



**PELABELAN SUPER (a, d) - \mathcal{H} -ANTIMAGIC TOTAL
DEKOMPOSISI PADA *GRAF WINDMILL***

SKRIPSI

Oleh

Misi Devi Milasari

NIM 101810101054

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER**

2015



**PELABELAN SUPER (a, d) - \mathcal{H} -ANTIMAGIC TOTAL
DEKOMPOSISI PADA *GRAF WINDMILL***

SKRIPSI

diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan Program Studi Matematika (S1) dan mencapai gelar Sarjana Sains

Oleh

Misi Devi Milasari

NIM 101810101054

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER**

2015

PERSEMBAHAN

Dengan menyebut nama Allah yang maha pengasih lagi maha penyayang, serta sholawat atas Nabi Muhammad S.A.W, kupersembahkan sebuah kebahagiaan dalam perjalanan hidupku teriring rasa terima kasihku yang terdalam kepada:

1. Allah SWT yang memberikan karunia kehidupan yang indah;
2. Orang tuaku tercinta dan terkasih : Ayahanda Misbahul Munir dan Ibunda Siti Romelah, serta adikku Ana Tasya Silvia, yang senantiasa memberikan semangat, motifasi, dan kasih sayangnya serta doa yang selalu mengiringi dalam meraih cita-cita;
3. Ibu Ika Hesti A, S.Si, M.Si dan Bapak Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D. selaku pembimbing skripsi yang telah memberikan ilmu dan motivasi dalam menyelesaikan skripsi ini;
4. Seluruh pahlawanku tanpa tanda jasa di Taman Kanak-Kanak, di SD Kwamki 2 Timika, SMPN 4 Timika, SMA Muhammadiyah 2 Genteng, dan Bapak Ibu Dosen di Universitas Jember
5. Seluruh teman-teman yang memberikan begitu banyak pengalaman, pelajaran berharga, serta dukungan positif serta semangat dalam berbagai hal;
6. Saudara-Saudara di PALAPA, Sadara tersayang angkatan Badai Pasang yang senantiasa membantuku dan menorehkan sebuah pengalaman indah yang tak terlupakan;

MOTTO

"Carilah nilai kebaikan dalam segala hal, karena sekecil apapun kebaikan itu tidak akan pernah menjerumuskan seseorang kedalam hal yang tidak baik."

(Penulis)

"Barang siapa menempuh jalan untuk mendapatkan ilmu Allah akan memudahkannya jalan menuju surga."

(HR. Muslim)

"Apa saja nikmat yang kamu peroleh adalah dari Allah, dan apa saja bencana yang menimpamu, maka dari (kesalahan) dirimu sendiri Kami mengutusmu menjadi Rosul kepada segenap manusia. Dan cukuplah Allah menjadi saksi"

(QS. An Nisaa, 4:79)

PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Misi Devi Milasari

NIM : 101810101054

Menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang berjudul: Pelabelan Super (a, d) - \mathcal{H} -Antimagic Total Dekomposisi pada Graf *Windmill* adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali jika dalam pengutipan substansi disebutkan sumbernya, dan belum diajukan pada instansi manapun, serta bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa adanya tekanan dan paksaan dari pihak manapun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, Juli 2015

Yang menyatakan,

Misi Devi Milasari

NIM. 101810101054

SKRIPSI

**PELABELAN SUPER (a, d) - \mathcal{H} -ANTIMAGIC TOTAL
DEKOMPOSISI PADA *GRAF WINDMILL***

Oleh

Misi Devi Milasari
NIM 101810101054

Dosen Pembimbing 1 : Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si
Dosen Pembimbing 2 : Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D.

HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi berjudul Pelabelan Super (a, d) - \mathcal{H} Total Dekomposisi pada Graf *Windmill* telah diuji dan disahkan oleh Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam pada:

Hari/tanggal : Jumat

Tempat : Gedung Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Tim Penguji :

Ketua,

Sekretaris,

Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si.

NIP.19840801 200801 2 006

Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D.

NIP.19680802 199303 1 004

Anggota I,

Anggota 2,

Kosala Dwidja Purnomo S.Si., M.Si.

NIP.19690828 199802 1 001

M. Ziaul Arif, S.Si., M.Sc.

NIP. 19850111 200812 1 002

Mengesahkan,

Dekan

Prof. Drs. Kusno, DEA, Ph.D.

NIP. 19610108 198602 1 001

RINGKASAN

Pelabelan Super (a, d) - \mathcal{H} -Antimagic Total Dekomposisi pada Graf *Windmill*; Misi Devi Milasari, 101810101054; 2015: 106 halaman; Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Jember.

Teori graf merupakan salah satu cabang ilmu matematika yang lahir pada tahun 1736. Salah satu topik yang dikaji dalam teori graf adalah pelabelan. Terdapat berbagai jenis tipe pelabelan dalam graf, salah satunya adalah pelabelan pelabelan total (*total labeling*). Dari waktu ke waktu pelabelan graf mengalami perkembangan materi, diantaranya pelabelan ajaib, pelabelan anti ajaib, dan pelabelan super. Pelabelan ajaib (*magic*) adalah jika semua sisi mempunyai bobot yang sama sedangkan pelabelan anti ajaib (*antimagic*) mempunyai bobot sisi yang berbeda dan membentuk barisan aritmatika. Pelabelan super adalah pelabelan titik dan sisi dimana label titik kurang dari label sisi. Pelabelan ajaib selanjutnya dikembangkan menjadi pelabelan covering ajaib yang pertama kali diperkenalkan oleh Gutierrez dan Llado (2005). selanjutnya Inayah, dkk (2013) mengembangkan suatu pelabelan selimut \mathcal{H} -antimagic, dengan penjelasan bahwa suatu pelabelan covering H -antimagic pada graf G adalah sebuah fungsi bijektif sehingga terdapat jumlahan yang merupakan barisan aritmatika $a, a + d, a + 2d, \dots, a + (t - 1)d$.

