1. Penotasian Titik dan Sisi

Shackle graf kipas adalah graf  $SF_4^n$  dengan  $4n + 1$  titik  $V(SF_4^n) = \{x_i, y_j, ; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq 3n + 1\}$  dan  $7n$  sisi  $E(SF_4^n) = \{x_i y_j; 3i - 2 \leq j \leq 3i + 1; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_j y_{j+1}; 3i - 2 \leq j \leq 3i; 1 \leq i \leq n\}$ . Adapun gabungan shakle graf kipas  $mSF_4^n$  didefinisikan sebagai gabungan dari sebanyak  $m$  graf kipas yang mempunyai titik  $V(mSF_4^n) = \{x_i^k, y_j^k; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq 3n + 1; 1 \leq k \leq m\}$  dan sisi  $E(mSF_4^n) = \{x_i y_j; 3i - 2 \leq j \leq 3i + 1, 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_j^k y_{j+1}^k; 3i - 2 \leq j \leq 3i; 1 \leq i \leq n; 1 \leq k \leq m\}$

#### 2. Indikator Pelabelan

Indikator pelabelan super  $H$  antimagic dekomposisi pada shakle dari graf kipas dalam penelitian ini adalah:

- (a) Semua label titik berbeda

Pada pelabelan super dekomposisi  $SF_4^n$ -antimagic pada shakle

graf kipas, label titik merupakan fungsi bijektif dari himpunan titik pada graf kipas ke bilangan bulat positif dari 1 sampai  $n$  titik.

(b) Semua label sisi berbeda

Pada pelabelan super dekomposisi  $SF_4^n$ -antimagic pada shakle graf kipas, label sisi merupakan fungsi bijektif dari himpunan sisi pada graf kipas ke bilangan bulat dari  $n$  titik ditambah 1 sampai sejumlah titik dan sisi.

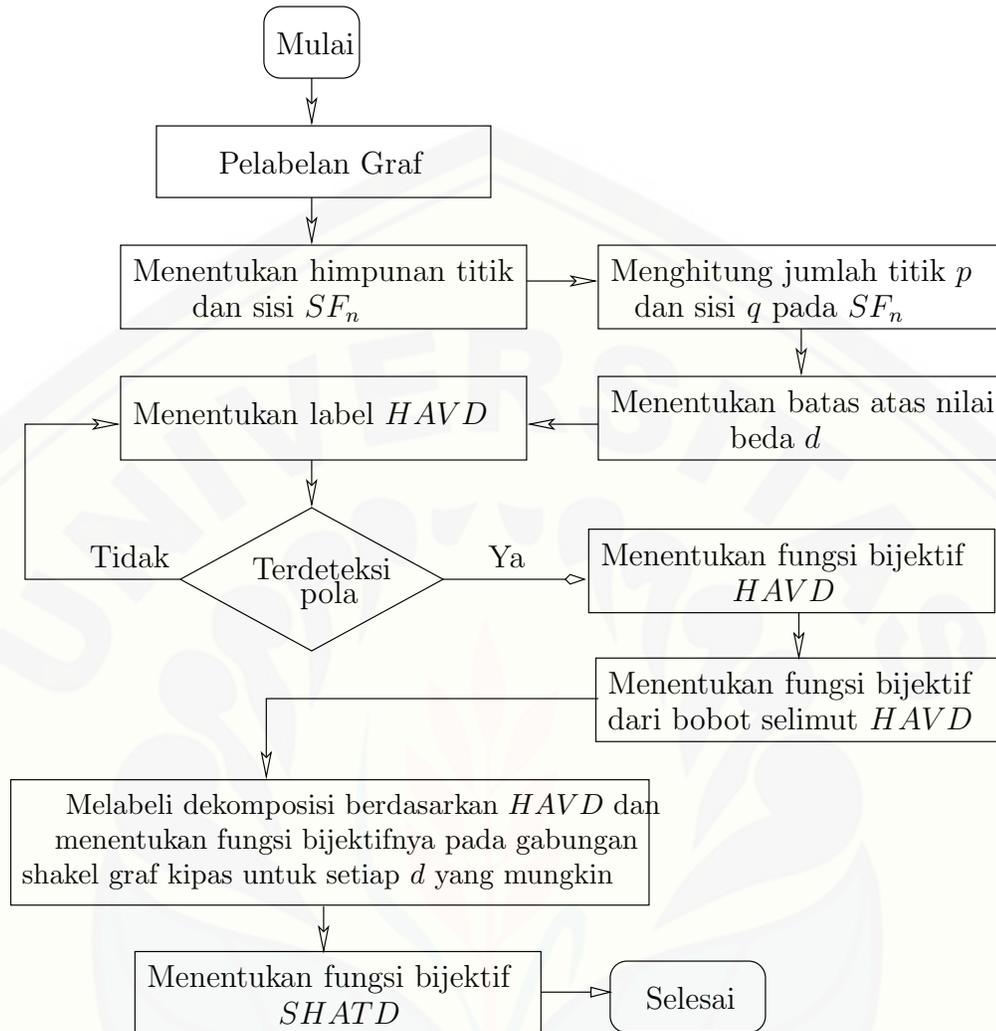
(c) Total label dekomposisi  $SF_4^n$  sebagai koleksi subgraf pada graf kipas mempunyai nilai dari bobot titik dan bobot sisi yang termuat di dalamnya dengan syarat tidak ada sisi yang di pakai bersama pada graf lainnya.

### 3.3 Teknik Penelitian

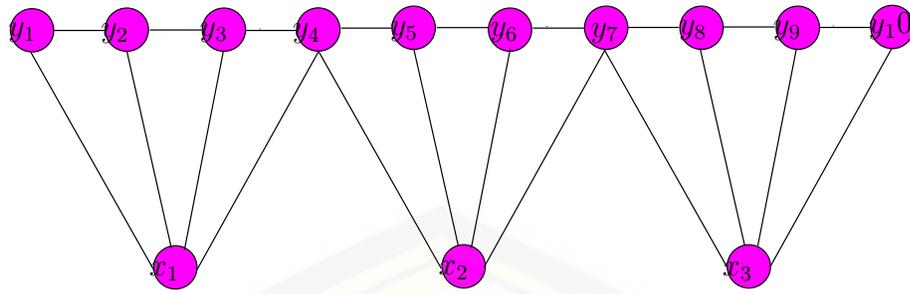
Penelitian ini dilakukan pada shakle graf kipas  $SF_4^n$  dan gabungan shakle graf kipas  $mSF_4^n$ . Dengan teknik penelitian sebagai berikut:

1. Menghitung jumlah titik  $p$  dan sisi  $q$  pada shakle graf kipas  $SF_4^n$
2. Menentukan batas atas nilai beda  $d$  pada shakle graf kipas  $SF_4^n$
3. Menentukan label HAVD ( $\mathcal{H}$  Antimagic Vertex Dekomposition) atau pelabelan titik  $(a, d)$ -dekomposisi antimagic pada shakle graf kipas  $SF_4^n$
4. Apabila label HAVD berlaku untuk beberapa graf maka dikatakan pelabelan itu *expandable* sehingga dilanjutkan menentukan fungsi bijektif dari HAVD pada shakle graf kipas  $SF_4^n$
5. Menentukan fungsi bijektif HAVD pada shakle graf kipas  $SF_4^n$
6. Melabeli gabungan shakle graf kipas  $mSF_4^n$  dengan SHATD (Super  $\mathcal{H}$  Antimagic Total Dekomposisi) atau pelabelan total super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic dekomposisi dengan nilai beda  $d$  yang *feasible*
7. Menentukan fungsi bijektif pelabelan total super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic dekomposisi gabungan graf kipas  $mSF_4^n$ .

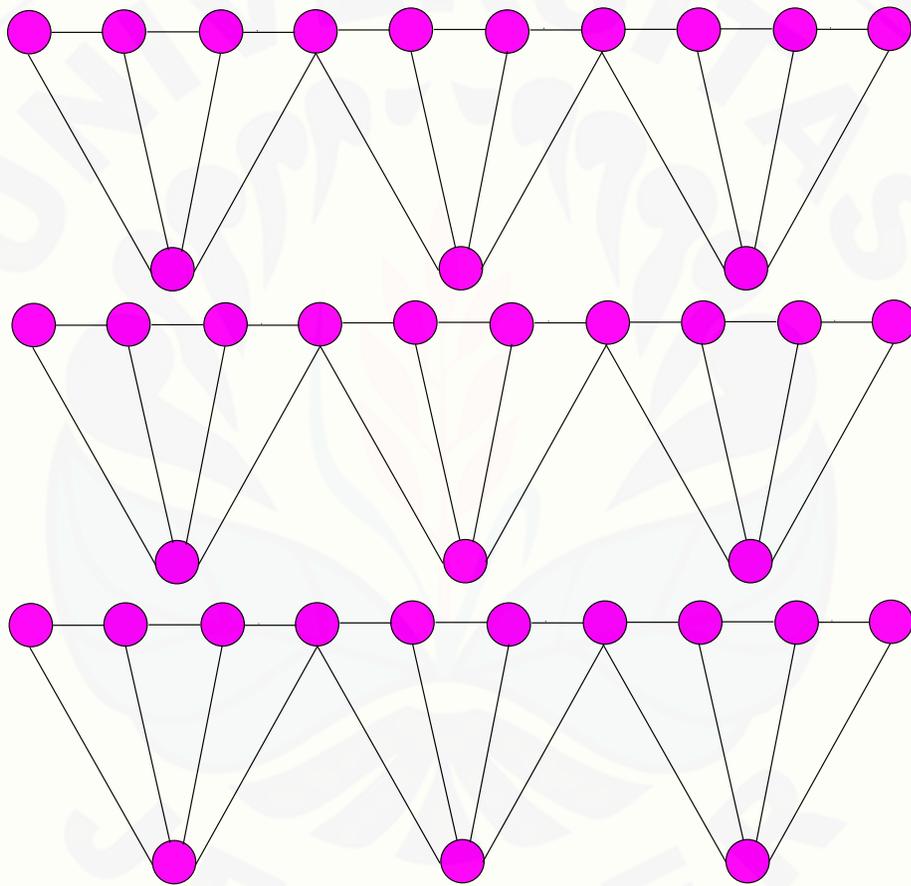
Langkah-langkah penelitian di atas juga dapat disajikan dalam bentuk flowchart pada gambar 3.1.



Gambar 3.1 Flowchart teknik penelitian



Gambar 3.2 Super  $(a, d)$ - $SF_4^n$ -antimagic dekomposisi pada graf konektif



Gambar 3.3 Super  $(a, d)$ - $mSF_4^n$ -antimagic dekomposisi pada graf diskonektif

## BAB 4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Dalam bab ini akan dijelaskan tentang hasil penelitian dari pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic total dekomposisi pada shakel dari graf kipas ( $F_4$ ). Ada beberapa hal yang telah dilakukan oleh peneliti, yaitu diawali dengan mencari nilai batas atas ( $d$ ), menentukan  $\mathcal{H}AV$  dan bobot selimut  $\mathcal{H}AV$  kemudian menentukan  $S\mathcal{H}ATC$  dan selanjutnya bobot selimut total  $S\mathcal{H}ATD$  untuk membuktikan bahwa gabungan graf ini merupakan  $S\mathcal{H}ATD$ .

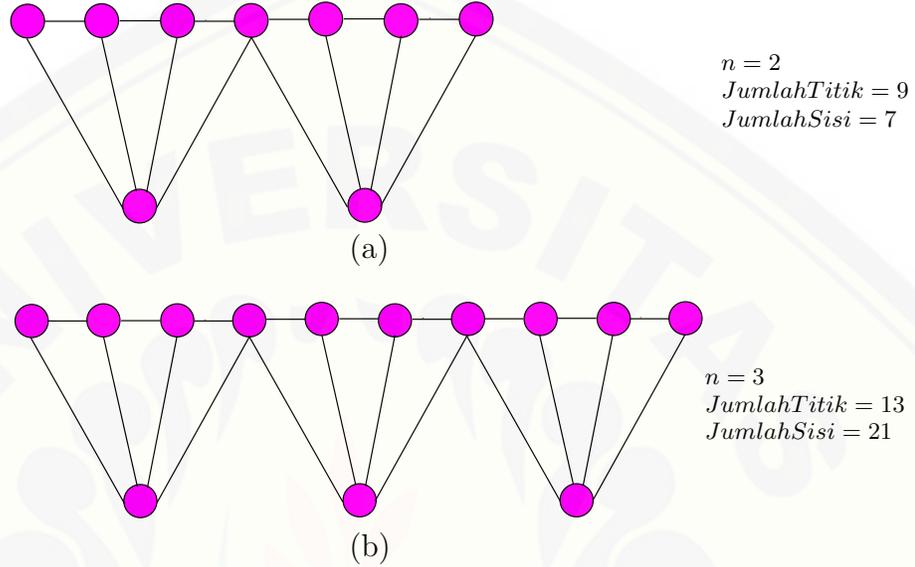
Terkait dengan pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic total dekomposisi pada shakel dari graf kipas ( $F_4$ ) terdapat hasil utama yang berupa teorema baru. Teorema baru yang ditemukan secara eksperimental berjumlah 32 teorema yang akan disajikan dengan format pemaparan teorema di awal lalu di ikuti dengan bukti dan gambar ilustrasi sebagai visualisasi kebenaran pembuktian teorema. Berikut ini merupakan tahap-tahap untuk menemukan teorema-teorema baru dan sekaligus menjawab rumusan masalah yang telah disajikan sebelumnya.

### 4.1 Pelabelan super $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic total dekomposisi pada shakel dari graf kipas

Secara definisi, Shakel dari graf kipas adalah graf  $SF_4^n$  dengan titik  $V(SF_4^n) = \{x_i, y_j; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq 3n + 1\}$  dan sisi  $E(SF_4^n) = \{x_i y_j; 1 \leq i \leq n; 3i - 2 \leq j \leq 3i + 1\} \cup \{y_j y_{j+1}; 1 \leq i \leq n; 3i - 2 \leq j \leq 3i\}$ . Dengan  $n$  merupakan *expand* pada graf kipas ( $F_4$ ) dari samping kiri ke kanan. Penentuan batas atas  $d$  merupakan hal yang penting dalam penelitian ini untuk mengisyaratkan seberapa banyak nilai beda yang mungkin dimiliki oleh shackle graf kipas tunggal dan gabungan. Untuk menentukan nilai-nilai  $d$  tersebut, perlu diketahui jumlah titik ( $p_G$ ) dan jumlah sisi ( $q_G$ ) pada shackle graf kipas tunggal dan gabungan. Serta perlu diketahui jumlah titik ( $p_H$ ) dan jumlah sisi ( $q_H$ ) pada subgraf dari shackle graf kipas tunggal dan gabungan juga jumlah dekomposisinya ( $s$ ).

Berdasarkan definisi dari Shakel dari graf kipas, maka diperoleh jumlah titik

$(p_G) = 4n + 1$  dan jumlah sisi  $(q_G) = 7n$  pada shakel graf kipas. Serta diperoleh jumlah titik  $(p_H) = 5$  dan jumlah sisi  $(q_H) = 7$  untuk selimut pada shakel dari graf kipas berupa  $F_4$  dengan  $n$  merupakan jumlah selimutnya. Berikut adalah Gambar 4.1 sebagai suatu ilustrasi untuk menentukan jumlah titik dan jumlah sisi pada shackle graf kipas. Gambar 4.1 merupakan ilustrasi dari penentuan jumlah titik dan jumlah sisi pada shakel dari graf kipas.



Gambar 4.1 Jumlah titik dan sisi graf pada (a)  $SF_4^2$  dan (b)  $SJ_4^3$

Berdasarkan lemma 2.5.1 dapat ditentukan nilai  $d$  sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 d &\leq \frac{(p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H}{s - 1} \\
 &\leq \frac{(4n + 1 - 5)5 + (7n - 7)7}{n - 1} \\
 &\leq \frac{20n - 20 + 49n - 49}{n - 1} \\
 &\leq \frac{69n - 69}{n - 1} \\
 &\leq \frac{69(n - 1)}{n - 1} \\
 d &\leq 69
 \end{aligned}$$

Sehingga didapatkan  $d \leq 69$ , nilai  $d \geq 0$  karena pada pelabelan  $SHAT$  menggunakan bilangan bulat positif, sehingga  $d \in \{0, 1, 2, 3, \dots, 69\}$ .

Selanjutnya mencari fungsi bijektif pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -anti-magic dekomposisi yang disesuaikan dengan nilai  $d$  yang telah didapatkan. Diawali dengan pendeteksian pola (*pattern recognition*) untuk menentukan pelabelan yang berlaku pada batas  $i$  yang telah ditemukan. Untuk penentuan pola secara umum digunakan fungsi-fungsi barisan aritmatika yang merupakan fungsi bijektif pada graf yang diteliti. Setelah fungsi bijektif diketahui selanjutnya dilakukan pembuktian secara deduktif aksiomatik untuk membuktikan kebenaran dari teorema yang didapat. Sebagai catatan, teorema dalam penelitian ini adalah bukan teorema yang *biimplikatif* atau karakteristik sehingga pembuktiannya hanya dilakukan satu arah.

Berdasarkan hasil pendeteksian pola melalui *pattern recognition* dan konsep barisan aritmatika, maka diperoleh beberapa teorema dan akibat sebagai berikut. Teorema yang ditemukan dalam penelitian ini hanya bersifat keberadaan (*existence but not unique*).

◇ **Teorema 4.1.1.** *Ada pelabelan super  $(63n+15, 0)$ - $(F_4)$  antimagic total dekomposisi pada shackle graf kipas  $(SF_4^n)$  untuk  $n \geq 3$ .*

**Bukti.** Melabeli setiap titik pada shackle graf kipas dengan himpunan bilangan asli. Didefinisikan  $\alpha_1$  adalah fungsi bijektif. Fungsi titik dari  $\alpha_1$  adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\alpha_1(x_i) &= i \\ \alpha_1(y_j) &= \frac{2n + \frac{(3+3(-1)^j)n}{2} + j + 1}{2}\end{aligned}$$

Fungsi  $\alpha_1$  adalah fungsi bijektif yang memetakan  $V$  ke himpunan bilangan asli  $\{1, 2, 3, \dots, 4n+1\}$ . Didefinisikan  $w_{\alpha_1}$  adalah bobot selimut dari pelabelan total selimut pada shakel graf kipas. Bobot selimut didapat dari penjumlahan 2 fungsi titik yang telah didapat diatas. Fungsi  $w_{\alpha_1}$  adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
w_{\alpha_1} &= \alpha_1(x_i) + \bigcup_{j=3i-2}^{3i+1} \alpha_1(y_j) \\
&= (i) + \bigcup_{j=3i-2}^{3i+1} \left( \frac{2n + \frac{(3+3(-1)^j)n}{2} + j + 1}{2} \right) \\
&= 7n + 7i + 1
\end{aligned}$$

Ketika kita memasukkan nilai  $i$  dari 1 sampai  $n$  pada fungsi  $w_{\alpha_1}$  akan didapat himpunan  $w_{\alpha_1} = \{14, 16, 18, \dots, 24\}$ . Himpunan  $w_{\alpha_1}$  membentuk barisan aritmatika. Selanjutnya menentukan label sisi yang akan digunakan dalam mencari selimut total dari Super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic total dekomposisi pada shackle graf Kipas. Melabeli setiap sisi pada shakel graf kipas dengan himpunan bilangan asli. Didapatkan fungsi sisi dari  $\alpha_1$  adalah sebagai berikut.

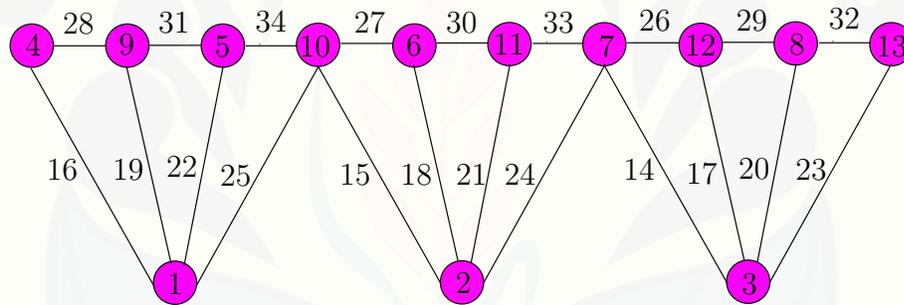
$$\begin{aligned}
\alpha_1(x_i y_{3i-2}) &= 5n - i + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
\alpha_1(x_i y_{3i-1}) &= 6n - i + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
\alpha_1(x_i y_{3i}) &= 7n - i + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
\alpha_1(x_i y_{3i+1}) &= 8n - i + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
\alpha_1(y_j y_{j+1}) &= 9n + \frac{4-j}{3}, \text{ untuk } j = 1 \text{ mod } 3, 1 \leq j \leq 3n + 1 \\
\alpha_1(y_j y_{j+1}) &= 10n + \frac{5-j}{3}, \text{ untuk } j = 2 \text{ mod } 3, 1 \leq j \leq 3n + 1 \\
\alpha_1(y_j y_{j+1}) &= 11n + \frac{6-j}{3}, \text{ untuk } j = 3 \text{ mod } 3, 1 \leq j \leq 3n + 1
\end{aligned}$$

$W_{\alpha_1}$  mendefinisikan bobot total selimut pada shackle graf kipas.  $W_{\alpha_1}$  didapatkan dari penjumlahan bobot selimut  $w_{\alpha_1}$  dengan fungsi label sisinya, dapat dirumuskan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 W_{\alpha_1} &= w_{\alpha_1} + \bigcup_{j=3i-2}^{3i+1} \alpha_1(x_i y_j) + \bigcup_{j=3i-2}^{3i} \alpha_1(y_j y_{j+1}) \\
 &= (w_{\alpha_1}) + \alpha_1(x_i y_{3i-2}) + \alpha_1(x_i y_{3i-1}) + \alpha_1(x_i y_{3i}) \\
 &\quad + \alpha_1(x_i y_{3i+1}) + \alpha_1(y_{3i-2} y_{3i-1}) + \alpha_1(y_{3i-1} y_{3i}) + \alpha_1(y_{3i} y_{3i+1}) \\
 &= 63n + 15, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n
 \end{aligned}$$

Didapatkan himpunan bobot total selimut  $W_{\alpha_1} = \{63n+15, 63n+15, \dots, 63n+15\}$ . Himpunan bobot total tersebut membentuk barisan aritmatika dengan  $d=0$ . Sehingga terbukti bahwa shackle dari graf kipas memiliki super  $(63n + 15, 0)$ -antimagic total dekomposisi untuk  $n \geq 3$ .  $\square$

Gambar 4.2 adalah contoh dari Pelabelan Super  $(204, 0)$ - $F_4$ -anti magic total dekomposisi pada  $SF_4^3$



Gambar 4.2 Super  $(204, 0)$ - $(F_4)$  antimagic total dekomposisi pada  $SF_4^3$

Pada gambar 4.2 didapatkan pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic total dekomposisi pada shackle graf Kipas untuk  $n=3$ , dengan  $d=0$  maka  $a=204$ . Sehingga diketahui barisan aritmatika  $W_{\alpha_1} = \{204, 204, 204\}$ .

$\diamond$  **Teorema 4.1.2.** *Ada pelabelan super  $(62n+16, 2)$ - $(F_4)$  antimagic total dokomposisi pada shackle graf kipas  $(SF_4^n)$  untuk  $n \geq 3$ .*

**Bukti.** Melabeli setiap titik pada shackle graf kipas dengan himpunan bilangan

asli seperti pada teorema 4.1.1. Sehingga fungsi titik  $\alpha_2$ =fungsi titik  $\alpha_1$ , dan untuk fungsi  $w_{\alpha_2}$ =fungsi  $w_{\alpha_1}$ . Selanjutnya melabeli sisi dan didapatkan fungsi sisi dari  $\alpha_2$  sebagai berikut.

