PERBANDINGAN METODE GAUSS-LEGENDRE DAN RADAU PADA INTEGRASI NUMERIK

SKRIPSI

Oleh

Ivana Gabriella
NIM 111810101021

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER
2015

PERBANDINGAN METODE GAUSS-LEGENDRE DAN RADAU PADA INTEGRASI NUMERIK

SKRIPSI

diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat
untuk menyelesaikan Program Studi Matematika (S1)
dan mencapai gelar Sarjana Sains

Oleh

Ivana Gabriella
NIM 111810101021

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER
2015

PERSEMBAHAN

Skripsi ini saya persembahkan untuk :

1. Ayahanda Bapak Hari Suprayitno, Ibunda Victoria Rahayu, dan Kakak Ronald Alexander serta seluruh keluarga tercinta yang telah memberikan do'a dan kasih sayang serta pengorbanan berharga kepada penulis;
2. Guru-guru dari Taman Kanak-kanak sampai perguruan tinggi, yang telah memberikan ilmu dan membimbing dengan penuh kesabaran;
3. Almamater Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember, SMA Negeri 1 Wongsorejo, SMP Negeri 1 Wongsorejo, SD Negeri 1 Wongsorejo dan TK Tunas Rimba Wongsorejo.

MOTTO

Perjalanan seribu mil dimulai dari satu langkah. *)

Dalam matematika, kita lebih sebagai abdi ketimbang ahli
(*Charles Hermite*)

---

*) Lao Tzu

http://masmujurstore.wordpress.com/2014/12/8/sebuah-perjalanan-seribu-mil-dimulai-dengan-satu-langkah-lao-tzu-2/ [29 Juni 2015]

PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

nama : Ivana Gabriella

NIM : 111810101021

menyatakan dengan sesungguhnya bahwa karya ilmiah yang berjudul "Perbandingan Metode Gauss-Legendre dan Radau pada Integrasi Numerik" adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali kutipan yang sudah saya sebutkan sumbernya, belum pernah diajukan pada institusi manapun, dan bukan karya jiplakan. Saya bertanggungjawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa ada tekanan dan paksaan dari pihak manapun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata dikemudian dari pernyataan ini tidak benar.

Jember, Juni 2015

Yang menyatakan,

Ivana Gabriella

NIM. 111810101021

SKRIPSI

PERBANDINGAN METODE GAUSS-LEGENDRE DAN RADAU

PADA INTEGRASI NUMERIK

Oleh

Ivana Gabriella
NIM 111810101021

Pembimbing :

Dosen Pembimbing Utama : Drs. Rusli Hidayat, M.Sc.

Dosen Pembimbing Anggota : Kusbudiono, S.Si., M.Si.

PENGESAHAN

Skripsi yang berjudul "Perbandingan Metode Gauss-Legendre dan Radau pada Integrasi Numerik" telah diuji dan disahkan pada :

hari, tanggal :

tempat : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember

Tim Penguji,

Ketua,	Sekretaris,
Drs. Rusli Hidayat, M.Sc. NIP. 196610121993031001	Kusbudiono, S.Si., M.Si. NIP. 197704302005011001
Penguji I,	Penguji II,
M. Ziaul Arif, S.Si., M.Sc. NIP. 198501112008121002	Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si. NIP. 198408012008012006

Mengesahkan,

Dekan,

Prof. Drs. Kusno, DEA., Ph.D.
NIP. 196101081986021001

RINGKASAN

Perbandingan Metode Gauss-Legendre dan Radau pada Integrasi Numerik; Ivana Gabriella, 111810101021; 2015: 42 halaman; Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Integrasi numerik merupakan alat utama yang dapat digunakan untuk mencari nilai aproksimasi jawaban untuk beberapa integral tentu yang tidak bisa diselesaikan secara analitik. Berdasarkan cara pengambilan panjang interval, aproksimasi integrasi terbagi menjadi dua bagian yaitu metode Newton-Cotes dan metode Gauss-Kuadratur. Metode integrasi Gauss-Kuadratur merupakan metode yang tidak menggunakan pembagian area yang banyak tetapi memanfaatkan titik berat dan pembobot integrasi. Ada beberapa metode Gauss-Kuadratur yang dapat digunakan pada integrasi numerik yaitu Gauss-Legendre dan Radau. Gauss-Legendre merupakan aturan yang dapat mengintegralkan fungsi pada interval [-1, 1] dengan baik. Polinomial orthogonal yang digunakan pada metode ini disebut sebagai polinomial Legendre

Tujuan dari skripsi ini adalah membandingkan nilai *error* pada metode Gauss-Legendre dan Radau pada perhitungan integrasi numerik. Perbandingan nilai *error* didapat dari menyelesaikan permasalahan integrasi secara numerik pada beberapa fungsi yang dapat diintegralkan secara analitik sehingga didapatkan keakuratan dari kedua metode dengan menggunakan metode Gauss-Kuadratur.

Pada perhitungan fungsi polinomial yang memiliki solusi analitik, Gauss-Legendre memiliki tingkat ketelitian yang lebih tinggi dibandingkan Radau. Hal ini dikarenakan Gauss-Legendre memberikan hasil eksak sampai pada polinomial derajat $2n-1$ yang artinya apabila menggunakan titik evaluasi sebanyak $n=2$ maka akan eksak sampai dengan polinomial derajat satu, dua dan tiga. Sedangkan

Radau memberikan hasil eksak sampai pada polinomial derajat $2n-2$ yang artinya apabila menggunakan titik evaluasi sebanyak $n=2$ maka akan eksak sampai dengan polinomial derajat satu dan dua. Hal ini juga berlaku untuk $n=3$, $n=4$, $n=5$, dan seterusnya. Sedangkan pada perhitungan fungsi transenden yang memiliki solusi analitik, kedua metode tidak memiliki keteraturan namun metode Gauss-Legendre masih memberikan hasil yang lebih teliti dibandingkan metode Radau.

PRAKATA

Puji syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat dan karunia-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir yang berjudul “Perbandingan Metode Gauss-Legendre dan Radau pada Integrasi Numerik”. Penyusunan tugas akhir ini ditujukan sebagai salah satu syarat untuk menyelesaikan Program Studi Matematika (S1) dan mencapai gelar Sarjana Sains.

Dalam penyusunan tugas akhir ini, penulis mendapat banyak dukungan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, tidak lupa penulis menyampaikan ucapan terima kasih kepada:

1. Bapak Drs. Rusli Hidayat, M.Sc. selaku Dosen Pembimbing Utama sekaligus Dosen Pembimbing Akademik selama penulis menjadi mahasiswa Matematika FMIPA;
2. Bapak Kusbudiono, S.Si., M.Si. selaku Dosen Pembimbing Anggota yang telah meluangkan waktu, pikiran dan perhatian dalam penulisan tugas akhir ini
3. Bapak M. Ziaul Arif, S.Si., M.Sc. dan Ibu Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si. selaku Dosen Penguji yang telah memberikan kritik dan saran dalam penyusunan tugas akhir ini;
4. seluruh staf pengajar Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Jember yang telah memberikan ilmu serta bimbingannya;
5. kedua orang tua dan seluruh keluarga yang telah memberikan dukungan, doa, perhatian dan kasih sayang tanpa batas;
6. teman-teman angkatan 2011 yang selalu siap mendengarkan keluh kesah, dan memberi semangat;
7. serta semua pihak yang turut membantu demi kelancaran tugas akhir ini.

Penulis juga menerima segala kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan tugas akhir ini. Akhirnya penulis berharap, semoga tugas akhir ini dapat bermanfaat.

Jember, Juni 2015 Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

BAB 1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Perhitungan integral merupakan perhitungan dasar pada kalkulus yang banyak digunakan dalam berbagai keperluan. Pada beberapa permasalahan perhitungan integral dapat dilakukan secara manual tetapi pada permasalahan tertentu perhitungan integral sulit dilakukan bahkan tidak dapat dihitung secara manual. Dalam hal ini metode numerik dapat digunakan sebagai alternatif untuk menyelesaikan permasalahan integral yang tidak dapat dihitung secara manual. Oleh karena itu integrasi numerik merupakan alat utama yang dapat digunakan untuk mencari nilai aproksimasi jawaban untuk beberapa integral tentu yang tidak bisa diselesaikan secara analitik.

Menurut Sutrisno dan Heri (2009) menjelaskan tentang integrasi numerik dengan metode Gauss-Kuadratur yang menggunakan pendekatan interpolasi Hermit dan polinomial Legendre, aproksimasi integrasi dengan menggunakan polinomial merupakan salah satu teknik di dalam metode numerik yang masih banyak digunakan. Berdasarkan cara pengambilan panjang interval, aproksimasi integrasi terbagi menjadi dua bagian yaitu metode Newton-Cotes dan metode Gauss-Kuadratur. Metode Newton-Cotes menggunakan interval yang sama panjang meliputi; Trapesium, Simpson 1/3 dan Simpson 3/8. Sedang-kan Metode Gauss-Kuadratur menggunakan interval yang telah ditentukan, meli-puti; Gauss-Legendre, Chebyshev, Hermite, Laquerre, Lobatto dan Radau. Metode integrasi Gauss-Kuadratur merupakan metode yang tidak menggunakan pembagian area yang banyak tetapi memanfaatkan titik berat dan pembobot integrasi. Dibandingkan dengan metode Newton-Cotes, metode Gauss-Kuadratur lebih sederhana dalam operasi aritmatika karena titik yang digunakan lebih sedikit. Selain itu ketelitiannya lebih tinggi dibandingkan dengan metode Newton-Cotes.

Miswandi (2014) dalam skripsinya membahas tentang solusi numerik pada perhitungan integrasi Gauss-Legendre dan Lobatto. Setelah membandingkan antara kedua metode tersebut, metode Legendre memberikan tingkat ketelitian yang lebih tinggi dibandingkan metode Lobatto. Berdasarkan skripsi tersebut, penulis tertarik untuk membandingkan metode Gauss-Legendre dan Radau dalam menyelesaikan permasalahan pada integrasi numerik.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, permasalahan yang akan dibahas dalam skripsi ini adalah membandingkan keakuratan pada metode Gauss-Legendre dan Radau.

1.3 Batasan Masalah

Batasan masalah pada penulisan skripsi ini adalah fungsi yang digunakan memiliki penyelesaian analitik meliputi fungsi polinomial dan transenden yang kontinu.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan dari skripsi ini adalah membandingkan keakuratan pada metode Gauss-Legendre dan Radau pada perhitungan integrasi numerik.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat dari adanya penulisan skripsi ini adalah untuk mengetahui hasil perbandingan keakuratan metode Gauss-Legendre dan Radau pada perhitungan integrasi numerik.

BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Integral Tentu

Perhitungan integral adalah perhitungan dasar yang digunakan dalam kalkulus untuk banyak keperluan. Integral secara definitif digunakan untuk menghitung luas daerah yang dibatasi oleh fungsi $y = f(x)$ dan sumbu-x. Pada penerapannya perhitungan integral digunakan untuk menghitung luas area, volume permukaan dan volume benda putar (Basuki & Ramadijanti, 2005). Secara umum rumus integral suatu fungsi ditulis dalam bentuk

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

yang menyatakan nilai total atau batasan luas daerah di antara kurva $y = f(x)$ dan sumbu–x yang dihitung dengan batas $x_1 = a$ sampai $x_2 = b$ (Varberg & Purcell, 1987). Secara simbolik, rumus integral tentu dinyatakan sebagai berikut:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \tag{2.1}$$

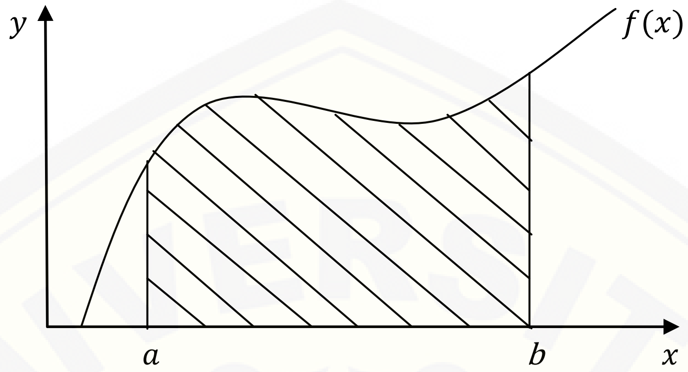
dengan $F(x)$ merupakan integral dari $f(x)$ (Bartle & Sherbert, 2000).

Ada banyak integral tentu yang dapat dihitung dengan menggunakan rumus (2.1). Perhitungan ini disebut perhitungan integrasi secara analitik. Namun ada beberapa fungsi yang tidak dapat dihitung dengan cara analitik sehingga harus diselesaikan secara numerik. Hal ini berarti persoalan integrasi dapat dilakukan dengan cara analitik ataupun numerik. Penyelesaian secara analitik akan menghasilkan nilai yang sebenarnya atau eksak sedangkan penyelesaian secara numerik akan menghasilkan penyelesaian yang mendekati nilai eksak.

2.1.1 Integrasi Analitik

Bila suatu persoalan merupakan persoalan yang sederhana atau terdapat teorema analisa matematika untuk menyelesaikan persoalan tersebut maka penyelesaian matematis yang digunakan adalah penyelesaian secara analitik.

Penyelesaian ini menjadi acuan bagi pemakaian metode pendekatan (Basuki & Ramadijanti, 2005). Jika f kontinu pada seluruh selang $[a, b]$ maka f terintegral-kan pada $[a, b]$ seperti ditunjukkan oleh gambar 2.1.



Gambar 2.1. Luas daerah yang dibatasi oleh fungsi $y = f(x)$

2.1.2 Integrasi Numerik

Metode numerik digunakan untuk menyelesaikan persoalan di mana perhitungan secara analisis tidak dapat digunakan. Metode numerik disajikan dalam bentuk algoritma pada sekumpulan data numerik yang dapat dihitung secara cepat dan mudah (Sartono, 2006). Dengan kata lain, permasalahan dapat diselesaikan menggunakan pendekatan-pendekatan yang bisa dipertanggung-jawabkan secara analitik agar memperoleh hasil yang mendekati nilai penyelesaian eksak.