Pada penelitian ini penulis mengembangkan pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} -antimagic total dekomposisi pada graf *windmill* baik yang konektif maupun diskonektifnya, dimana dalam penelitian tersebut membutuhkan nilai batas atas dan fungsi bijektifnya. Dekomposisi pada graf *windmill* tunggal dinotasikan dengan WD_v^n . Sedangkan gabungan saling lepasnya dinotasikan dengan mWD_v^n yang didefinisikan sebagai gabungan dari sebanyak m salinan graf *windmill*.

Dekomposisi graf *windmill* adalah graf WD_5^n dengan $4n + 1$ titik $V(WD_5^n) = \{A, x_i, y_i, z_i, p_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan $10n$ sisi $E(WD_5^n) = \{Ax_i, Ay_i, Az_i, Ap_i, x_iy_i, x_iz_i, x_ip_i, y_iz_i, y_ip_i, z_ip_i; 1 \leq i \leq n\}$. Adapun gabungan graf *windmill* mWD_5^n didefinisikan sebagai gabungan dari sebanyak m graf *graf windmill* yang mempunyai titik $V(mWD_5^n) = \{A^j, x_i^j, y_i^j, z_i^j, p_i^j; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$ dan sisi $E(mWD_5^n) = \{Ax_i^j, Ay_i^j, Az_i^j, Ap_i^j, x_i^jy_i^j, x_i^jz_i^j, x_i^jp_i^j, y_i^jz_i^j, y_i^jp_i^j, p_i^kz_i^k; 1 \leq i \leq n; 1 \leq k \leq m\}$.

Metode penelitian yang digunakan adalah Metode deduktif aksiomatik, yaitu dengan menurunkan beberapa aksioma dan teorema yang sudah ada. langkah awal

yang dilakukan adalah menentukan atau menghitung nilai d (nilai beda) pada amalgamasi graf kipas. Selanjutnya merumuskan pola pelabelan menggunakan metode pendeteksian pola (*pattern recognition*) yaitu menentukan perumusan pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} antimagic total dekomposisi. Batas atas pada penelitian ini adalah $d \leq 120$ dengan menggunakan **Lemma 4.11** yaitu:

Jika graf G adalah super (a, d) - \mathcal{H} antimagic total covering maka

$$d \leq \frac{(p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H}{s - 1}$$

untuk $s = |H_i|$, $p_G = |V|$, $q_G = |E|$, $p_H = |V(H)|$, $q_H = |E(H)|$

Sehingga di peroleh teorema-teorema baru sebagai berikut:

1. **Teorema 4.1.1** *Ada super $(98n + 22, 0)$ - WD_5 antimagic total dekomposisi pada graf windmill WD_5^n untuk $n \geq 2$;*
2. **Teorema 4.1.2** *Ada super $(97n + 23, 2)$ - WD_5 antimagic total dekomposisi pada graf windmill WD_5^n untuk $n \geq 2$;*
3. **Teorema 4.1.3** *Ada super $(96n + 24, 4)$ - WD_5 antimagic total dekomposisi pada graf windmill WD_5^n untuk $n \geq 2$;*
4. **Teorema 4.1.4** *Ada super $(95n + 25, 6)$ - WD_5 antimagic total dekomposisi pada graf windmill WD_5^n untuk $n \geq 2$;*
5. **Teorema 4.1.5** *Ada super $(94n + 26, 8)$ - WD_5 antimagic total dekomposisi pada graf windmill WD_5^n untuk $n \geq 2$;*
6. **Teorema 4.1.6** *Ada super $(93n + 27, 10)$ - WD_5 antimagic total dekomposisi pada graf windmill WD_5^n untuk $n \geq 2$;*
7. **Teorema 4.1.7** *Ada super $(92n + 28, 12)$ - WD_5 antimagic total dekomposisi pada graf windmill WD_5^n untuk $n \geq 2$;*
8. **Teorema 4.1.8** *Ada super $(91n + 29, 14)$ - WD_5 antimagic total dekomposisi pada graf windmill WD_5^n untuk $n \geq 2$;*
9. **Teorema 4.1.9** *Ada super $(89n + 31, 18)$ - WD_5 antimagic total dekomposisi pada graf windmill WD_5^n untuk $n \geq 2$;*

10. **Teorema 4.1.10** *Ada super $(88n+32, 20)$ - WD_5 antimagic total dekomposisi pada graf windmill WD_5^n untuk $n \geq 2$;*
11. **Teorema 4.1.11** *Ada super $(86n+34, 24)$ - WD_5 antimagic total dekomposisi pada graf windmill WD_5^n untuk $n \geq 2$;*
12. **Teorema 4.1.12** *Ada super $(84n+36, 28)$ - WD_5 antimagic total dekomposisi pada graf windmill WD_5^n untuk $n \geq 2$;*
13. **Teorema 4.1.13** *Ada super $(73n+47, 50)$ - WD_5 antimagic total dekomposisi pada graf windmill WD_5^n untuk $n \geq 2$;*
14. **Teorema 4.1.14** *Ada super $(72n+48, 52)$ - WD_5 antimagic total dekomposisi pada graf windmill WD_5^n untuk $n \geq 2$;*
15. **Teorema 4.1.15** *Ada super $(71n+49, 54)$ - WD_5 antimagic total dekomposisi pada graf windmill WD_5^n untuk $n \geq 2$;*
16. **Teorema 4.1.16** *Ada super $(69n+65, 58)$ - WD_5 antimagic total dekomposisi pada graf windmill WD_5^n untuk $n \geq 2$;*
17. **Teorema 4.1.17** *Ada super $(48n + 72, 100)$ - WD_5 antimagic total dekomposisi pada graf windmill WD_5^n untuk $n \geq 2$;*
18. **Teorema 4.1.18** *Ada super $(47n + 73, 102)$ - WD_5 antimagic total dekomposisi pada graf windmill WD_5^n untuk $n \geq 2$;*
19. **Teorema 4.1.19** *Ada super $(46n + 74, 104)$ - WD_5 antimagic total dekomposisi pada graf windmill WD_5^n untuk $n \geq 2$;*
20. **Teorema 4.1.20** *Ada super $(44n + 76, 108)$ - WD_5 antimagic total dekomposisi pada graf windmill WD_5^n untuk $n \geq 2$;*
21. **Teorema 4.2.1** *Ada gabungan saling lepas graf windmill WD_5^n memiliki super $(\frac{196mn+29m+15}{2}, 0)$ - WD_5 antimagic total dekomposisi untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 3$ dimana m ganjil;*
22. **Teorema 4.2.2** *Ada gabungan saling lepas graf windmill WD_5^n memiliki super $(\frac{186mn+29m+25}{2}, 10)$ - WD_5 antimagic total dekomposisi untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 3$ dimana m ganjil;*