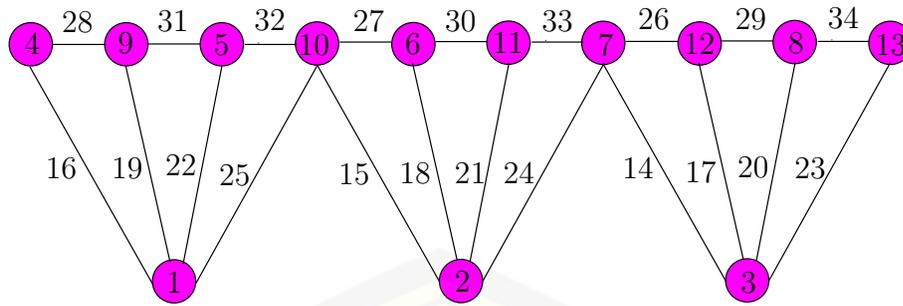
$$\begin{aligned}\alpha_2(x_i y_{3i-2}) &= 5n - i + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ \alpha_2(x_i y_{3i-1}) &= 6n - i + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ \alpha_2(x_i y_{3i}) &= 7n - i + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ \alpha_2(x_i y_{3i+1}) &= 8n - i + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ \alpha_2(y_j y_{j+1}) &= 9n + \frac{4-j}{3}, \text{ untuk } j = 1 \pmod{3}, 1 \leq j \leq 3n + 1 \\ \alpha_2(y_j y_{j+1}) &= 10n + \frac{5-j}{3}, \text{ untuk } j = 2 \pmod{3}, 1 \leq j \leq 3n + 1 \\ \alpha_2(y_j y_{j+1}) &= 11n + \frac{j+3}{3}, \text{ untuk } j = 3 \pmod{3}, 1 \leq j \leq 3n + 1\end{aligned}$$

$W_{\alpha_2}$  mendefinisikan bobot total selimut pada shackle graf kipas.  $W_{\alpha_2}$  didapatkan dari penjumlahan bobot selimut  $w_{\alpha_1}$  dengan fungsi label sisinya, dapat dirumuskan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}W_{\alpha_2} &= w_{\alpha_1} + \bigcup_{j=3i-2}^{3i+1} \alpha_2(x_i y_j) + \bigcup_{j=3i-2}^{3i} \alpha_2(y_j y_{j+1}) \\ &= 62n + 2i + 14, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n\end{aligned}$$

Didapatkan himpunan bobot total selimut  $W_{\alpha_2} = \{62n+16, 62n+18, \dots, 64n+14\}$ . Himpunan bobot total tersebut membentuk barisan aritmatika dengan  $d=2$ . Sehingga terbukti bahwa shackle dari graf kipas memiliki super  $(62n + 16, 2)$ -antimagic total dekomposisi untuk  $n \geq 3$ .  $\square$

Gambar 4.3 adalah contoh dari Pelabelan Super  $(202, 2)$ - $F_4$ -anti magic total dekomposisi pada  $SF_4^3$



Gambar 4.3 Super  $(202, 2)$ - $(F_4)$  antimagic total dekomposisi pada  $SF_4^3$

Pada gambar 4.3 didapatkan pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic total dekomposisi pada shackle graf Kipas untuk  $n=3$ , dengan  $d=2$  maka  $a=202$ . Sehingga diketahui barisan aritmatika  $W_{\alpha_1} = \{202, 204, 206\}$ .

◇ **Teorema 4.1.3.** *Ada pelabelan super  $(61n+17, 4)$ -  $(F_4)$  antimagic total dekomposisi pada shackle graf kipas  $(SF_4^n)$  untuk  $n \geq 3$ .*

**Bukti.** Melabeli setiap titik pada shackle graf kipas dengan himpunan bilangan asli seperti pada teorema 4.1.1. Sehingga fungsi titik  $\alpha_3$ =fungsi titik  $\alpha_1$ , dan untuk fungsi  $w_{\alpha_3}$ =fungsi  $w_{\alpha_1}$ . Selanjutnya melabeli sisi dan didapatkan fungsi sisi dari  $\alpha_3$  sebagai berikut.

$$\alpha_3(x_i y_{3i-2}) = 4n + i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$\alpha_3(x_i y_{3i-1}) = 6n - i + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$\alpha_3(x_i y_{3i}) = 7n - i + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$\alpha_3(x_i y_{3i+1}) = 8n - i + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$\alpha_3(y_j y_{j+1}) = 9n + \frac{4-j}{3}, \text{ untuk } j = 1 \text{ mod } 3, 1 \leq j \leq 3n + 1$$

$$\alpha_3(y_j y_{j+1}) = 9n + \frac{j+4}{3}, \text{ untuk } j = 2 \text{ mod } 3, 1 \leq j \leq 3n + 1$$

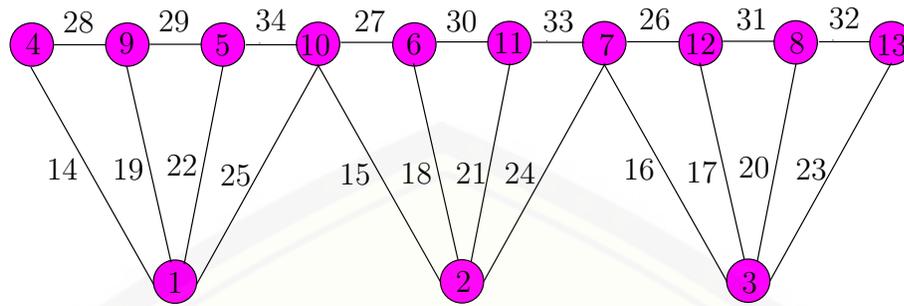
$$\alpha_3(y_j y_{j+1}) = 11n + \frac{j-6}{3}, \text{ untuk } j = 3 \text{ mod } 3, 1 \leq j \leq 3n + 1$$

$W_{\alpha_3}$  mendefinisikan bobot total selimut pada shackle graf kipas.  $W_{\alpha_3}$  didapatkan dari penjumlahan bobot selimut  $w_{\alpha_1}$  dengan fungsi label sisinya, dapat dirumuskan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} W_{\alpha_3} &= w_{\alpha_1} + \bigcup_{j=3i-2}^{3i+1} \alpha_3(x_i y_j) + \bigcup_{j=3i-2}^{3i} \alpha_3(y_j y_{j+1}) \\ &= 61n + 4i + 13, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Didapatkan himpunan bobot total selimut  $W_{\alpha_3} = \{61n+17, 61n+21, \dots, 65n+13\}$ . Himpunan bobot total tersebut membentuk barisan aritmatika dengan  $d=4$ . Sehingga terbukti bahwa shackle dari graf kipas memiliki super  $(61n + 17, 4)$ -antimagic total dekomposisi untuk  $n \geq 3$ .  $\square$

Gambar 4.4 adalah contoh dari Pelabelan Super  $(200, 4)$ - $F_4$ -anti magic total dekomposisi pada  $SF_4^3$



Gambar 4.4 Super  $(200, 4)$ - $(F_4)$  antimagic total dekomposisi pada  $SF_4^3$

Pada gambar 4.4 didapatkan pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic total dekomposisi pada shackle graf Kipas untuk  $n=3$ , dengan  $d=4$  maka  $a=200$ . Sehingga diketahui barisan aritmatika  $W_{\alpha_1} = \{200, 204, 208\}$ .

◇ **Teorema 4.1.4.** *Ada pelabelan super  $(60n+18, 6)$ - $(F_4)$  antimagic total dokomposisi pada shakel graf kipas  $(SF_4^n)$  untuk  $n \geq 3$ .*

**Bukti.** Melabeli setiap titik pada shackle graf kipas dengan himpunan bilangan asli seperti pada teorema 4.1.1. Sehingga fungsi titik  $\alpha_4$ =fungsi titik  $\alpha_1$ , dan untuk fungsi  $w_{\alpha_4}$ =fungsi  $w_{\alpha_1}$ . Selanjutnya melabeli sisi dan didapatkan fungsi sisi dari  $\alpha_4$  sebagai berikut.

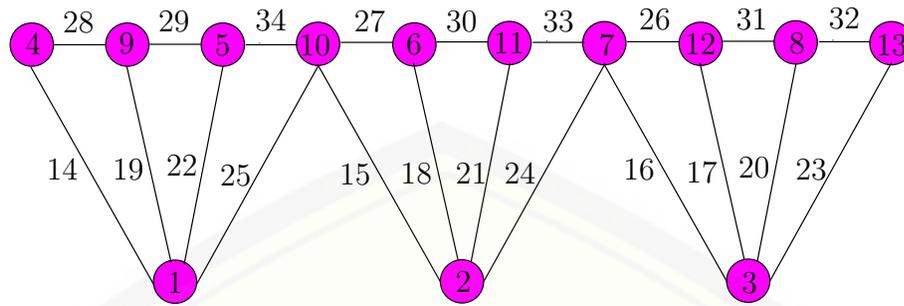
$$\begin{aligned}
\alpha_4(x_i y_{3i-2}) &= 5n - i + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
\alpha_4(x_i y_{3i-1}) &= 6n - i + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
\alpha_4(x_i y_{3i}) &= 7n - i + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
\alpha_4(x_i y_{3i+1}) &= 8n - i + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
\alpha_4(y_j y_{j+1}) &= 8n + \frac{j+5}{3}, \text{ untuk } j = 1 \pmod{3}, 1 \leq j \leq 3n+1 \\
\alpha_4(y_j y_{j+1}) &= 9n + \frac{j+4}{3}, \text{ untuk } j = 2 \pmod{3}, 1 \leq j \leq 3n+1 \\
\alpha_4(y_j y_{j+1}) &= 10n + \frac{j+3}{3}, \text{ untuk } j = 3 \pmod{3}, 1 \leq j \leq 3n+1
\end{aligned}$$

$W_{\alpha_4}$  mendefinisikan bobot total selimut pada shackle graf kipas.  $W_{\alpha_4}$  didapatkan dari penjumlahan bobot selimut  $w_{\alpha_1}$  dengan fungsi label sisinya, dapat dirumuskan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_4} &= w_{\alpha_1} + \bigcup_{j=3i-2}^{3i+1} \alpha_4(x_i y_j) + \bigcup_{j=3i-2}^{3i} \alpha_4(y_j y_{j+1}) \\
&= 60n + 6i + 12, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n
\end{aligned}$$

Didapatkan himpunan bobot total selimut  $W_{\alpha_4} = \{60n+18, 60n+24, \dots, 66n+12\}$ . Himpunan bobot total tersebut membentuk barisan aritmatika dengan  $d=6$ . Sehingga terbukti bahwa shackle dari graf kipas memiliki super  $(60n + 18, 6)$ -antimagic total dekomposisi untuk  $n \geq 3$ .  $\square$

Gambar 4.5 adalah contoh dari Pelabelan Super  $(198, 6)$ - $F_4$ -anti magic total dekomposisi pada  $SF_4^3$



Gambar 4.5 Super  $(198, 6)$ - $(F_4)$  antimagic total dekomposisi pada  $SF_4^3$

Pada gambar 4.5 didapatkan pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic total dekomposisi pada shackle graf Kipas untuk  $n=3$ , dengan  $d=6$  maka  $a=198$ . Sehingga diketahui barisan aritmatika  $W_{\alpha_1} = \{198, 204, 210\}$ .

◇ **Teorema 4.1.5.** *Ada pelabelan super  $(59n+19, 8)$ - $(F_4)$  antimagic total dokomposisi pada shakel graf kipas  $(SF_4^n)$  untuk  $n \geq 3$ .*

**Bukti.** Melabeli setiap titik pada shackle graf kipas dengan himpunan bilangan asli seperti pada teorema 4.1.1. Sehingga fungsi titik  $\alpha_5$ =fungsi titik  $\alpha_1$ , dan untuk fungsi  $w_{\alpha_5}$ =fungsi  $w_{\alpha_1}$ . Selanjutnya melabeli sisi dan didapatkan fungsi sisi dari  $\alpha_5$  sebagai berikut.

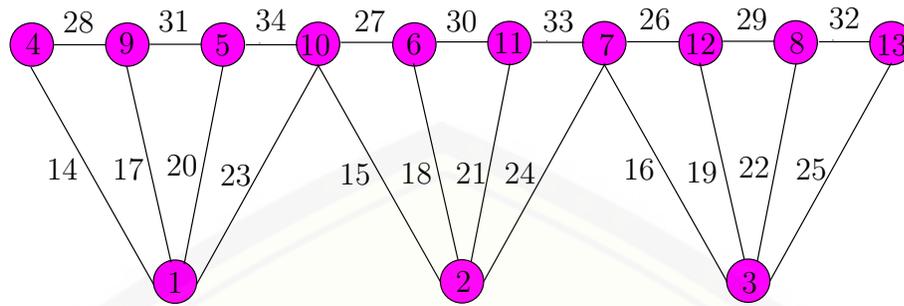
$$\begin{aligned}
\alpha_5(x_i y_{3i-2}) &= 4n + i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
\alpha_5(x_i y_{3i-1}) &= 5n + i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
\alpha_5(x_i y_{3i}) &= 6n + i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
\alpha_5(x_i y_{3i+1}) &= 7n + i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
\alpha_5(y_j y_{j+1}) &= 9n + \frac{4-j}{3}, \text{ untuk } j = 1 \pmod{3}, 1 \leq j \leq 3n+1 \\
\alpha_5(y_j y_{j+1}) &= 10n + \frac{5-j}{3}, \text{ untuk } j = 2 \pmod{3}, 1 \leq j \leq 3n+1 \\
\alpha_5(y_j y_{j+1}) &= 11n + \frac{6-j}{3}, \text{ untuk } j = 3 \pmod{3}, 1 \leq j \leq 3n+1
\end{aligned}$$

$W_{\alpha_5}$  mendefinisikan bobot total selimut pada shackle graf kipas.  $W_{\alpha_5}$  didapatkan dari penjumlahan bobot selimut  $w_{\alpha_1}$  dengan fungsi label sisinya, dapat dirumuskan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_5} &= w_{\alpha_1} + \bigcup_{j=3i-2}^{3i+1} \alpha_5(x_i y_j) + \bigcup_{j=3i-2}^{3i} \alpha_5(y_j y_{j+1}) \\
&= 59n + 8i + 11, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n
\end{aligned}$$

Didapatkan himpunan bobot total selimut  $W_{\alpha_5} = \{59n+19, 59n+27, \dots, 67n+11\}$ . Himpunan bobot total tersebut membentuk barisan aritmatika dengan  $d=8$ . Sehingga terbukti bahwa shackle dari graf kipas memiliki super  $(59n + 19, 8)$ -antimagic total dekomposisi untuk  $n \geq 3$ .  $\square$

Gambar 4.6 adalah contoh dari Pelabelan Super  $(196, 8)$ - $F_4$ -anti magic total dekomposisi pada  $SF_4^3$



Gambar 4.6 Super  $(196, 8)$ - $(F_4)$  antimagic total dekomposisi pada  $SF_4^3$

Pada gambar 4.6 didapatkan pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic total dekomposisi pada shackle graf Kipas untuk  $n=3$ , dengan  $d=8$  maka  $a=196$ . Sehingga diketahui barisan aritmatika  $W_{\alpha_1} = \{196, 204, 212\}$

◇ **Teorema 4.1.6.** *Ada pelabelan super  $(58n + 20, 10)$ -  $(F_4)$  antimagic total dokomposisi pada shakel graf kipas  $(SF_4^n)$  untuk  $n \geq 3$ .*

**Bukti.** Melabeli setiap titik pada shackle graf kipas dengan himpunan bilangan asli seperti pada teorema 4.1.1. Sehingga fungsi titik  $\alpha_6$ =fungsi titik  $\alpha_1$ , dan untuk fungsi  $w_{\alpha_6}$ =fungsi  $w_{\alpha_1}$ . Selanjutnya melabeli sisi dan didapatkan fungsi sisi dari  $\alpha_6$  sebagai berikut.

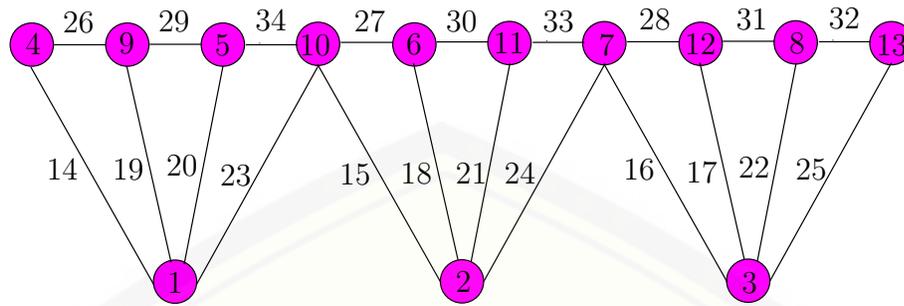
$$\begin{aligned}
\alpha_6(x_i y_{3i-2}) &= 4n + i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
\alpha_6(x_i y_{3i-1}) &= 6n - i + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
\alpha_6(x_i y_{3i}) &= 6n + i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
\alpha_6(x_i y_{3i+1}) &= 7n + i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
\alpha_6(y_j y_{j+1}) &= 8n + \frac{j+5}{3}, \text{ untuk } j = 1 \pmod{3}, 1 \leq j \leq 3n+1 \\
\alpha_6(y_j y_{j+1}) &= 9n + \frac{j+4}{3}, \text{ untuk } j = 2 \pmod{3}, 1 \leq j \leq 3n+1 \\
\alpha_6(y_j y_{j+1}) &= 11n + \frac{6-j}{3}, \text{ untuk } j = 3 \pmod{3}, 1 \leq j \leq 3n+1
\end{aligned}$$

$W_{\alpha_6}$  mendefinisikan bobot total selimut pada shackle graf kipas.  $W_{\alpha_6}$  didapatkan dari penjumlahan bobot selimut  $w_{\alpha_1}$  dengan fungsi label sisinya, dapat dirumuskan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_6} &= w_{\alpha_1} + \bigcup_{j=3i-2}^{3i+1} \alpha_6(x_i y_j) + \bigcup_{j=3i-2}^{3i} \alpha_6(y_j y_{j+1}) \\
&= 58n + 10i + 10, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n
\end{aligned}$$

Didapatkan himpunan bobot total selimut  $W_{\alpha_6} = \{58n+20, 58n+30, \dots, 68n+10\}$ . Himpunan bobot total tersebut membentuk barisan aritmatika dengan  $d=10$ . Sehingga terbukti bahwa shackle dari graf kipas memiliki super  $(58n + 20, 10)$ -antimagic total dekomposisi untuk  $n \geq 3$  dan  $t = 3$ .  $\square$

Gambar 4.7 adalah contoh dari Pelabelan Super  $(194, 10)$ - $F_4$ -anti magic total dekomposisi pada  $SF_4^3$



Gambar 4.7 Super  $(194, 10)$ - $(F_4)$  antimagic total dekomposisi pada  $SF_4^3$

Pada gambar 4.7 didapatkan pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic total dekomposisi pada shackle graf Kipas untuk  $n=3$ , dengan  $d=10$  maka  $a=194$ . Sehingga diketahui barisan aritmatika  $W_{\alpha_1} = \{194, 204, 214\}$

◇ **Teorema 4.1.7.** *Ada pelabelan super  $(57n + 21, 12)$ -  $(F_4)$  antimagic total dokomposisi pada shakel graf kipas  $(SF_4^n)$  untuk  $n \geq 3$ .*

**Bukti.** Melabeli setiap titik pada shackle graf kipas dengan himpunan bilangan asli seperti pada teorema 4.1.1. Sehingga fungsi titik  $\alpha_7$ =fungsi titik  $\alpha_1$ , dan untuk fungsi  $w_{\alpha_7}$ =fungsi  $w_{\alpha_1}$ . Selanjutnya melabeli sisi dan didapatkan fungsi sisi dari  $\alpha_7$  sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
\alpha_7(x_i y_{3i-2}) &= 5n - i + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
\alpha_7(x_i y_{3i-1}) &= 5n + i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
\alpha_7(x_i y_{3i}) &= 6n + i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
\alpha_7(x_i y_{3i+1}) &= 7n + i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
\alpha_7(y_j y_{j+1}) &= 8n + \frac{j+5}{3}, \text{ untuk } j = 1 \pmod{3}, 1 \leq j \leq 3n+1 \\
\alpha_7(y_j y_{j+1}) &= 9n + \frac{j+4}{3}, \text{ untuk } j = 2 \pmod{3}, 1 \leq j \leq 3n+1 \\
\alpha_7(y_j y_{j+1}) &= 10n + \frac{j+3}{3}, \text{ untuk } j = 3 \pmod{3}, 1 \leq j \leq 3n+1
\end{aligned}$$

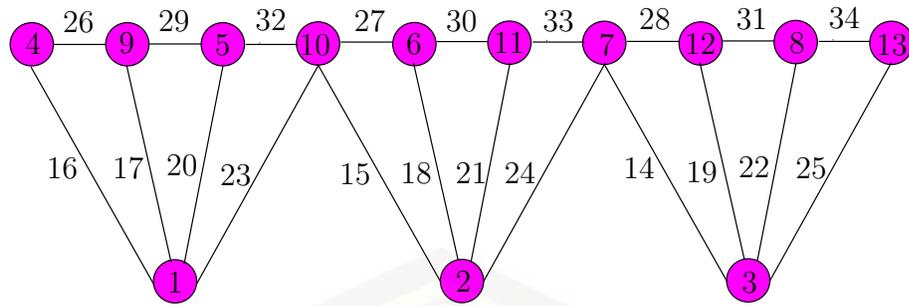
$W_{\alpha_7}$  mendefinisikan bobot total selimut pada shackle graf kipas.  $W_{\alpha_7}$  didapatkan dari penjumlahan bobot selimut  $w_{\alpha_1}$  dengan fungsi label sisinya, dapat dirumuskan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_7} &= w_{\alpha_1} + \bigcup_{j=3i-2}^{3i+1} \alpha_7(x_i y_j) + \bigcup_{j=3i-2}^{3i} \alpha_7(y_j y_{j+1}) \\
&= 57n + 12i + 9, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n
\end{aligned}$$

Didapatkan himpunan bobot total selimut  $W_{\alpha_7} = \{57n+21, 57n+33, \dots, 69n+9\}$ . Himpunan bobot total tersebut membentuk barisan aritmatika dengan  $d=12$ . Sehingga terbukti bahwa shackle dari graf kipas memiliki super  $(57n + 21, 12)$ -antimagic total dekomposisi untuk  $n \geq 3$ .  $\square$

Gambar 4.8 adalah contoh dari Pelabelan Super  $(192, 12)$ - $F_4$ -anti magic total dekomposisi pada  $SF_4^3$

Pada gambar 4.8 didapatkan pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic total dekomposisi pada shackle graf Kipas untuk  $n=3$ , dengan  $d=12$  maka  $a=192$ . Sehingga diketahui barisan aritmatika  $W_{\alpha_1} = \{192, 204, 216\}$



Gambar 4.8 Super  $(192, 12)$ - $(F_4)$  antimagic total dekomposisi pada  $SF_4^3$

◇ **Teorema 4.1.8.** *Ada pelabelan super  $(56n + 22, 14)$ -  $(F_4)$  antimagic total dokomposisi pada shakel graf kipas  $(SF_4^n)$  untuk  $n \geq 3$ .*

**Bukti.** Melabeli setiap titik pada shackle graf kipas dengan himpunan bilangan asli seperti pada teorema 4.1.1. Sehingga fungsi titik  $\alpha_8$ =fungsi titik  $\alpha_1$ , dan untuk fungsi  $w_{\alpha_8}$ =fungsi  $w_{\alpha_1}$ . Selanjutnya melabeli sisi dan didapatkan fungsi sisi dari  $\alpha_8$  sebagai berikut.

$$\alpha_8(x_i y_{3i-2}) = 4n + i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$\alpha_8(x_i y_{3i-1}) = 5n + i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$\alpha_8(x_i y_{3i}) = 6n + i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$\alpha_8(x_i y_{3i+1}) = 7n + i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$\alpha_8(y_j y_{j+1}) = 8n + \frac{j+5}{3}, \text{ untuk } j = 1 \text{ mod } 3, 1 \leq j \leq 3n + 1$$

$$\alpha_8(y_j y_{j+1}) = 9n + \frac{j+4}{3}, \text{ untuk } j = 2 \text{ mod } 3, 1 \leq j \leq 3n + 1$$

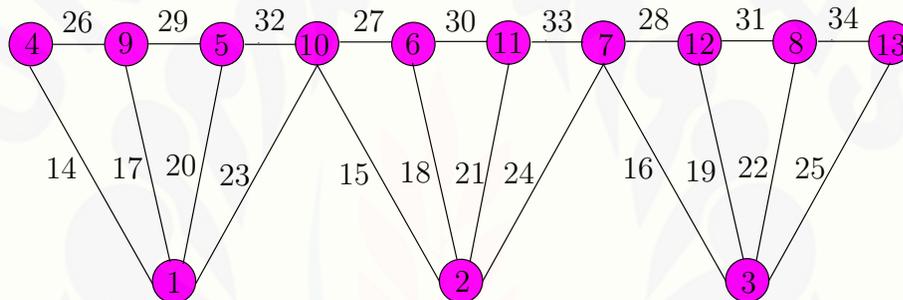
$$\alpha_8(y_j y_{j+1}) = 10n + \frac{j+3}{3}, \text{ untuk } j = 3 \text{ mod } 3, 1 \leq j \leq 3n + 1$$

$W_{\alpha_8}$  mendefinisikan bobot total selimut pada shackle graf kipas.  $W_{\alpha_8}$  didapatkan dari penjumlahan bobot selimut  $w_{\alpha_1}$  dengan fungsi label sisinya, dapat dirumuskan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 W_{\alpha_8} &= w_{\alpha_1} + \bigcup_{j=3i-2}^{3i+1} \alpha_8(x_i y_j) + \bigcup_{j=3i-2}^{3i} \alpha_8(y_j y_{j+1}) \\
 &= 56n + 14i + 8, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n
 \end{aligned}$$

Didapatkan himpunan bobot total selimut  $W_{\alpha_8} = \{56n+22, 56n+36, \dots, 70n+8\}$ . Himpunan bobot total tersebut membentuk barisan aritmatika dengan  $d=14$ . Sehingga terbukti bahwa shackle dari graf kipas memiliki super  $(56n + 22, 14)$ -antimagic total dekomposisi untuk  $n \geq 3$ .  $\square$

Gambar 4.9 adalah contoh dari Pelabelan Super  $(190, 14)$ - $F_4$ -anti magic total dekomposisi pada  $SF_4^3$



Gambar 4.9 Super  $(190, 14)$ - $(F_4)$  antimagic total dekomposisi pada  $SF_4^3$