Pada prinsip matematika, dalam memandang permasalahan terlebih dahulu diperhatikan apakah permasalahan tersebut mempunyai penyelesaian atau tidak. Hal ini menjelaskan bahwa tidak semua permasalahan dapat diselesaikan dengan menggunakan perhitungan biasa (Basuki & Ramadijanti, 2005). Integrasi numerik merupakan suatu proses mencari nilai integral suatu fungsi yang dibatasi titik variabel tertentu dengan menggunakan sederetan nilai numerik yang diketahui. Keuntungan dari integrasi numerik yaitu penyelesaiannya yang mudah untuk persoalan integrasi fungsi-fungsi yang cukup kompleks (Munif & Prastyoko, 2003). Dengan kata lain, integrasi numerik merupakan pendekatan nilai untuk integral tentu yang tidak bisa diselesaikan secara analitik sehingga mempermudah mendapatkan solusinya.

Menurut Sutrisno dan Heri (2009), metode integrasi numerik dapat dibedakan dalam dua kelompok yaitu metode Newton-Cotes dan Gauss-Kuadratur. Metode Newton-Cotes merupakan metode yang menggunakan interval yang sama panjang. Metode ini meliputi metode Trapesium, Simpson 1/3 dan Simpson 8/3. Sedangkan metode Gauss-Kuadratur menggunakan interval yang ditentukan atau disesuaikan dan interval yang dipilih tidak harus sama panjang. Metode ini meliputi Gauss-Legendre, Lobatto, Radau, Laquerre, Hermite dan Chebyshev. Metode-metode aproksimasi tersebut bertujuan untuk memperoleh ketelitian yang lebih mendekati nilai eksak bila penyelesaian yang dicari sulit bahkan tidak dapat diselesaikan secara analitik.

2.2 Polinomial Orthogonal

Polinomial orthogonal digunakan dalam perhitungan Gauss-Kuadratur Legendre dan disebut sebagai Polinomial Legendre. Secara umum suatu polinomial $g_k(x)$ disebut orthogonal terhadap fungsi bobot $w(x\,)$, jika:

$$\int_a^b w(x)g_n(x)g_m(x)\,dx = 0 \qquad n \neq m$$

$$\int_a^b w(x)[g_n(x)]^2\,dx = c(n) \neq 0$$

$P_n(x)$ merupakan polinomial Legendre yang orthogonal pada interval $[-1, 1]$ terhadap $w(x) = 1$ sehingga berlaku:

$$\int_a^b P_n(x)P_m(x)\,dx = 0 \qquad n \neq m$$

$$\int_a^b [P_n(x)]^2\,dx = c(n) \neq 0$$

Beberapa $P_n(x)$:

$P_0(x) = 1$

$P_1(x) = x$

$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$

$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$

$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$

$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$

$P_6(x) = \frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5)$

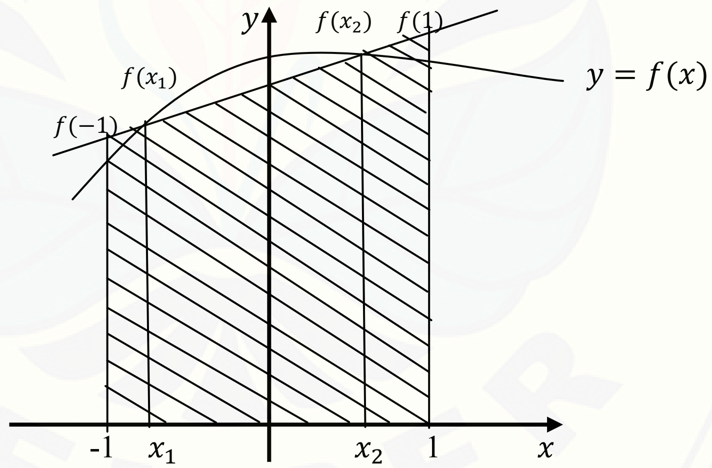
Rumus rekursif:

$$P_n(x) = \frac{2n-1}{n} x P_{n-1}(x) - \frac{n-1}{n} P_{n-2}(x) \qquad (2.2)$$

(Luknanto, D. 2001)

2.3 Metode Gauss – Kuadratur

Metode Gauss-Kuadratur dikembangkan oleh Gauss. Metode ini menghitung nilai integral dengan cara mengambil nilai fungsi di beberapa titik tertentu yang dapat mewakili perhitungan luas suatu daerah. Nilai integrasi numerik cukup diperoleh dengan memanfaatkan titik berat dan pembobot integrasi (Triatmojo, 1992).



Gambar 2.2. Metode Gauss-Kuadratur

Gambar 2.2 menyatakan persamaan integral $f(x)$ dari $x = -1$ hingga $x = 1$. Metode Gauss-Kuadratur menghampiri nilai integral dengan dua buah titik x_1 dan x_2 sedemikian sehingga luas daerah yang diarsir dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$I = \int_{-1}^{1} f(x)dx = w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) \tag{2.3}$$

dengan w_1 dan w_2 adalah panjang interval yang akan ditentukan atau disebut sebagai fungsi pembobot. Persamaan di atas dinamakan persamaan Gauss-Kuadratur dua titik. Persamaan ini dapat diperluas menjadi 3 titik, 4 titik dan seterusnya (Hamming, 1973).

$$I = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) + w_3 f(x_3) + \cdots + w_n f(x_n)$$

$$I = \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i) \tag{2.4}$$

dengan $i = 1,2,3,\dots n$ menyatakan banyaknya titik argumen fungsi. Sehingga untuk setiap jumlah n titik evaluasi terdapat sebanyak $2n$ variabel yang akan dicari nilainya.

Untuk menghitung integral secara umum, misalkan suatu integral:

$$I = \int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

maka harus melakukan transformasi menjadi bentuk umum Gauss-Kuadratur. Dalam hal ini yang harus ditransformasikan adalah selang $[a, b]$ menjadi $[-1,1]$, variabel x menjadi variabel u serta dx menjadi du.

$$I = \int_{-1}^{1} g(u)\,du$$

Dengan melakukan perbandingan garis maka diperoleh:

$$x = \frac{(a+b) + (b-a)u}{2}$$

sehingga diperoleh persamaan diferensialnya:

$$dx = \frac{(b-a)}{2} du$$

Maka setiap persamaan integrasi ditransformasikan ke dalam bentuk Gauss-Kuadratur dengan mengganti selang $[a, b]$ menjadi $[-1,1]$ serta menggunakan dua persamaan di atas untuk mengganti variabelnya sehingga didapat persamaan sebagai berikut.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{(b-a)}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{(a+b)+(b-a)u}{2}\right)du \qquad (2.5)$$

(Mathews, 1993)

2.3.1 Gauss – Legendre

Gauss-Legendre merupakan aturan yang dapat mengintegralkan fungsi pada interval [-1, 1] dengan baik. Polinomial orthogonal yang digunakan pada metode ini disebut sebagai polinomial Legendre seperti pada persamaan (2.2). Untuk menentukan panjang interval dapat menggunakan rumus bobot sebagai berikut:

$$w_i = \frac{2}{(1-x_i^2)[P_n'(x_i)]^2} \qquad (2.6)$$

Untuk menentukan nilai variabel pada Gauss-Legendre hingga 6 titik dapat dilihat pada tabel berikut:

Tabel 2.1 Titik Evaluasi Gauss-Legendre pada n = 2

i	Titik Evaluasi (x_i)	Bobot (w_i)
1	$-0{,}577350269$	$1{,}000000000$
2	$0{,}577350269$	$1{,}000000000$

Tabel 2.2 Titik Evaluasi Gauss-Legendre pada n = 3

i	Titik Evaluasi (x_i)	Bobot (w_i)
1	$-0{,}774596669$	$0{,}555555556$
2	$0{,}000000000$	$0{,}888888889$
3	$0{,}774596669$	$0{,}555555556$

Tabel 2.3 Titik Evaluasi Gauss-Legendre pada n = 4

i	Titik Evaluasi (x_i)	Bobot (w_i)
1	$-0{,}861136312$	$0{,}347854845$
2	$-0{,}339981044$	$0{,}652145155$
3	$0{,}339981044$	$0{,}652145155$
4	$0{,}861136312$	$0{,}347854845$

Tabel 2.4 Titik Evaluasi Gauss-Legendre pada n = 5

i	Titik Evaluasi (x_i)	Bobot (w_i)
1	$-0{,}906179846$	0,236926885
2	$-0{,}538469310$	0,478628670
3	0,000000000	0,568888889
4	0,538469310	0,478628670
5	0,906179846	0,236926885

Tabel 2.5 Titik Evaluasi Gauss-Legendre pada n = 6

i	Titik Evaluasi (x_i)	Bobot (w_i)
1	$-0{,}932469514$	0,171324492
2	$-0{,}661209386$	0,360761573
3	$-0{,}238619186$	0,467913935
4	0,238619186	0,467913935
5	0,661209386	0,360761573
6	0,932469514	0,171324492

2.3.2 Turunan dari Rumus Gauss – Legendre Tiga Titik

Persamaan (2.3) memiliki empat buah variabel yang tidak diketahui dengan $n = 2$. Untuk mengevaluasi sebanyak n titik dapat menggunakan persamaan (2.4). Dengan menganggap bahwa rumus eksak untuk Gauss-Legendre adalah fungsi-fungsi polinomial berderajat $2n - 1$ yaitu $x^0, x^1, x^2, x^3, \dots, x^{2n-1}$ maka untuk $n = 3$ akan memberikan nilai eksak untuk $f(x) = 1$, $f(x) = x$, $f(x) = x^2$, $f(x) = x^3$, $f(x) = x^4$ dan $f(x) = x^5$ (Hamming, 1973). Sehingga diperoleh persamaan-persamaan sebagai berikut:

Ketika $f(x) = 1$

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{1} 1 \ dx$$

$$2 = w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) + w_3 f(x_3)$$

$$2 = w_1 + w_2 + w_3 \tag{2.7}$$

Ketika $f(x) = x$

$$\int_{1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{1} x \ dx$$

$$0 = w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) + w_3 f(x_3)$$

$$0 = w_1x_1 + w_2x_2 + w_3x_3 \tag{2.8}$$

Ketika $f(x) = x^2$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} x^2\,dx$$

$$\frac{2}{3} = w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) + w_3 f(x_3)$$

$$\frac{2}{3} = w_1x_1^{\;2} + w_2x_2^{\;2} + w_3x_3^{\;2} \tag{2.9}$$

Ketika $f(x) = x^3$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} x^3\,dx$$

$$0 = w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) + w_3 f(x_3)$$

$$0 = w_1x_1^{\;3} + w_2x_2^{\;3} + w_3x_3^{\;3} \tag{2.10}$$

Ketika $f(x) = x^4$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} x^4\,dx$$

$$\frac{2}{5} = w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) + w_3 f(x_3)$$

$$\frac{2}{5} = w_1x_1^{\;4} + w_2x_2^{\;4} + w_3x_3^{\;4} \tag{2.11}$$

Ketika $f(x) = x^5$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} x^5\,dx$$

$$0 = w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) + w_3 f(x_3)$$

$$0 = w_1x_1^{\;5} + w_2x_2^{\;5} + w_3x_3^{\;5} \tag{2.12}$$

Karena limit integrasi pada batas -1 dan 1 simetris disekitar titik $x = 0$ maka diharapkan x_1 dan x_3 juga simetris disekitar $x = 0$. Sehingga dengan menganggap $x_1 = -x_3$ dan $x_2 = 0$ kemudian mensubtitusikannya ke semua persamaan diatas maka didapatkan

$$w_1 = w_3 \tag{2.13}$$

Persamaan (2.13) disubtitusikan ke persamaan (2.9) sehingga diperoleh

$$x_3{}^2 = \frac{1}{3w_3} \tag{2.14}$$

Persamaan (2.14) disubtitusikan ke persamaan (2.11) sehingga diperoleh

$$w_3 x_3{}^4 = \frac{1}{5} \tag{2.15}$$

Dari persamaan (2.14) dan (2.15) didapatkan

$$w_3 = \frac{5}{9} \tag{2.16}$$

sehingga $w_1 = w_3 = \frac{5}{9}$ kemudian disubstitusikan ke persamaan (2.7) dan didapatkan $w_2 = \frac{8}{9}$. Dengan proses substitusi yang sama untuk variabel lainnya terhadap persamaan yang telah diketahui maka diperoleh

$$x_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}} = -0{,}774596669$$

$$x_2 = 0$$

$$x_3 = -x_1 = \sqrt{\frac{3}{5}} = 0{,}774596669$$

Dengan kaidah ini, untuk menghitung integral $f(x)$ di dalam selang $[-1{,}1]$ cukup menggunakan nilai fungsi f dengan $2n$ titik evaluasi yang telah ditentukan (Sutarno & Rachmatin, 2005). Untuk mengetahui nilai w_i dapat dicari dengan mudah menggunakan rumus pembobot untuk Gauss-Legendre pada persamaan (2.6).