23. **Teorema 4.2.3** *Ada gabungan saling lepas graf windmill WD_5^n memiliki super $(\frac{176mn+29m+35}{2}, 20)$ - WD_5 antimagic total dekomposisi untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 3$ dimana m ganjil;*
24. **Teorema 4.2.4** *Ada gabungan saling lepas graf windmill WD_5^n memiliki super $(\frac{146mn+29m+65}{2}, 50)$ - WD_5 antimagic total dekomposisi untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 3$ dimana m ganjil;*
25. **Teorema 4.2.5** *Ada gabungan saling lepas graf windmill WD_5^n memiliki super $(\frac{96mn+151m+115}{2}, 100)$ - WD_5 antimagic total dekomposisi untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 3$ dimana m ganjil;*

Berdasarkan hasil penelitian mengenai pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} -antimagic total dekomposisi pada graf *windmill* (WD_5^n), terdapat beberapa hal dapat diteliti kembali, yaitu pada pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} -antimagic total total dekomposisi pada graf *windmill* (WD_5^n), dengan $n \geq 2$ kecuali $d \in \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 24, 28, 50, 52, 54, 58, 100, 102, 104\}$, pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} antimagic total covering pada gabungan saling lepas, dengan $n \geq 2$ dan $m \geq 3$ untuk $d < 122$ kecuali $d \in \{0, 10, 20, 50, 100\}$, serta pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} -antimagic total dekomposisi pada gabungan saling lepas graf *windmill* (mWD_5^n) dengan $n \geq 2$, $m \geq 2$ dan m genap untuk $d < 122$.

PRAKATA

Puja dan puji syukur ke hadirat Allah Swt atas segala rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul Super $(a, d)\text{-}\mathcal{H}$ Antimagic Total Dekomposisi Pada Amalgamasi Graf Kipas. Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan pendidikan strata satu (S1) pada Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih atas bantuan, waktu, bimbingan dan dukungan dalam penyusunan skripsi ini, terutama kepada yang terhormat:

1. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
2. Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
3. Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si. selaku Dosen Pembimbing I dan Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D. selaku Dosen Pembimbing II yang telah meluangkan waktu, pikiran, dan tenaga serta perhatian dalam penulisan skripsi ini;
4. Kosala Dwidja Purnomo, S.Si., M.Si. selaku Dosen Penguji I dan M. Ziaul Arif, S.Si., M.Sc. selaku Dosen Penguji II;
5. segenap dosen dan karyawan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
6. Kedua orang tuaku Aba Misbahul Munir dan Ibu Siti Romelah, terima kasih yang senantiasa memberikan cinta kasih, dukungan, semangat, do'a dan tetesan keringat serta air mata yang mengiringi setiap langkahku, juga Adik tersayangku Anatasya Silvia anjani terima kasih banyak atas do'a, dukungan dan kasih sayangnya;
7. keluarga besar MATHGIC 2010, terima kasih telah menjadi keluarga bagiku;
8. semua pihak yang telah membantu terselesaikannya skripsi ini.

Semoga bantuan, bimbingan, dorongan dan semua yang beliau-beliau berikan dapat menjadi nilai ibadah dan amal baik oleh dan di ganjar balasan yang sesuai dari-Nya. Selain itu, penulis juga menerima segala kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan skripsi ini. Akhirnya penulis berharap, semoga skripsi ini dapat bermanfaat.

Jember, Juli 2015

Penulis



DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PERSEMBAHAN	ii
HALAMAN MOTTO	iii
HALAMAN PERNYATAAN	iv
HALAMAN PENGESAHAN	vi
RINGKASAN	vii
PRAKATA	xi
DAFTAR ISI	xiii
DAFTAR GAMBAR	xv
DAFTAR TABEL	xvii
DAFTAR LAMBANG	xviii
1 PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang Masalah	1
1.2 Rumusan Masalah	3
1.3 Batasan Masalah	3
1.4 Tujuan Penelitian	3
1.5 Manfaat Penelitian	3
2 TINJAUAN PUSTAKA	5
2.1 Definisi Graf dan Terminologi Graf	5
2.2 Graf Khusus	9
2.3 Fungsi dan Barisan Aritmatika	12
2.4 Pelabelan Graf	14
2.4.1 Definisi Pelabelan Graf	14
2.4.2 Pelabelan Selimut- \mathcal{H} -Antimagic	15
2.4.3 Pelabelan Super (a, d) - \mathcal{H} Total Dekomposition	16
2.5 Amalgamasi	17
2.6 Aplikasi Graf pada Pembuatan Sandi	17
2.7 Hasil-hasil Pelabelan Selimut Super (a, d) - \mathcal{H} -Antimagic	19
3 METODE PENELITIAN	21
3.1 Metode Penelitian	21