Pada gambar 4.9 didapatkan pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic total dekomposisi pada shackle graf Kipas untuk  $n=3$ , dengan  $d=14$  maka  $a=190$ . Sehingga diketahui barisan aritmatika  $W_{\alpha_1} = \{190, 204, 218\}$

$\diamond$  **Teorema 4.1.9.** *Ada pelabelan super  $(55n+23, 16)$ - $(F_4)$  antimagic total dekomposisi pada shakel graf kipas  $(SF_4^n)$  untuk  $n \geq 3$ .*

**Bukti.** Melabeli setiap titik pada shackle graf kipas dengan himpunan bilangan asli. Didefinisikan  $\alpha_9$  adalah fungsi bijektif. Fungsi titik dari  $\alpha_9$  adalah sebagai

berikut:

$$\begin{aligned}\alpha_9(x_i) &= i \\ \alpha_9(y_j) &= j + n\end{aligned}$$

Fungsi  $\alpha_9$  adalah fungsi bijektif yang memetakan  $V$  ke himpunan bilangan asli  $\{1, 2, 3, \dots, 4n + 1\}$ . Didefinisikan  $w_{\alpha_9}$  adalah bobot selimut dari pelabelan total selimut pada shackle graf kipas. Bobot selimut didapat dari penjumlahan 2 fungsi titik yang telah didapat diatas. Fungsi  $w_{\alpha_9}$  adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}w_{\alpha_9} &= \alpha_9(x_i) + \bigcup_{j=3i-2}^{3i+1} \alpha_9(y_j) \\ &= 4n + 13i - 2\end{aligned}$$

Ketika kita memasukkan nilai  $i$  dari 1 sampai  $n$  pada fungsi  $w_{\alpha_9}$  akan didapat himpunan  $w_{\alpha_9}$ . Himpunan  $w_{\alpha_9}$  membentuk barisan aritmatika. Selanjutnya menentukan label sisi yang akan digunakan dalam mencari selimut total dari Super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic total dekomposisi pada shackle graf Kipas. Labeli setiap sisi dari amalgamasi graf kipas dengan himpunan bilangan asli. Didapatkan fungsi

sisi dari  $\alpha_9$  adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned}\alpha_9(x_i y_{3i-2}) &= 4n + 7i - 5, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ \alpha_9(x_i y_{3i-1}) &= 6n - i + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ \alpha_9(x_i y_{3i}) &= 6n + i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ \alpha_9(x_i y_{3i+1}) &= 7n + i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ \alpha_9(y_j y_{j+1}) &= 8n + \frac{j+5}{3}, \text{ untuk } j = 1 \pmod{3}, 1 \leq j \leq 3n+1 \\ \alpha_9(y_j y_{j+1}) &= 9n + \frac{j+4}{3}, \text{ untuk } j = 2 \pmod{3}, 1 \leq j \leq 3n+1 \\ \alpha_9(y_j y_{j+1}) &= 11n + \frac{6-j}{3}, \text{ untuk } j = 3 \pmod{3}, 1 \leq j \leq 3n+1\end{aligned}$$

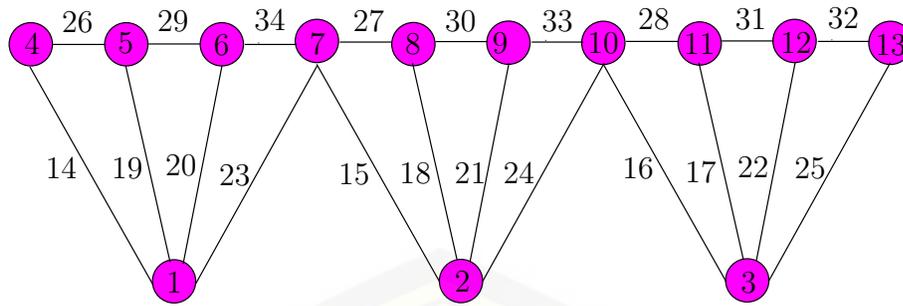
$W_{\alpha_9}$  mendefinisikan bobot total selimut pada shackle graf kipas.  $W_{\alpha_9}$  didapatkan dari penjumlahan bobot selimut  $w_{\alpha_9}$  dengan fungsi label sisinya, dapat dirumuskan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}W_{\alpha_9} &= w_{\alpha_9} + \bigcup_{j=3i-2}^{3i+1} \alpha_9(x_i y_j) + \bigcup_{j=3i-2}^{3i} \alpha_9(y_j y_{j+1}) \\ &= (w_{\alpha_9}) + \alpha_9(x_i y_{3i-2}) + \alpha_9(x_i y_{3i-1}) + \alpha_9(x_i y_{3i}) \\ &\quad + \alpha_9(x_i y_{3i+1}) + \alpha_9(y_{3i-2} y_{3i-1}) + \alpha_9(y_{3i-1} y_{3i}) + \alpha_9(y_{3i} y_{3i+1}) \\ &= 55n + 16i + 7, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n\end{aligned}$$

Didapatkan himpunan bobot total selimut  $W_{\alpha_9} = \{55n+23, 55n+39, \dots, 71n+7\}$ . Himpunan bobot total tersebut membentuk barisan aritmatika dengan  $d=16$ . Sehingga terbukti bahwa shackle dari graf kipas memiliki super  $(55n + 23, 16)$ -antimagic total dekomposisi untuk  $n \geq 3$ .  $\square$

Gambar 4.10 adalah contoh dari Pelabelan Super  $(188, 16)$ - $F_4$ -anti magic total dekomposisi pada  $SF_4^3$

Pada gambar 4.10 didapatkan pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic total dekom-



Gambar 4.10 Super  $(188, 16)$ - $(F_4)$  antimagic total dekomposisi pada  $SF_4^3$

posisi pada shackle graf Kipas untuk  $n=3$ , dengan  $d=16$  maka  $a=188$ . Sehingga diketahui barisan aritmatika  $W_{\alpha_1} = \{188, 204, 220\}$

◇ **Teorema 4.1.10.** *Ada pelabelan super  $(54n + 24, 18)$ -  $(F_4)$  antimagic total dokomposisi pada shakel graf kipas  $(SF_4^n)$  untuk  $n \geq 3$ .*

**Bukti.** Melabeli setiap titik pada shackle graf kipas dengan himpunan bilangan asli seperti pada teorema 4.1.9. Sehingga fungsi titik  $\alpha_{10}$ =fungsi titik  $\alpha_9$ , dan untuk fungsi  $w_{\alpha_{10}}$ =fungsi  $w_{\alpha_9}$ . Selanjutnya melabeli sisi dan didapatkan fungsi sisi dari  $\alpha_{10}$  sebagai berikut.

$$\alpha_{10}(x_i y_{3i-2}) = 5n - i + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$\alpha_{10}(x_i y_{3i-1}) = 5n + i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$\alpha_{10}(x_i y_{3i}) = 6n + i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$\alpha_{10}(x_i y_{3i+1}) = 7n + i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$\alpha_{10}(y_j y_{j+1}) = 8n + \frac{j+5}{3}, \text{ untuk } j = 1 \text{ mod } 3, 1 \leq j \leq 3n + 1$$

$$\alpha_{10}(y_j y_{j+1}) = 9n + \frac{j+4}{3}, \text{ untuk } j = 2 \text{ mod } 3, 1 \leq j \leq 3n + 1$$

$$\alpha_{10}(y_j y_{j+1}) = 10n + \frac{j+4}{3}, \text{ untuk } j = 3 \text{ mod } 3, 1 \leq j \leq 3n + 1$$

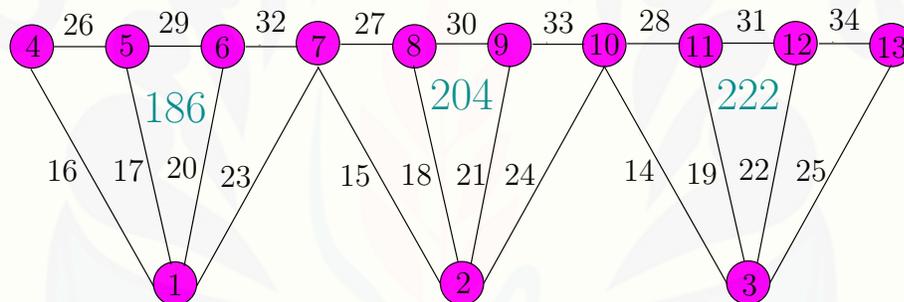
$W_{\alpha_{10}}$  mendefinisikan bobot total selimut pada shackle graf kipas.  $W_{\alpha_{10}}$  di-

dapatkan dari penjumlahan bobot selimut  $w_{\alpha_9}$  dengan fungsi label sisinya, dapat dirumuskan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} W_{\alpha_{10}} &= w_{\alpha_9} + \bigcup_{j=3i-2}^{3i+1} \alpha_{10}(x_i y_j) + \bigcup_{j=3i-2}^{3i} \alpha_{10}(y_j y_{j+1}) \\ &= 54n + 18i + 6, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Didapatkan himpunan bobot total selimut  $W_{\alpha_{10}} = \{54n+24, 54n+42, \dots, 72n+6\}$ . Himpunan bobot total tersebut membentuk barisan aritmatika dengan  $d=18$ . Sehingga terbukti bahwa shackle dari graf kipas memiliki super  $(54n + 24, 18)$ -antimagic total dekomposisi untuk  $n \geq 3$ .  $\square$

Gambar 4.11 adalah contoh dari Pelabelan Super  $(186, 18)$ - $F_4$ -anti magic total dekomposisi pada  $SF_4^3$



Gambar 4.11 Super  $(186, 18)$ - $(F_4)$  antimagic total dekomposisi pada  $SF_4^3$

Pada gambar 4.11 didapatkan pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic total dekomposisi pada shackle graf Kipas untuk  $n=3$ , dengan  $d=18$  maka  $a=186$ . Sehingga diketahui barisan aritmatika  $W_{\alpha_1} = \{186, 204, 222\}$

$\diamond$  **Teorema 4.1.11.** *Ada pelabelan super  $(53n + 25, 20)$ -  $(F_4)$  antimagic total dokomposisi pada shakel graf kipas  $(SF_4^n)$  untuk  $n \geq 3$ .*

**Bukti.** Melabeli setiap titik pada shackle graf kipas dengan himpunan bilangan asli seperti pada teorema 4.1.9. Sehingga fungsi titik  $\alpha_{11}$ =fungsi titik  $\alpha_9$ , dan

untuk fungsi  $w_{\alpha_{11}}$  = fungsi  $w_{\alpha_9}$ . Selanjutnya melabeli sisi dan didapatkan fungsi sisi dari  $\alpha_{11}$  sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 \alpha_{11}(x_i y_{3i-2}) &= 4n + i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
 \alpha_{11}(x_i y_{3i-1}) &= 5n + i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
 \alpha_{11}(x_i y_{3i}) &= 6n + i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
 \alpha_{11}(x_i y_{3i+1}) &= 7n + i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
 \alpha_{11}(y_j y_{j+1}) &= 8n + \frac{j+5}{3}, \text{ untuk } j = 1 \pmod{3}, 1 \leq j \leq 3n+1 \\
 \alpha_{11}(y_j y_{j+1}) &= 9n + \frac{j+4}{3}, \text{ untuk } j = 2 \pmod{3}, 1 \leq j \leq 3n+1 \\
 \alpha_{11}(y_j y_{j+1}) &= 10n + \frac{j+3}{3}, \text{ untuk } j = 3 \pmod{3}, 1 \leq j \leq 3n+1
 \end{aligned}$$

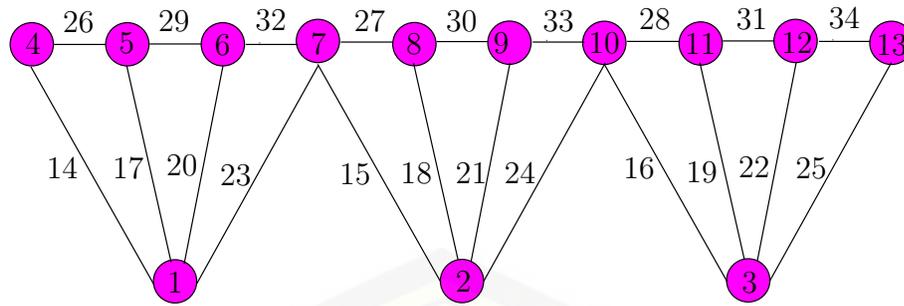
$W_{\alpha_{11}}$  mendefinisikan bobot total selimut pada shackle graf kipas.  $W_{\alpha_{11}}$  didapatkan dari penjumlahan bobot selimut  $w_{\alpha_9}$  dengan fungsi label sisinya, dapat dirumuskan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 W_{\alpha_{11}} &= w_{\alpha_9} + \bigcup_{j=3i-2}^{3i+1} \alpha_{11}(x_i y_j) + \bigcup_{j=3i-2}^{3i} \alpha_{11}(y_j y_{j+1}) \\
 &= 53n + 20i + 5, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n
 \end{aligned}$$

Didapatkan himpunan bobot total selimut  $W_{\alpha_{11}} = \{53n+25, 53n+45, \dots, 73n+5\}$ . Himpunan bobot total tersebut membentuk barisan aritmatika dengan  $d=20$ . Sehingga terbukti bahwa shackle dari graf kipas memiliki super  $(53n + 25, 20)$ -antimagic total dekomposisi untuk  $n \geq 3$ .  $\square$

Gambar 4.12 adalah contoh dari Pelabelan Super  $(184, 20)$ - $F_4$ -anti magic total dekomposisi pada  $SF_4^3$

Pada gambar 4.12 didapatkan pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic total dekom-



Gambar 4.12 Super  $(184, 20)$ - $(F_4)$  antimagic total dekomposisi pada  $SF_4^3$

posisi pada shackle graf Kipas untuk  $n=3$ , dengan  $d=20$  maka  $a=184$ . Sehingga diketahui barisan aritmatika  $W_{\alpha_1} = \{184, 204, 224\}$

◇ **Teorema 4.1.12.** *Ada pelabelan super  $(39n + 63, 24)$ -  $(F_4)$  antimagic total dekomposisi pada shakel graf kipas  $(SF_4^n)$  untuk  $n \geq 3$ .*

**Bukti.** Melabeli setiap titik pada shackle graf kipas dengan himpunan bilangan asli. Didefinisikan  $\alpha_{12}$  adalah fungsi bijektif. Fungsi titik dari  $\alpha_{12}$  adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \alpha_{12}(x_i) &= i \\ \alpha_{12}(y_j) &= n - j + 11 \end{aligned}$$

Fungsi  $\alpha_{12}$  adalah fungsi bijektif yang memetakan  $V$  ke himpunan bilangan asli  $\{1, 2, 3, \dots, 4n + 1\}$ . Didefinisikan  $w_{\alpha_{12}}$  adalah bobot selimut dari pelabelan total selimut pada shackle graf kipas. Bobot selimut didapat dari penjumlahan 2 fungsi titik yang telah didapat diatas. Fungsi  $w_{\alpha_{12}}$  adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} w_{\alpha_{12}} &= \alpha_{12}(x_i) + \sum_{j=3i-2}^{3i+1} \alpha_{12}(y_j) \\ &= 4n - 11i + 46 \end{aligned}$$

Ketika kita memasukkan nilai  $i$  dari 1 sampai  $n$  pada fungsi  $w_{\alpha_{12}}$  akan didapat himpunan  $w_{\alpha_{12}}$ . Himpunan  $w_{\alpha_{12}}$  membentuk barisan aritmatika. Selanjutnya menentukan label sisi yang akan digunakan dalam mencari selimut total dari super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic total dekomposisi pada shackle graf Kipas. Labeli setiap sisi dari shackle graf kipas dengan himpunan bilangan asli. Didapatkan fungsi sisi dari  $\alpha_{12}$  adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned}\alpha_{12}(x_i y_{3i-2}) &= 4n + 7i - 5, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ \alpha_{12}(x_i y_{3i-1}) &= 4n + 7i - 3, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ \alpha_{12}(x_i y_{3i}) &= 4n + 7i - 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ \alpha_{12}(x_i y_{3i+1}) &= 11n - 7i + 8, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ \alpha_{12}(y_j y_{j+1}) &= 4n + \frac{7j+2}{3}, \text{ untuk } j = 1 \pmod{3}, 1 \leq j \leq 3n+1 \\ \alpha_{12}(y_j y_{j+1}) &= 4n + \frac{7j+1}{3}, \text{ untuk } j = 2 \pmod{3}, 1 \leq j \leq 3n+1 \\ \alpha_{12}(y_j y_{j+1}) &= 4n + \frac{7j}{3}, \text{ untuk } j = 3 \pmod{3}, 1 \leq j \leq 3n+1\end{aligned}$$

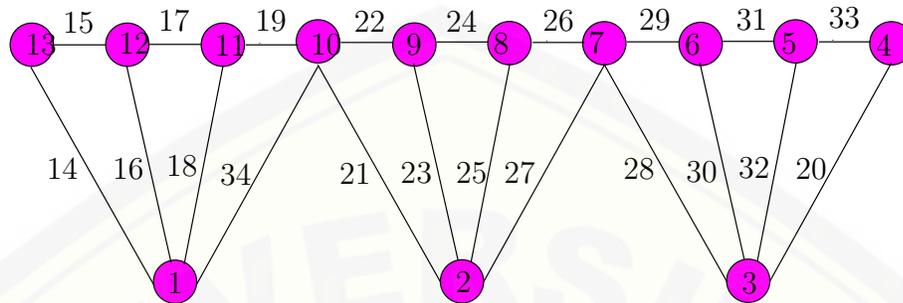
$W_{\alpha_{12}}$  mendefinisikan bobot total selimut pada shackle graf kipas.  $W_{\alpha_{12}}$  didapatkan dari penjumlahan bobot selimut  $w_{\alpha_{12}}$  dengan fungsi label sisinya, dapat dirumuskan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}W_{\alpha_{12}} &= w_{\alpha_{12}} + \bigcup_{j=3i-2}^{3i+1} \alpha_{12}(x_i y_j) + \bigcup_{j=3i-2}^{3i} \alpha_{12}(y_j y_{j+1}) \\ &= (w_{\alpha_{12}}) + \alpha_{12}(x_i y_{3i-2}) + \alpha_{12}(x_i y_{3i-1}) + \alpha_{12}(x_i y_{3i}) \\ &\quad + \alpha_{12}(x_i y_{3i+1}) + \alpha_{12}(y_{3i-2} y_{3i-1}) + \alpha_{12}(y_{3i-1} y_{3i}) + \alpha_{12}(y_{3i} y_{3i+1}) \\ &= 39n + 24i + 39, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n\end{aligned}$$

Didapatkan himpunan bobot total selimut  $W_{\alpha_{12}} = \{39n+63, 39n+87, \dots, 63n+39\}$ . Himpunan bobot total tersebut membentuk barisan aritmatika dengan  $d=24$ .

Sehingga terbukti bahwa shackle dari graf kipas memiliki super  $(39n + 63, 24)$ -antimagic total dekomposisi untuk  $n \geq 3$ .  $\square$

Gambar 4.13 adalah contoh dari Pelabelan Super  $(180, 24)$ - $F_4$ -anti magic total dekomposisi pada  $SF_4^3$



Gambar 4.13 Super  $(180, 24)$ - $(F_4)$  antimagic total dekomposisi pada  $SF_4^3$

Pada gambar 4.13 didapatkan pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic total dekomposisi pada shackle graf Kipas untuk  $n=3$ , dengan  $d=24$  maka  $a=180$ . Sehingga diketahui barisan aritmatika  $W_{\alpha_1} = \{180, 204, 228\}$

$\diamond$  **Teorema 4.1.13.** *Ada pelabelan super  $(50n + 28, 26)$ -  $(F_4)$  antimagic total dekomposisi pada shakel graf kipas  $(SF_4^n)$  untuk  $n \geq 3$ .*

**Bukti.** Labeli setiap titik pada shackle graf kipas dengan himpunan bilangan asli. Didefinisikan  $\alpha_{13}$  adalah fungsi bijektif. Fungsi titik dari  $\alpha_{13}$  adalah sebagai berikut:

$$\alpha_{13}(x_i) = n - i + 1$$

$$\alpha_{13}(y_j) = \frac{2n + \frac{(3+3(-1)^i)n}{2} + j + 1}{2}$$

Fungsi  $\alpha_{13}$  adalah fungsi bijektif yang memetakan  $V$  ke himpunan bilangan asli  $\{1, 2, 3, \dots, 4n + 1\}$ . Didefinisikan  $w_{\alpha_{13}}$  adalah bobot selimut dari pelabelan total selimut pada shackle graf kipas. Bobot selimut didapat dari penjumlahan 2 fungsi titik yang telah didapat diatas. Fungsi  $w_{\alpha_{13}}$  adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
w_{\alpha_{13}} &= \alpha_{13}(x_i) + \bigcup_{j=3i-2}^{3i+1} \alpha_{13}(y_j) \\
&= 8n + 5i + 2
\end{aligned}$$

Ketika kita memasukkan nilai  $i$  dari 1 sampai  $n$  pada fungsi  $w_{\alpha_{13}}$  akan didapat himpunan  $w_{\alpha_{13}}$ . Himpunan  $w_{\alpha_{13}}$  membentuk barisan aritmatika. Selanjutnya menentukan label sisi yang akan digunakan dalam mencari selimut total dari super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic total dekomposisi pada shackle graf Kipas. Labeli setiap sisi dari shackle graf kipas dengan himpunan bilangan asli. Didapatkan fungsi sisi dari  $\alpha_{13}$  adalah sebagai berikut.

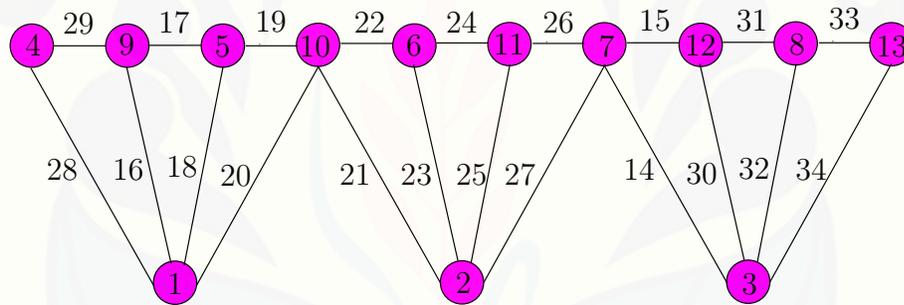
$$\begin{aligned}
\alpha_{13}(x_i y_{3i-2}) &= 11n - 7i + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
\alpha_{13}(x_i y_{3i-1}) &= 4n + 7i - 3, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
\alpha_{13}(x_i y_{3i}) &= 4n + 7i - 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
\alpha_{13}(x_i y_{3i+1}) &= 4n + 7i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
\alpha_{13}(y_j y_{j+1}) &= 11n - \frac{7j+5}{3}, \text{ untuk } j = 1 \pmod{3}, 1 \leq j \leq 3n+1 \\
\alpha_{13}(y_j y_{j+1}) &= 4n + \frac{7j+1}{3}, \text{ untuk } j = 2 \pmod{3}, 1 \leq j \leq 3n+1 \\
\alpha_{13}(y_j y_{j+1}) &= 4n + \frac{7j}{3}, \text{ untuk } j = 3 \pmod{3}, 1 \leq j \leq 3n+1
\end{aligned}$$

$W_{\alpha_{13}}$  mendefinisikan bobot total selimut pada shackle graf kipas.  $W_{\alpha_{13}}$  didapatkan dari penjumlahan bobot selimut  $w_{\alpha_{13}}$  dengan fungsi label sisinya, dapat dirumuskan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 W_{\alpha_{13}} &= w_{\alpha_{13}} + \bigcup_{j=3i-2}^{3i+1} \alpha_{13}(x_i y_j) + \bigcup_{j=3i-2}^{3i} \alpha_{13}(y_j y_{j+1}) \\
 &= (w_{\alpha_{13}}) + \alpha_{13}(x_i y_{3i-2}) + \alpha_{13}(x_i y_{3i-1}) + \alpha_{13}(x_i y_{3i}) \\
 &\quad + \alpha_{13}(x_i y_{3i+1}) + \alpha_{13}(y_{3i-2} y_{3i-1}) + \alpha_{13}(y_{3i-1} y_{3i}) + \alpha_{13}(y_{3i} y_{3i+1}) \\
 &= 50n + 26i + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n
 \end{aligned}$$

Didapatkan himpunan bobot total selimut  $W_{\alpha_{13}} = \{50n+28, 50n+54, \dots, 76n+2\}$ . Himpunan bobot total tersebut membentuk barisan aritmatika dengan  $d=26$ . Sehingga terbukti bahwa shackle dari graf kipas memiliki super  $(50n + 28, 26d)$ -antimagic total dekomposisi untuk  $n \geq 3$ .  $\square$

Gambar 4.14 adalah contoh dari Pelabelan Super  $(178, 26)$ - $F_4$ -anti magic total dekomposisi pada  $SF_4^3$



Gambar 4.14 Super  $(178, 26)$ - $(F_4)$  antimagic total dekomposisi pada  $SF_4^3$

Pada gambar 4.14 didapatkan pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic total dekomposisi pada shackle graf Kipas untuk  $n=3$ , dengan  $d=26$  maka  $a=178$ . Sehingga diketahui barisan aritmatika  $W_{\alpha_1} = \{178, 204, 230\}$