2.3.3 Radau

Metode Radau merupakan bagian dari Gauss-Kuadratur yang memiliki interval $[-1{,}1]$ dengan mengevaluasi salah satu titik ujung. Titik-titik x_i pada metode Radau yaitu $-1 = x_0 < x_1 < x_2 \dots < x_n$ yang tidak simetris terhadap sumbu-x dan $w_0, w_1, w_2 \dots w_n$ dengan $w_i > 0$ sebagai faktor pembobot dan $i = 0{,}1{,}2, \dots n$. Gauss ini memiliki bentuk umum:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \frac{2}{n^2} f(-1) + \sum_{i=2}^{n} w_i f(x_i)$$

Fungsi pembobot Gauss-Radau dapat ditulis sebagai berikut:

$$w_i = \frac{1 - x_i}{n^2 [P_{n-1}(x_i)]^2} \tag{2.17}$$

dengan $P_n(x_i)$ merupakan polinomial Legendre yang dapat dicari dengan menggunakan persamaan (2.2). Untuk menentukan nilai variabel pada Gauss-Radau hingga 6 titik dapat dilihat pada tabel berikut:

Tabel 2.6 Titik Evaluasi Gauss-Radau pada n = 2

i	Titik Evaluasi (x_i)	Bobot (w_i)
1	−1,0000000	0,5000000
2	0,3333333	1,5000000

Tabel 2.7 Titik Evaluasi Gauss-Radau pada n = 3

i	Titik Evaluasi (x_i)	Bobot (w_i)
1	−1,0000000	0,2222222
2	−0,2898979	1,0249717
3	0,6898979	0,7528061

Tabel 2.8 Titik Evaluasi Gauss-Radau pada n = 4

i	Titik Evaluasi (x_i)	Bobot (w_i)
1	−1,0000000	0,1250000
2	−0,5753189	0,6576886
3	0,1810663	0,7763870
4	0,8228241	0,4409244

Tabel 2.9 Titik Evaluasi Gauss-Radau pada n = 5

i	Titik Evaluasi (x_i)	Bobot (w_i)
1	−1,0000000	0,0800000
2	−0,7204803	0,4462078
3	−0,1671809	0,6236530
4	0,4463140	0,5627120
5	0,8857916	0,2874271

Tabel 2.10 Titik Evaluasi Gauss-Radau pada n = 6

i	Titik Evaluasi (x_i)	Bobot (w_i)
1	$-1,0000000$	0,0555556
2	$-0,8029298$	0,3196408
3	$-0,3909286$	0,4853872
4	0,1240504	0,5209268
5	0,6039732	0,4169013
6	0,9203803	0,2015884

2.3.4 Turunan dari Rumus Gauss – Radau Tiga Titik

Persamaan (2.3) memiliki empat buah variabel yang tidak diketahui dengan $n = 2$. Untuk mengevaluasi sebanyak n titik dapat menggunakan persamaan (2.4). Dengan menganggap bahwa rumus eksak untuk Gauss-Radau adalah fungsi-fungsi polinomial berderajat $2n - 2$ yaitu $x^0, x^1, x^2, x^3, \dots, x^{2n-2}$ maka untuk $n = 3$ akan memberikan nilai eksak untuk $f(x) = 1$, $f(x) = x$, $f(x) = x^2$, $f(x) = x^3$ dan $f(x) = x^4$ sehingga diperoleh persamaan-persamaan sebagai berikut:

Ketika $f(x) = 1$

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{1} 1 \ dx$$

$$2 = w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) + w_3 f(x_3)$$

$$2 = w_1 + w_2 + w_3 \tag{2.18}$$

Ketika $f(x) = x$

$$\int_{1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{1} x \ dx$$

$$0 = w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) + w_3 f(x_3)$$

$$0 = w_1 x_1 + w_2 x_2 + w_3 x_3 \tag{2.19}$$

Ketika $f(x) = x^2$

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{1} x^2 dx$$

$$\frac{2}{3} = w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) + w_3 f(x_3)$$

$$\frac{2}{3} = w_1 x_1^{\ 2} + w_2 x_2^{\ 2} + w_3 x_3^{\ 2} \tag{2.20}$$

Ketika $f(x) = x^3$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} x^3 dx$$

$$0 = w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) + w_3 f(x_3)$$

$$0 = w_1 x_1^{\ 3} + w_2 x_2^{\ 3} + w_3 x_3^{\ 3} \tag{2.21}$$

Ketika $f(x) = x^4$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} x^4 dx$$

$$\frac{2}{5} = w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) + w_3 f(x_3)$$

$$\frac{2}{5} = w_1 x_1^{\ 4} + w_2 x_2^{\ 4} + w_3 x_3^{\ 4} \tag{2.22}$$

Limit integrasi pada batas -1 dan 1 tidak simetris terhadap sumbu-x dengan mengetahui salah satu titik ujung yaitu $x_1 = -1$. Jika $x_1, x_2, \ldots x_n$ merupakan akar-akar yang berbeda dari polinomial $q(x)$, maka $q(x)$ dapat dinyatakan sebagai persamaan berikut: $q(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ (Conte & Boor, 1980). Sehingga untuk mempermudah perhitungan dapat menggunakan polinomial

$$\begin{aligned} q(x) &= (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \\ &= x^3 + C_1 x^2 + C_2 x + C_3 \end{aligned} \tag{2.23}$$

karena $q(-1) = 0$ maka

$$-1 + C_1 - C_2 + C_3 = 0 \tag{2.24}$$

Selanjutnya mengalikan kelima persamaan pertama diatas dengan C_3, C_2, C_1 dan 1 kemudian ditambahkan sehingga didapat

$$2C_3 + \frac{2}{3} C_1 = 0 \tag{2.25}$$

karena $q(x) = 0$. Kemudian menggunakan pengali-pengali yang sama pada kelima persamaan terakhir maka akan menghasilkan

$$\frac{2}{5}+\frac{2}{3}C_2=0 \qquad (2.26)$$

Maka didapatkan tiga persamaan linear untuk C_i. Persamaan (2.26) disubstitusikan ke persamaan (2.24) diperoleh

$$C_1+C_3=\frac{2}{5} \qquad (2.27)$$

Dengan mengeliminasi persamaan (2.25) dan (2.27) didapat $C_1=\frac{3}{5}$ dan $C_3=-\frac{1}{5}$.

Nilai-nilai C_i disubstitusikan ke persamaan (2.23) sehingga

$$q(x)=x^3+\frac{3}{5}x^2-\frac{3}{5}x-\frac{1}{5} \qquad (2.28)$$

dari persamaan (2.28) diperoleh

$$x_2=\frac{1+\sqrt{6}}{5}=0,689897948$$

$$x_3=\frac{1-\sqrt{6}}{5}=-0,289897948$$

Untuk mencari nilai w_i dapat menggunakan persamaan (2.17) dengan memasukkan nilai x_i ke persamaan (2.2) yaitu pada rumus rekursif polinomial Legendre $P_n(x_i)$. Sama halnya dengan metode Gauss-Legendre, untuk menghitung integral $f(x)$ di dalam selang $[-1,1]$ cukup hanya dengan menggunakan nilai fungsi f dengan $2n$ titik evaluasi yang telah ditentukan.

2.4 Hubungan Polinomial Legendre dan Gauss-Kuadratur

Persamaan Legendre memiliki solusi analitis dalam bentuk polinomial derajat n atau lebih dikenal sebagai polinomial Legendre. Persamaan Legendre dapat ditulis sebagai berikut.

$$(1-t^2)y"-2ty'+n(n+1)y=0,\ -1<t<1$$

dimana $n=0,1,2,\dots$ .Atau dapat ditulis

$$(1-t^2)\frac{d^2y}{dt^2}-2t\frac{dy}{dt}+n(n+1)y=0$$

Polinomial Legendre $P_n(x)$ dapat dinyatakan dalam bentuk berikut.

$$P_n(x)=\sum_{r=0}^{N}\frac{(-1)^r(2n-2r)!}{2^n r!(n-r)!(n-2r)!}x^{n-2r} \tag{2.29}$$

dimana $N=\begin{cases}\frac{n}{2} & \text{(jika } n \text{ genap)}\\ \frac{n-1}{2} & \text{(jika } n \text{ ganjil)}\end{cases}$

Penyelesaian secara analitik dari persamaan (2.29) pada beberapa n sebagai berikut.

Ketika $n = 2$

$$P_2(x)=\sum_{r=0}^{1}\frac{(-1)^r(4-2r)!}{4r!(2-r)!(2-2r)!}x^{2-2r}=\frac{1}{2}(3x^2-1)$$

Ketika $n = 3$

$$P_3(x)=\sum_{r=0}^{1}\frac{(-1)^r(6-2r)!}{8r!(3-r)!(3-2r)!}x^{3-2r}=\frac{1}{2}(5x^3-3x)$$

Ketika $n = 4$

$$P_4(x)=\sum_{r=0}^{2}\frac{(-1)^r(8-2r)!}{16r!(4-r)!(4-2r)!}x^{4-2r}=\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)$$

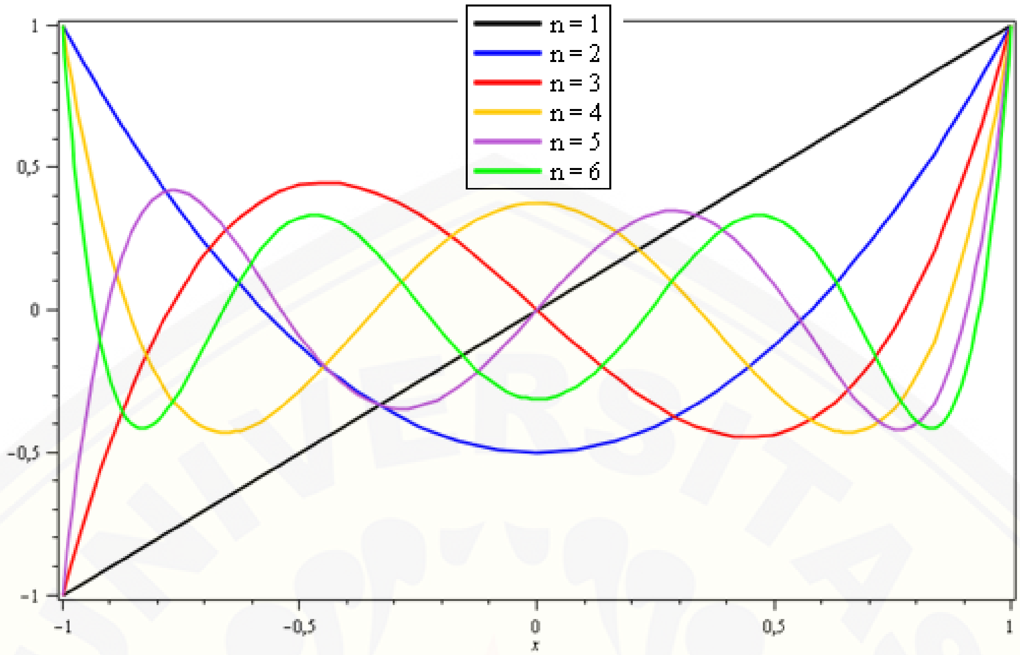
Ketika $n = 5$

$$P_5(x)=\sum_{r=0}^{2}\frac{(-1)^r(10-2r)!}{32r!(5-r)!(5-2r)!}x^{5-2r}=\frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x)$$

Ketika $n = 6$

$$P_6(x)=\sum_{r=0}^{3}\frac{(-1)^r(12-2r)!}{64r!(6-r)!(6-2r)!}x^{6-2r}=\frac{1}{16}(231x^6-315x^4+105x^2-5)$$

Akar-akar pada polinomial Legendre merupakan titik evaluasi pada Gauss-Kuadratur. Pada solusi analitik diatas dapat ditunjukkan dengan grafik dalam berbagai nilai koefisien n yaitu:



Gambar 2.3. Grafik Polinomial Legendre

Gambar 2.3 menunjukkan bahwa semakin besar koefisien n yang digunakan maka terjadi banyak titik puncak atau titik ekstrim dari penyelesaian polinomial Legendre tersebut.

2.5 Kesalahan (*Error*) pada Integrasi Numerik

Menurut Tresnaningsih (2010) hasil dari penyelesaian numerik merupakan nilai perkiraan atau pendekatan sehingga terdapat kesalahan terhadap nilai eksak. Dalam analisa metode numerik, kesalahan ini menjadi penting artinya. Hal ini dikarenakan kesalahan dalam pemakaian algoritma pendekatan akan menyebabkan nilai kesalahan yang besar, tentunya kesalahan ini tidak diharapkan. Sehingga pendekatan metode analitik membahas tingkat kesalahan dan tingkat kecepatan proses yang akan terjadi. Untuk memperkecil nilai kesalahan dibutuhkan operasi hitungan yang dilakukan dengan iterasi dalam jumlah yang banyak. Oleh karena itu diperlukan bantuan komputer untuk melakukan operasi hitungan tersebut.

Pada umumnya metode numerik tidak mengutamakan jawaban eksak dari persoalan yang sedang diselesaikan. Penyelesaian yang digunakan adalah penyelesaian pendekatan, oleh karena itu biasanya timbul kesalahan (*error*). Sehingga pada penyelesaian ini diusahakan untuk mendapatkan *error* sekecil mungkin (Munif & Prastyoko, 2003).

Hubungan antara nilai eksak, nilai perkiraan dan kesalahan dapat diberikan dalam bentuk berikut:

$$E = |\alpha - \alpha_*| \tag{2.30}$$

dengan:

α = nilai eksak

α_*= nilai perkiraan

E= kesalahan terhadap nilai eksak

Dari hubungan tersebut dapat diketahui nilai eksak berdasarkan pada besar nilai kesalahan atau *error* (Tresnaningsih, 2010). Beberapa jenis kesalahan yang biasa terjadi dalam perhitungan analisa numerik antara lain.

a. Kesalahan Pemotongan

Kesalahan pemotongan adalah kesalahan yang timbul pada saat melakukan pengurangan jumlah angka signifikan (Basuki & Ramadijanti, 2005). Kesalahan ini terjadi karena hanya memperhitungkan beberapa suku pertama saja. Sebagai contoh, suatu proses tak hingga diganti menjadi proses berhingga. Sangat sulit dalam memperhitungkan semua suku sampai tak terhingga. Apabila hanya memperhitungkan beberapa suku pertama saja maka hasilnya tidak sama dengan nilai eksak.

b. Kesalahan Pembulatan

Kesalahan pembulatan adalah kesalahan yang disebabkan oleh pembulatan suatu bilangan sampai pada beberapa digit tertentu (Basuki & Ramadijanti, 2005). Kesalahan ini terjadi apabila bilangan perkiraan digunakan untuk menggantikan bilangan eksak. Suatu bilangan dibulatkan pada posisi ke-n dengan membuat semua angka di sebelah kanan dari posisi tersebut nol. Sedangkan angka pada posisi ke-n tersebut tidak berubah atau dinaikkan satu digit yang tergantung apakah nilai tersebut lebih kecil atau lebih besar dari setengah pada angka posisi ke-*n*. Sebagai contoh, 0,12345 dibulatkan menjadi 0,12 atau 3,45678 dibulatkan menjadi 3,5. Hal ini dapat menimbulkan kesalahan pada nilai penyelesaian eksak meskipun telah melakukan perhitungan sesuai dengan aturan pembulatan.

c. Kesalahan Absolut, Kesalahan Relatif dan Persentase Kesalahan

Kesalahan absolut atau kesalahan mutlak adalah kesalahan yang disebabkan oleh perbedaan nilai eksak dengan nilai perkiraan dan tidak menunjukkan besarnya tingkat kesalahan. Kesalahan absolut didapat dari selisih nilai yang sebenarnya dengan nilai yang didapat dari perhitungan atau pengukuran, dinyatakan sebagai:

$$E_a = |\alpha - \alpha_*|$$

dengan E_a adalah kesalahan absolut. Kesalahan relatif merupakan besarnya tingkat kesalahan, yaitu perbandingan antara besarnya kesalahan absolut pada persamaan (2.29) dengan nilai eksak, dinyatakan dalam bentuk:

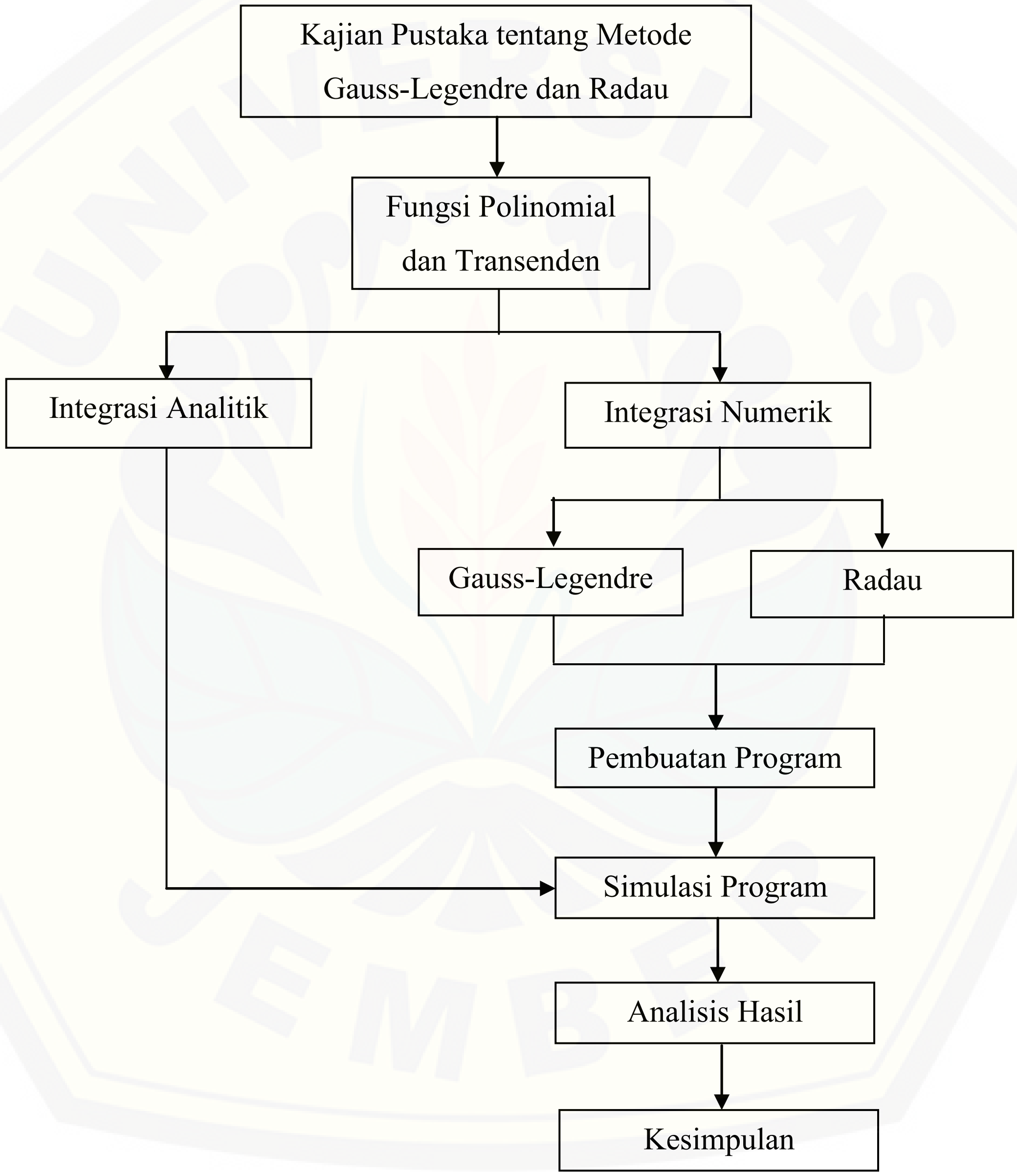
$$E_r = \frac{E_a}{x}$$

dengan E_r adalah kesalahan relatif terhadap nilai eksak. Kesalahan relatif seringkali dinyatakan dalam bentuk persentase berikut:

$$E_p = E_r \times 100\%$$

BAB 3. METODE PENELITIAN

Langkah-langkah yang akan dilakukan dalam menyelesaikan skripsi ini adalah sebagai berikut.



Gambar 3.1 Diagram metode penelitian

Dari diagram pada Gambar 3.1, langkah-langkah penelitian dapat dijelaskan sebagai berikut:

a. Kajian Pustaka

Penulis mengumpulkan sumber dan informasi dengan cara membaca dan memahami literatur yang berkaitan dengan integrasi numerik, khususnya pada metode Gauss-Kuadratur Legendre dan Radau.

b. Perumusan Masalah

Sebelum memulai kegiatan, penulis membuat rancangan terlebih dahulu. Penelitian berawal dari suatu masalah yang akan dijawab, dipecahkan, diatasi dan dicari solusinya secara ilmiah.

c. Integrasi Analitik

Penulis menyelesaikan permasalahan integrasi secara analitik pada beberapa fungsi yang bernilai eksak dengan interval $[a, b]$. Hasil dari integrasi analitik ini akan digunakan sebagai nilai eksak untuk *error* yang akan dibandingkan dari hasil integrasi numerik dengan menggunakan metode Gauss-Legendre dan Radau.

d. Integrasi Numerik

Penulis menyelesaikan permasalahan integrasi secara numerik pada beberapa fungsi yang dapat diintegralkan secara analitik untuk membandingkan nilai *error* dan keakuratan dari kedua metode dengan menggunakan metode Gauss-Kuadratur pada persamaan (2.4). Pembagian daerah yang digunakan yaitu $n = 1, 2, 3, 4, 5$ dan 6 untuk masing-masing metode yang dibandingkan yaitu metode Gauss-Legendre dan Radau.

e. Pembuatan Program

Pembuatan program dilakukan dengan menggunakan bantuan software Matlab. Paket Matlab yang dipergunakan adalah paket *guide (GUI Matlab)*. Langkah pembuatan program meliputi: perancangan tampilan dan penulisan skrip program.

f. Simulasi Program

Setelah pembuatan program selesai, langkah selanjutnya adalah melakukan simulasi dengan cara memvariasikan nilai n titik evaluasi pada Gauss-Legendre dan Radau serta fungsi-fungsi yang diintegralkan.

g. Analisis Hasil

Pada langkah ini, akan dilakukan analisis hasil yang diperoleh dari simulasi program. Analisis hasil dimaksudkan untuk mendapatkan nilai *error* absolut dan membandingkan keakuratan dari masing-masing metode terhadap hasil analitik.

h. Kesimpulan

Kesimpulan didapat dari keakuratan pada masing-masing perhitungan numerik terhadap hasil analitik dengan membandingkan nilai *error* absolutnya.

BAB 4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Berdasarakan langkah-langah yang telah diuraikan pada bab 3 maka pada bab ini akan dibahas penyelesaian numerik pada metode Gauss-Legendre dan Radau dalam perhitungan integrasi serta perbandingan nilai *error* absolut antara keduanya.

4.1 Penyelesaian Integrasi Secara Analitik

Misalkan diberikan beberapa fungsi sebagai berikut:

a. $f(x) = x^6 - 2x^5 + x^3 - 1$ $[2, 5]$ (4.1)

b. $f(x) = \left(x^5 + 2x^{\frac{2}{3}} - 1\right)^2$ $[0, 2]$

c. $f(x) = \sin(2x) + \cos(x) + 5e^x$ $[0, 1]$

d. $f(x) = 2\sin^3(x) + 3\sin^2(x) + \cos(x) + 10$ $[-1, 3]$

e. $f(x) = \frac{2}{5}x^9 + \sin^3(x) - 1$ $[1, 2]$

f. $f(x) = 3^x + e^{x-1}$ $[2, 5]$

g. $f(x) = 2xe^{\left(-3x^2\right)}$ $[0, 2]$ (4.2)

h. $f(x) = \ln\left(x^2 + 3\right) + 7$ $[0, 3]$

i. $f(x) = 1 - 2\ln^2(x+1)$ $[0\ 1]$

j. $f(x) = \ln(e^x)$ $[-1, 2]$

Fungsi-fungsi tersebut merupakan fungsi polinomial dan transenden yang akan diintegralkan pada interval $[a, b]$. Beberapa fungsi di atas akan diselesaikan secara manual dengan menggunakan perhitungan analitik dan numerik yaitu pada fungsi (4.1) dan (4.2). Sedangkan fungsi yang lainnya akan diselesaikan menggunakan program.

Berdasarkan fungsi-fungsi di atas maka dapat disajikan penyelesaian analitik sebagai berikut:

a) $f(x) = x^6 - 2x^5 + x^3 - 1$, $[2, 5]$

$$\int_2^5 \left(x^6 - 2x^5 + x^3 - 1\right) dx = \left[\frac{1}{7}x^7 - \frac{1}{3}x^6 + \frac{1}{4}x^4 - x\right]_2^5$$

$$= \frac{1}{7}5^7 - \frac{1}{3}5^6 + \frac{1}{4}5^4 - 5 - \left(\frac{1}{7}2^7 - \frac{1}{3}2^6 + \frac{1}{4}2^4 - 2\right)$$

$$= 6104,678571$$

b) $f(x) = 2xe^{-3x^2}$, $[0, 2]$

$$\int_0^2 \left(2xe^{-3x^2}\right) dx = \int_0^2 \left(2xe^{-3x^2}\right) \frac{dx}{-6x}$$

$$= -\frac{1}{3}\int_0^2 \left(e^{-3x^2}\right) dx$$

$$= -\frac{1}{3}\left[e^{-3x^2}\right]_0^2$$

$$= -\frac{1}{3}\left(e^{-12} - e^0\right)$$

$$= 0,333331285$$

4.2 Penyelesaian Integrasi Secara Numerik

Bagian ini membahas tentang perhitungan integrasi secara numerik menggunakan metode Gauss-Legendre dan Radau sebagaimana yang telah dibahas pada bab 2.

4.2.1 Metode Gauss-Legendre

Pada bagian ini akan diberikan contoh penyelesaian metode Gauss-Legendre secara manual menggunakan beberapa nilai n, dimana n merupakan titik evaluasi. Fungsi-fungsi yang dipergunakan meliputi fungsi (4.1) dan (4.2)

a) Untuk $n = 4$ pada $f(x) = x^6 - 2x^5 + x^3 - 1$ dan interval $[2, 5]$

Pada sembarang fungsi yang memiiki interval $[a, b]$ harus diubah terlebih dahulu ke dalam bentuk Gauss-Kuadratur sehingga fungsi awal berubah dan batasnya menjadi $[-1,1]$. Dalam hal ini dapat menggunakan persamaan (2.5) sehingga

$$\int_{2}^{5}\left(x^6-2x^5+x^3-1\right)dx=\frac{3}{2}\int_{-1}^{1}f\left[\frac{7+3x}{2}\right]dx$$
$$=\frac{3}{2}\int_{-1}^{1}\left(\left(\frac{7+3x}{2}\right)^6-2\left(\frac{7+3x}{2}\right)^5+\left(\frac{7+3x}{2}\right)^3-1\right)dx$$

Setelah fungsi awal berubah maka dapat menggunakan rumus Gauss-Legendre empat titik seperti pada persamaan (2.4). Untuk menentukan nilai $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$ dan $f(x_4)$ yaitu:

$$f(-0{,}861136312)=\left(\frac{7+3(-0{,}861136312)}{2}\right)^6-2\left(\frac{7+3(-0{,}861136312)}{2}\right)^5+\left(\frac{7+3(-0{,}861136312)}{2}\right)^3-1$$
$$=20{,}70761128$$

$$f(-0{,}339981044)=\left(\frac{7+3(-0{,}339981044)}{2}\right)^6-2\left(\frac{7+3(-0{,}339981044)}{2}\right)^5+\left(\frac{7+3(-0{,}339981044)}{2}\right)^3-1$$
$$=262{,}3368475$$

$$f(0{,}339981044)=\left(\frac{7+3(0{,}339981044)}{2}\right)^6-2\left(\frac{7+3(0{,}339981044)}{2}\right)^5+\left(\frac{7+3(0{,}339981044)}{2}\right)^3-1$$
$$=2147{,}473421$$

$$f\left(0{,}861136312\right)=\left(\frac{7+3\left(0{,}861136312\right)}{2}\right)^{6}-2\left(\frac{7+3\left(0{,}861136312\right)}{2}\right)^{5}+$$
$$\left(\frac{7+3\left(0{,}861136312\right)}{2}\right)^{3}-1$$
$$=7161{,}137521$$

Kemudian nilai $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$ dan $f(x_4)$ tersebut disubstitusikan ke persamaan (2.4) sehingga

$$\frac{3}{2}\int_{-1}^{1}\left(\left(\frac{7+3x}{2}\right)^{6}-2\left(\frac{7+3x}{2}\right)^{5}+\left(\frac{7+3x}{2}\right)^{3}-1\right)dx=$$

$$\frac{3}{2}(20{,}70761128.\ w_1+262{,}3368475.\ w_2+2147{,}473421.\ w_3+7161{,}137521.\ w_4)=$$

$$\frac{3}{2}(20{,}70761128.\ 0{,}3478548446+262{,}3368475.\ 0{,}6521451548+$$
$$2147{,}473421.\ 0{,}6521451548+7161{,}137521.\ 0{,}3478548446)$$
$$=6104{,}678571$$

b) Untuk $n=2$ pada fungsi $f\left(x\right)=2xe^{\left(-3x^2\right)}$ dan interval [0,2]

Seperti perhitungan pada poin a, fungsi awal diubah terlebih dahulu ke dalam bentuk Gauss-Kuadratur sehingga didapat

$$\int_{0}^{2}\left(2xe^{-3x^2}\right)dx=\frac{2}{2}\int_{-1}^{1}f\left[\frac{2+2x}{2}\right]dx$$
$$=\int_{-1}^{1}f\left[1+x\right]dx$$
$$=\int_{-1}^{1}\left(2\left(1+x\right)e^{-3(1+x)^2}\right)dx$$