3.2	Definisi Operasional	21
3.3	Rancangan Penelitian	22
3.4	Teknik Penelitian	22
4	HASIL DAN PEMBAHASAN	25
4.1	Pelabelan Super (a, d) - \mathcal{H} Antimagic Total Dekomposisi pada Graf <i>Windmill</i> Konektif	25
4.2	Pelabelan Super (a, d) - \mathcal{H} Antimagic Total Dekomposisi pada Graf <i>Windmill</i> Diskonektif	62
4.3	Hasil dan Pembahasan	90
5	KESIMPULAN DAN SARAN	91
5.1	Kesimpulan	91
5.2	Saran	91
	DAFTAR SUMBER RUJUKAN	92

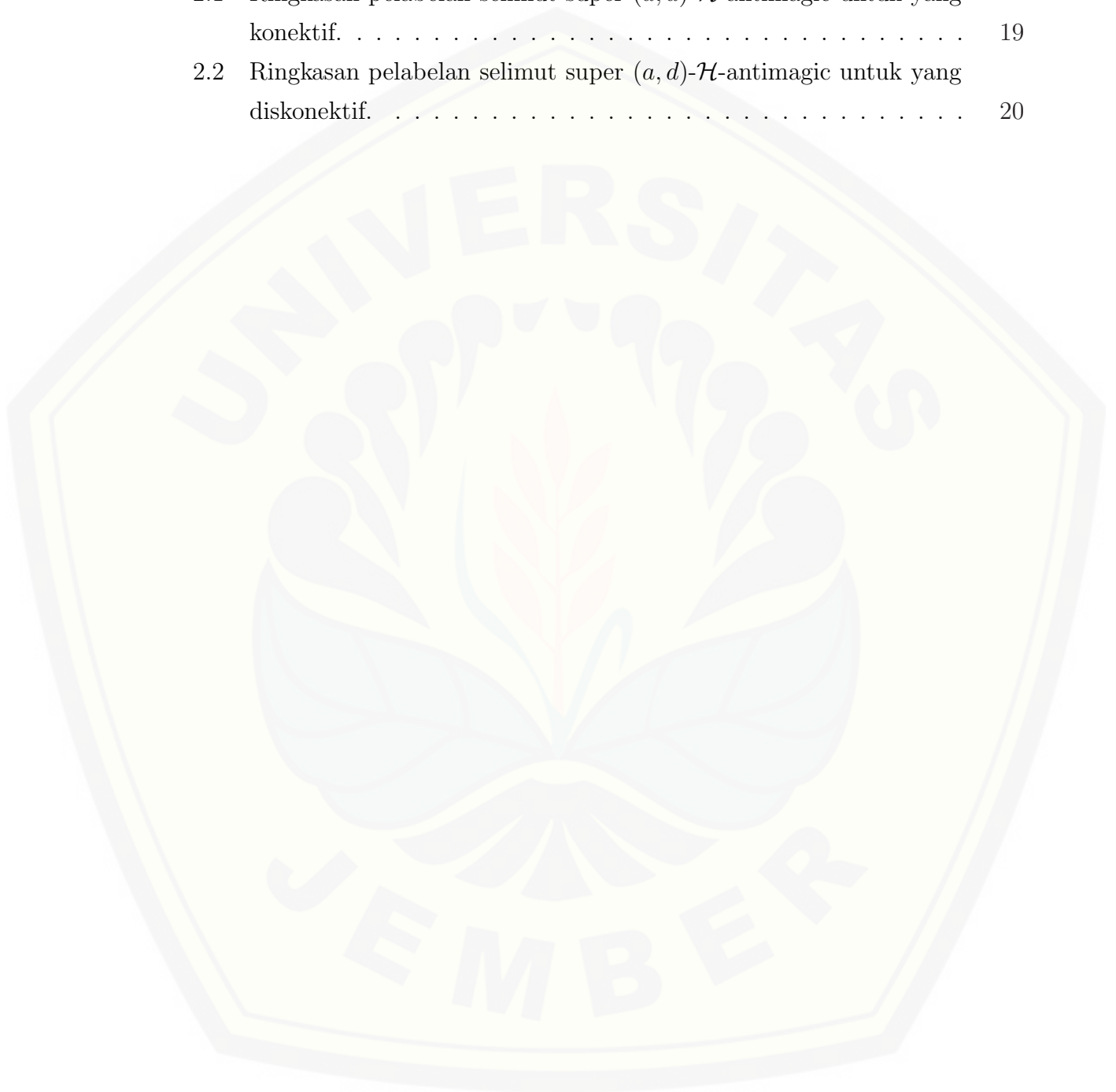
DAFTAR GAMBAR

2.1	Contoh graf	5
2.2	Contoh spanning subgraf dan subgraf	8
2.3	Keisomorfisan graf	8
2.4	Contoh sebuah graf dan matrik <i>adjacencynya</i>	9
2.5	Contoh graf lintasan	10
2.6	Contoh graf ledder L_5	10
2.7	Contoh graf lingkaran	10
2.8	Contoh graf kipas F_5	11
2.9	Contoh graf lengkap K_6	11
2.10	Contoh graf <i>windmill</i> WD_5^3	12
2.11	Contoh grafik fungsi	13
2.12	Graf <i>windmill</i> (WD_5^2)	18
2.13	Diagram pohon	19
3.1	<i>Flowchart</i> super (a, d) - \mathcal{H} total dekomposisi	24
4.1	Jumlah titik dan sisi (a) WD_5^2 , (b) WD_5^3	26
4.2	Super $(512, 0) - WD_5$ antimagic total dekomposisi pada WD_5^5	30
4.3	Super $(508, 2) - WD_5$ antimagic total dekomposisi pada WD_5^5	32
4.4	Super $(504, 4) - WD_5$ antimagic total dekomposisi pada WD_5^5	34
4.5	Super $(500, 6) - WD_5$ antimagic total dekomposisi pada WD_5^5	36
4.6	Super $(496, 8) - WD_5$ antimagic total dekomposisi pada WD_5^5	38
4.7	Super $(492, 10) - WD_5$ antimagic total dekomposisi pada WD_5^5	40
4.8	Super $(488, 12) - WD_5$ antimagic total dekomposisi pada WD_5^5	41
4.9	Super $(484, 14) - WD_5$ antimagic total dekomposisi pada WD_5^5	43
4.10	Super $(476, 18) - WD_5$ antimagic total dekomposisi pada WD_5^5	44
4.11	Super $(472, 20) - WD_5$ antimagic total dekomposisi pada WD_5^5	46
4.12	Super $(464, 24) - WD_5$ antimagic total dekomposisi pada WD_5^5	47
4.13	Super $(456, 28) - WD_5$ antimagic total dekomposisi pada WD_5^5	49
4.14	Super $(412, 50) - WD_5$ antimagic total dekomposisi pada WD_5^5	51
4.15	Super $(408, 52) - WD_5$ antimagic total dekomposisi pada WD_5^5	52