$\diamond$  **Teorema 4.1.14.** *Ada pelabelan super  $(49n + 29, 28)$ -  $(F_4)$  antimagic total dokomposisi pada shakel graf kipas  $(SF_4^n)$  untuk  $n \geq 3$ .*

**Bukti.** Melabeli setiap titik pada shackle graf kipas dengan himpunan bilangan

asli seperti pada teorema 4.1.1. Sehingga fungsi titik  $\alpha_14$ =fungsi titik  $\alpha_1$ , dan untuk fungsi  $w_{\alpha_14}$ =fungsi  $w_{\alpha_1}$ . Selanjutnya melabeli sisi dan didapatkan fungsi sisi dari  $\alpha_14$  sebagai berikut.

$$\alpha_14(x_i y_{3i-2}) = 11n - 7i + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$\alpha_14(x_i y_{3i-1}) = 4n + 7i - 3, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$\alpha_14(x_i y_{3i}) = 4n + 7i - 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$\alpha_14(x_i y_{3i+1}) = 4n + 7i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$\alpha_14(y_j y_{j+1}) = 11n - \frac{7j+5}{3}, \text{ untuk } j = 1 \pmod{3}, 1 \leq j \leq 3n+1$$

$$\alpha_14(y_j y_{j+1}) = 4n + \frac{7j+1}{3}, \text{ untuk } j = 2 \pmod{3}, 1 \leq j \leq 3n+1$$

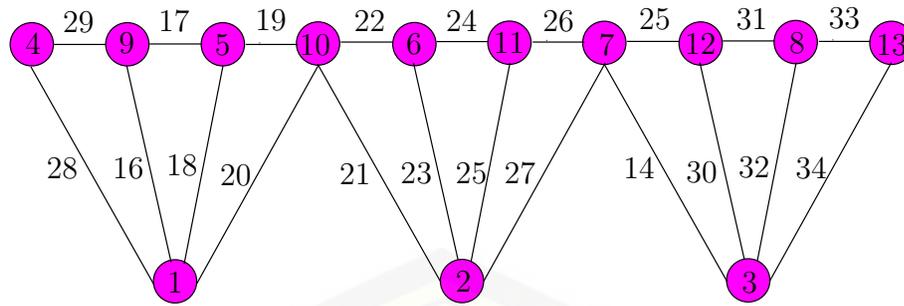
$$\alpha_14(y_j y_{j+1}) = 4n + \frac{7j}{3}, \text{ untuk } j = 3 \pmod{3}, 1 \leq j \leq 3n+1$$

$W_{\alpha_14}$  mendefinisikan bobot total selimut pada shackle graf kipas.  $W_{\alpha_14}$  didapatkan dari penjumlahan bobot selimut  $w_{\alpha_1}$  dengan fungsi label sisinya, dapat dirumuskan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} W_{\alpha_14} &= w_{\alpha_1} + \bigcup_{j=3i-2}^{3i+1} \alpha_14(x_i y_j) + \bigcup_{j=3i-2}^{3i} \alpha_14(y_j y_{j+1}) \\ &= 49n + 28i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Didapatkan himpunan bobot total selimut  $W_{\alpha_14} = \{49n+29, 49n+57, \dots, 77n+1\}$ . Himpunan bobot total tersebut membentuk barisan aritmatika dengan  $d=28$ . Sehingga terbukti bahwa shackle dari graf kipas memiliki super  $(49n+29, 28)$ -antimagic total dekomposisi untuk  $n \geq 3$ .  $\square$

Gambar 4.15 adalah contoh dari Pelabelan Super  $(176, 28)$ - $F_4$ -anti magic total dekomposisi pada  $SF_4^3$



Gambar 4.15 Super  $(176, 28)$ - $(F_4)$  antimagic total dekomposisi pada  $SF_4^3$

Pada gambar 4.15 didapatkan pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic total dekomposisi pada shackle graf Kipas untuk  $n=3$ , dengan  $d=28$  maka  $a=176$ . Sehingga diketahui barisan aritmatika  $W_{\alpha_1} = \{176, 204, 232\}$

◇ **Teorema 4.1.15.** *Ada pelabelan super  $(46n + 32, 34)$ -  $(F_4)$  antimagic total dokomposisi pada shakel graf kipas  $(SF_4^n)$  untuk  $n \geq 3$ .*

**Bukti.** Melabeli setiap titik pada shackle graf kipas dengan himpunan bilangan asli seperti pada teorema 4.1.9. Sehingga fungsi titik  $\alpha_{15}$ =fungsi titik  $\alpha_9$ , dan untuk fungsi  $w_{\alpha_{15}}$ =fungsi  $w_{\alpha_9}$ . Selanjutnya melabeli sisi dan didapatkan fungsi sisi dari  $\alpha_{15}$  sebagai berikut.

$$\alpha_{15}(x_i y_{3i-2}) = 11n - 7i + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$\alpha_{15}(x_i y_{3i-1}) = 4n - 7i - 3, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$\alpha_{15}(x_i y_{3i}) = 4n + 7i - 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$\alpha_{15}(x_i y_{3i+1}) = 4n + 7i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$\alpha_{15}(y_j y_{j+1}) = 11n - \frac{7j + 5}{3}, \text{ untuk } j = 1 \text{ mod } 3, 1 \leq j \leq 3n + 1$$

$$\alpha_{15}(y_j y_{j+1}) = 4n + \frac{7j + 1}{3}, \text{ untuk } j = 2 \text{ mod } 3, 1 \leq j \leq 3n + 1$$

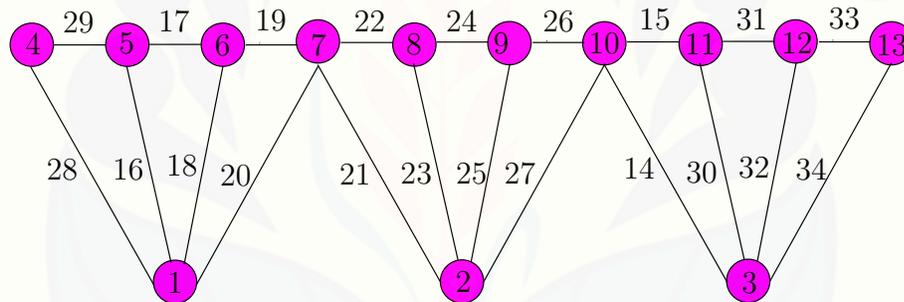
$$\alpha_{15}(y_j y_{j+1}) = 4n + \frac{7j}{3}, \text{ untuk } j = 3 \text{ mod } 3, 1 \leq j \leq 3n + 1$$

$W_{\alpha_{15}}$  mendefinisikan bobot total selimut pada shackle graf kipas.  $W_{\alpha_{15}}$  didapatkan dari penjumlahan bobot selimut  $w_{\alpha_9}$  dengan fungsi label sisinya, dapat dirumuskan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} W_{\alpha_{15}} &= w_{\alpha_9} + \bigcup_{j=3i-2}^{3i+1} \alpha_{15}(x_i y_j) + \bigcup_{j=3i-2}^{3i} \alpha_{15}(y_j y_{j+1}) \\ &= 46n + 34i - 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Didapatkan himpunan bobot total selimut  $W_{\alpha_{15}} = \{46n+32, 46n+66, \dots, 80n-2\}$ . Himpunan bobot total tersebut membentuk barisan aritmatika dengan  $d=34$ . Sehingga terbukti bahwa shackle dari graf kipas memiliki super  $(46n + 32, 34)$ -antimagic total dekomposisi untuk  $n \geq 3$ .  $\square$

Gambar 4.16 adalah contoh dari Pelabelan Super  $(170, 34)$ - $F_4$ -anti magic total dekomposisi pada  $SF_4^3$



Gambar 4.16 Super  $(170, 34)$ - $(F_4)$  antimagic total dekomposisi pada  $SF_4^3$

Pada gambar 4.16 didapatkan pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic total dekomposisi pada shackle graf Kipas untuk  $n=3$ , dengan  $d=34$  maka  $a=170$ . Sehingga diketahui barisan aritmatika  $W_{\alpha_1} = \{170, 204, 238\}$

$\diamond$  **Teorema 4.1.16.** *Ada pelabelan super  $(32n + 70, 38)$ -  $(F_4)$  antimagic total dokomposisi pada shakel graf kipas  $(SF_4^n)$  untuk  $n \geq 3$ .*

**Bukti.** Melabeli setiap titik pada shackle graf kipas dengan himpunan bilangan asli seperti pada teorema 4.1.12. Sehingga fungsi titik  $\alpha_{16}$ =fungsi titik  $\alpha_1 2$ , dan untuk fungsi  $w_{\alpha_{16}}$ =fungsi  $w_{\alpha_1 2}$ . Selanjutnya melabeli sisi dan didapatkan fungsi sisi dari  $\alpha_{16}$  sebagai berikut.

$$\begin{aligned}\alpha_{16}(x_i y_{3i-2}) &= 4n + 7i - 5, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ \alpha_{16}(x_i y_{3i-1}) &= 4n + 7i - 3, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ \alpha_{16}(x_i y_{3i}) &= 4n + 7i - 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ \alpha_{16}(x_i y_{3i+1}) &= 4n + 7i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ \alpha_{16}(y_j y_{j+1}) &= 4n + \frac{7j+2}{3}, \text{ untuk } j = 1 \pmod{3}, 1 \leq j \leq 3n+1 \\ \alpha_{16}(y_j y_{j+1}) &= 4n + \frac{7j+1}{3}, \text{ untuk } j = 2 \pmod{3}, 1 \leq j \leq 3n+1 \\ \alpha_{16}(y_j y_{j+1}) &= 4n + \frac{7j}{3}, \text{ untuk } j = 3 \pmod{3}, 1 \leq j \leq 3n+1\end{aligned}$$

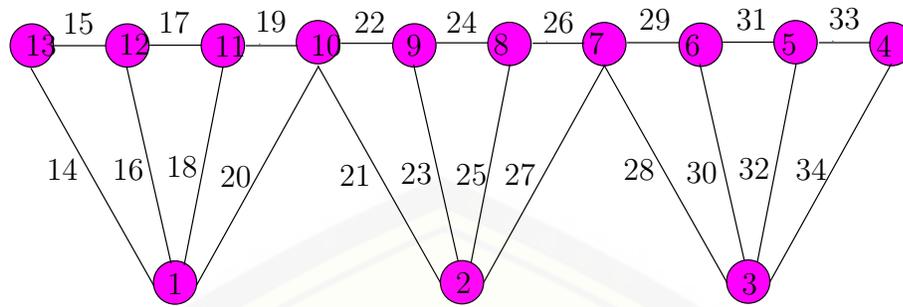
$W_{\alpha_{16}}$  mendefinisikan bobot total selimut pada shackle graf kipas.  $W_{\alpha_{16}}$  didapatkan dari penjumlahan bobot selimut  $w_{\alpha_{12}}$  dengan fungsi label sisinya, dapat dirumuskan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}W_{\alpha_{16}} &= w_{\alpha_{12}} + \bigcup_{j=3i-2}^{3i+1} \alpha_{16}(x_i y_j) + \bigcup_{j=3i-2}^{3i} \alpha_{16}(y_j y_{j+1}) \\ &= 32n + 38i + 32, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n\end{aligned}$$

Didapatkan himpunan bobot total selimut  $W_{\alpha_{16}} = \{32n+70, 32n+108, \dots, 70n+32\}$ . Himpunan bobot total tersebut membentuk barisan aritmatika dengan  $d=38$ . Sehingga terbukti bahwa shackle dari graf kipas memiliki super  $(32n + 70, 38)$ -antimagic total dekomposisi untuk  $n \geq 3$ .  $\square$

Gambar 4.17 adalah contoh dari Pelabelan Super  $(166, 38)$ - $F_4$ -anti magic

total dekomposisi pada  $SF_4^3$



Gambar 4.17 Super  $(166, 38)$ - $(F_4)$  antimagic total dekomposisi pada  $SF_4^3$

Pada gambar 4.17 didapatkan pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic total dekomposisi pada shackle graf Kipas untuk  $n=3$ , dengan  $d=38$  maka  $a=166$ . Sehingga diketahui barisan aritmatika  $W_{\alpha_1} = \{166, 204, 242\}$

◇ **Teorema 4.1.17.** *Ada pelabelan super  $(43n + 35, 40)$ -  $(F_4)$  antimagic total dokomposisi pada shakel graf kipas  $(SF_4^n)$  untuk  $n \geq 3$ .*

**Bukti.** Melabeli setiap titik pada shackle graf kipas dengan himpunan bilangan asli seperti pada teorema 4.1.13. Sehingga fungsi titik  $\alpha_{17}$ =fungsi titik  $\alpha_13$ , dan untuk fungsi  $w_{\alpha_{17}}$ =fungsi  $w_{\alpha_13}$ . Selanjutnya melabeli sisi dan didapatkan fungsi sisi dari  $\alpha_{17}$  sebagai berikut.

$$\alpha_{17}(x_i y_{3i-2}) = 4n + 7i - 5, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$\alpha_{17}(x_i y_{3i-1}) = 4n + 7i - 3, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$\alpha_{17}(x_i y_{3i}) = 4n + 7i - 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$\alpha_{17}(x_i y_{3i+1}) = 11n - 7i + 8, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$\alpha_{17}(y_j y_{j+1}) = 4n + \frac{7j + 2}{3}, \text{ untuk } j = 1 \text{ mod } 3, 1 \leq j \leq 3n + 1$$

$$\alpha_{17}(y_j y_{j+1}) = 4n + \frac{7j + 1}{3}, \text{ untuk } j = 2 \text{ mod } 3, 1 \leq j \leq 3n + 1$$

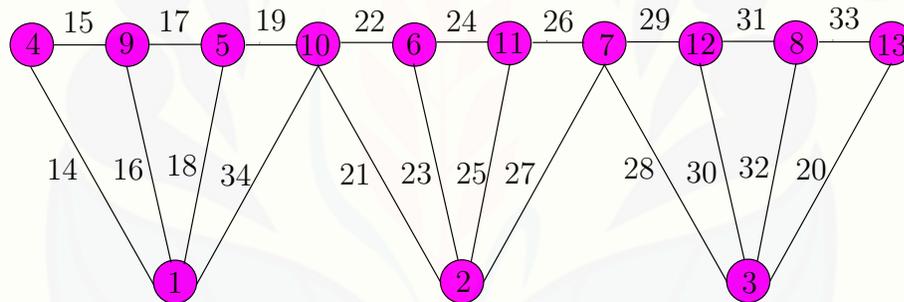
$$\alpha_{17}(y_j y_{j+1}) = 4n + \frac{7j}{3}, \text{ untuk } j = 3 \text{ mod } 3, 1 \leq j \leq 3n + 1$$

$W_{\alpha_{17}}$  mendefinisikan bobot total selimut pada shackle graf kipas.  $W_{\alpha_{17}}$  didapatkan dari penjumlahan bobot selimut  $w_{\alpha_{13}}$  dengan fungsi label sisinya, dapat dirumuskan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} W_{\alpha_{17}} &= w_{\alpha_{13}} + \bigcup_{j=3i-2}^{3i+1} \alpha_{17}(x_i y_j) + \bigcup_{j=3i-2}^{3i} \alpha_{17}(y_j y_{j+1}) \\ &= 43n + 40i - 5, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Didapatkan himpunan bobot total selimut  $W_{\alpha_{17}} = \{43n+35, 43n+75, \dots, 83n-5\}$ . Himpunan bobot total tersebut membentuk barisan aritmatika dengan  $d=40$ . Sehingga terbukti bahwa shackle dari graf kipas memiliki super  $(43n + 35, 40)$ -antimagic total dekomposisi untuk  $n \geq 3$ .  $\square$

Gambar 4.18 adalah contoh dari Pelabelan Super  $(164, 40)$ - $F_4$ -anti magic total dekomposisi pada  $SF_4^3$



Gambar 4.18 Super  $(164, 40)$ - $(F_4)$  antimagic total dekomposisi pada  $SF_4^3$

Pada gambar 4.18 didapatkan pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic total dekomposisi pada shackle graf Kipas untuk  $n=3$ , dengan  $d=38$  maka  $a=164$ . Sehingga diketahui barisan aritmatika  $W_{\alpha_1} = \{164, 204, 244\}$

$\diamond$  **Teorema 4.1.18.** *Ada pelabelan super  $(42n + 36, 42)$ -  $(F_4)$  antimagic total dokomposisi pada shakel graf kipas  $(SF_4^n)$  untuk  $n \geq 3$ .*

**Bukti.** Melabeli setiap titik pada shackle graf kipas dengan himpunan bilangan asli seperti pada teorema 4.1.1. Sehingga fungsi titik  $\alpha_{18}$ =fungsi titik  $\alpha_1$ , dan untuk fungsi  $w_{\alpha_{18}}$ =fungsi  $w_{\alpha_1}$ . Selanjutnya melabeli sisi dan didapatkan fungsi sisi dari  $\alpha_{18}$  sebagai berikut.

$$\begin{aligned}\alpha_{18}(x_i y_{3i-2}) &= 11n - 7i + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ \alpha_{18}(x_i y_{3i-1}) &= 4n + 7i - 3, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ \alpha_{18}(x_i y_{3i}) &= 4n + 7i - 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ \alpha_{18}(x_i y_{3i+1}) &= 4n + 7i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ \alpha_{18}(y_j y_{j+1}) &= 4n + \frac{7j+2}{3}, \text{ untuk } j = 1 \pmod{3}, 1 \leq j \leq 3n+1 \\ \alpha_{18}(y_j y_{j+1}) &= 4n + \frac{7j+1}{3}, \text{ untuk } j = 2 \pmod{3}, 1 \leq j \leq 3n+1 \\ \alpha_{18}(y_j y_{j+1}) &= 4n + \frac{7j}{3}, \text{ untuk } j = 3 \pmod{3}, 1 \leq j \leq 3n+1\end{aligned}$$

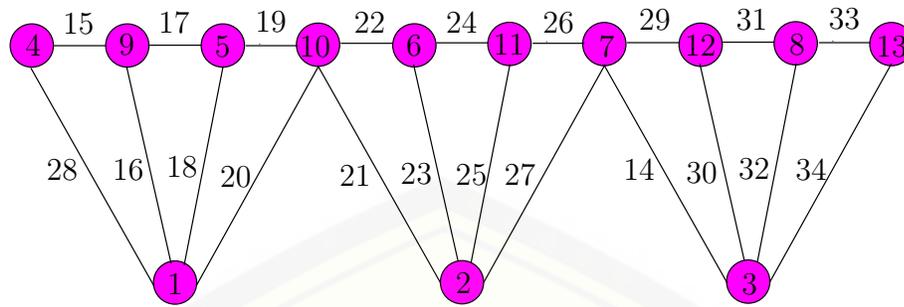
$W_{\alpha_{18}}$  mendefinisikan bobot total selimut pada shackle graf kipas.  $W_{\alpha_{18}}$  didapatkan dari penjumlahan bobot selimut  $w_{\alpha_1}$  dengan fungsi label sisinya, dapat dirumuskan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}W_{\alpha_{18}} &= w_{\alpha_1} + \bigcup_{j=3i-2}^{3i+1} \alpha_{18}(x_i y_j) + \bigcup_{j=3i-2}^{3i} \alpha_{18}(y_j y_{j+1}) \\ &= 42n + 42i - 6, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n\end{aligned}$$

Didapatkan himpunan bobot total selimut  $W_{\alpha_{18}} = \{42n+36, 42n+78, \dots, 84n-6\}$ . Himpunan bobot total tersebut membentuk barisan aritmatika dengan  $d=42$ . Sehingga terbukti bahwa shackle dari graf kipas memiliki super  $(42n + 36, 42)$ -antimagic total dekomposisi untuk  $n \geq 3$ .  $\square$

Gambar 4.19 adalah contoh dari Pelabelan Super  $(162, 42)$ - $F_4$ -anti magic

total dekomposisi pada  $SF_4^3$



Gambar 4.19 Super  $(162, 42)$ - $(F_4)$  antimagic total dekomposisi pada  $SF_4^3$

Pada gambar 4.19 didapatkan pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic total dekomposisi pada shackle graf Kipas untuk  $n=3$ , dengan  $d=42$  maka  $a=162$ . Sehingga diketahui barisan aritmatika  $W_{\alpha_1} = \{162, 204, 246\}$

◇ **Teorema 4.1.19.** *Ada pelabelan super  $(39n + 39, 48)$ -  $(F_4)$  antimagic total dokomposisi pada shakel graf kipas  $(SF_4^n)$  untuk  $n \geq 3$ .*

**Bukti.** Melabeli setiap titik pada shackle graf kipas dengan himpunan bilangan asli seperti pada teorema 4.1.9. Sehingga fungsi titik  $\alpha_{19}$ =fungsi titik  $\alpha_9$ , dan untuk fungsi  $w_{\alpha_{19}}$ =fungsi  $w_{\alpha_9}$ . Selanjutnya melabeli sisi dan didapatkan fungsi sisi dari  $\alpha_{19}$  sebagai berikut.

$$\alpha_{19}(x_i y_{3i-2}) = 11n - 7i + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$\alpha_{19}(x_i y_{3i-1}) = 4n + 7i - 3, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$\alpha_{19}(x_i y_{3i}) = 4n + 7i - 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$\alpha_{19}(x_i y_{3i+1}) = 4n + 7i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$\alpha_{19}(y_j y_{j+1}) = 4n + \frac{7j+2}{3}, \text{ untuk } j = 1 \text{ mod } 3, 1 \leq j \leq 3n+1$$

$$\alpha_{19}(y_j y_{j+1}) = 4n + \frac{7j+1}{3}, \text{ untuk } j = 2 \text{ mod } 3, 1 \leq j \leq 3n+1$$

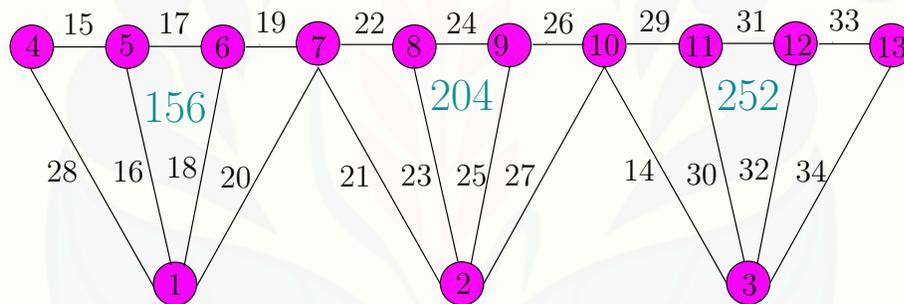
$$\alpha_{19}(y_j y_{j+1}) = 4n + \frac{7j}{3}, \text{ untuk } j = 3 \text{ mod } 3, 1 \leq j \leq 3n+1$$

$W_{\alpha_{19}}$  mendefinisikan bobot total selimut pada shackle graf kipas.  $W_{\alpha_{19}}$  didapatkan dari penjumlahan bobot selimut  $w_{\alpha_9}$  dengan fungsi label sisinya, dapat dirumuskan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} W_{\alpha_{19}} &= w_{\alpha_9} + \bigcup_{j=3i-2}^{3i+1} \alpha_{19}(x_i y_j) + \bigcup_{j=3i-2}^{3i} \alpha_{19}(y_j y_{j+1}) \\ &= 39n + 48i - 9, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Didapatkan himpunan bobot total selimut  $W_{\alpha_{19}} = \{39n+39, 39n+87, \dots, 87n-9\}$ . Himpunan bobot total tersebut membentuk barisan aritmatika dengan  $d=48$ . Sehingga terbukti bahwa shackle dari graf kipas memiliki super  $(39n + 39, 48)$ -antimagic total dekomposisi untuk  $n \geq 3$ .  $\square$

Gambar 4.20 adalah contoh dari Pelabelan Super  $(156, 48)$ - $F_4$ -anti magic total dekomposisi pada  $SF_4^3$



Gambar 4.20 Super  $(156, 48)$ - $(F_4)$  antimagic total dekomposisi pada  $SF_4^3$

Pada gambar 4.20 didapatkan pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic total dekomposisi pada shackle graf Kipas untuk  $n=3$ , dengan  $d=48$  maka  $a=156$ . Sehingga diketahui barisan aritmatika  $W_{\alpha_1} = \{156, 204, 252\}$

$\diamond$  **Teorema 4.1.20.** *Ada pelabelan super  $(36n + 42, 54)$ -  $(F_4)$  antimagic total dokomposisi pada shakel graf kipas  $(SF_4^n)$  untuk  $n \geq 3$ .*

**Bukti.** Melabeli setiap titik pada shackle graf kipas dengan himpunan bilangan asli seperti pada teorema 4.1.13. Sehingga fungsi titik  $\alpha_{20}$ =fungsi titik  $\alpha_13$ , dan untuk fungsi  $w_{\alpha_{20}}$ =fungsi  $w_{\alpha_13}$ . Selanjutnya melabeli sisi dan didapatkan fungsi sisi dari  $\alpha_{20}$  sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \alpha_{20}(x_i y_{3i-2}) &= 4n + 7i - 5, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ \alpha_{20}(x_i y_{3i-1}) &= 4n + 7i - 3, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ \alpha_{20}(x_i y_{3i}) &= 4n + 7i - 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ \alpha_{20}(x_i y_{3i+1}) &= 4n + 7i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ \alpha_{20}(y_j y_{j+1}) &= 4n + \frac{7j+2}{3}, \text{ untuk } j = 1 \text{ mod } 3, 1 \leq j \leq 3n+1 \\ \alpha_{20}(y_j y_{j+1}) &= 4n + \frac{7j+1}{3}, \text{ untuk } j = 2 \text{ mod } 3, 1 \leq j \leq 3n+1 \\ \alpha_{20}(y_j y_{j+1}) &= 4n + \frac{7j}{3}, \text{ untuk } j = 3 \text{ mod } 3, 1 \leq j \leq 3n+1 \end{aligned}$$