Setelah fungsi awal berubah maka dapat menggunakan rumus Gauss-Kuadratur dua titik seperti pada persamaan (2.3). Untuk menentukan nilai $f(x_1)$ dan $f(x_2)$ yaitu:

$$f\left(-0{,}577350269\right)=2\left(1-0{,}577350269\right)e^{-3(1-0{,}577350269)^2}$$
$$=0{,}4946213757$$

$$f(0{,}577350269) = 2(1+0{,}577350269)e^{-3(1+0{,}577350269)^2}$$
$$= 0{,}1808589466.\ 10^{-2}$$

Kemudian nilai $f(x_1)$ dan $f(x_2)$ tersebut disubstitusikan ke persamaan (2.3) sehingga

$$\int_{-1}^{1}\left(2(1+x)e^{-3(1+x)^2}\right)dx = 0{,}4946213757.\ \mathrm{w}_1 + 0{,}1808589466.\ 10^{-2}.\ \mathrm{w}_2$$
$$= 0{,}4946213757.\ 0{,}9999999996 + 0{,}1808589466.\ 10^{-2}.\ 0{,}9999999996$$
$$=0{,}4964299650$$

4.2.2 Metode Radau

Pada bagian ini akan diberikan contoh penyelesaian metode Radau secara manual menggunakan dua nilai n, dimana n merupakan titik evaluasi.

a) Untuk $n = 4$ pada fungsi $f(x) = x^6 - 2x^5 + x^3 - 1$ dan interval $[2, 5]$

$$\int_{2}^{5}\left(x^6 - 2x^5 + x^3 - 1\right)dx = \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} f\left[\frac{7+3x}{2}\right]dx$$
$$= \frac{3}{2}\int_{-1}^{1}\left(\left(\frac{7+3x}{2}\right)^6 - 2\left(\frac{7+3x}{2}\right)^5 + \left(\frac{7+3x}{2}\right)^3 - 1\right)dx$$

$$f(-1) = \left(\frac{7+3(-1)}{2}\right)^6 - 2\left(\frac{7+3(-1)}{2}\right)^5 + \left(\frac{7+3(-1)}{2}\right)^3 - 1$$
$$= 7$$

$$f(-0{,}5753189) = \left(\frac{7+3(-0{,}5753189)}{2}\right)^6 - 2\left(\frac{7+3(-0{,}5753189)}{2}\right)^5 +$$
$$\left(\frac{7+3(-0{,}5753189)}{2}\right)^3 - 1$$
$$= 98{,}56870320$$

$$f(0{,}1810663)=\left(\frac{7+3(0{,}1810663)}{2}\right)^6-2\left(\frac{7+3(0{,}1810663)}{2}\right)^5+$$
$$\left(\frac{7+3(0{,}1810663)}{2}\right)^3-1$$
$$=1404{,}702737$$

$$f(0{,}8228241)=\left(\frac{7+3(0{,}8228241)}{2}\right)^6-2\left(\frac{7+3(0{,}8228241)}{2}\right)^5+$$
$$\left(\frac{7+3(0{,}8228241)}{2}\right)^3-1$$
$$=6607{,}686955$$

$$\frac{3}{2}\int_{-1}^{1}\left(\left(\frac{7+3x}{2}\right)^6-2\left(\frac{7+3x}{2}\right)^5+\left(\frac{7+3x}{2}\right)^3-1\right)dx=$$

$$\frac{3}{2}(7.\ w_1+98{,}56870320.\ w_2+1404{,}702737.\ w_3+6607{,}686955.\ w_4)=$$

$$\frac{3}{2}(7.\ 0{,}125+98{,}56870320.\ 0{,}6576886+1404{,}702737.\ 0{,}7763870+$$
$$6607{,}686955.\ 0{,}4409244)=6104{,}678793$$

b) Untuk $n = 2$ pada fungsi $f(x) = 2xe^{-3x^2}$ dan interval $[0, 2]$

$$\int_0^2\left(2xe^{-3x^2}\right)dx=\frac{2}{2}\int_{-1}^{1}f\left[\frac{2+2x}{2}\right]dx$$
$$=\int_{-1}^{1}f[1+x]dx=\int_{-1}^{1}\left(2(1+x)e^{-3(1+x)^2}\right)dx$$

$$f(-1)=2(1-1)e^{-3(1-1)^2}$$
$$=0$$

$$f(0{,}3333333)=2(1+0{,}3333333)e^{-3(1+0{,}3333333)^2}$$
$$=0{,}01287453642$$

$$\int_{-1}^{1}\left(2(1+x)e^{-3(1+x)^2}\right)dx=0{,}4946213757.\ w_1+0{,}1808589466.\ 10^{-2}.w_2$$
$$=0.\ 0{,}5+0{,}01287453642.\ 1{,}5$$
$$=0{,}012875$$

4.3 Perhitungan Nilai Error Absolut

Perhitungan error absolut dilakukan dengan menggunakan persamaan (2.30). Pada bagian ini, perhitungan *error* absolut dilakukan pada beberapa nilai n dan dua fungsi yang telah dihitung secara analitik dan numerik dengan menggunakan metode Gauss-Legendre dan Radau.

a) Untuk $n = 4$ pada fungsi $f(x) = x^6 - 2x^5 + x^3 - 1$ dan interval $[2, 5]$

Hasil analitik memberikan

$$\int_2^5 \left(x^6 - 2x^5 + x^3 - 1\right) dx = 6104,678571$$

Perhitungan dengan menggunakan metode Gauss-Legendre memberikan

$$\frac{3}{2}\int_{-1}^{1}\left(\left(\frac{7+3x}{2}\right)^6 - 2\left(\frac{7+3x}{2}\right)^5 + \left(\frac{7+3x}{2}\right)^3 - 1\right) dx = 6104,678571$$

Sehingga didapatkan *error* absolut sebagai berikut:

$$E = |\alpha - \alpha_*|$$

$$E = |6104,678571 - 6104,678571| = 0$$

Perhitungan dengan menggunakan metode Radau memberikan

$$\frac{3}{2}\int_{-1}^{1}\left(\left(\frac{7+3x}{2}\right)^6 - 2\left(\frac{7+3x}{2}\right)^5 + \left(\frac{7+3x}{2}\right)^3 - 1\right) dx = 6104,678793$$

Sehingga didapatkan *error* absolut sebagai berikut:

$$E = |\alpha - \alpha_*|$$

$$E = |6104,678571 - 6104,678793| = 2,22.\ 10^{-6}$$

Dari nilai *error* pada masing-masing metode, dapat dilihat bahwa Gauss-Legendre menghasilkan *error* yang lebih kecil dibandingkan dengan Radau. Sehingga tingkat akurasi Gauss-Legendre lebih besar daripada Radau untuk fungsi polinomial berderajat enam tersebut. Hal ini dikarenakan untuk titik evaluasi sebesar empat Gauss-Legendre akan memberikan hasil mendekati eksak sampai pada polinomial derajat tujuh sedangkan Radau akan mendekati eksak hanya sampai pada polinomial derajat enam.

b) Untuk $n = 2$ pada fungsi $f(x) = 2xe^{-3x^2}$ dan interval $[0, 2]$

Hasil analitik memberikan

$$\int_0^2 \left(2xe^{-3x^2}\right)dx = 0,333331285$$

Perhitungan dengan menggunakan metode Gauss-Legendre memberikan

$$\int_{-1}^1 \left(2(1+x)e^{-3(1+x)^2}\right)dx = 0,4964299650$$

Sehingga didapatkan *error* absolut sebagai berikut:

$$E = |\alpha - \alpha_*|$$

$$E = |0,333331285 - 0,496429965| = 1,631.\ 10^{-2}$$

Perhitungan dengan menggunakan metode Radau memberikan

$$\int_{-1}^1 \left(2(1+x)e^{-3(1+x)^2}\right)dx = 0,012875$$

Sehingga didapatkan *error* absolut sebagai berikut:

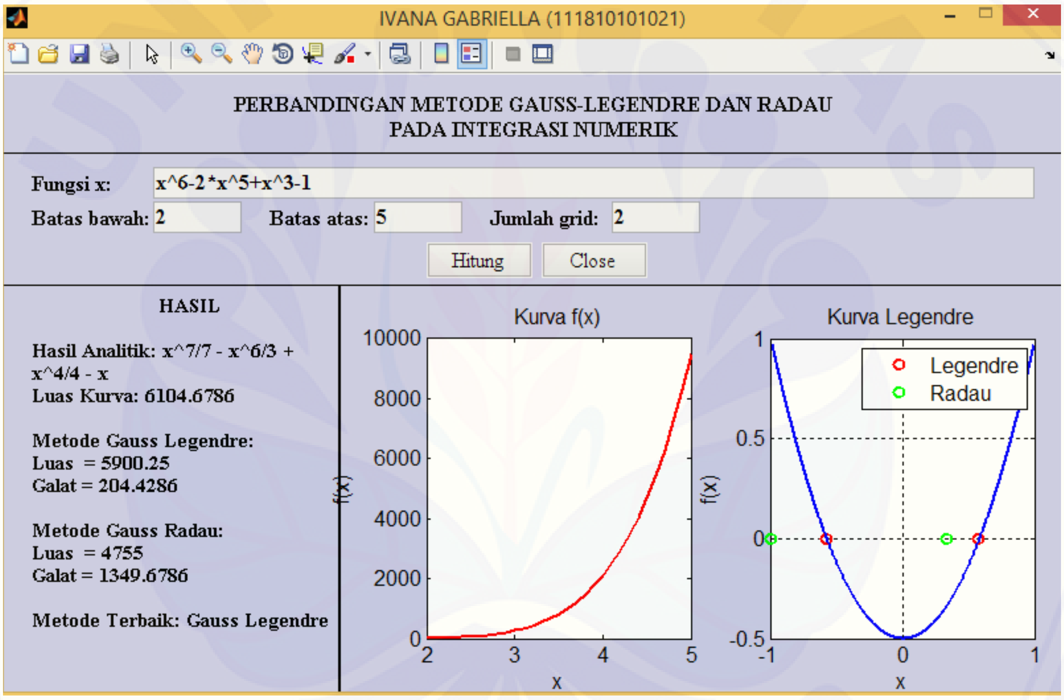
$$E = |\alpha - \alpha_*|$$

$$E = |0,333331285 - 0,012875| = 0,32046$$

Dari nilai *error* dari masing-masing metode pada fungsi transenden diatas, keduanya sama-sama menghasilkan *error* yang besar namun Gauss-Legendre masih menghasilkan *error* yang lebih kecil dibandingkan dengan Radau.

4.4 Simulasi Perbandingan Nilai Error Absolut pada Metode Gauss-Legendre dan Radau Terhadap Hasil Analitik

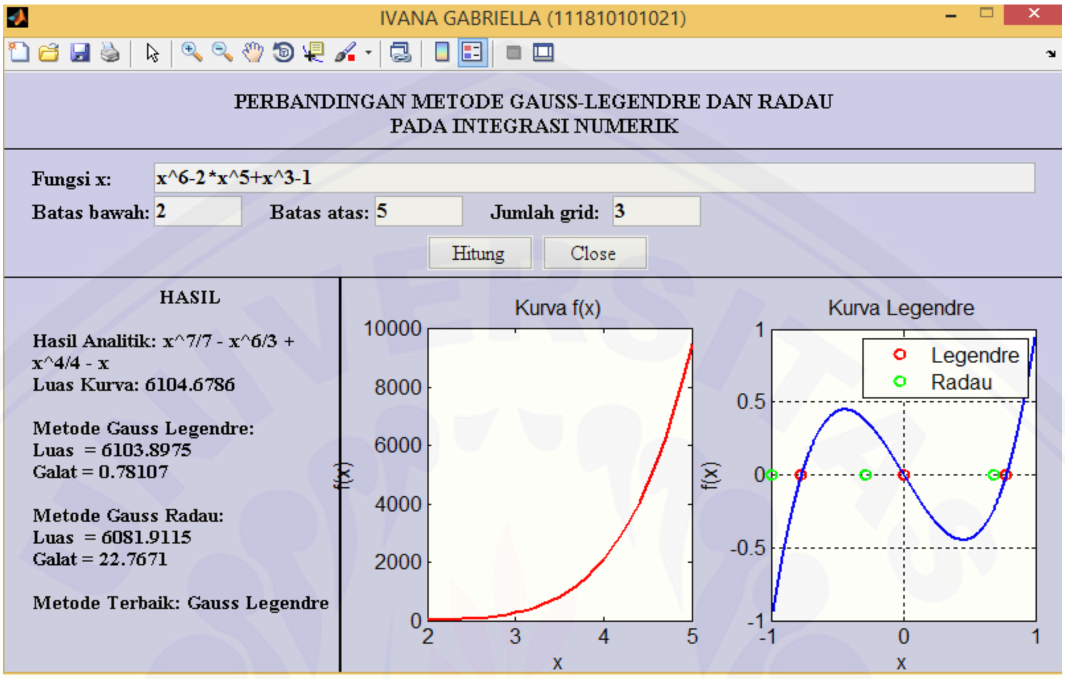
Pada subbab ini akan disimulasikan perhitungan integrasi suatu fungsi berdasarkan pada nilai input yang telah diberikan. Output berupa nilai numerik untuk hasil analitik, Gauss-Legendre dan Radau. Setelah fungsi, interval dan nilai n diinputkan maka tekan tombol hitung sehingga program akan menghasilkan output berupa nilai analitik, nilai pendekatan dari masing-masing metode dan nilai *error* dari nilai pendekatan tersebut serta grafik fungsi dan grafik polinomial Legendre beserta plot dari masing-masing metode. Kemudian juga akan muncul metode terbaik dari hasil perhitungan antara metode Gauss-Legendre dan Radau terhadap hasil analitik. Fungsi yang digunakan yaitu fungsi (4.1) dan (4.2) dengan interval $[a, b]$ dan beberapa nilai n. Fungsi-fungsi tersebut meliputi fungsi polinomial dan transenden dengan derajat yang berbeda untuk melihat tingkat keakuratan dari masing-masing metode. Untuk mengakhiri program, tekan tombol keluar. Secara lebih jelas dapat dilihat pada gambar di bawah ini.