4.16 Super (404, 54) – WD_5 antimagic total dekomposisi pada WD_5^5 .	54
4.17 Super (69n + 65, 58) – WD_5 antimagic total dekomposisi pada WD_5^5	55
4.18 Super (312, 100) – WD_5 antimagic total dekomposisi pada WD_5^5 .	57
4.19 Super (308, 102) – WD_5 antimagic total dekomposisi pada WD_5^5 .	59
4.20 Super (304, 104) – WD_5 antimagic total dekomposisi pada WD_5^5 .	60
4.21 Super (296, 108) – WD_5 antimagic total dekomposisi pada WD_5^5 .	62
4.22 Super (3539, 0) – WD_5 antimagic total dekomposisi pada gabungan saling lepas ($7WD_5^5$)	69
4.23 Super (3369, 10) – WD_5 antimagic total dekomposisi pada gabungan graf <i>windmill</i> ($7WD_5^5$)	74
4.24 Super (3199, 20) – WD_5 antimagic total dekomposisi pada gabungan saling lepas ($7WD_5^5$)	79
4.25 Super (2689, 50) – WD_5 antimagic total dekomposisi pada gabungan saling lepas ($7WD_5^5$)	84
4.26 Super (1839, 100) – WD_5 antimagic total dekomposisi pada gabungan graf <i>windmill</i> ($7WD_5^5$)	89

DAFTAR TABEL

2.1	Ringkasan pelabelan selimut super (a, d) - \mathcal{H} -antimagic untuk yang konektif.	19
2.2	Ringkasan pelabelan selimut super (a, d) - \mathcal{H} -antimagic untuk yang diskonektif.	20



DAFTAR LAMBANG

G	=	Graf G
$G(V, E)$	=	Sebarang graf tak berarah dengan V adalah himpunan tak kosong dari semua titik dan E adalah himpunan sisi
v_n	=	Titik ke- n pada suatu graf
e_n	=	Sisi ke- n dari suatu graf
$ V(G) $	=	Banyaknya titik dari graf G yang disebut <i>order</i>
$ E(G) $	=	Banyaknya sisi dari graf G yang disebut ukuran (<i>size</i>)
$\mathcal{H}AVL$	=	\mathcal{H} <i>antimagic vertex covering</i> atau pelabelan titik selimut antimagic
\mathcal{SHATC}	=	<i>Super \mathcal{H} antimagic total covering</i> atau pelabelan total super (a, d) -selimut antimagic
d	=	Nilai beda barisan bobot sisi pada \mathcal{SHATC}
a	=	Bobot sisi terkecil yang merupakan suku pertama barisan bobot sisi pada \mathcal{SHATC}

BAB 1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Teori graf merupakan salah satu cabang ilmu matematika yang lahir pada tahun 1736, diperkenalkan oleh seorang matematikawan asal Swiss yaitu Leonhard Euler. Hal tersebut bermula dari sebuah permasalahan yang terjadi pada jembatan Königsberg yang sangat terkenal di Eropa. Masalah jembatan Königsberg adalah kemungkinan bisa atau tidak melewati ketujuh jembatan yang ada di kota Königsberg masing-masing tepat satu kali dan kembali lagi ke tempat semula. Euler mampu memecahkan dengan mempresentasikannya ke dalam bentuk graf, dan membuktikannya serta mempresentasikan masalah tersebut menggunakan titik sebagai representasi daratan dan sisi sebagai representasi tiap-tiap jembatan yang menghubungkan setiap daratan.

Salah satu topik yang dikaji dalam teori graf adalah pelabelan. Pelabelan graf pertama kali diperkenalkan oleh Sedlacek pada tahun 1964, Stewart tahun 1966, serta Kotzig dan Rosa (1970). Objek kajian dari pelabelan graf berupa titik, sisi serta himpunan bagian bilangan asli yang disebut label. Pelabelan dibagi kedalam tiga jenis. Berdasarkan elemen yang dilabeli yaitu pelabelan titik (*vertex labeling*), pelabelan sisi (*edge labeling*), dan pelabelan total (*total labeling*). Pelabelan titik pada graf adalah pelabelan dengan daerah asalnya berupa himpunan titik, jika daerah asalnya berupa himpunan sisi disebut dengan pelabelan sisi, sedangkan pelabelan dengan daerah asalnya berupa himpunan titik dan sisi disebut pelabelan total. Dari waktu ke waktu pelabelan graf mengalami perkembangan materi, diantaranya pelabelan ajaib, pelabelan anti ajaib, dan pelabelan super. Pelabelan ajaib (*magic*) adalah jika semua sisi mempunyai bobot yang sama sedangkan pelabelan anti ajaib (*antimagic*) mempunyai bobot sisi yang berbeda dan membentuk barisan aritmatika. Pelabelan super adalah pelabelan titik dan sisi dimana label titik kurang dari label sisi.