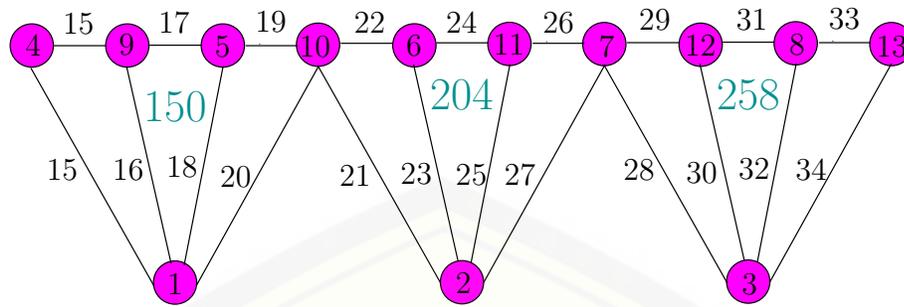
$W_{\alpha_{20}}$  mendefinisikan bobot total selimut pada shackle graf kipas.  $W_{\alpha_{20}}$  didapatkan dari penjumlahan bobot selimut  $w_{\alpha_{13}}$  dengan fungsi label sisinya, dapat dirumuskan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} W_{\alpha_{20}} &= w_{\alpha_{13}} + \bigcup_{j=3i-2}^{3i+1} \alpha_{20}(x_i y_j) + \bigcup_{j=3i-2}^{3i} \alpha_{20}(y_j y_{j+1}) \\ &= 36n + 54i - 12, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Didapatkan himpunan bobot total selimut  $W_{\alpha_{20}} = \{36n+42, 36n+96, \dots, 90n-12\}$ . Himpunan bobot total tersebut membentuk barisan aritmatika dengan  $d=54$ . Sehingga terbukti bahwa shackle dari graf kipas memiliki super  $(36n + 42, 54)$ -antimagic total dekomposisi untuk  $n \geq 3$ .  $\square$

Gambar 4.21 adalah contoh dari Pelabelan Super  $(150, 54)$ - $F_4$ -anti magic

total dekomposisi pada  $SF_4^3$



Gambar 4.21 Super (150, 54)-( $F_4$ ) antimagic total dekomposisi pada  $SF_4^3$

Pada gambar 4.21 didapatkan pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic total dekomposisi pada shackle graf Kipas untuk  $n=3$ , dengan  $d=54$  maka  $a=150$ . Sehingga diketahui barisan aritmatika  $W_{\alpha_1} = \{150, 204, 258\}$

◇ **Teorema 4.1.21.** *Ada pelabelan super  $(35n + 43, 56)$ - ( $F_4$ ) antimagic total dokomposisi pada shakel graf kipas ( $SF_4^n$ ) untuk  $n \geq 3$ .*

**Bukti.** Melabeli setiap titik pada shackle graf kipas dengan himpunan bilangan asli seperti pada teorema 4.1.1. Sehingga fungsi titik  $\alpha_{21}$ =fungsi titik  $\alpha_1$ , dan untuk fungsi  $w_{\alpha_{21}}$ =fungsi  $w_{\alpha_1}$ . Selanjutnya melabeli sisi dan didapatkan fungsi sisi dari  $\alpha_{21}$  sebagai berikut.

$$\alpha_{21}(x_i y_{3i-2}) = 4n + 7i - 5, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$\alpha_{21}(x_i y_{3i-1}) = 4n + 7i - 3, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$\alpha_{21}(x_i y_{3i}) = 4n + 7i - 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$\alpha_{21}(x_i y_{3i+1}) = 4n + 7i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$\alpha_{21}(y_j y_{j+1}) = 4n + \frac{7j+2}{3}, \text{ untuk } j = 1 \text{ mod } 3, 1 \leq j \leq 3n+1$$

$$\alpha_{21}(y_j y_{j+1}) = 4n + \frac{7j+1}{3}, \text{ untuk } j = 2 \text{ mod } 3, 1 \leq j \leq 3n+1$$

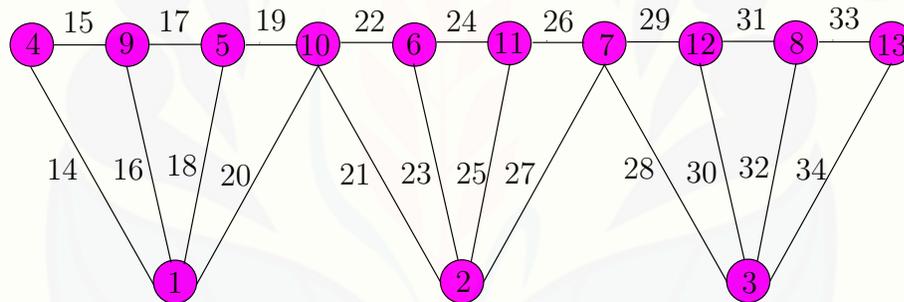
$$\alpha_{21}(y_j y_{j+1}) = 4n + \frac{7j}{3}, \text{ untuk } j = 3 \text{ mod } 3, 1 \leq j \leq 3n+1$$

$W_{\alpha_{21}}$  mendefinisikan bobot total selimut pada shackle graf kipas.  $W_{\alpha_{21}}$  didapatkan dari penjumlahan bobot selimut  $w_{\alpha_1}$  dengan fungsi label sisinya, dapat dirumuskan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} W_{\alpha_{21}} &= w_{\alpha_1} + \bigcup_{j=3i-2}^{3i+1} \alpha_{21}(x_i y_j) + \bigcup_{j=3i-2}^{3i} \alpha_{21}(y_j y_{j+1}) \\ &= 35n + 56i - 13, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Didapatkan himpunan bobot total selimut  $W_{\alpha_{21}} = \{35n+43, 35n+99, \dots, 91n-13\}$ . Himpunan bobot total tersebut membentuk barisan aritmatika dengan  $d=56$ . Sehingga terbukti bahwa shackle dari graf kipas memiliki super  $(35n + 43, 56)$ -antimagic total dekomposisi untuk  $n \geq 3$ .  $\square$

Gambar 4.22 adalah contoh dari Pelabelan Super  $(148, 56)$ - $F_4$ -anti magic total dekomposisi pada  $SF_4^3$



Gambar 4.22 Super  $(148, 56)$ - $(F_4)$  antimagic total dekomposisi pada  $SF_4^3$

Pada gambar 4.22 didapatkan pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic total dekomposisi pada shackle graf Kipas untuk  $n=3$ , dengan  $d=56$  maka  $a=148$ . Sehingga diketahui barisan aritmatika  $W_{\alpha_1} = \{148, 204, 260\}$

$\diamond$  **Teorema 4.1.22.** *Ada pelabelan super  $(32n + 46, 62)$ -  $(F_4)$  antimagic total dekomposisi pada shakel graf kipas  $(SF_4^n)$  untuk  $n \geq 3$ .*

**Bukti.** Melabeli setiap titik pada shackle graf kipas dengan himpunan bilangan asli seperti pada teorema 4.1.9. Sehingga fungsi titik  $\alpha_{22}$ =fungsi titik  $\alpha_9$ , dan untuk fungsi  $w_{\alpha_{22}}$ =fungsi  $w_{\alpha_9}$ . Selanjutnya melabeli sisi dan didapatkan fungsi sisi dari  $\alpha_{22}$  sebagai berikut.

$$\begin{aligned}\alpha_{22}(x_i y_{3i-2}) &= 4n + 7i - 5, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ \alpha_{22}(x_i y_{3i-1}) &= 4n + 7i - 3, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ \alpha_{22}(x_i y_{3i}) &= 4n + 7i - 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ \alpha_{22}(x_i y_{3i+1}) &= 4n + 7i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ \alpha_{22}(y_j y_{j+1}) &= 4n + \frac{7j+2}{3}, \text{ untuk } j = 1 \pmod{3}, 1 \leq j \leq 3n+1 \\ \alpha_{22}(y_j y_{j+1}) &= 4n + \frac{7j+1}{3}, \text{ untuk } j = 2 \pmod{3}, 1 \leq j \leq 3n+1 \\ \alpha_{22}(y_j y_{j+1}) &= 4n + \frac{7j}{3}, \text{ untuk } j = 3 \pmod{3}, 1 \leq j \leq 3n+1\end{aligned}$$

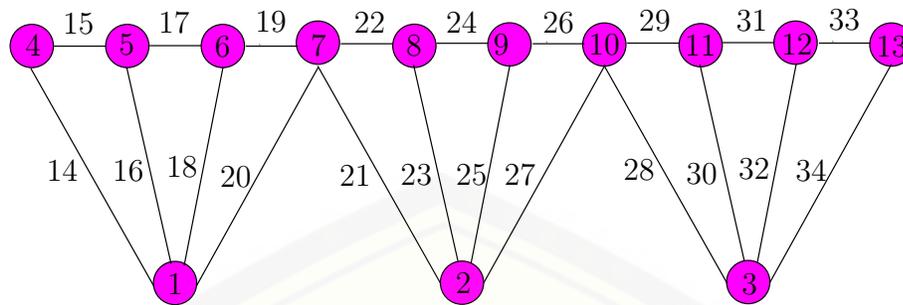
$W_{\alpha_{22}}$  mendefinisikan bobot total selimut pada shackle graf kipas.  $W_{\alpha_{22}}$  didapatkan dari penjumlahan bobot selimut  $w_{\alpha_9}$  dengan fungsi label sisinya, dapat dirumuskan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}W_{\alpha_{22}} &= w_{\alpha_9} + \bigcup_{j=3i-2}^{3i+1} \alpha_{22}(x_i y_j) + \bigcup_{j=3i-2}^{3i} \alpha_{22}(y_j y_{j+1}) \\ &= 32n + 62i - 16, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n\end{aligned}$$

Didapatkan himpunan bobot total selimut  $W_{\alpha_{22}} = \{32n+46, 32n+108, \dots, 94n-16\}$ . Himpunan bobot total tersebut membentuk barisan aritmatika dengan  $d=62$ . Sehingga terbukti bahwa shackle dari graf kipas memiliki super  $(32n + 46, 62)$ -antimagic total dekomposisi untuk  $n \geq 3$ .  $\square$

Gambar 4.23 adalah contoh dari Pelabelan Super  $(142, 62)$ - $F_4$ -anti magic

total dekomposisi pada  $SF_4^3$



Gambar 4.23 Super  $(142, 62)$ - $(F_4)$  antimagic total dekomposisi pada  $SF_4^3$

Pada gambar 4.23 didapatkan pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic total dekomposisi pada shackle graf Kipas untuk  $n=3$ , dengan  $d=62$  maka  $a=142$ . Sehingga diketahui barisan aritmatika  $W_{a_1} = \{142, 204, 268\}$

#### 4.2 Pelabelan Super $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ Antimagic Total Dekomposisi pada Shaket Graf Kipas Diskonektif

Penelitian selanjtnya dilakukan untuk gabungan saling lepas pada shaket dari graf kipas yang merupakan pengembangan dari pada shaket graf kipas tunggal. Gabungan pada Shaket dari Graf Kipas didefinisikan dengan shaket pada graf kipas dengan salinan sebanyak  $m$ . Gabungan pada shaket dari graf kipas  $(mSF_4^n)$  didefinisikan sebagai  $V(mSF_4^n) = \{x_i^k, y_j^k; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq 3n + 1; 1 \leq k \leq m\}$  dan sisi  $E(mSF_4^n) = \{x_i^k y_j^k; 1 \leq i \leq n; 3i - 2 \leq j \leq 3i + 1; 1 \leq k \leq m\} \cup \{y_j^k y_{j+1}^k; 1 \leq i \leq n; 3i - 2 \leq j \leq 3i; 1 \leq k \leq m\}$ .

Untuk menentukan batas atas  $d$  pada gabungan saling lepas shaket dari graf kipas, sama dengan graf tunggal yaitu, perlu diketahui kardinalitas jumlah titik  $(p_G)$  dan jumlah sisi  $(q_G)$ . Jumlah titik dan jumlah sisi pada  $(mSF_4^n)$  diperoleh dengan mencermati definisi gabungan saling lepas pada suatu graf. Shaket dari graf kipas pada gabungan saling lepasnya dinotasikan dengan  $(mSF_4^n)$  dimana  $m$  merupakan banyaknya salinan pada shaket dari graf kipas dengan  $1 \leq k \leq m$ , ditulis :  $1SF_4^n \cup 2SF_4^n \cup 3SF_4^n \cup \dots \cup mSF_4^n$ . Sehingga didapatkan jumlah titik pada shaket dari graf kipas  $mSF_4^n$  adalah  $m$  dikalikan jumlah titik graf  $SF_4^n$

dapat dituliskan dengan  $p_G = m(4n + 1) = 4mn + m$  dan jumlah sisi graf  $mSF_4^n$  adalah  $m$  kali jumlah sisi graf  $SF_4^n$  dapat dituliskan dengan  $q_G = m(7n) = 7mn$ . Sedangkan jumlah titik pada dekomposisi shakel dari graf kipas  $mSF_4^n$  adalah  $m$  kali jumlah titik pada dekomposisi shakel dari graf kipas  $SF_4^n$ , yaitu  $p_H = 5$  dan jumlah sisinya  $q_H = 7$ . Jumlah dekomposisi shakel dari graf kipas  $mSF_4^n$  adalah  $m$  kali jumlah dekomposisi shakel dari graf kipas tunggal  $SF_4^n$ , dapat dituliskan  $s = m(n) = mn$ .

Pada graf gabungan shakel dari graf kipas  $mSF_4^n$  juga dapat menentukan  $d$  dengan menggunakan Lemma 2.5.1. Diketahui jumlah titik pada graf  $mF_3^n$  adalah  $p_G = 4mn + m$  dan jumlah sisi  $q_G = 7nm$ . Sedangkan jumlah titik pada dekomposisi  $mSF_4^n$  adalah  $p_H = 5$  dan jumlah sisinya  $q_H = 7$  dengan jumlah selimut  $mSF_4^n$  adalah  $s = nm$  untuk  $m$  adalah banyaknya salinan dari shakel graf kipas dari atas ke bawah dan  $n$  adalah banyaknya *expand* shakel graf kipas dari kiri ke kanan. Dengan demikian batas atas nilai beda  $d$  tersebut adalah:

$$\begin{aligned}
 d &\leq \frac{(p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H}{s - m} \\
 &= \frac{(4nm + m - 5)5 + (7nm - 7)7}{nm - 1} \\
 &= \frac{20nm + 5m - 25 + 49nm - 49}{nm - 1} \\
 &= \frac{69nm + 5m - 74}{nm - 1} \\
 &= \frac{69m(nm - 1) + 5m - 5}{nm - 1} \\
 &= 69 + \frac{5(m - 1)}{nm - 1} \\
 &< 71m
 \end{aligned}$$

Karena  $0 < \frac{5(m-1)}{nm-1} < 2$  didapatkan  $d < 71$  dengan nilai minimal  $n \geq 3$  dan  $m \geq 2$ . Pelabelan  $SHATD$  pada gabungan saling lepas dari shakel graf kipas juga menggunakan bilangan bulat positif, sehingga nilai  $d \geq 0$  dan  $d$  adalah bilangan bulat. Sehingga dapat disimpulkan  $d \in \{0, 1, 2, 3, \dots, 68, 69, 70\}$ . Selanjutnya

mencari fungsi bijektif super  $(a,d)$ - $\mathcal{H}$  antimagic total dekomposisi yang sesuai dengan nilai  $d$  yang telah ditemukan.

Pada gabungan saling lepas dari shakel graf kipas ini juga menggunakan metode yang sama dengan graf tunggal dalam menentukan pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$  antimagic total dekomposisi. Terdiri dari beberapa langkah yang diawali dengan menggunakan pendeteksian pola (*pattern recognition*) untuk menentukan pelabelan yang berlaku sampai dengan batas  $i,k$  yang telah ditemukan. Kemudian untuk menentukan pola secara umum digunakan fungsi-fungsi dalam barisan aritmatika untuk menentukan fungsi bijektifnya. Setelah fungsi bijektif diketahui maka harus dibuktikan secara deduktif aksiomatik untuk membuktikan kebenaran dari teorema-teorema tersebut. Teorema yang ditemukan dalam penelitian ini bukan teorema yang biimplikatif atau karakteristik sehingga pembuktiannya hanya dilakukan satu arah. Teorema yang ditemukan dalam penelitian ini juga bersifat keberadaan (*existence but not unique*).

Untuk menentukan pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$  antimagic total dekomposisi pada gabungan dari shakel graf kipas  $mSF_4^n$ . Harus ditentukan terlebih dahulu batas atas nilai  $d$  untuk gabungan graf sebanyak  $m$  shakel dari graf kipas, dengan menggunakan rumus yang telah ada. Dari hasil penggabungan pola melalui *pattern recognition* dan konsep barisan aritmatika, maka diperoleh teorema dan akibat sebagai berikut.

◇ **Teorema 4.2.1.** *Ada gabungan saling lepas dari shakel graf kipas  $(mSF_4^n)$  memiliki super  $(35mn + 10m + 33, 0)$  -  $F_4$  antimagic total dekomposisi untuk  $n \geq 3$  dan  $m \geq 3$ .*

**Bukti.** Melabeli titik gabungan saling lepas dari shakel graf kipas  $(mSF_4^n)$

dengan fungsi bijektif  $f_1$  sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f_1(x_i^k) &= -m + im + k, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m \\ f_1(y_j^k) &= mn + \left(\frac{j-1}{3}\right)m + k, \text{ untuk } j = 3i - 2, 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m \\ f_1(y_j^k) &= 2mn + \left(\frac{j+1}{3}\right)m + k, \text{ untuk } j = 3i - 1, 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m \\ f_1(y_j^k) &= 3mn + \frac{i}{3}m + k, \text{ untuk } j = 3i, 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m \end{aligned}$$

Dapat dilihat bahwa  $f_0$  adalah fungsi bijektif yang memetakan  $(mSF_4^n)$  ke himpunan bilangan bulat  $f(V) = \{1, 2, 3, \dots, 3nm + m\}$ . Jika  $w_{f_1}$  didefinisikan sebagai bobot dekomposisi dari pelabelan total dekomposisi pada shakel dari graf kipas dimana bobot dekomposisi tersebut adalah  $\mathcal{H}=F_4$  sebagai dekomposisinya, maka fungsi bijektif  $w_{f_1}$  dapat ditentukan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} w_{f_1} &= \bigcup_{k=1}^m \bigcup_{i=1}^n \{f(x_i^k) + \sum_{j=3i-2}^{3i} f(y_j^k) + f(y_{j=3i+1}^k)\} \\ w_{f_1} &= \bigcup_{k=1}^m \bigcup_{i=1}^n \{f(x_i^k) + f(y_{3i-2}^k) + f(y_{3i-1}^k) + f(y_{3i}^k) + f(y_{3i+1}^k)\} \\ w_{f_1} &= \bigcup_{k=1}^m \bigcup_{i=1}^n \{(-m + im + k) + (mn + \left(\frac{3i-2-1}{3}\right)m + k) + \\ &\quad (2mn + \left(\frac{2i-1+1}{3}\right)m + k) + (3mn + \frac{3i}{3}m + k) + (mn + \left(\frac{3i+1-1}{3}\right)m + k)\} \\ w_{f_1} &= \bigcup_{k=1}^m \bigcup_{i=1}^n \{7mn - 2m + 5mi + 5k\}, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m \end{aligned}$$

Labeli sisi gabungan saling lepas dari shakel graf kipas  $(mSF_4^n)$  dengan

fungsi bijektif  $f_1$  sebagai berikut:

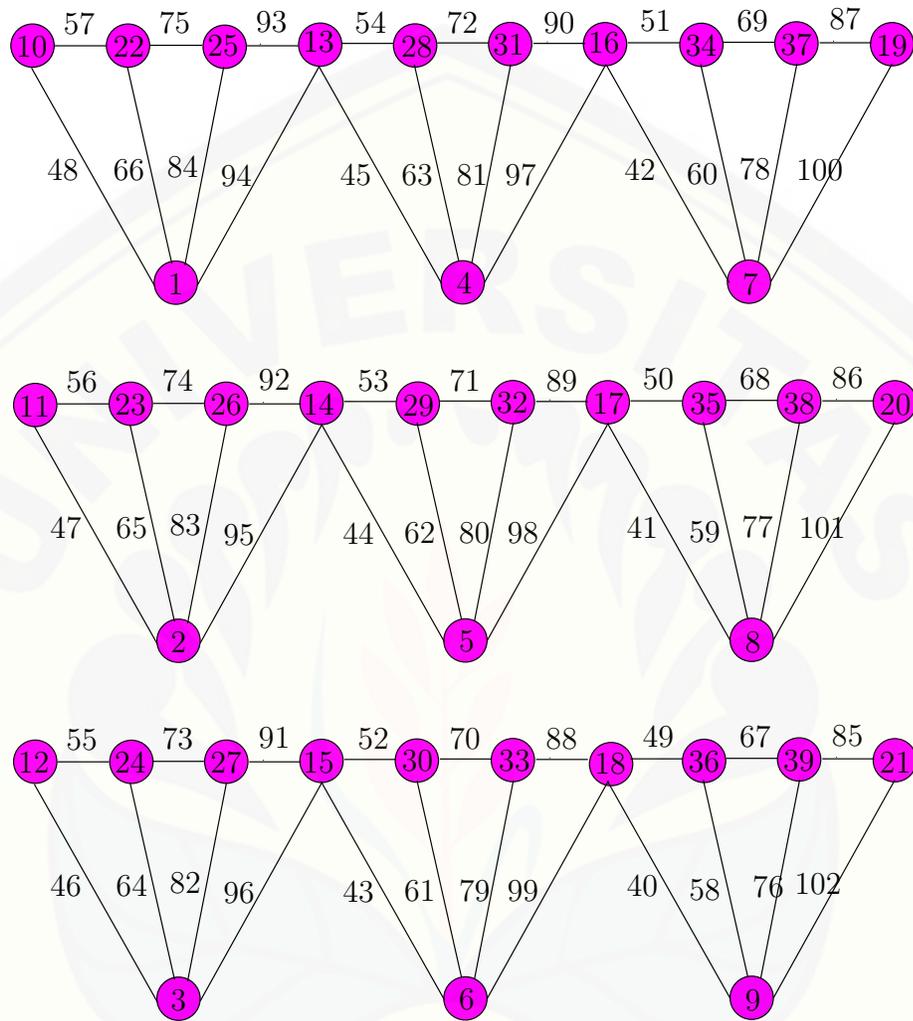
$$\begin{aligned}
 f_1(x_i^k y_{3i-2}^k) &= 5mn + 2m - mi + k + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m \\
 f_1(y_{3i-2}^k y_{3i-1}^k) &= 6mn + 2m - mi + k + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m \\
 f_1(x_i^k y_{3i-1}^k) &= 7mn + 2m - mi + k + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m \\
 f_1(y_{3i-1}^k y_{3i}^k) &= 8mn + 2m - mi + k + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m \\
 f_1(x_i^k y_{3i}^k) &= 9mn + 2m - mi + k + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m \\
 f_1(y_{3i}^k y_{3i+1}^k) &= 10mn + 2m - mi + k + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m \\
 f_1(x_i^k y_{3i+1}^k) &= 10mn + mi + k, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m
 \end{aligned}$$

Misalkan  $W_{f_1}$  didefinisikan sebagai bobot total dekomposisi pada shakel graf kipas berdasarkan penjumlahan bobot selimut dengan label sisinya maka  $w_{f_1}$  dan fungsi label sisi dengan syarat batas  $i$  dan  $k$  yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 W_{f_1} &= \bigcup_{k=1}^m \bigcup_{i=1}^n \{w_1 + \sum_{j=3i-2}^{3i+1} f(x_i^k y_j^k) + \sum_{j=3i-2}^{3i} f(y_j^k y_{j+1}^k)\} \\
 W_{f_1} &= \bigcup_{k=1}^m \bigcup_{i=1}^n \{w_1 + f(x_i^k y_{3i-2}^k) + f(x_i^k y_{3i-1}^k) + f(x_i^k y_{3i}^k) + f(x_i^k y_{3i+1}^k) + \\
 &\quad f(y_{3i-2}^k y_{3i-1}^k) + f(y_{3i-1}^k y_{3i}^k) + f(y_{3i}^k y_{3i+1}^k)\} \\
 W_{f_1} &= \bigcup_{k=1}^m \bigcup_{i=1}^n \{62mn + 10mn + 6\}, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m
 \end{aligned}$$

Dengan demikian maka didapatkan himpunan bobot total dekomposisi  $W_{f_1} = \{62mn + 10mn + 6, 62mn + 10mn + 6, \dots, 62mn + 10mn + 6\}$ . Sehingga terbukti bahwa gabungan saling lepas dari shakel pada graf kipas  $(mSF_4^n)$  memiliki super  $(62mn + 10mn + 6, 0) - F_4$  antimagic total dekomposisi untuk  $n$  ganjil,  $m \geq 3$ .  $\square$