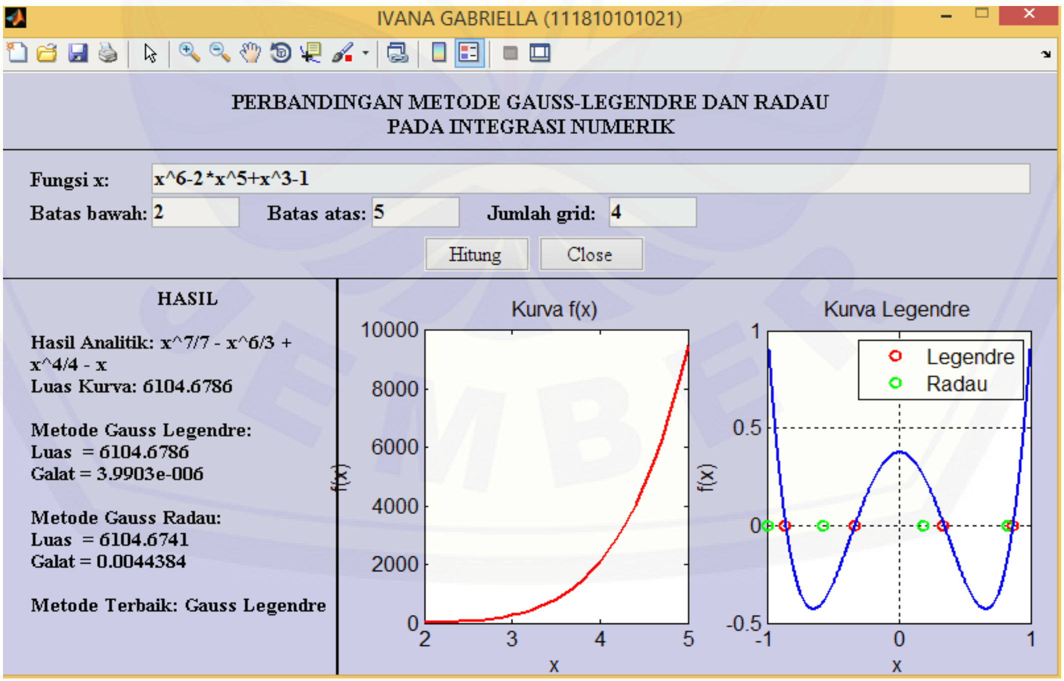
Gambar 4.1 Tampilan simulasi n = 2 untuk $f(x) = x^6 - 2x^5 + x^3 - 1$

Pada fungsi polinomial derajat enam sebagaimana ditunjukkan oleh Gambar 4.1, 4.2, 4.3, 4.4 dan 4.5, untuk titik evaluasi sebesar dua kedua metode memberikan *error* yang besar namun *error* yang dihasilkan Gauss-Legendre lebih kecil dibandingkan Radau. Hal ini dikarenakan Gauss-Legendre akan menghasilkan nilai yang mendekati eksak sampai pada polinomial derajat tiga sedangkan Radau hanya sampai pada polinomial derajat dua. Sehingga untuk polinomial derajat enam seperti diatas harus menggunakan titik evaluasi sebanyak empat pada masing-masing metode sebagaimana ditunjukkan oleh Gambar 4.3. Hal ini juga berlaku pada Gambar 4.2 yang menggunakan titik evaluasi sebanyak tiga.

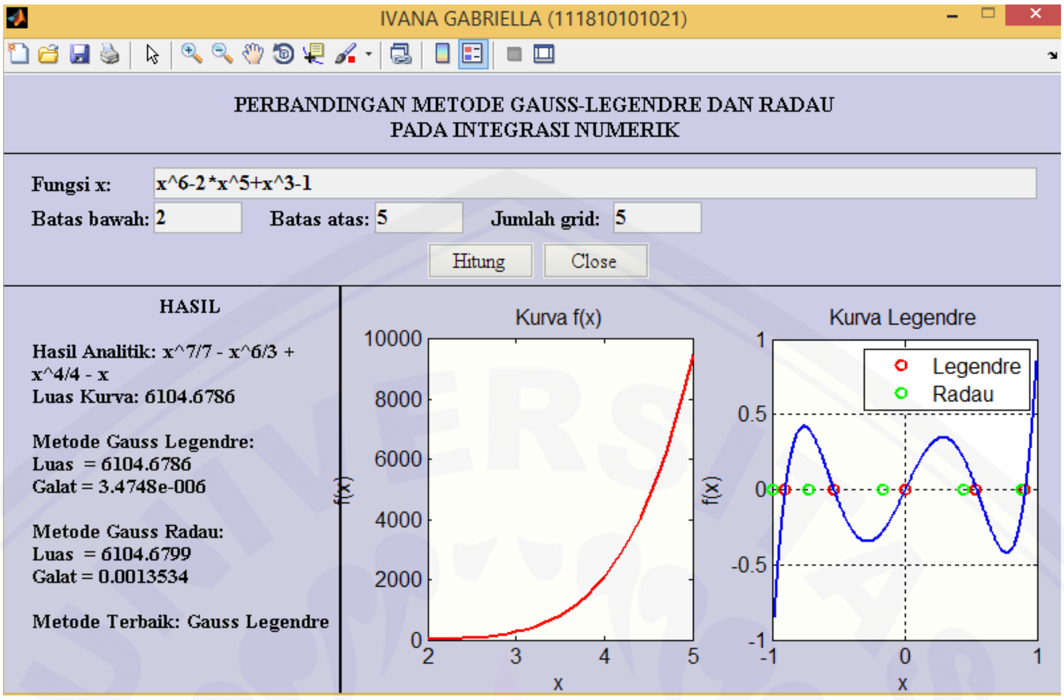
Sedangkan untuk $n = 5$ dan $n = 6$ kedua metode menghasilkan *error* yang semakin kecil namun namun *error* yang dihasilkan Gauss-Legendre lebih kecil dibandingkan Radau.



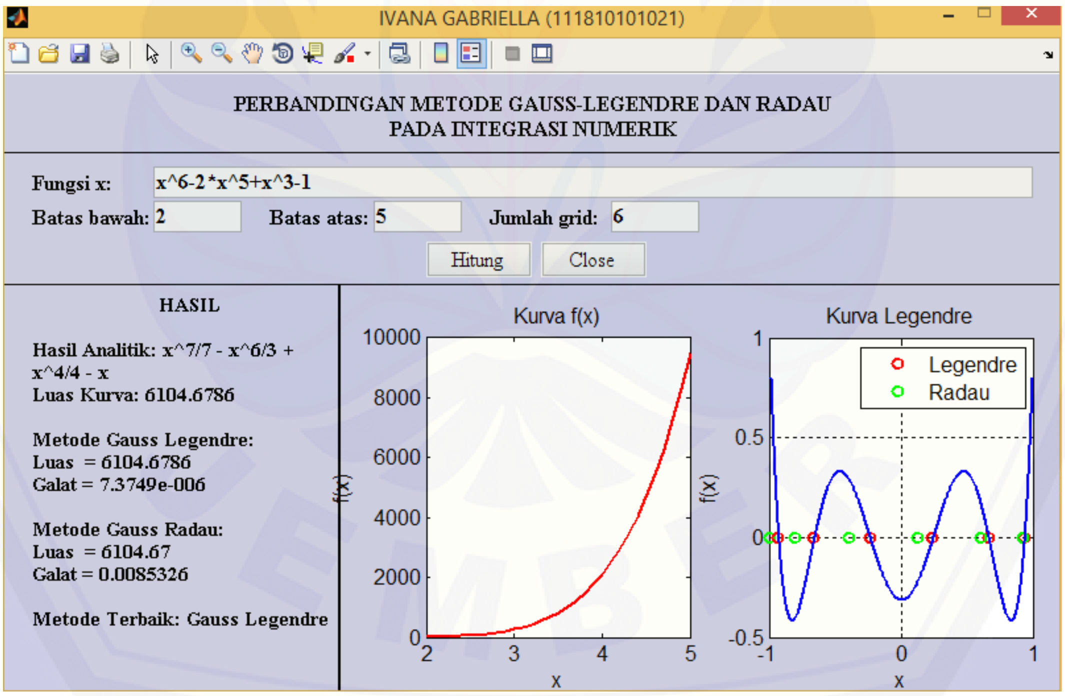
Gambar 4.2 Tampilan simulasi $n = 3$ untuk $f(x) = x^6 - 2x^5 + x^3 - 1$



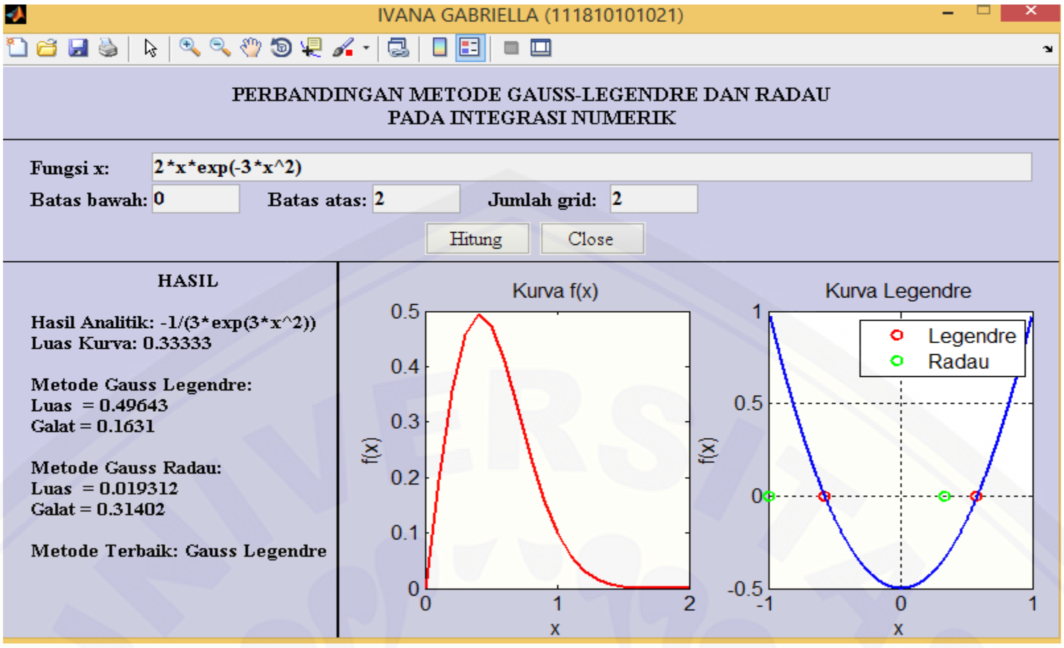
Gambar 4.3 Tampilan simulasi $n = 4$ untuk $f(x) = x^6 - 2x^5 + x^3 - 1$