Pelabelan ajaib selanjutnya dikembangkan menjadi pelabelan covering ajaib yang pertama kali diperkenalkan oleh Gutierrez dan Llado (2005). Suatu graf

$G = (V(G), E(G))$ dikatakan memiliki pelabelan covering \mathcal{H} ajaib jika setiap garis pada $E(G)$ termuat dalam subgraf H' dari G yang isomorfik dengan H , dalam hal ini H merupakan subgraf dari G . Inayah, dkk (2013) mengembangkan suatu pelabelan selimut \mathcal{H} -antimagic, dengan penjelasan bahwa suatu pelabelan covering H -antimagic pada graf G adalah sebuah fungsi bijektif sehingga terdapat jumlahan yang merupakan barisan aritmatika $a, a+d, a+2d, \dots, a+(t-1)d$. Pelabelan covering \mathcal{H} -antimagic dikatakan sebagai fungsi bijektif karena label untuk tiap selimut selalu berbeda dan berurutan serta setiap label selimut merupakan range dan semuanya adalah kodomain yang diperoleh dari melabeli setiap selimut pada graf. Setiap pelabelan graf memiliki nilai batas atas d yang berbeda dan nilai d tidak tunggal. Nilai $d \leq s$ dengan d adalah bilangan bulat non negatif dan s adalah bilangan bulat positif yang merupakan nilai terbesar d dalam suatu graf. Tujuan menentukan batas atas untuk mengetahui nilai beda maksimum dalam mencari pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} -antimagic covering.

Beberapa penelitian pelabelan total super (a, d) - \mathcal{H} -antimagic yang telah dipublikasikan antara lain. Inayah (2013) tentang pelabelan selimut (a, d) - \mathcal{H} -antimagic covering pada graf kipas F_n dan graf roda W_n . Rosyidah dan Dafik (2014) tentang super (a, d) - \mathcal{H} total decomposition of graf Helm. Jamil, dkk (2014) tentang super (a, d) - \mathcal{H} -antimagic covering pada graf Triangular Ladder. Pudyaningrum, dkk (2014) tentang super (a, d) - \mathcal{H} -antimagic total covering pada shackle graf triangular book, untuk yang tunggal (konektif). Agustin, dkk (2014) tentang super (a, d) - \mathcal{H} -antimagic total covering pada shackle graf triangular book, untuk gabungan saling lepas (diskonektif). Citra, dkk (2014) tentang Super (a, d) - \mathcal{H} -antimagic total covering pada Graf Semi Windmill. Oleh karena itu penulis mengembangkan pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} -antimagic total dekomposisi pada graf *windmill* baik yang konektif maupun diskonektifnya, dimana dalam penelitian tersebut membutuhkan nilai batas atas dan fungsi bijektifnya. Dekomposisi pada graf *windmill* tunggal dinotasikan dengan WD_v^n . Sedangkan gabungan saling lepasnya dinotasikan dengan mWD_v^n yang didefinisikan sebagai gabungan dari sebanyak m salinan graf *windmill*.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah bagaimana fungsi bijektif untuk pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} -antimagic total dekomposisi pada graf *windmill* konektif dan diskonektif.

1.3 Batasan Masalah

Batasan masalah digunakan karena untuk menghindari terjadinya perluasan masalah. Sehingga batasan yang digunakan pada penelitian ini adalah sebagai berikut :

- a. Graf berhingga yang sederhana, yaitu graf yang tidak mempunyai sisi ganda (paralel).
- b. Pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} -antimagic total dekomposisi pada graf *windmill* untuk yang konektif disimbolkan dengan WD_5^n dengan $n \geq 2$ dan n adalah bilangan asli.
- c. Pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} -antimagic total dekomposisi pada graf *windmill* untuk yang diskonektif disimbolkan dengan mWD_5^n dengan $n \geq 2$ dan n adalah bilangan asli serta m adalah bilangan ganjil dengan $m \geq 3$.

1.4 Tujuan Penelitian

Sesuai dengan latar belakang dan rumusan masalah yang telah dikemukakan sebelumnya, maka tujuan dari penelitian ini adalah menentukan fungsi bijektif pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} -antimagic total dekomposisi pada graf *windmill* konektif dan diskonektif.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat yang dapat diambil dari hasil penelitian ini adalah:

- a. Menambah pengetahuan baru dalam ilmu teori graf mengenai total dekomposisi pada graf *windmill*.
- b. Sebagai referensi bagi peneliti lainnya untuk meneliti pada jenis graf yang lainnya.

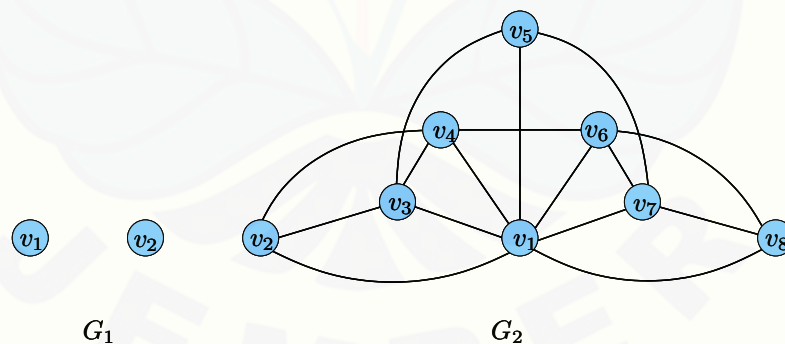
- c. Hasil penelitian ini diharapkan dapat digunakan sebagai pengembangan atau perluasan ilmu dan aplikasi dalam masalah pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} -antimagic total dekomposisi pada graf *windmill*.



BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Definisi Graf dan Terminologi Graf

Sebuah graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E) dimana V adalah himpunan tidak kosong dari elemen titik (*vertex*), dan E adalah himpunan (boleh kosong) dari elemen-elemen yang disebut sisi (*edge*). Kita dapat menuliskan $V(G)$ adalah himpunan titik dari graf G dan $E(G)$ adalah himpunan sisi dari graf G . Sebuah graf dimungkinkan tidak mempunyai sisi, tetapi harus memiliki titik minimal satu. Graf yang hanya mempunyai satu buah titik tanpa sebuah sisi pun dinamakan graf trivial. Graf yang tidak mempunyai sisi dinamakan graf kosong (*null graph atau empty graph*) (Lipschutz dan Lipson, 2002). Graf kosong (*null graph atau empty graph*) dinotasikan dengan N_n , dimana n adalah jumlah titik pada graf, titik tersebut membentuk sebuah himpunan titik tanpa sisi maka disebut dengan graf kosong. Pada graf G disebut order dari G dinotasikan $|V(G)|$ sedangkan jumlah sisinya disebut size dari G dinotasikan $|E(G)|$. Graf yang mempunyai order $p = |V(G)|$ dan size $q = |E(G)|$ dapat ditulis (p, q) -graf (Hartfield dan Ringel, 1994). Contoh graf dapat dilihat pada Gambar 2.1.



Gambar 2.1 Contoh graf

Sebuah titik pada graf dapat dilabeli dengan huruf, bilangan asli, maupun keduanya. Misalkan v_i dan v_j adalah titik pada suatu graf, maka sisi yang menghubungkan titik v_i dan v_j dinyatakan dengan pasangan (v_i, v_j) atau den-

gan lambang $e_1, e_2, e_3, \dots, e_n$. G_1 pada Gambar 2.1 mempresentasikan contoh graf kosong dengan $|V(G_1)| = 2$ dan $|E(G_1)| = 0$ yang dinotasikan dengan N_2 . G_2 adalah graf dengan $|V(G_2)| = 8$ dan $|E(G)| = 16$. Pada G_1 , $V = \{v_1, v_2\}$ dan $E = \phi$, sedangkan untuk G_2 , $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$ dan $E = \{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_1, v_4), (v_1, v_5), (v_1, v_6), (v_1, v_7), (v_1, v_8), (v_2, v_3), (v_2, v_4), (v_3, v_4), (v_3, v_5), (v_4, v_6), (v_5, v_7), (v_6, v_7), (v_6, v_8), (v_7, v_8)\}$.

Misalkan u dan v adalah titik pada graf G . Titik u dikatakan bertetangga (*adjacent*) dengan titik v jika ada sisi e yang menghubungkan titik u dan titik v , yaitu $e = uv$. Apabila, u dan v terletak pada sisi e , maka u dan v dikatakan menempel (*incident*) dengan sisi e . Titik v *incident* dengan sebuah sisi e jika v merupakan titik ujung dari e , demikian juga e *incident* dengan v ketika v merupakan titik ujung dari e (Hartsfield dan Ringel, 1994). Sebagai contoh Gambar G_2 titik v_1 *adjacent* dengan titik $v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8$, dan titik v_2 *incident* dengan sisi v_1v_2, v_2v_3, v_2v_4 .

Banyaknya sisi yang bersisian pada titik v disebut derajat (*degree*) titik v pada graf, dinotasikan d_i dimana i menunjukkan titik ke- i pada graf (Hartsfield dan Ringel, 1994). Jika sebuah titik v mempunyai derajat 0 (nol), berarti titik v tidak bertetangga dengan titik lain, maka titik v dinamakan titik terisolasi (*isolated vertex*). Sebuah titik berderajat 1 dinamakan titik ujung (*end vertex*) atau daun (*leaf*). Bila setiap titik di suatu graf G memiliki derajat sama, maka graf tersebut dinamakan graf regular. Sebaliknya jika pada graf G mempunyai derajat yang tidak sama maka graf tersebut dikatakan *non-regular*. Derajat terkecil dari suatu graf G yang dinotasikan dengan $\delta(G)$ adalah derajat terkecil yang dimiliki suatu titik diantara titik-titik yang lain. Derajat terbesar dari suatu graf G yang dinotasikan dengan $\Delta(G)$ adalah derajat terbesar yang dimiliki suatu titik diantara titik-titik yang lain.

Sebuah jalan (*walk*) dengan panjang n dimana $n = 0$ dari titik a ke titik b pada graf G adalah barisan titik dan sisi di G , yang diawali dan diakhiri dengan titik, yaitu $a = v_0, e_0, v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, \dots, v_{n-1}, e_{n-1}, v_n = b$ sehingga $v_i v_{i+1} = e_i$ adalah sisi di G untuk setiap $i = 0, 1, \dots, n-1$. Jalan dikatakan tertutup jika titik awal dan titik akhirnya sama, yaitu $a = b$, dan terbuka jika titik awal dan akhirnya berbeda, yaitu $a \neq b$. Jika semua titik dalam jalan berbeda maka jalan disebut lintasan (*path*). Jika semua sisinya berbeda maka jalan disebut jejak (*trail*). Sikel

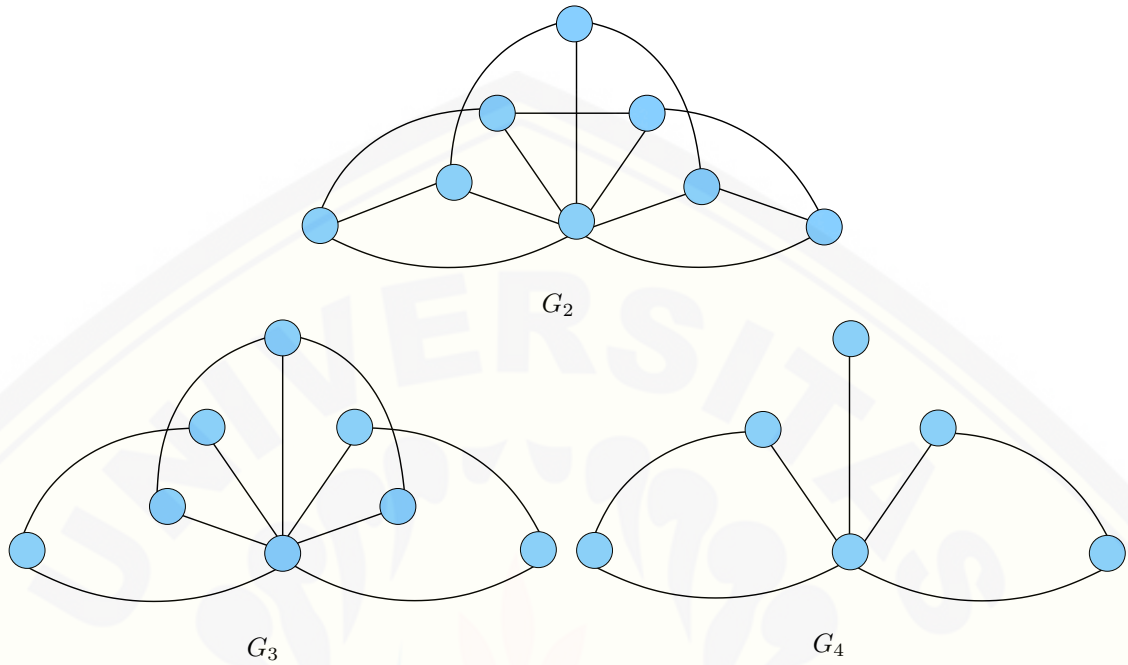
(*cycle*) adalah jalan tertutup dengan barisan titik yang berbeda. Pada gambar 2.1 yang menjelaskan jalan adalah v_1, v_3, v_4, v_1, v_5 , merupakan lintasan *path* adalah v_1, v_2, v_3, v_4, v_6 , sedangkan v_2, v_6, v_7, v_8, v_2 merupakan sikel.