Gambar 4.24 adalah contoh dari Pelabelan Super  $(594, 0) - F_4$ -anti magic total dekomposisi pada  $3SF_4^3$



Gambar 4.24 Super  $(142, 62)$ - $(F_4)$  antimagic total dekomposisi pada  $3SF_4^3$

Pada gambar 4.24 didapatkan pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic total dekomposisi pada shackle graf Kipas gabungan saling lepas untuk  $n=3$  dan  $m=3$ , dengan  $d=0$  maka  $a=594$ . Sehingga diketahui barisan aritmatika  $W_{\alpha_1} = \{594, 594, 594, \dots, 594\}$



◇ **Teorema 4.2.2.** *Ada gabungan saling lepas dari shakel graf kipas ( $mSF_4^n$ ) memiliki super  $(61mn + 10m + 7, 2) - F_4$  antimagic total dekomposisi untuk  $n \geq 3$  dan  $m \geq 3$ .*

**Bukti.** Melabeli setiap titik pada gabungan saling lepas dari shakel graf dengan himpunan bilangan asli seperti pada teorema 4.2.1. Sehingga fungsi titik  $f_2$ =fungsi titik  $f_1$ , dan untuk fungsi  $w_{f_2}$ =fungsi  $w_{f_1}$ . Selanjutnya melabeli sisi dan didapatkan fungsi sisi dari  $f_2$  sebagai berikut

Labeli sisi gabungan saling lepas dari shakel graf kipas ( $mSF_4^n$ ) dengan fungsi bijektif  $f_2$  sebagai berikut:

$$f_2(x_i^k y_{3i-2}^k) = f_1(x_i^k y_{3i-2}^k), \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m$$

$$f_2(y_{3i-2}^k y_{3i-1}^k) = f_1(y_{3i-2}^k y_{3i-1}^k), \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m$$

$$f_2(x_i^k y_{3i-1}^k) = f_1(x_i^k y_{3i-1}^k), \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m$$

$$f_2(y_{3i-1}^k y_{3i}^k) = f_1(y_{3i-1}^k y_{3i}^k), \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m$$

$$f_2(x_i^k y_{3i}^k) = f_1(x_i^k y_{3i}^k), \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m$$

$$f_2(y_{3i}^k y_{3i+1}^k) = 9mn + mi + k, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m$$

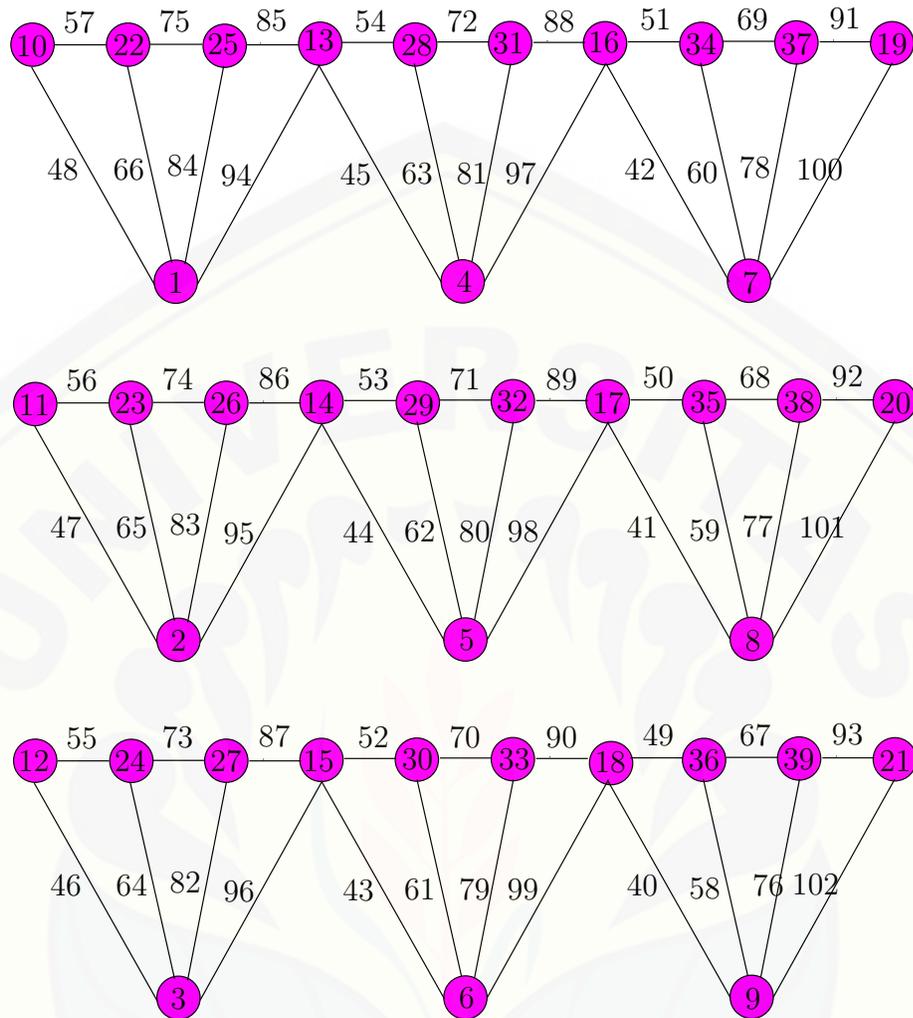
$$f_2(x_i^k y_{3i+1}^k) = f_1(x_i^k y_{3i+1}^k), \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m$$

Misalkan  $W_{f_2}$  didefinisikan sebagai bobot total dekomposisi pada shakel graf kipas berdasarkan penjumlahan bobot selimut dengan label sisinya maka  $w_{f_2}$  dan fungsi label sisi dengan syarat batas  $i$  dan  $k$  yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$W_{f_2} = \bigcup_{k=1}^m \bigcup_{i=1}^n \{61mn + 8m + 2mi + 2k + 5\}, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m$$

Dengan demikian maka didapatkan himpunan bobot total dekomposisi  $W_{f_2} = \{61mn + 10m + 7, 61mn + 12m + 9, \dots, 61mn + 14m + 11\}$ . Sehingga terbukti bahwa gabungan saling lepas amalgamasi pada graf kipas ( $mSF_4^n$ ) memiliki super  $(61mn + 10m + 7, 2) - F_4$  antimagic total dekomposisi untuk  $n$  ganjil,  $m \geq 3$ . □

Gambar 4.25 adalah contoh dari Pelabelan Super  $(586, 2)$ - $F_4$ -anti magic total dekomposisi pada  $3SF_4^3$



Gambar 4.25 Super  $(586, 2)$ - $(F_4)$  antimagic total dekomposisi pada  $3SF_4^3$

Pada gambar 4.25 didapatkan pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic total dekomposisi pada shackle graf Kipas gabungan saling lepas untuk  $n=3$  dan  $m=3$ , dengan  $d=2$  maka  $a=586$ . Sehingga diketahui barisan aritmatika  $W_{\alpha_1} = \{586, 588, 590, \dots, 602\}$

◇ **Teorema 4.2.3.** *Ada gabungan saling lepas dari shakel graf kipas ( $mSF_4^n$ ) memiliki super  $(60mn + 10m + 8, 4) - F_4$  antimagic total dekomposisi untuk  $n \geq 3$  dan  $m \geq 3$ .*

**Bukti.** Melabeli setiap titik pada gabungan saling lepas dari shakel graf dengan himpunan bilangan asli seperti pada teorema 4.2.1. Sehingga fungsi titik  $f_3$ =fungsi titik  $f_1$ , dan untuk fungsi  $w_{f_3}$ =fungsi  $w_{f_1}$ . Selanjutnya melabeli sisi dan didapatkan fungsi sisi dari  $f_3$  sebagai berikut

Labeli sisi gabungan saling lepas dari shakel graf kipas ( $mSF_4^n$ ) dengan fungsi bijektif  $f_3$  sebagai berikut:

$$f_3(x_i^k y_{3i-2}^k) = f_1(x_i^k y_{3i-2}^k), \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m$$

$$f_3(y_{3i-2}^k y_{3i-1}^k) = f_1(y_{3i-2}^k y_{3i-1}^k), \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m$$

$$f_3(x_i^k y_{3i-1}^k) = f_1(x_i^k y_{3i-1}^k), \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m$$

$$f_3(y_{3i-1}^k y_{3i}^k) = f_1(y_{3i-1}^k y_{3i}^k), \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m$$

$$f_3(x_i^k y_{3i}^k) = 8mn + mi + k, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m$$

$$f_3(y_{3i}^k y_{3i+1}^k) = f_2(y_{3i}^k y_{3i+1}^k), \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m$$

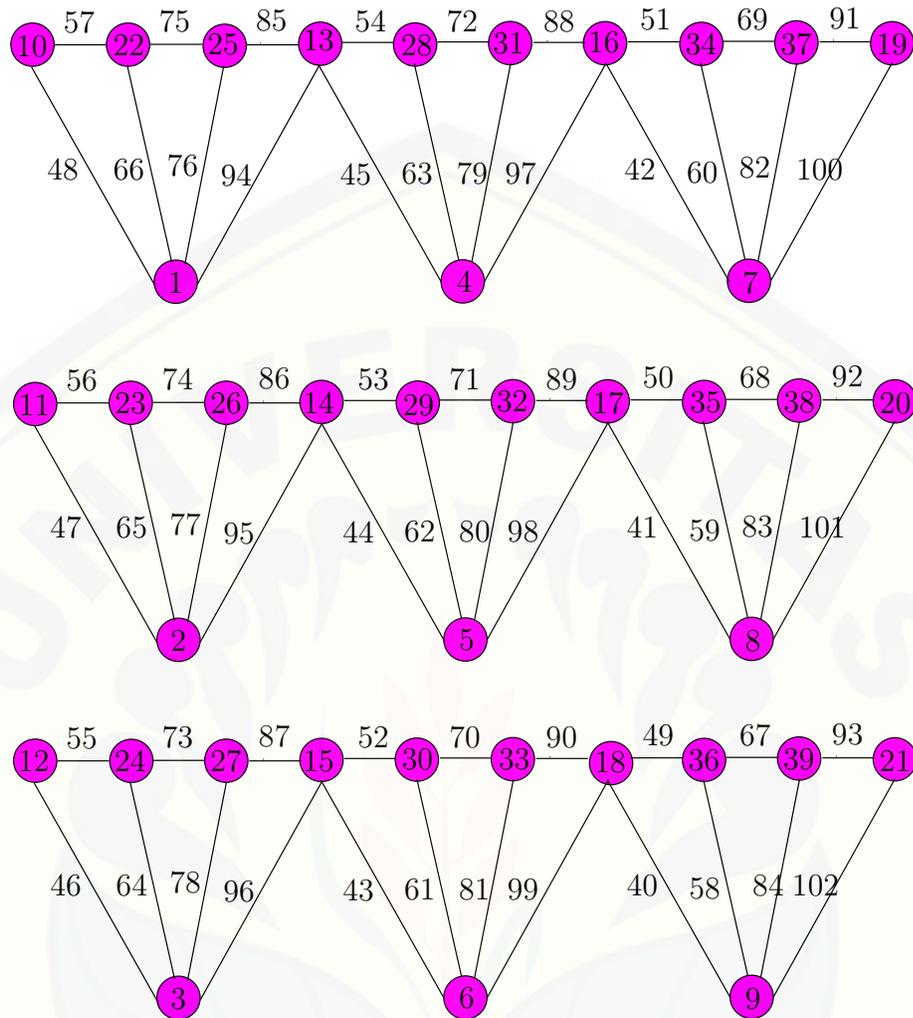
$$f_3(x_i^k y_{3i+1}^k) = f_1(x_i^k y_{3i+1}^k), \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m$$

Misalkan  $W_{f_3}$  didefinisikan sebagai bobot total dekomposisi pada shakel graf kipas berdasarkan penjumlahan bobot selimut dengan label sisinya maka  $w_{f_3}$  dan fungsi label sisi dengan syarat batas  $i$  dan  $k$  yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$W_{f_3} = \bigcup_{k=1}^m \bigcup_{i=1}^n \{59mn + 4m + 6mi + 6k + 3\}, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m$$

Dengan demikian maka didapatkan himpunan bobot total dekomposisi  $W_{f_3} = \{59mn + 10m + 9, 59mn + 16m + 9, \dots, 60mn + 18m + 16\}$ . Sehingga terbukti bahwa gabungan saling lepas amalgamasi pada graf kipas ( $mSF_4^n$ ) memiliki super  $(60mn + 10m + 8, 4) - F_4$  antimagic total dekomposisi untuk  $n$  ganjil,  $m \geq 3$ . □

Gambar 4.26 adalah contoh dari Pelabelan Super  $(578, 4)$ - $F_4$ -anti magic total dekomposisi pada  $3SF_4^3$



Gambar 4.26 Super  $(578, 4)$ - $(F_4)$  antimagic total dekomposisi pada  $3SF_4^3$

Pada gambar 4.26 didapatkan pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic total dekomposisi pada shackle graf Kipas gabungan saling lepas untuk  $n=3$  dan  $m=3$ , dengan  $d=4$  maka  $a=578$ . Sehingga diketahui barisan aritmatika  $W_{a_1} = \{578, 582, 584, \dots, 610\}$

◇ **Teorema 4.2.4.** *Ada gabungan saling lepas dari shakel graf kipas ( $mSF_4^n$ ) memiliki super  $(59mn + 10m + 9, 6) - F_4$  antimagic total dekomposisi untuk  $n \geq 3$  dan  $m \geq 3$ .*

**Bukti.** Melabeli setiap titik pada gabungan saling lepas dari shakel graf dengan himpunan bilangan asli seperti pada teorema 4.2.1. Sehingga fungsi titik  $f_4$ =fungsi titik  $f_1$ , dan untuk fungsi  $w_{f_4}$ =fungsi  $w_{f_1}$ . Selanjutnya melabeli sisi dan didapatkan fungsi sisi dari  $f_4$  sebagai berikut

Labeli sisi gabungan saling lepas dari shakel graf kipas ( $mSF_4^n$ ) dengan fungsi bijektif  $f_4$  sebagai berikut:

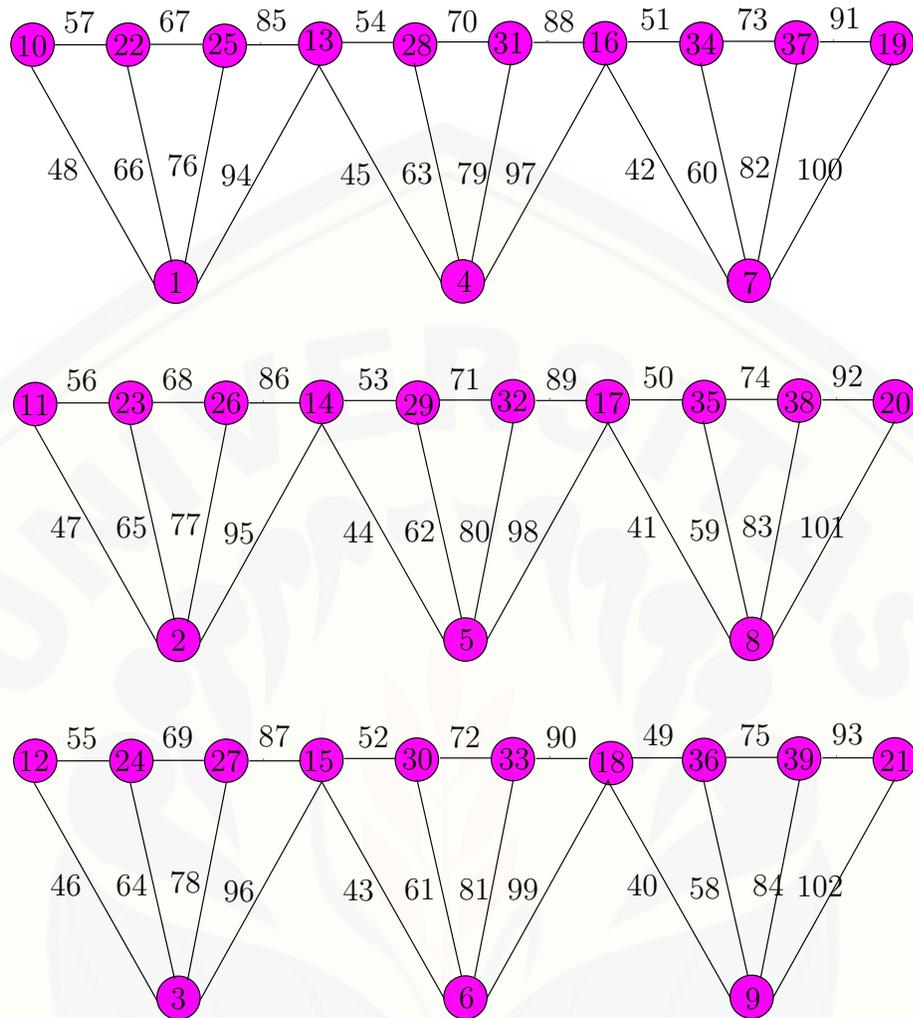
$$\begin{aligned} f_4(x_i^k y_{3i-2}^k) &= f_1(x_i^k y_{3i-2}^k), \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m \\ f_4(y_{3i-2}^k y_{3i-1}^k) &= f_1(y_{3i-2}^k y_{3i-1}^k), \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m \\ f_4(x_i^k y_{3i-1}^k) &= f_1(x_i^k y_{3i-1}^k), \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m \\ f_4(y_{3i-1}^k y_{3i}^k) &= 7mn + mi + k, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m \\ f_4(x_i^k y_{3i}^k) &= f_3(x_i^k y_{3i}^k), \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m \\ f_4(y_{3i}^k y_{3i+1}^k) &= f_2(y_{3i}^k y_{3i+1}^k), \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m \\ f_4(x_i^k y_{3i+1}^k) &= f_1(x_i^k y_{3i+1}^k), \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m \end{aligned}$$

Misalkan  $W_{f_4}$  didefinisikan sebagai bobot total dekomposisi pada shakel graf kipas berdasarkan penjumlahan bobot selimut dengan label sisinya maka  $w_{f_4}$  dan fungsi label sisi dengan syarat batas  $i$  dan  $k$  yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$W_{f_4} = \bigcup_{k=1}^m \bigcup_{i=1}^n \{59mn + 4m + 6mi + 6k + 3\}, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m$$

Dengan demikian maka didapatkan himpunan bobot total dekomposisi  $W_{f_4} = \{59mn + 10m + 9, 59mn + 16m + 15, \dots, 59mn + 22m + 21\}$ . Sehingga terbukti bahwa gabungan saling lepas amalgamasi pada graf kipas ( $mSF_4^n$ ) memiliki super  $(60mn + 10m + 8, 4) - F_4$  antimagic total dekomposisi untuk  $n$  ganjil,  $m \geq 3$ . □

Gambar 4.27 adalah contoh dari Pelabelan Super  $(570, 6)$ - $F_4$ -anti magic total dekomposisi pada  $3SF_4^3$



Gambar 4.27 Super  $(570, 6)$ - $(F_4)$  antimagic total dekomposisi pada  $3SF_4^3$

Pada gambar 4.27 didapatkan pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic total dekomposisi pada shackle graf Kipas gabungan saling lepas untuk  $n=3$  dan  $m=3$ , dengan  $d=6$  maka  $a=570$ . Sehingga diketahui barisan aritmatika  $W_{a_1} = \{570, 576, 582, \dots, 618\}$

◇ **Teorema 4.2.5.** *Ada gabungan saling lepas dari shakel graf kipas ( $mSF_4^n$ ) memiliki super  $(58mn + 10m + 10, 8) - F_4$  antimagic total dekomposisi untuk  $n \geq 3$  dan  $m \geq 3$ .*

**Bukti.** Melabeli setiap titik pada gabungan saling lepas dari shakel graf dengan himpunan bilangan asli seperti pada teorema 4.2.1. Sehingga fungsi titik  $f_5$ =fungsi titik  $f_1$ , dan untuk fungsi  $w_{f_5}$ =fungsi  $w_{f_1}$ . Selanjutnya melabeli sisi dan didapatkan fungsi sisi dari  $f_5$  sebagai berikut

Labeli sisi gabungan saling lepas dari shakel graf kipas ( $mSF_4^n$ ) dengan fungsi bijektif  $f_5$  sebagai berikut:

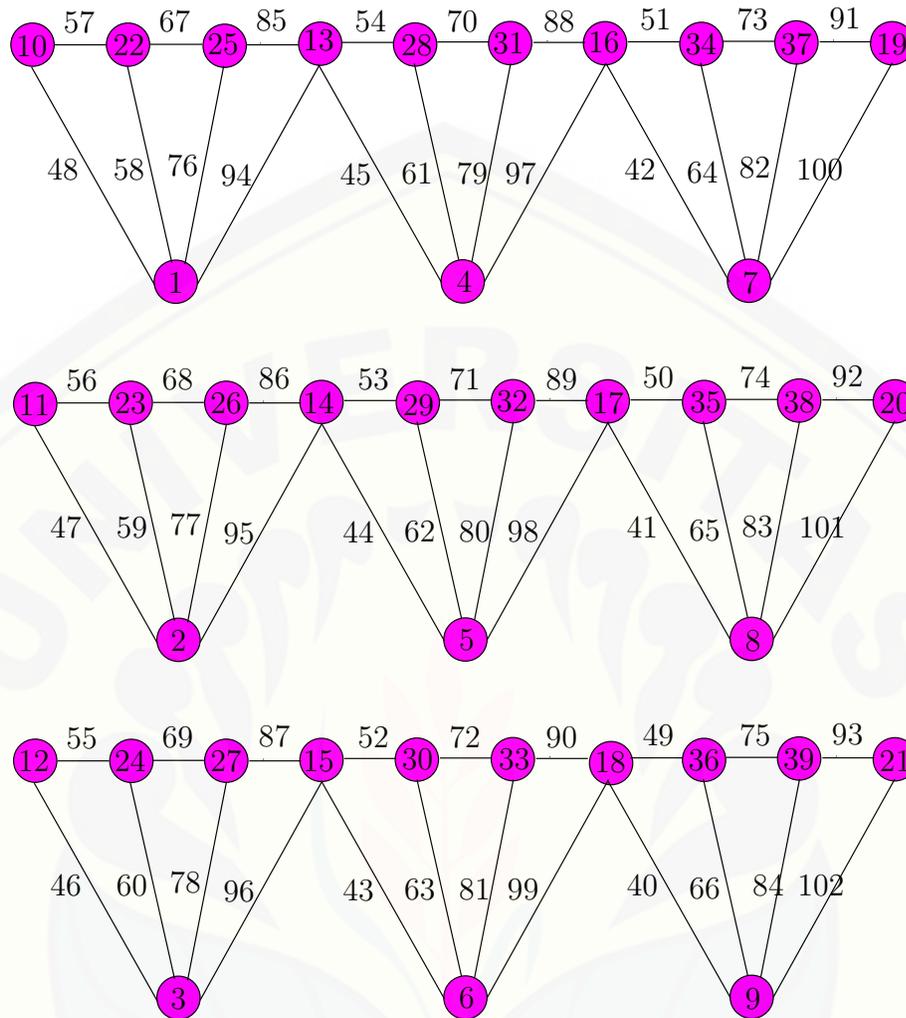
$$\begin{aligned} f_5(x_i^k y_{3i-2}^k) &= f_1(x_i^k y_{3i-2}^k), \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m \\ f_5(y_{3i-2}^k y_{3i-1}^k) &= f_1(y_{3i-2}^k y_{3i-1}^k), \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m \\ f_5(x_i^k y_{3i-1}^k) &= 6mn + mi + k, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m \\ f_5(y_{3i-1}^k y_{3i}^k) &= f_4(y_{3i-1}^k y_{3i}^k), \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m \\ f_5(x_i^k y_{3i}^k) &= f_3(x_i^k y_{3i}^k), \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m \\ f_5(y_{3i}^k y_{3i+1}^k) &= f_2(y_{3i}^k y_{3i+1}^k), \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m \\ f_5(x_i^k y_{3i+1}^k) &= f_1(x_i^k y_{3i+1}^k), \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m \end{aligned}$$

Misalkan  $W_{f_5}$  didefinisikan sebagai bobot total dekomposisi pada shakel graf kipas berdasarkan penjumlahan bobot selimut dengan label sisinya maka  $w_{f_5}$  dan fungsi label sisi dengan syarat batas  $i$  dan  $k$  yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$W_{f_5} = \bigcup_{k=1}^m \bigcup_{i=1}^n \{58mn + 2m + 8mi + 8k + 2\}, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m$$

Dengan demikian maka didapatkan himpunan bobot total dekomposisi  $W_{f_5} = \{58mn + 10m + 10, 58mn + 18m + 18, \dots, 58mn + 26m + 26\}$ . Sehingga terbukti bahwa gabungan saling lepas amalgamasi pada graf kipas ( $mSF_4^n$ ) memiliki super  $(58mn + 10m + 10, 8) - F_4$  antimagic total dekomposisi untuk  $n$  ganjil,  $m \geq 3$ . □

Gambar 4.28 adalah contoh dari Pelabelan Super  $(562, 8)$ - $F_4$ -anti magic total dekomposisi pada  $3SF_4^3$



Gambar 4.28 Super  $(570, 6)$ - $(F_4)$  antimagic total dekomposisi pada  $3SF_4^3$