Gambar 4.4 Tampilan simulasi $n = 5$ untuk $f(x) = x^6 - 2x^5 + x^3 - 1$

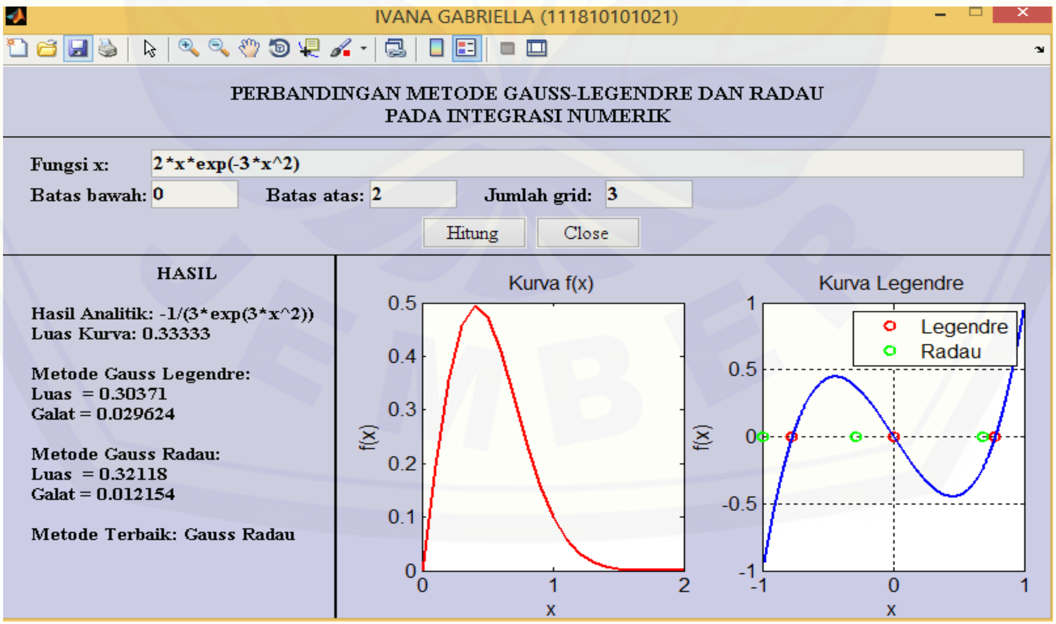


Gambar 4.5 Tampilan simulasi $n = 6$ untuk $f(x) = x^6 - 2x^5 + x^3 - 1$

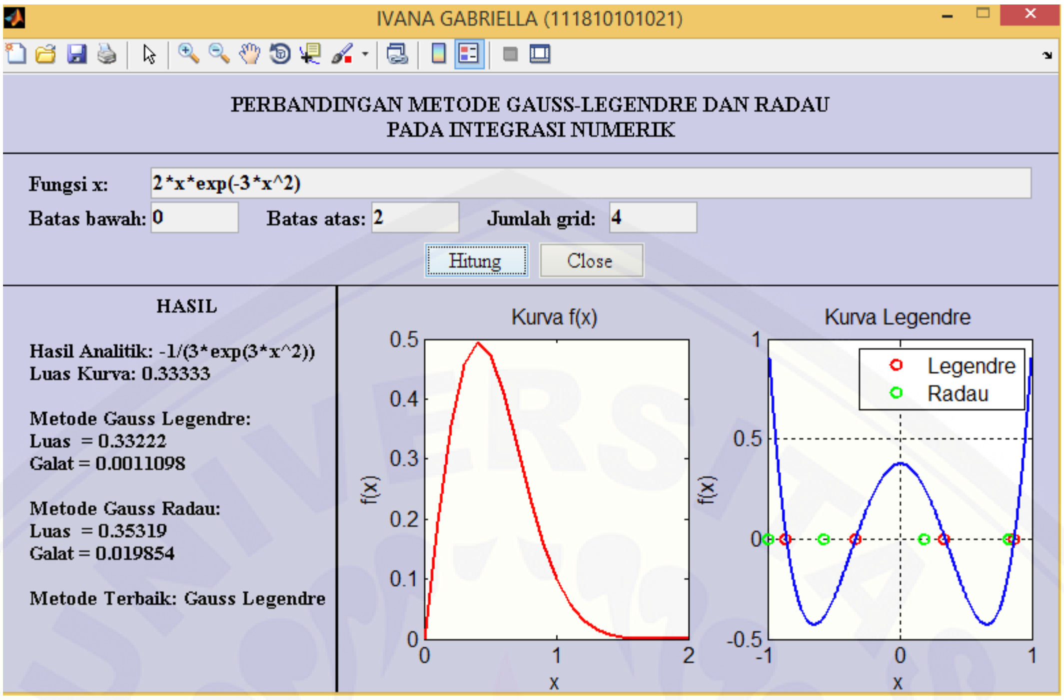


Gambar 4.6 Tampilan simulasi n = 2 untuk $f(x) = 2xe^{(-3x^2)}$

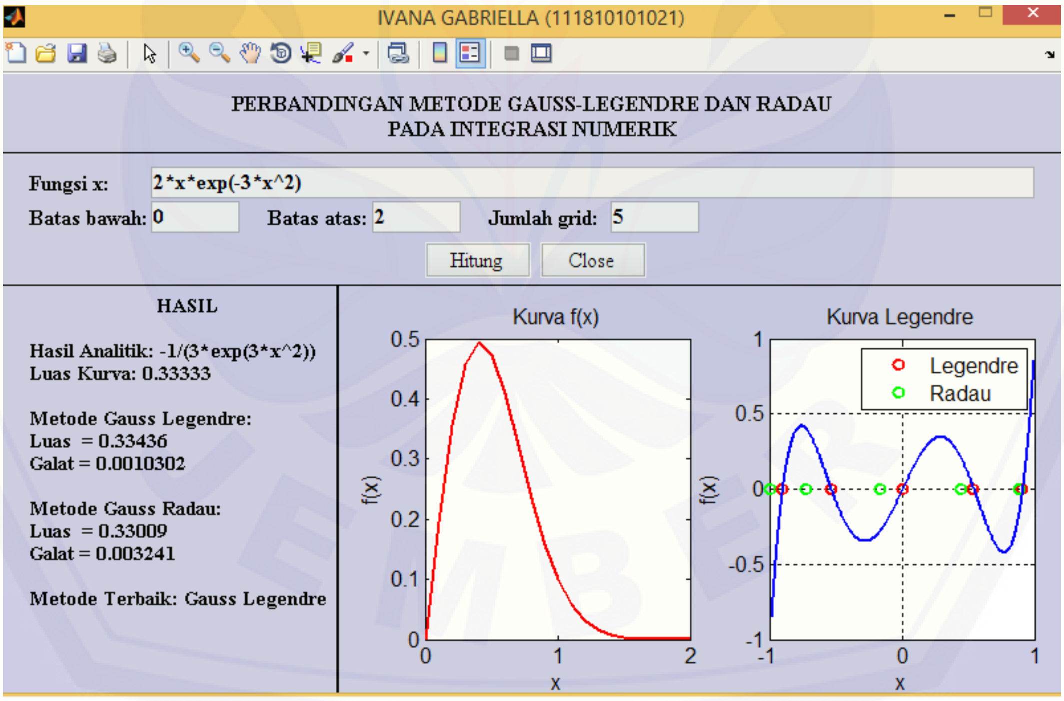
Pada fungsi transenden sebagaimana ditunjukkan oleh Gambar 4.6, 4.7, 4.8, 4.9 dan 4.10, kedua metode memberikan nilai *error* yang semakin kecil dari n = 2 sampai n = 6. Namun untuk n = 3 dan n = 6 *error* yang dihasilkan oleh Radau lebih kecil dibandingkan Gauss-Legendre.



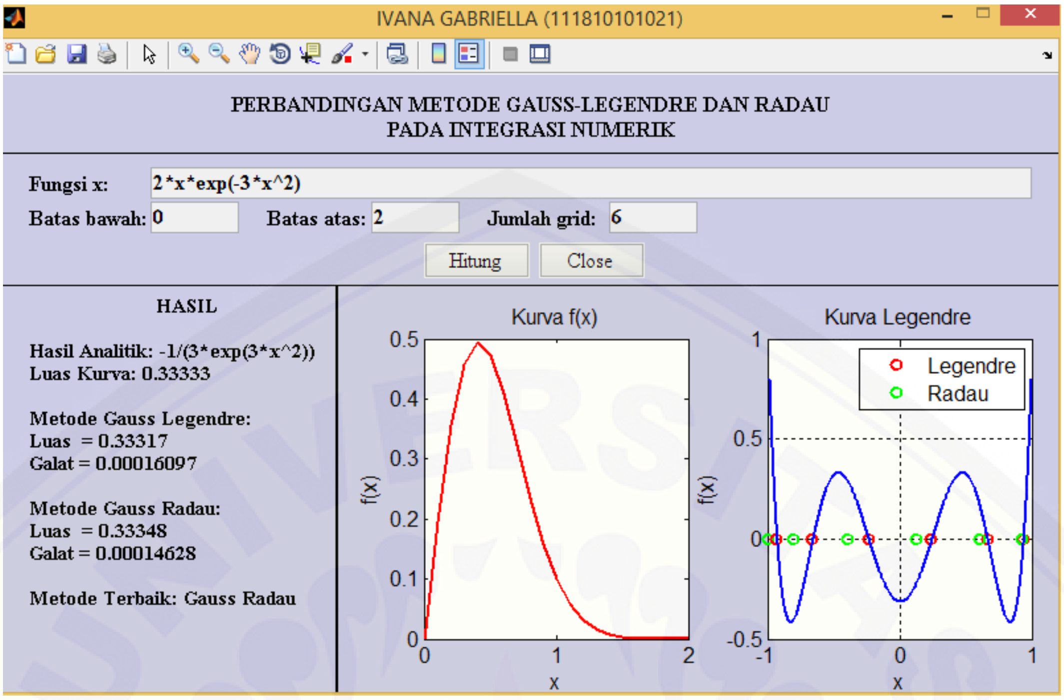
Gambar 4.7 Tampilan simulasi n = 3 untuk $f(x) = 2xe^{(-3x^2)}$



Gambar 4.8 Tampilan simulasi n = 4 untuk $f\left(x\right)=2xe^{\left(-3x^2\right)}$



Gambar 4.9 Tampilan simulasi n = 5 untuk $f\left(x\right)=2xe^{\left(-3x^2\right)}$



Gambar 4.10 Tampilan simulasi n = 6 untuk $f(x) = 2xe^{(-3x^2)}$

Berdasarkan ilustrasi program diatas dapat terlihat bahwa nilai perkiraan yang dihasilkan dari metode Gauss-Legendre dan Radau mendekati hasil analitik, walaupun terdapat beberapa nilai yang sedikit jauh dari hasil analitik. Hal ini dapat dilihat dari nilai *error* pada masing-masing metode yang berubah-ubah di setiap jumlah n yang diinputkan.

4.5 Analisa Hasil Simulasi Perbandingan Nilai Error Absolut pada Metode Gauss-Legendre dan Radau Terhadap Hasil Analitik

Berdasarkan simulasi pada subbab 4.4 di atas maka didapatkan hasil perbandingan nilai *error* pada masing-masing metode yang ditunjukkan pada tabel 4.1 hingga tabel 4.10 dengan menggunakan fungsi-fungsi yang telah dipaparkan pada subbab 4.1. Fungsi-fungsi tersebut meliputi fungsi polinomial, transenden dan kombinasi antara keduanya dengan menggunakan titik evaluasi 2, 3, 4, 5 dan 6. Secara lebih jelas dapat dilihat pada gambar di bawah ini.

Tabel 4.1 Hasil analitik dan numerik pada fungsi $f(x)=x^6-2x^5+x^3-1$, [2, 5]

N	Analitik	*Error* Absolut Legendre	*Error* Absolut Radau
2	6104,6786	204,4286	1349,6786
3	6104,6786	0,78107	22,7671
4	6104,6786	$3{,}9903.\ 10^{-6}$	0,0044384
5	6104,6786	$3{,}4748.\ 10^{-6}$	0,0013534
6	6104,6786	$7{,}3749.\ 10^{-7}$	0,00085326

Tabel 4.2 Hasil analitik dan numerik pada fungsi $f(x)=\left(x^5+2x^{\frac{2}{3}}-1\right)^2$, [0, 2]

N	Analitik	*Error* Absolut Legendre	*Error* Absolut Radau
2	228,8246	97,1439	180,664
3	228,8246	13,3105	44,3367
4	228,8246	0,55668	3,4719
5	228,8246	0,0069493	0,047351
6	228,8246	0,0022231	0,0082343

Tabel 4.3 Hasil analitik dan numerik pada fungsi $f(x)=\sin(2x)+\cos(x)+5e^x$, [0, 1]

N	Analitik	*Error* Absolut Legendre	*Error* Absolut Radau
2	10,141	0,0051233	0,018582
3	10,141	$2{,}222.\ 10^{-5}$	0,00034482
4	10,141	$1{,}2316.\ 10^{-7}$	$3{,}3264.\ 10^{-6}$
5	10,141	$4{,}7648.\ 10^{-9}$	$9{,}096.\ 10^{-7}$
6	10,141	$3{,}5182.\ 10^{-10}$	$6{,}5379.\ 10^{-6}$

Tabel 4.4 Hasil analitik dan numerik pada fungsi $f(x)=2\sin^3(x)+3\sin^2(x)+\cos(x)+10$, $[-1,3]$

N	Analitik	*Error* Absolut Legendre	*Error* Absolut Radau
2	48,8188	1,3179	7,2022
3	48,8188	0,080799	2,9382
4	48,8188	0,010973	0,63131
5	48,8188	0,0024436	0,08334
6	48,8188	0,00022203	0,0073033

Tabel 4.5 Hasil analitik dan numerik pada fungsi $f(x)=\frac{2}{5}x^9+\sin^3(x)-1$, [1,2]

N	Analitik	*Error* Absolut Legendre	*Error* Absolut Radau
2	40,7999	2,3202	11,0425
3	40,7999	0,041242	0,42994
4	40,7999	0,00012327	0,0033196
5	40,7999	$1{,}7286.\ 10^{-8}$	$7{,}5472.\ 10^{-6}$
6	40,7999	$5{,}4108.\ 10^{-9}$	$5{,}8252.\ 10^{-5}$

Tabel 4.6 Hasil analitik dan numerik pada fungsi $f(x)=3^x+e^{x-1}$, $[2,5]$

N	Analitik	*Error* Absolut Legendre	*Error* Absolut Radau
2	264,8758	5,0129	28,6447
3	264,8758	0,11103	0,92627
4	264,8758	0,0013169	0,014465
5	264,8758	$9{,}8867.\ 10^{-6}$	$8{,}9154.\ 10^{-5}$
6	264,8758	$2{,}2891.\ 10^{-7}$	0,000029748

Tabel 4.7 Hasil analitik dan numerik pada fungsi $f(x) = 2xe^{(-3x^2)}$, [0, 2]

N	Analitik	*Error* Absolut Legendre	*Error* Absolut Radau
2	0,33333	0,1631	0,31402
3	0,33333	0,029624	0,012154
4	0,33333	0,0011098	0,019854
5	0,33333	0,0010302	0,003241
6	0,33333	0,00016097	0,00014628

Tabel 4.8 Hasil nalitik dan numerik pada fungsi $f(x) = \ln(x^2 + 3) + 7$, [0, 3]

N	Analitik	*Error* Absolut Legendre	*Error* Absolut Radau
2	26,0823	0,018499	0,11994
3	26,0823	0,0012574	0,00058907
4	26,0823	$3,2726.\ 10^{-5}$	0,00046918
5	26,0823	$9,8047.\ 10^{-6}$	$2,8026.\ 10^{-5}$
6	26,0823	$3,1044.\ 10^{-7}$	$1,1579.\ 10^{-5}$

Tabel 4.9 Hasil analitik dan numerik pada fungsi $f(x) = 1 - 2\ln^2(x+1)$, [0, 1]

N	Analitik	*Error* Absolut Legendre	*Error* Absolut Radau
2	0,62513	0,0017667	0,01478
3	0,62513	$4,6649.\ 10^{-5}$	0,00036425
4	0,62513	$1,215.\ 10^{-6}$	$9,1071.\ 10^{-6}$
5	0,62513	$3,1654.\ 10^{-8}$	$1,5481.\ 10^{-7}$
6	0,62513	$9,4563.\ 10^{-10}$	$8,3086.\ 10^{-8}$

Tabel 4.10 Hasil analitik dan numerik pada fungsi $f(x) = \ln(e^x)$, $[-1, 2]$

N	Analitik	*Error* Absolut Legendre	*Error* Absolut Radau
2	1,5	0	0
3	1,5	0	$1{,}903.\,10^{-6}$
4	1,5	0	$1{,}2415.\,10^{-6}$
5	1,5	0	$1{,}2611.\,10^{-8}$
6	1,5	$7{,}5.\,10^{-10}$	$2{,}4402.\,10^{-9}$

Dari hasil simulasi tersebut, metode Gauss-Legendre memberikan rumus rekursif tingkat ketelitian sebesar $2n - 1$, yang berarti saat mengunakan jumlah titik evaluasi $n = 2$ maka memberikan hasil yang eksak saat dipergunakan untuk menghitung fungsi polinomial derajat satu dan dua. Namun jika menggunakan $n = 3$ maka memberikan hasil yang eksak untuk fungsi polinomial derajat satu, dua, tiga, empat dan lima. Berlaku hal yang sama saat menggunakan n yang lain. Metode Radau memberikan rumus rekursif tingkat ketelitian sebesar $2n - 2$ yang berarti bahwa saat menggunakan jumlah titik evaluasi $n = 2$ hanya dapat bernilai eksak saat menghitung fungsi polinomial derajat satu dan dua. Namun jika mempergunakan $n = 3$ maka dapat bernilai eksak untuk menghitung fungi polinomial derajat satu, dua, tiga dan empat. Berlaku hal yang sama saat menggunakan n yang lain.

Pada perhitungan ini menggunakan pembulatan hingga empat angka desimal sehingga untuk angka desimal yang sangat kecil pada hasil integrasi numerik akan dibulatkan hingga mendekati hasil analitik namun angka tersebut akan muncul dalam bentuk *error*. Pada perhitungan fungsi polinomial, metode Gauss-Legendre memberikan tingkat ketelitian yang lebih tinggi dibandingkan metode Radau, hal ini dapat dilihat dari rumus rekursif tingkat ketelitian pada masing-masing metode. Pada perhitungan fungsi transenden yang memiliki solusi analitik, kedua metode tidak memiliki keteraturan. Namun metode Gauss-Legendre masih memberikan hasil yang lebih tinggi dibandingkan metode Radau.

BAB 5. PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Kesimpulan yang dapat diambil dari hasil perbandingan metode Gauss-Legendre dan Radau pada perhitungan integrasi numerik sebagai berikut:

1. Pada perhitungan fungsi polinomial yang memiliki solusi analitik, Gauss-Legendre memiliki tingkat ketelitian yang lebih tinggi dibandingkan Radau. Hal ini dikarenakan Gauss-Legendre memberikan hasil eksak sampai pada polinomial derajat $2n-1$ sedangkan Radau memberikan hasil eksak sampai pada polinomial derajat $2n-2$. Semakin besar titik evaluasi (n) maka hasilnya semakin mendekati nilai eksak.
2. Pada perhitungan fungsi transenden yang memiliki solusi analitik, kedua metode tidak memiliki keteraturan namun metode Gauss-Legendre masih memberikan hasil yang lebih teliti dibandingkan metode Radau.

5.2 Saran

Pada skripsi ini menggunakan perbandingan metode Gauss-Legendre yang menggunakan titik evaluasi dan pembobot serta metode Radau yang menggunakan salah satu titik ujung pada proses perhitungan. Kedua metode tersebut merupakan keluarga Gauss-Kuadratur yang hanya dapat digunakan untuk fungsi-fungsi yang memiliki interval $[a, b]$ sedangkan untuk fungsi yang memiliki interval tak terhingga tidak dapat diselesaikan menggunakan metode tersebut. Sebagai saran, untuk penulisan selanjutnya menggunakan Gauss-Kuadratur Laquerre yang dapat digunakan untuk fungsi-fungsi yang memiliki batas integrasi sampai batas tak hingga.

DAFTAR PUSTAKA

Basuki, A. & Ramadijanti, N. 2005. *Metode Numerik dan Algoritma Komputasi*. Yogyakarta: C.V. ANDI OFFSET.

Bartle, Robert G. & Sherbert, Donald R. 2000. *Introduction to Real Analysis* – 3rd Edition. United States of America: Jhon Willey & Sons, Inc.

Conte, SD dan Boor, CD. *Dasar-dasar Analisis Numerik*. Alih bahasa: Mursaid. Edisi ke-3. Jakarta: Erlangga.

Hamming, R. W. 1973. *Numerical Methods for Scientists and Engineers*. New York: Dover Publications, Inc.

Luknanto, D. 2001. *Metode Numerik*. Yogyakarta. Jurusan Teknik Sipil FT UGM.

Mathews, J. 1993. *Numerical Methods for Mathematics, Science and Engineering* – 2nd Edition. London: Prentice-Hall, Inc.

Miswandi. 2014. *Perbandingan Metode Gauss-Legendre dan Lobatto pada Integrasi Numerik*. Tidak diterbitkan. Skripsi. Jember: FMIPA Universitas Jember.

Munif, A. & Pratyoko, A. 2003. *Cara Praktis Penguasaan dan Penggunaan Metode Numerik*. Surabaya: Penerbit Guna Widya.

Sartono, 2006. *Metode Numerik*. Jakarta: Engine Press.

Sutarno, Heri & Rachmatin, Deni. 2005. *Metode Numerik dengan Pendekatan Algoritmik*. Bandung: PT Sinar Baru Algensindo.

Sutrisno & Heri, R. 2009. Integrasi Numerik Menggunakan Metode Gauss Kuadratur dengan Pendekatan Interpolasi Hermit dan Polinomial Legendre. Semarang. *Jurnal Matematika* 12 **(3)** :138 – 144

Tresnaningsih, R. 2010. *Modul Analisis Numerik*. Madiun: IKIP PGRI.

Triatmojo, Bambang. 1992. *Metode Numerik*. Yogyakarta: Peta Offset.

Varberg, D. & Purcell, E. J. 1987. *Kalkulus dan Geometri Analitis Jilid 1 Edisi Kelima*. Alih Bahasa Institut Teknologi Bandung. Jakarta: Erlangga.

LAMPIRAN

```
% clc; clear all; close all;
clc;

syms x
fungsi=get(edit4,'string');
a=str2num(get(edit1,'string'));
b=str2num(get(edit2,'string'));

n=str2num(get(edit3,'string'));

y=[]; w=[];
y1=[];w1=[];
hasil_L=0; hasil_R=0;
if n==2
    y=[0.577350269 -0.577350269];
    w=[1 1];

    y1=[-1 1/3];
    w1=[0.5 1.5];
elseif n==3
    y=[0 0.774596669 -0.774596669];
    w=[8/9 5/9 5/9];

    y1=[-1 -0.2898979 0.6898979];
    w1=[2/9 1.0249717 0.7528061];
    for i=1:n
       Pn=1/2*(3*y1(i)^2-1);
       w1(i)=(1-y1(i))/(n^2*(Pn)^2);
    end
elseif n==4
    y=[0.861136312 -0.861136312 0.339981044 -0.339981044];
    w=[0.347854845 0.347854845 0.652145155 0.652145155];

    y1=[-1 -0.5753189 0.1810663 0.8228241];
    w1=[0.125 0.5676886 0.7763870 0.4409244];
    for i=1:n
       Pn=1/6*(15*y1(i)^3-9*y1(i));
       w1(i)=(1-y1(i))/(n^2*(Pn^2));
    end
elseif n==5
    y=[0 0.906179846 -0.906179846 0.538469310 -0.538469310];
    w=[0.568888889 0.236926885 0.236926885 0.478628670
0.478628670];

    y1=[-1 -0.7204803 -0.1671809 0.4463140 0.8857916];
    w1=[0.08 0.4462078 0.6236530 0.5627120 0.2874271];
    for i=1:n
       Pn=1/8*(35*y1(i)^4-30*y1(i)^2+3);
       w1(i)=(1-y1(i))/(n^2*(Pn)^2);
```

```
    end
elseif n==6
    y=[0.238619186 -0.238619186 0.661209386 -0.661209386
0.932469514 -0.932469514];
    w=[0.467913935 0.467913935 0.360761573 0.360761573 0.171324492
0.171324492];

    y1=[-1 -0.8029298 -0.3909286 0.1240504 0.6039732 0.9203803];
    w1=[0.0555556 0.3196408 0.4853872 0.5209268 0.4169013
0.2015884];
    for i=1:n
       Pn=1/8*(63*y1(i)^5-70*y1(i)^3+15*y1(i));
       w1(i)=(1-y1(i))/(n^2*(Pn)^2);
    end
elseif n==7
    y=[-.9491079123, -.7415311856, -.4058451514, 0, .4058451514,
.7415311856, .9491079123];
    fx='(3003/16)*x^6-(3465/16)*x^4+(945/16)*x^2-35/16';
elseif n==8
    y=[-.9602898565, -.7966664774, -.5255324099, -.1834346425,
.1834346425, .5255324099, .7966664774, .9602898565];
    fx='(6435/16)*x^7-(9009/16)*x^5+(3465/16)*x^3-(315/16)*x';
elseif n==9
    y=[-.9681602395, -.8360311073, -.6133714327, -.3242534234, 0.,
.3242534234, .6133714327, .8360311073, .9681602395];
fx='(109395/128)*x^8-(45045/32)*x^6+(45045/64)*x^4-
(3465/32)*x^2+315/128';
elseif n==10
    y=[-.9739065285, -.8650633667, -.6794095683, -.4333953941, -
.1488743390, .1488743390, .4333953941, .6794095683, .8650633667,
.9739065285];
    fx='(230945/128)*x^9-(109395/32)*x^7+(135135/64)*x^5-
(15015/32)*x^3+(3465/128)*x';

elseif n==11
y=[-.9782286581, -.8870625998, -.7301520056, -.5190961292, -
.2695431560, 0., .2695431560, .5190961292, .7301520056,
.8870625998, .9782286581];
    fx='(969969/256)*x^10-(2078505/256)*x^8+(765765/128)*x^6-
(225225/128)*x^4+(45045/256)*x^2-693/256';


elseif n==12
y=[-.9815606342, -.9041172564, -.7699026742, -.5873179543, -
.3678314990, -.1252334085, .1252334085, .3678314990, .5873179543,
.7699026742, .9041172564, .9815606342];
    fx='(2028117/256)*x^11-(4849845/256)*x^9+(2078505/128)*x^7-
(765765/128)*x^5+(225225/256)*x^3-(9009/256)*x';


elseif n==13
    y=[-.9841830547, -.9175983992, -.8015780907, -.6423493394, -
.4484927510, -.2304583160, 0., .2304583160, .4484927510,
.6423493394, .8015780907, .9175983992, .9841830547];
```

```
    fx='(16900975/1024)*x^12-
(22309287/512)*x^10+(43648605/1024)*x^8-
(4849845/256)*x^6+(3828825/1024)*x^4-(135135/512)*x^2+3003/1024';


elseif n==14
    y=[-.9862838087, -.9284348837, -.8272013151, -.6872929048, -
.5152486364, -.3191123689, -.1080549487, .1080549487, .3191123689,
.5152486364, .6872929048, .8272013151, .9284348837, .9862838087];
    fx='(35102025/1024)*x^13-
(50702925/512)*x^11+(111546435/1024)*x^9-
(14549535/256)*x^7+(14549535/1024)*x^5-
(765765/512)*x^3+(45045/1024)*x';


elseif n==15
    y=[-.9879925180, -.9372733924, -.8482065834, -.7244177314, -
.5709721726, -.3941513471, -.2011940940, 0., .2011940940,
.3941513471, .5709721726, .7244177314, .8482065834, .9372733924,
.9879925180];
    fx='(145422675/2048)*x^14-
(456326325/2048)*x^12+(557732175/2048)*x^10-
(334639305/2048)*x^8+(101846745/2048)*x^6-
(14549535/2048)*x^4+(765765/2048)*x^2-6435/2048';



else
    y=[-.9894009350, -.9445750231, -.8656312024, -.7554044084, -
.6178762444, -.4580167777, -.2816035508, -0.9501250984e-1,
0.9501250984e-1, .2816035508, .4580167777, .6178762444,
.7554044084, .8656312024, .9445750231, .9894009350];
    fx='(300540195/2048)*x^15-
(1017958725/2048)*x^13+(1368978975/2048)*x^11-
(929553625/2048)*x^9+(334639305/2048)*x^7-
(61108047/2048)*x^5+(4849845/2048)*x^3-(109395/2048)*x';
n=16;
end
if n>=7
       for jj=1:n
        x=y(jj);
        px1=eval(fx);
        w(jj)=2/((1-y(jj)^2)*px1^2);

       end

end
%===========================
for i=1:n
    x=((a+b)+(b-a)*y(i))/2;
    f_L=eval(fungsi);
    hasil_L=hasil_L+w(i)*f_L;

    if n<=6
```

```
    x=((a+b)+(b-a)*y1(i))/2;
    f_R=eval(fungsi);
    if i~=0
    hasil_R=hasil_R+w1(i)*f_R;
    else
    hasil_R=hasil_R+2*f_R/(n+1)^2+w1(i)*f_R;
    end
    else
        hasil_R=hasil_L;
    end
end

f_analitik=int(fungsi);
h_analitik=int(fungsi,a,b);
h_analitik=str2num(char(h_analitik));
h_gaus=(b-a)/2*hasil_L;
h_radau=(b-a)/2*hasil_R;
g_gaus=abs(h_analitik-h_gaus);
g_radau=abs(h_analitik-h_radau);
%================================================
%ploting fungsi
p=[];
q=[];
k=0;
for i=a:0.1:b
    k=k+1;
    x=i;

    p(k)=i;
    q(k)=eval(fungsi);
end
set(win1,'CurrentAxes',grafik1);
plot(p,q,'r','linewidth',2);
title('Kurva f(x)')
ylabel('f(x)'); xlabel('x'); hold off

%==============================
u=-1+0.01:0.01:(1-0.01);
t=u;
iter=length(u);
Pn=[];
N=fix(n/2);
for i=1:iter
    % rumus sigma
    Pj=0;
    for j=0:N
        r=j;
        Pj=Pj+((-1)^r * factorial(2*n-2*r))*t(i)^(n-
2*r)/(2^n*factorial(r)*factorial(n-r)*factorial(n-2*r));
    end

    Pn(i)=Pj;
end

set(win1,'CurrentAxes',grafik2);
```

```
for i=1:n
plot(y(i),0,'or',y1(i),0,'og','linewidth',2);
% plot(y(i),w(i),'or',y1(i),w1(i),'og','linewidth',2);
hold on
end
legend('Legendre','Radau'); grid on
plot(u,Pn,'linewidth',2);
title('Kurva Legendre'); hold off
ylabel('f(x)'); xlabel('x');

%=============================
metode='';
if g_gaus<g_radau
    metode='Gauss Legendre';
elseif g_gaus>g_radau
    metode='Gauss Radau';
else
    metode='-';
end
format long
disp(['Hasil analitik = ']);h_analitik
disp(['Hasil gauss = ' ]);h_gaus
disp(['Hasil radau = ' ]);h_radau
set(label_hasil,'string',{'                         HASIL';
    '';
        ['Hasil Analitik: ' char(f_analitik)];
        ['Luas Kurva: ' num2str(h_analitik)];
        ' ';
        'Metode Gauss Legendre:';
        ['Luas  = ' num2str(h_gaus)];
        ['Galat = ' num2str(g_gaus)];
        ' ';
        'Metode Gauss Radau:';
        ['Luas  = ' num2str(h_radau)];
        ['Galat = ' num2str(g_radau)];
        ' '
        ['Metode Terbaik: ' metode]});
    if n>=7
set(label_hasil,'string',{'                         HASIL';
    '';
        ['Hasil Analitik: ' char(f_analitik)];
        ['Luas Kurva: ' num2str(h_analitik)];
        ' ';
        'Metode Gauss Legendre:';
        ['Luas  = ' num2str(h_gaus)];
        ['Galat = ' num2str(g_gaus)];
        ' ';
        'Metode Gauss Radau:';
        ['Luas  = '];
        ['Galat = '];
        ' '
        ['Metode Terbaik: -']});


    end
```