Pada gambar 4.28 didapatkan pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic total dekomposisi pada shackle graf Kipas gabungan saling lepas untuk  $n=3$  dan  $m=3$ , dengan  $d=8$  maka  $a=562$ . Sehingga diketahui barisan aritmatika  $W_{\alpha_1} = \{562, 572, 578, \dots, 628\}$

◇ **Teorema 4.2.6.** *Ada gabungan saling lepas dari shakel graf kipas ( $mSF_4^n$ ) memiliki super  $(57mn + 10m + 11, 10) - F_4$  antimagic total dekomposisi untuk  $n \geq 3$  dan  $m \geq 3$ .*

**Bukti.** Melabeli setiap titik pada gabungan saling lepas dari shakel graf dengan himpunan bilangan asli seperti pada teorema 4.2.1. Sehingga fungsi titik  $f_6$ =fungsi titik  $f_1$ , dan untuk fungsi  $w_{f_6}$ =fungsi  $w_{f_1}$ . Selanjutnya melabeli sisi dan didapatkan fungsi sisi dari  $f_6$  sebagai berikut

Labeli sisi gabungan saling lepas dari shakel graf kipas ( $mSF_4^n$ ) dengan fungsi bijektif  $f_6$  sebagai berikut:

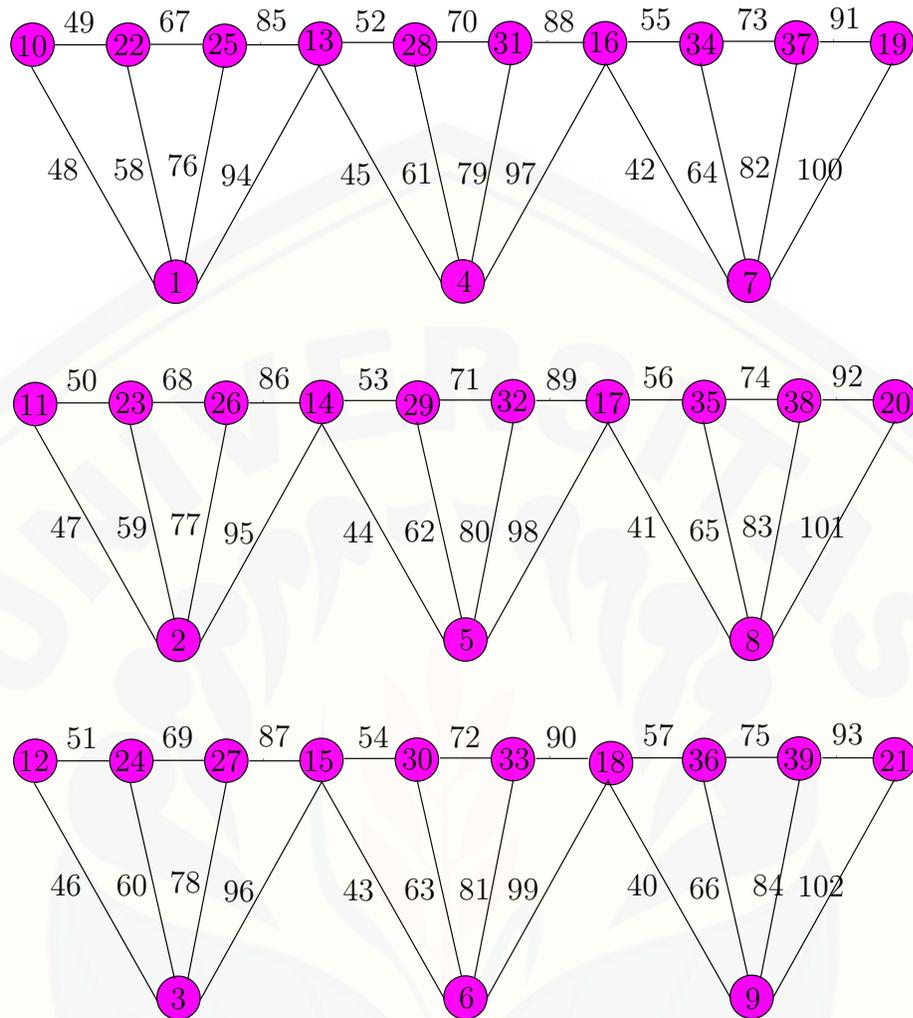
$$\begin{aligned} f_6(x_i^k y_{3i-2}^k) &= f_1(x_i^k y_{3i-2}^k), \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m \\ f_6(y_{3i-2}^k y_{3i-1}^k) &= 5mn + mi + k, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m \\ f_6(x_i^k y_{3i-1}^k) &= f_5(x_i^k y_{3i-1}^k), \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m \\ f_6(y_{3i-1}^k y_{3i}^k) &= f_4(y_{3i-1}^k y_{3i}^k), \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m \\ f_6(x_i^k y_{3i}^k) &= f_3(x_i^k y_{3i}^k), \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m \\ f_6(y_{3i}^k y_{3i+1}^k) &= f_2(y_{3i}^k y_{3i+1}^k), \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m \\ f_6(x_i^k y_{3i+1}^k) &= f_1(x_i^k y_{3i+1}^k), \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m \end{aligned}$$

Misalkan  $W_{f_6}$  didefinisikan sebagai bobot total dekomposisi pada shakel graf kipas berdasarkan penjumlahan bobot selimut dengan label sisinya maka  $w_{f_6}$  dan fungsi label sisi dengan syarat batas  $i$  dan  $k$  yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$W_{f_6} = \bigcup_{k=1}^m \bigcup_{i=1}^n \{57mn + 10mi + 10k + 1\}, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m$$

Dengan demikian maka didapatkan himpunan bobot total dekomposisi  $W_{f_6} = \{57mn + 10m + 11, 57mn + 20m + 21, \dots, 57mn + 30m + 31\}$ . Sehingga terbukti bahwa gabungan saling lepas amalgamasi pada graf kipas ( $mSF_4^n$ ) memiliki super  $(57mn + 10m + 11, 10) - F_4$  antimagic total dekomposisi untuk  $n$  ganjil,  $m \geq 3$ . □

Gambar 4.29 adalah contoh dari Pelabelan Super  $(554, 10)$ - $F_4$ -anti magic total dekomposisi pada  $3SF_4^3$



Gambar 4.29 Super  $(554, 10)$ - $(F_4)$  antimagic total dekomposisi pada  $3SF_4^3$

Pada gambar 4.29 didapatkan pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic total dekomposisi pada shackle graf Kipas gabungan saling lepas untuk  $n=3$  dan  $m=3$ , dengan  $d=10$  maka  $a=554$ . Sehingga diketahui barisan aritmatika  $W_{a_1} = \{554, 564, 574, \dots, 634\}$

◇ **Teorema 4.2.7.** *Ada gabungan saling lepas dari shakel graf kipas ( $mSF_4^n$ ) memiliki super  $(56mn + 10m + 12, 12) - F_4$  antimagic total dekomposisi untuk  $n \geq 3$  dan  $m \geq 3$ .*

**Bukti.** Melabeli setiap titik pada gabungan saling lepas dari shakel graf dengan himpunan bilangan asli seperti pada teorema 4.2.1. Sehingga fungsi titik  $f_7$ =fungsi titik  $f_1$ , dan untuk fungsi  $w_{f_7}$ =fungsi  $w_{f_1}$ . Selanjutnya melabeli sisi dan didapatkan fungsi sisi dari  $f_7$  sebagai berikut

Labeli sisi gabungan saling lepas dari shakel graf kipas ( $mSF_4^n$ ) dengan fungsi bijektif  $f_7$  sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f_7(x_i^k y_{3i-2}^k) &= 4mn - 6m + 7mi + 7k - 3, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m \\ f_7(y_{3i-2}^k y_{3i-1}^k) &= f_6(y_{3i-2}^k y_{3i-1}^k), \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m \\ f_7(x_i^k y_{3i-1}^k) &= f_5(x_i^k y_{3i-1}^k), \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m \\ f_7(y_{3i-1}^k y_{3i}^k) &= f_4(y_{3i-1}^k y_{3i}^k), \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m \\ f_7(x_i^k y_{3i}^k) &= f_3(x_i^k y_{3i}^k), \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m \\ f_7(y_{3i}^k y_{3i+1}^k) &= f_2(y_{3i}^k y_{3i+1}^k), \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m \\ f_7(x_i^k y_{3i+1}^k) &= f_1(x_i^k y_{3i+1}^k), \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m \end{aligned}$$

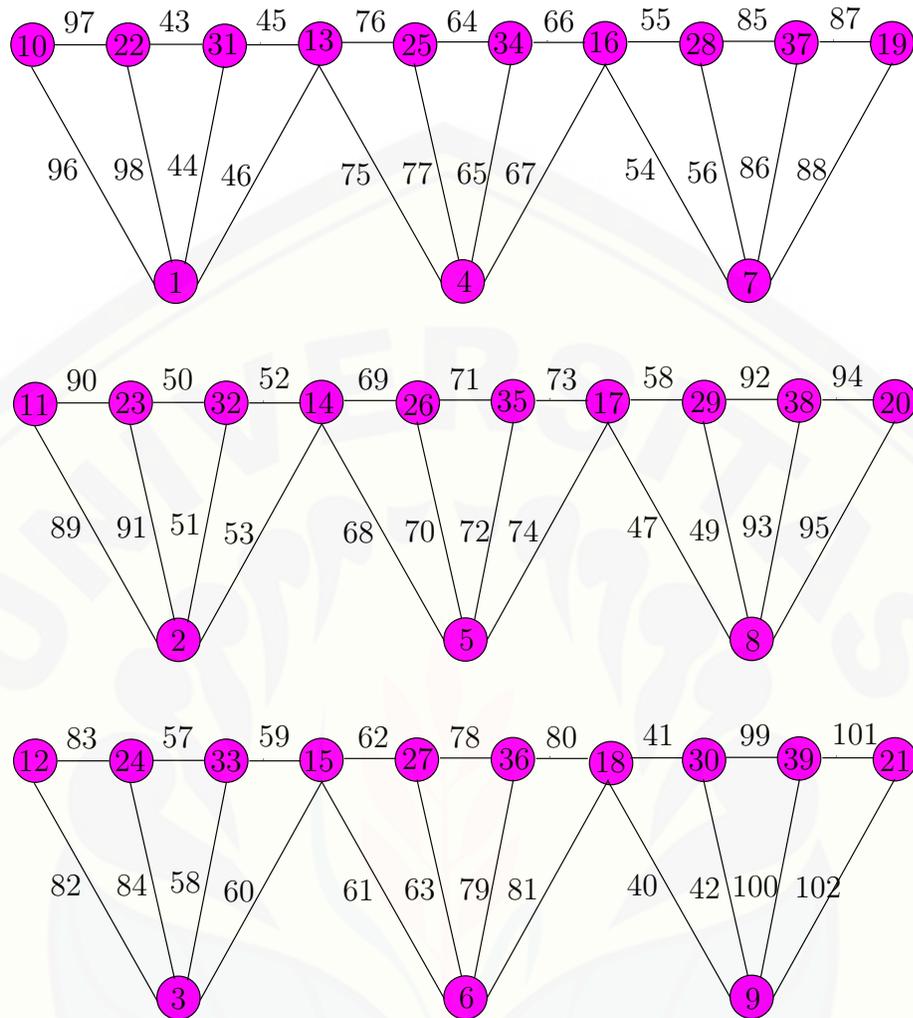
Misalkan  $W_{f_7}$  didefinisikan sebagai bobot total dekomposisi pada shakel graf kipas berdasarkan penjumlahan bobot selimut dengan label sisinya maka  $w_{f_7}$  dan fungsi label sisi dengan syarat batas  $i$  dan  $k$  yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$W_{f_7} = \bigcup_{k=1}^m \bigcup_{i=1}^n \{56mn - 2m + 12mi + 12k\}, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m$$

Dengan demikian maka didapatkan himpunan bobot total dekomposisi  $W_{f_7} = \{56mn + 10m + 12, 56mn + 22m + 24, \dots, 56mn + 34m + 36\}$ . Sehingga terbukti bahwa gabungan saling lepas amalgamasi pada graf kipas ( $mSF_4^n$ ) memiliki super  $(56mn + 10m + 12, 12) - F_4$  antimagic total dekomposisi untuk  $n$  ganjil,  $m \geq 3$ .

□

Gambar 4.30 adalah contoh dari Pelabelan Super  $(548, 12)$ - $F_4$ -anti magic total dekomposisi pada  $3SF_4^3$



Gambar 4.30 Super  $(548, 12)$ - $(F_4)$  antimagic total dekomposisi pada  $3SF_4^3$

Pada gambar 4.30 didapatkan pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic total dekomposisi pada shackle graf Kipas gabungan saling lepas untuk  $n=3$  dan  $m=3$ , dengan  $d=12$  maka  $a=548$ . Sehingga diketahui barisan aritmatika  $W_{\alpha_1} = \{546, 558, 570, \dots, 642\}$

◇ **Teorema 4.2.8.** *Ada gabungan saling lepas dari shakel graf kipas ( $mSF_4^n$ ) memiliki super  $(49mn + 10m + 19, 26) - F_4$  antimagic total dekomposisi untuk  $n \geq 3$  dan  $m \geq 3$ .*

**Bukti.** Melabeli setiap titik pada gabungan saling lepas dari shakel graf dengan himpunan bilangan asli seperti pada teorema 4.2.1. Sehingga fungsi titik  $f_8$ =fungsi titik  $f_1$ , dan untuk fungsi  $w_{f_8}$ =fungsi  $w_{f_1}$ . Selanjutnya melabeli sisi dan didapatkan fungsi sisi dari  $f_8$  sebagai berikut

Labeli sisi gabungan saling lepas dari shakel graf kipas ( $mSF_4^n$ ) dengan fungsi bijektif  $f_8$  sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f_8(x_i^k y_{3i-1}^k) &= 4mn - 6m + 7mi + 7k - 4, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m \\ f_8(y_{3i-1}^k y_{3i}^k) &= 4mn - 6m + 7mi + 7k - 3, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m \\ f_8(x_i^k y_{3i}^k) &= 4mn - 6m + 7mi + 7k - 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m \\ f_8(y_{3i}^k y_{3i+1}^k) &= 4mn - 6m + 7mi + 7k - 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m \\ f_8(x_i^k y_{3i+1}^k) &= 4mn - 6m + 7mi + 7k, \text{ untuk } 1 \leq i, 1 \leq k \leq m \\ f_8(x_i^k y_{3i-2}^k) &= 11mn + 8m - 7mi - 7k + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m \\ f_8(y_{3i-2}^k y_{3i-1}^k) &= 11mn + 8m - 7mi - 7k + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m \end{aligned}$$

Misalkan  $W_{f_8}$  didefinisikan sebagai bobot total dekomposisi pada shakel graf kipas berdasarkan penjumlahan bobot selimut dengan label sisinya maka  $w_{f_8}$  dan fungsi label sisi dengan syarat batas  $i$  dan  $k$  yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

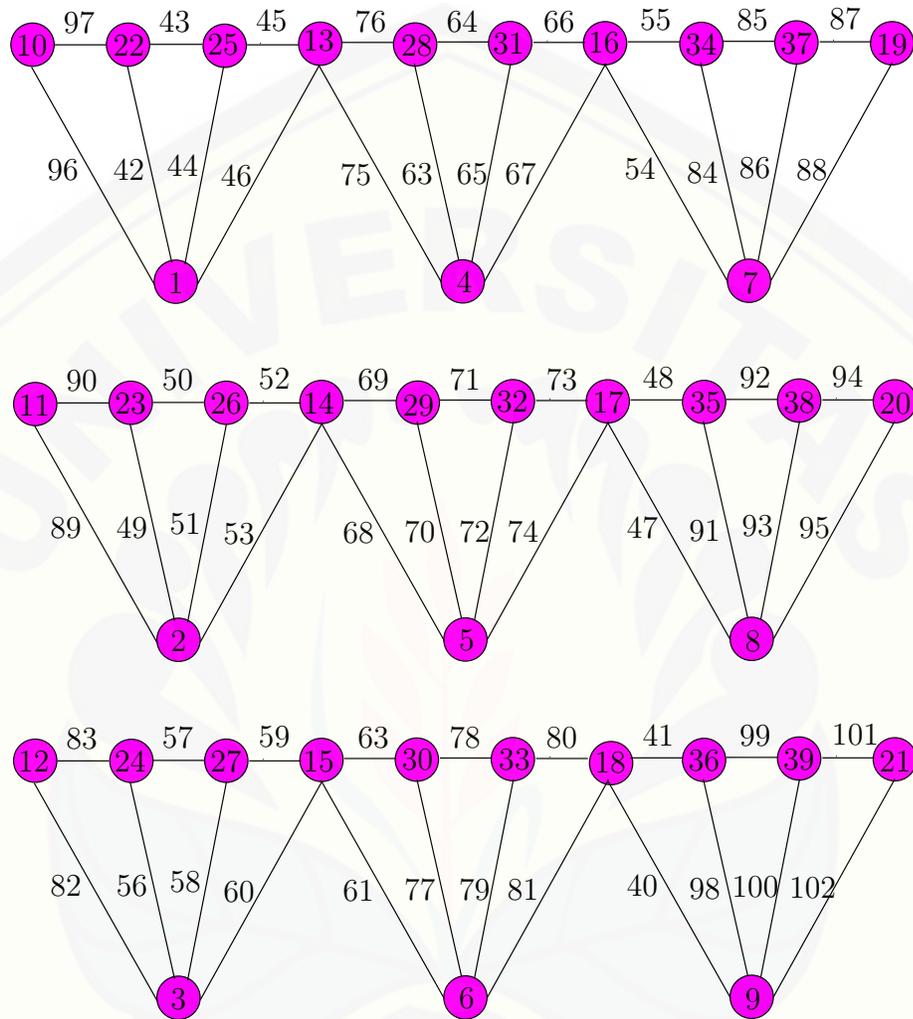
$$W_{f_8} = \bigcup_{k=1}^m \bigcup_{i=1}^n \{49mn - 16m + 26mi + 26k - 7\}, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m$$

Dengan demikian maka didapatkan himpunan bobot total dekomposisi  $W_{f_8} = \{49mn + 10m + 19, 49mn + 36m + 45, \dots, 49mn + 62m + 71\}$ . Sehingga terbukti bahwa gabungan saling lepas amalgamasi pada graf kipas ( $mSF_4^n$ ) memiliki super

$(49mn + 10m + 19, 26) - F_4$  antimagic total dekomposisi untuk  $n$  ganjil,  $m \geq 3$ .

□

Gambar 4.31 adalah contoh dari Pelabelan Super  $(490, 26) - F_4$ -anti magic total dekomposisi pada  $3SF_4^3$



Gambar 4.31 Super  $(490, 26) - (F_4)$  antimagic total dekomposisi pada  $3SF_4^3$

Pada gambar 4.31 didapatkan pelabelan super  $(a, d) - \mathcal{H}$ -antimagic total dekomposisi pada shackle graf Kipas gabungan saling lepas untuk  $n=3$  dan  $m=3$ , dengan  $d=26$  maka  $a=540$ . Sehingga diketahui barisan aritmatika  $W_{\alpha_1} = \{490, 516, 542, \dots, 689\}$

◇ **Teorema 4.2.9.** *Ada gabungan saling lepas dari shakel graf kipas ( $mSF_4^n$ ) memiliki super  $(42mn + 10m + 26, 40) - F_4$  antimagic total dekomposisi untuk  $n \geq 3$  dan  $m \geq 3$ .*

**Bukti.** Melabeli setiap titik pada gabungan saling lepas dari shakel graf dengan himpunan bilangan asli seperti pada teorema 4.2.1. Sehingga fungsi titik  $f_9$ =fungsi titik  $f_1$ , dan untuk fungsi  $w_{f_9}$ =fungsi  $w_{f_1}$ . Selanjutnya melabeli sisi dan didapatkan fungsi sisi dari  $f_9$  sebagai berikut

Labeli sisi gabungan saling lepas dari shakel graf kipas ( $mSF_4^n$ ) dengan fungsi bijektif  $f_9$  sebagai berikut:

$$f_9(y_{3i-2}^k y_{3i-1}^k) = 4mn - 6m + 7mi + 7k - 5, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m$$

$$f_9(x_i^k y_{3i-1}^k) = 4mn - 6m + 7mi + 7k - 4, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m$$

$$f_9(y_{3i-1}^k y_{3i}^k) = 4mn - 6m + 7mi + 7k - 3, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m$$

$$f_9(x_i^k y_{3i}^k) = 4mn - 6m + 7mi + 7k - 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m$$

$$f_9(y_{3i}^k y_{3i+1}^k) = 4mn - 6m + 7mi + 7k - 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m$$

$$f_9(x_i^k y_{3i+1}^k) = 4mn - 6m + 7mi + 7k, \text{ untuk } 1 \leq i, 1 \leq k \leq m$$

$$f_9(y_{3i-2}^k y_{3i-1}^k) = 11mn + 8m - 7mi - 7k + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m$$

Misalkan  $W_{f_9}$  didefinisikan sebagai bobot total dekomposisi pada shakel graf kipas berdasarkan penjumlahan bobot selimut dengan label sisinya maka  $w_{f_9}$  dan fungsi label sisi dengan syarat batas  $i$  dan  $k$  yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

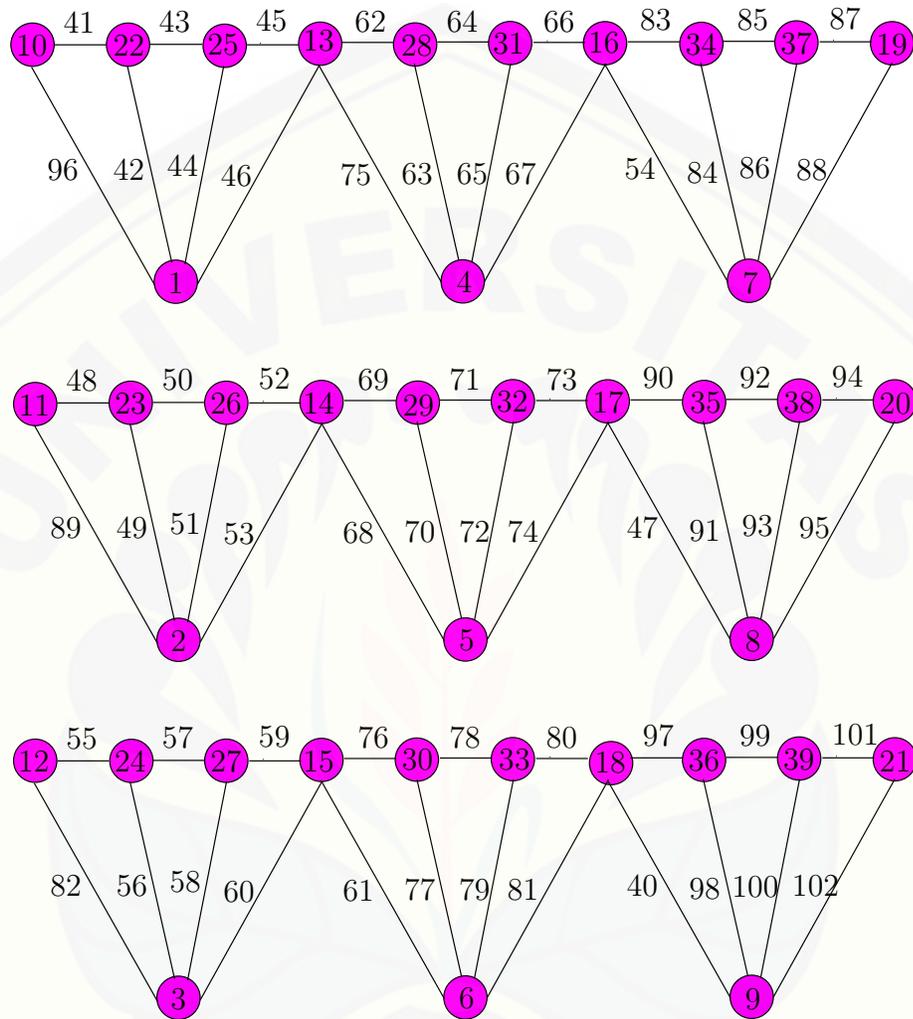
$$W_{f_9} = \bigcup_{k=1}^m \bigcup_{i=1}^n \{42mn - 30m + 40mi + 40k - 14\}, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m$$

Dengan demikian maka didapatkan himpunan bobot total dekomposisi  $W_{f_9} = \{42mn + 10m + 26, 42mn + 50m + 66, \dots, 42mn + 90m + 106\}$ . Sehingga terbukti bahwa gabungan saling lepas amalgamasi pada graf kipas ( $mSF_4^n$ ) memiliki super

$(42mn + 50m + 66, 40) - F_4$  antimagic total dekomposisi untuk  $n$  ganjil,  $m \geq 3$ .

□

Gambar 4.32 adalah contoh dari Pelabelan Super  $(434, 40)-F_4$ -anti magic total dekomposisi pada  $3SF_4^3$



Gambar 4.32 Super  $(434, 40)-(F_4)$  antimagic total dekomposisi pada  $3SF_4^3$

Pada gambar 4.32 didapatkan pelabelan super  $(a, d)-\mathcal{H}$ -antimagic total dekomposisi pada shackle graf Kipas gabungan saling lepas untuk  $n=3$  dan  $m=3$ , dengan  $d=40$  maka  $a=434$ . Sehingga diketahui barisan aritmatika  $W_{\alpha_1} = \{434, 474, 514, \dots, 754\}$

◇ **Teorema 4.2.10.** *Ada gabungan saling lepas dari shakel graf kipas ( $mSF_4^n$ ) memiliki super  $(35mn + 10m + 33, 54) - F_4$  antimagic total dekomposisi untuk  $n \geq 3$  dan  $m \geq 3$ .*

**Bukti.** Melabeli setiap titik pada gabungan saling lepas dari shakel graf dengan himpunan bilangan asli seperti pada teorema 4.2.1. Sehingga fungsi titik  $f_{10}$ =fungsi titik  $f_1$ , dan untuk fungsi  $w_{f_{10}}$ =fungsi  $w_{f_1}$ . Selanjutnya melabeli sisi dan didapatkan fungsi sisi dari  $f_{10}$  sebagai berikut

Labeli sisi gabungan saling lepas dari shakel graf kipas ( $mSF_4^n$ ) dengan fungsi bijektif  $f_{10}$  sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f_{10}(x_i^k y_{3i-2}^k) &= 4mn - 6m + 7mi + 7k - 6, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m \\ f_{10}(y_{3i-2}^k y_{3i-1}^k) &= 4mn - 6m + 7mi + 7k - 5, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m \\ f_{10}(x_i^k y_{3i-1}^k) &= 4mn - 6m + 7mi + 7k - 4, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m \\ f_{10}(y_{3i-1}^k y_{3i}^k) &= 4mn - 6m + 7mi + 7k - 3, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m \\ f_{10}(x_i^k y_{3i}^k) &= 4mn - 6m + 7mi + 7k - 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m \\ f_{10}(y_{3i}^k y_{3i+1}^k) &= 4mn - 6m + 7mi + 7k - 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m \\ f_{10}(x_i^k y_{3i+1}^k) &= 4mn - 6m + 7mi + 7k, \text{ untuk } 1 \leq i, 1 \leq k \leq m \end{aligned}$$

Misalkan  $W_{f_{10}}$  didefinisikan sebagai bobot total dekomposisi pada shakel graf kipas berdasarkan penjumlahan bobot selimut dengan label sisinya maka  $w_{f_{10}}$  dan fungsi label sisi dengan syarat batas  $i$  dan  $k$  yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

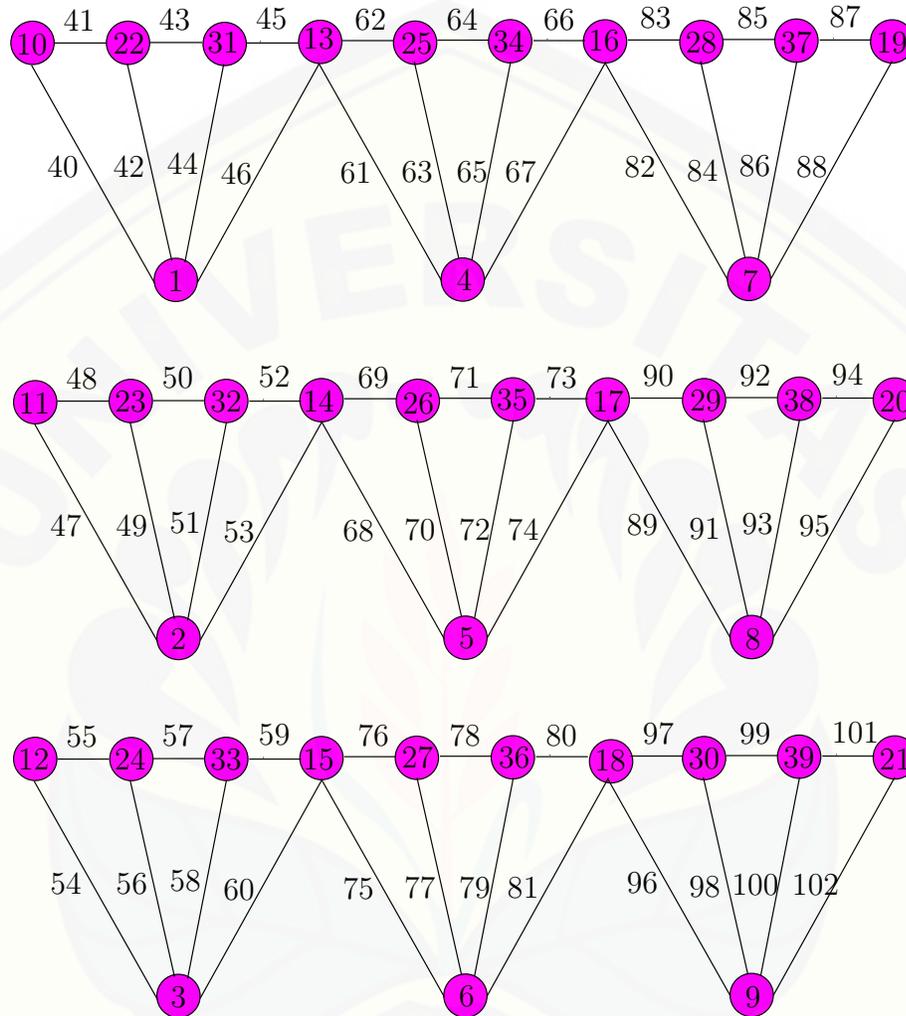
$$W_{f_{10}} = \bigcup_{k=1}^m \bigcup_{i=1}^n \{35mn - 44m + 54mi + 54k - 21\}, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m$$

Dengan demikian maka didapatkan himpunan bobot total dekomposisi  $W_{f_{10}} = \{35mn + 10m + 33, 35mn + 64m + 87, \dots, 35mn + 118m + 141\}$ . Sehingga terbukti bahwa gabungan saling lepas amalgamasi pada graf kipas ( $mSF_4^n$ ) memiliki super

$(35mn + 10m + 33, 54) - F_4$  antimagic total dekomposisi untuk  $n$  ganjil,  $m \geq 3$ .

□

Gambar 4.33 adalah contoh dari Pelabelan Super  $(378, 54) - F_4$ -anti magic total dekomposisi pada  $3SF_4^3$



Gambar 4.33 Super  $(378, 54) - (F_4)$  antimagic total dekomposisi pada  $3SF_4^3$

Pada gambar 4.33 didapatkan pelabelan super  $(a, d) - \mathcal{H}$ -antimagic total dekomposisi pada shackle graf Kipas gabungan saling lepas untuk  $n=3$  dan  $m=3$ , dengan  $d=54$  maka  $a=378$ . Sehingga diketahui barisan aritmatika  $W_{\alpha_1} = \{378, 432, 586, \dots, 810\}$

### 4.3 Generalisasi pada Pelabelan Super $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ Antimagic Total Dekomposisi pada Shaket Graf Kipas $SF_s^n$

◇ **Teorema 4.3.1.** *Ada pelabelan super  $(2n^2t + \frac{5}{2}n^2 + \frac{3}{2}n, 5n^2 - 5n + 2) - F_t^n$  antimagic total dekomposisi pada shaket dari graf kipas  $(SF_t^n)$ .*

**Bukti.** Melabeli titik dari shaket graf kipas  $(SF_t^n)$  dengan fungsi bijektif  $\beta_1$  sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\beta_1(x_i^k) &= i, \text{ untuk } 1 \leq i \leq t \\ \beta_1(y_j^k) &= t + j, \text{ untuk } 1 \leq j \leq (n-1)t + 1\end{aligned}$$

fungsi  $\beta_1$  adalah fungsi bijektif yang memetakan  $V$  ke himpunan bilangan asli. Didefinisikan  $w_{\beta_1}$  adalah bobot selimut dari pelabelan total selimut pada shaket graf kipas. Bobot selimut didapatkan dari penjumlahan 2 fungsi titik yang telah didapatkan diatas. Sehingga fungsi bijektif  $w_{\beta_1}$  di dapatkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}w_{\beta_1} &= \bigcup_{i=1}^t [\beta_1(x_i) + \sum_{j=(n-1)i-n+2}^{(n-1)i+1} \beta_1(y_j)] \\ &= \bigcup_{i=1}^t [i + \sum_{j=(n-1)i-n+2}^{(n-1)i+1} (t + j)]\end{aligned}$$

Ketika kita memasukkan nilai  $i$  dari 1 sampai  $n$  pada fungsi  $w_{\beta_1}$  akan didapat himpunan barisan aritmatika. Selanjutnya menentukan label sisi yang akan digunakan dalam mencari generalisasi dari Super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic total dekomposisi pada shackle graf Kipas. Melabeli setiap sisi pada shaket graf kipas dengan himpunan bilangan asli. Didapatkan fungsi sisi dari  $\beta_1$  adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned}\beta_1(x_i y_j) &= (nt + 1) + i + (j - 1)2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq t, (n - 1)i - n + 2 \leq j \leq (n - 1)i + 1 \\ \beta_1(y_j y_{j+1}) &= (nt + 2) + i + (j - 1)2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq t, (n - 1)i - n + 2 \leq j \leq (n - 1)i\end{aligned}$$

$W_{\beta_1}$  mendefinisikan bobot total selimut pada shackle graf kipas, didapatkan dari penjumlahan bobot selimut  $w_{\beta_1}$  dengan fungsi label sisinya, dapat dirumuskan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}W_{\beta_1} &= \bigcup_{i=1}^t [w_{\beta_1} + \sum_{j=\gamma}^{\delta-1} \beta_1(x_i y_j) + \sum_{j=\gamma}^{\delta-1} \beta_1(y_j y_{j+1})] \\ W_{\beta_1} &= \bigcup_{i=1}^t [i + \sum_{j=\gamma}^{\delta} ((t + j) + nt + 1 + i + 2j - 2) + \sum_{j=\gamma}^{\delta-1} (nt + 2 + i + 2j - 2)] \\ W_{\beta_1} &= \bigcup_{i=1}^t [2n^2 t + (5i - \frac{5}{2})n^2 + (\frac{13}{2} - 5i)n + 2(i - 1)] \\ &\text{dengan } \gamma = (n - 1)i - n + 2 \text{ dan } \delta = (n - 1)i + 1\end{aligned}$$

Didapatkan himpunan bobot total selimut  $W_{\beta_1} = \{2n^2 t + \frac{5}{2}n^2 + \frac{3}{2}n, 2n^2 t + \frac{15}{2}n^2 - \frac{7}{2}n + 2, \dots, 2n^2 t + 5n^3 - \frac{15}{2}n^2 + \frac{17}{2}n - 2\}$ . Himpunan bobot total tersebut membentuk barisan aritmatika dengan  $d = 5n^2 - 5n + 2$ . Sehingga terbukti bahwa shackle dari graf kipas memiliki generalisasi pelabelan super  $(2n^2 t + \frac{5}{2}n^2 + \frac{3}{2}n, 5n^2 - 5n + 2)$ - $SF_t^n$  antimagic total dekomposisi.  $\square$

#### 4.4 Hasil dan Pembahasan

Penelitian ini menggunakan metode untuk menentukan kardinalitas, menentukan batas atas nilai  $d$ , menentukan fungsi titik, fungsi bobot dekomposisi, fungsi sisi, dan fungsi bobot total dekomposisi pada graf shakel dari graf kipas tunggal  $SF_4^n$  maupun gabungan saling lepasnya  $mSF_4^n$ . Berdasarkan hasil penelitian ini diperoleh nilai  $d$  yang mungkin pada super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$  antimagic total dekomposisi pada shakel dari graf kipas tunggal  $SF_4^n$  adalah  $d \in \{0, 1, 2, \dots, 68, 69\}$  sedangkan

untuk gabungan saling lepas  $mSF_4^n$  adalah  $d \in \{0, 1, 2, \dots, 68, 69, 70\}$ .

Nilai  $d$  dicari dengan mengkombinasikan label titik dan label sisi. Penggunaan label titik dan label sisi yang sama untuk semua nilai  $d$  akan memberikan suatu hasil yaitu, jika diketahui nilai batas atas  $d$  yang berbeda maka nilai awal  $a$  juga akan berbeda. Label titik yang digunakan dari 1 sampai  $p_G$  sedangkan label untuk sisi yang digunakan dari  $p_G + 1$  hingga  $p_G + q_G$  dimana  $p_G$  merupakan jumlah titik pada graf dan  $q_G$  merupakan jumlah sisi, sehingga  $p_G + q_G$  merupakan jumlah titik dan sisi pada graf.

Hasil dari mengkombinasikan label titik dan sisi didapatkan 22 (dua puluh dua) teorema pada shakel dari graf kipas konektif dan 10 (sepuluh) teorema pada gabungan saling lepas shakel dari graf kipas. Pada penelitian ini ditemukan sebanyak 4 permutasi label titik. Permutasi titik pertama menghasilkan 4.1.1, 4.1.2, 4.1.3, 4.1.4, 4.1.5, 4.1.6, 4.1.7, 4.1.8, 4.1.14, 4.1.18 dan 4.1.21. Permutasi titik kedua menghasilkan 4.1.9, 4.1.10, 4.1.11, 4.1.15, 4.1.19, dan 4.1.22. Permutasi titik ketiga menghasilkan 4.1.12 dan 4.1.16. Dan untuk permutasi titik keempat menghasilkan 4.1.13, 4.1.17, dan 4.1.20. Untuk graf gabungan saling lepas hanya menggunakan 1 permutasi titik untuk mendapatkan 10 teorema.

Menurut hasil penelitian yang telah dilakukan, telah didapatkan Super  $\mathcal{H}$ -antimagic total dekomposisi pada shakel dari graf kipas tunggal untuk  $d \in \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 24, 26, 28, 34, 38, 40, 42, 48, 54, 56, 62\}$ . Super  $\mathcal{H}$ -antimagic total dekomposisi untuk gabungan saling lepas pada shakel dari graf kipas  $d \in \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 26, 40, 54\}$ . Menurut hasil penelitian terbukti bahwa terdapat generalisasi pada shakel dari graf kipas pada pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic total dekomposisi dengan  $a = 2n^2t + \frac{5}{2}n^2 + \frac{3}{2}n$  dan  $d = 5n^2 - 5n + 2$

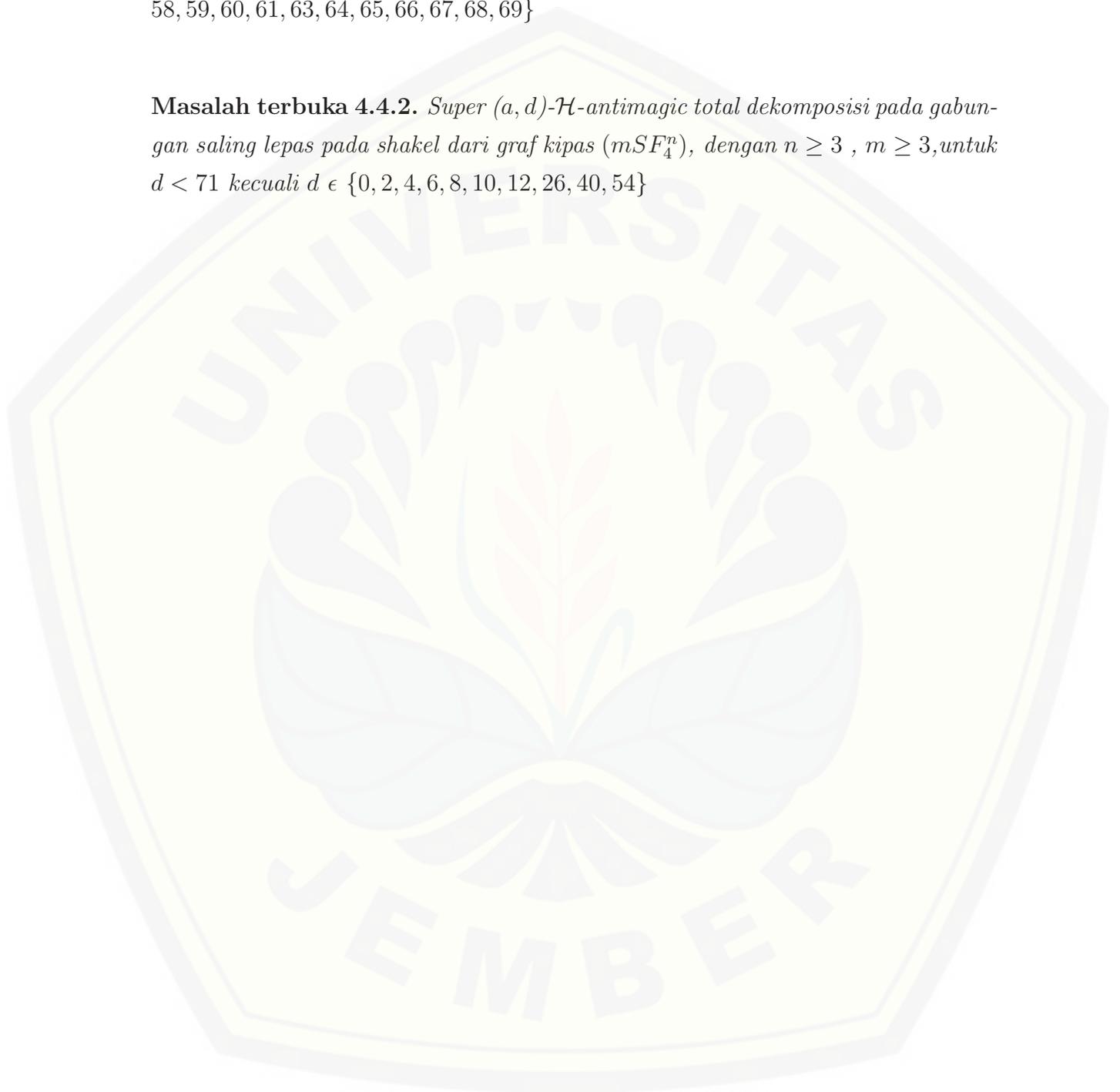
Berdasarkan visualisasi pelabelan dan penerapan fungsi bijektif hasil penelitian dan perhitungan yang telah dilakukan, terdapat beberapa pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic total dekomposisi pada shakel dari graf kipas  $(SF_4^n)$  dan gabungan saling lepas pada shakel dari graf kipas  $(mSF_4^n)$  yang belum ditemukan oleh peneliti diharapkan dapat membantu peneliti lain yang akan melakukan penelitian sejenis.

Beberapa pelabelan dan penerapan fungsi bijektif yang belum ditemukan

oleh penulis diberikan pada masalah terbuka berikut:

**Masalah terbuka 4.4.1.** *Super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic total dekomposisi pada shakel dari graf kipas  $(SF_4^n)$  untuk  $n \geq 2$  dengan  $d \in \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 22, 23, 24, 25, 27, 29, 30, 31, 32, 33, 35, 36, 37, 39, 41, 43, 44, 45, 46, 47, 49, 50, 51, 52, 53, 55, 57, 58, 59, 60, 61, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69\}$*

**Masalah terbuka 4.4.2.** *Super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic total dekomposisi pada gabungan saling lepas pada shakel dari graf kipas  $(mSF_4^n)$ , dengan  $n \geq 3$ ,  $m \geq 3$ , untuk  $d < 71$  kecuali  $d \in \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 26, 40, 54\}$*



## BAB 5. KESIMPULAN DAN SARAN

### 5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dari pembahasan pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa:

1. Shackle dari graf kipas tunggal  $SF_4^n$  memiliki pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$  antimagic total dekomposisi untuk  $d = \{0, 1, 2, 3, \dots, 69\}$ . Peneliti telah menemukan  $\mathcal{SHATD}$  (Super  $\mathcal{H}$  Antimagic Total Dekomposisi) untuk shackle graf kipas tunggal untuk  $d \in \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 24, 26, 28, 34, 38, 40, 42, 48, 54, 56, 62\}$ . Hasil penelitian ini dibuktikan pada teorema bahwa Shackle graf kipas  $SF_4^n$  memiliki fungsi bijektif pelabelan super  $(63n+15, 0)$ ,  $(62n+16, 2)$ ,  $(61n+17, 4)$ ,  $(60n+18, 6)$ ,  $(59n + 19, 8)$ ,  $(58n + 20, 10)$ ,  $(57n + 21, 12)$ ,  $(56n + 22, 14)$ ,  $(55n + 23, 16)$ ,  $(54n + 24, 18)$ ,  $(53n + 25, 20)$ ,  $(39n + 63, 24)$ ,  $(50n + 28, 26)$ ,  $(49n + 29, 28)$ ,  $(46n + 32, 34)$ ,  $(32n + 70, 38)$ ,  $(43n + 35, 40)$ ,  $(42n + 36, 42)$ ,  $(39n + 39, 48)$ ,  $(36n + 42, 54)$ ,  $(35n + 43, 56)$ ,  $(32n + 46, 62)$ , antimagic total dekomposisi untuk  $n$  ganjil.
2. Gabungan saling lepas shackle Shackle dari graf kipas  $mSF_4^n$  memiliki pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$  antimagic total dekomposisi untuk  $d = \{0, 1, 2, 3, \dots, 70\}$ . Peneliti telah menemukan  $\mathcal{SHATD}$  (Super  $\mathcal{H}$  Antimagic Total Dekomposisi) untuk gabungan graf shackle dari graf kipas  $d \in \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 26, 40, 54\}$ . Hasil penelitian ini dibuktikan bahwa gabungan shackle graf kipas  $mSF_4^n$  terdapat fungsi bijektif pelabelan super  $(62mn + 10mn + 6, 0)$   $(61mn + 10m + 7, 2)$   $(60mn + 10m + 8, 4)$   $(59mn + 10m + 9, 6)$   $(58mn + 10m + 10, 8)$   $(57mn + 10m + 11, 10)$   $(56mn + 10m + 12, 12)$   $(49mn + 10m + 19, 26)$   $(42mn + 10m + 26, 40)$   $(35mn + 10m + 33, 54)$  antimagic total dekomposisi untuk  $n$  ganjil dan  $m \geq 2$ .
3. Terdapat generalisasi pada shakel dari graf kipas pada pelabelan super

$(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic total dekomposisi dengan  $a = 2n^2t + \frac{5}{2}n^2 + \frac{3}{2}n$  dan  $d = 5n^2 - 5n + 2$

## 5.2 Saran

Berdasarkan hasil penelitian mengenai pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$  antimagic total dekomposisi pada shakel dari graf kipas serta mengacu pada *open problem* dari hasil penelitian yang telah ditemukan, maka peneliti memberikan saran kepada pembaca agar dapat melakukan penelitian pada pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$  antimagic total dekomposisi pada shakel dari graf kipas  $SF_4^n$  dengan  $n \geq 3$  untuk  $d \leq 69$  selain  $d \in \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 24, 26, 28, 34, 38, 40, 42, 48, 54, 56, 62\}$ . Serta untuk pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$  antimagic total dekomposisi pada gabungan saling lepas pada shakel dari graf kipas  $mSF_4^n$ , dengan  $n \geq 3$  dan  $m \geq 2$  untuk  $d < 71$  selain  $d \in \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 26, 40, 54\}$ .

DAFTAR PUSTAKA

- A, Rosa. 1967. *On Certain Valuations of the Vertices of a Graph*. In Theory of Graphs (Proc. Int. Symposium, Rome, July 1966), Gordon and Breach, N. Y. and Dunod Paris 349-355.
- Bača dkk. 2007. *Edge-Antimagic Graphs*. Discrete Mathematics 307 (2007) 1232-1244.
- Dafik. 2014. *Batas Atas  $d$  dari Sebuah Graf yang Memiliki Super  $(a,d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic Covering*. Working Paper, FKIP UNEJ.
- Dafik, Mirka, M., Ryan, J., Bača, M. 2009. *On Super  $(a, d)$ -Edge-Antimagic Total Labeling of Disconnected Graphs*. Discrete Mathematics 309 (15), 4909-4915.
- Harsya, A.Y. 2014. *Bilangan Kromatik pada Pengoperasian Graf Lintasan dengan Graf Lingkaran*. Jurusan Matematika FMIPA Universitas Jember.
- Hartsfield, N. and Ringel, G. 1994. *Pearls in Graph Theory*. London: Accademic Press Limited.
- Inayah, N., Simanjuntak, R., Salman, A. 2013. *Super  $(a,d)$ - $H$ -Antimagic Total Labelings For Shackles of A Connected Graph  $H$* . Australasian Journal of Combinatorics 57, 127-138.
- Maryati, T. K., Salman, A., Baskoro, E. T., Ryan, J. Miller, M. 2010. *On  $H$  Supermagic Labellings for Certain Shackles and Amalgamations of A Connected Graph Antimagic Total Labelings For Shackles of A Connected Graph*. Utilitas Math 83, 333-342.
- Rahmawati, S., Sugeng, K. A., Silaban, D.R. 2013. *Construction of New Larger  $(a,d)$ -Edge Antimagic Vertex Graphs by Using Adjacency Matrices*. Australasian Journal 56, 257-272.
- Simanjuntak, R., Miller, M., dan Bertault, F. 2000. *Two New  $(a,d)$ -Antimagic Graph Labelings*. Proceeding of the Eleventh Australasian Workshop of Combinatorial Algorithm (AWOCA), 179189..

Slamin. 2009. *Desain Jaringan Pendekatan Teori Graf*. Jember : Universitas Jember.

Wallis, W. D. 2001. *Magic Graphs*. Boston: Birkhäuser.