Jarak dari titik u ke titik v dinotasikan dengan $dist(u, v)$ adalah panjang lintasan terpendek dari titik u ke titik v . Diameter dari sebuah graf G adalah jarak maksimum dari sebarang dua titik yang dinotasikan dengan $diam G = \max\{e(v); v \in V\}$. Girth dari graf G adalah panjang siklus terpendek dari graf G .

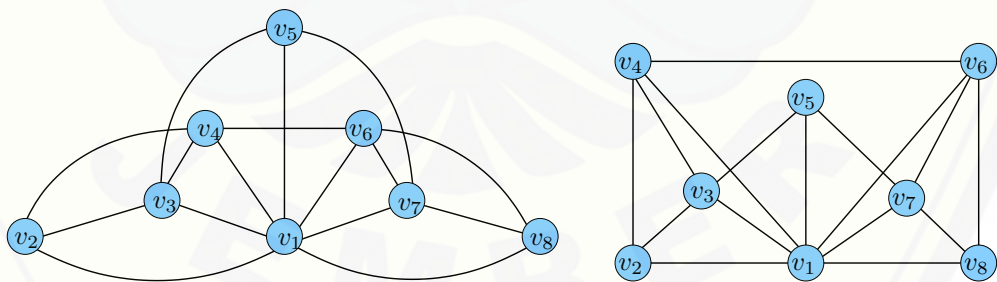
Sebuah graf H adalah *subgraph* dari G jika setiap titik pada H adalah titik dari G , dan setiap sisi dari H adalah sisi dari G . Dengan kata lain, $V(H) \subseteq V(G)$ dan $E(H) \subseteq E(G)$. Dafik (2008: 17) mengatakan bahwa sebuah subgraph H adalah *spanning subgraph* dari G jika H mengandung semua titik dari graf G , atau $V(H) = V(G)$. Pada Gambar 2.2, G_3 dan G_4 merupakan *subgraph* dan *spanning subgraph* dari G_2 .

Dua graf G_1 dan G_2 dengan n titik dikatakan isomorfis jika terdapat pemetaan satu-satu oleh fungsi $f : v(G_1) \rightarrow v(G_2)$ yang menyajikan semua sifat ketetanggaan, yaitu $f(u)$ dan $f(v)$ pada G_2 bertetangga jika dan hanya jika u dan v pada G_1 bertetangga. Secara visual, G_1 dan G_2 dikatakan isomorfis jika keduanya dapat disusun dengan cara sedemikian rupa sehingga tampak identik atau tidak merubah ketetanggaan. Gambar 2.3 adalah contoh graf yang isomorfis.

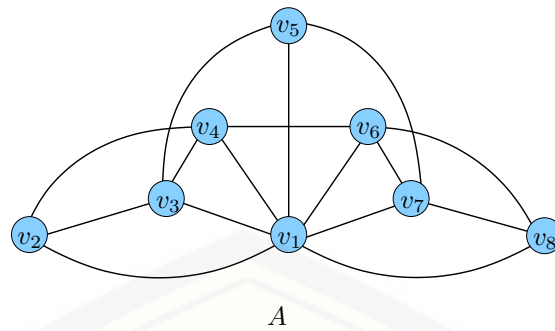
Sebuah graf dapat direpresentasikan dalam bentuk matriks jika dan hanya jika titik-titiknya saling bertetangga (*adjacent*). Matriks ketetanggaan selalu berordo $n \times n$ dan dinotasikan dengan $A = [a_{ij}]$, dimana a_{ij} bernilai 1 jika titik i dan j bertetangga. Sebaliknya, jika titik i dan j tak bertetangga maka a_{ij} bernilai 0. Gambar 2.4 merupakan contoh graf dan matriks *adjacency*nya.



Gambar 2.2 Contoh spanning subgraf dan subgraf



Gambar 2.3 Keisomorfisan graf



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

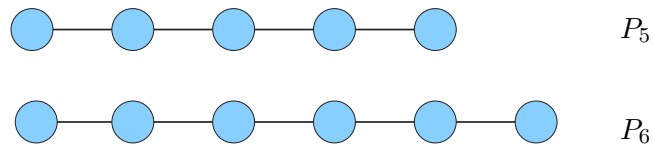
Gambar 2.4 Contoh sebuah graf dan matrik *adjacencynya*

2.2 Graf Khusus

Sebuah graf yang memiliki karakter dan keunikan tertentu dinamakan graf khusus. Terdapat beberapa graf khusus, diantaranya adalah graf lintasan, graf ladder, graf Lingkaran, graf kipas, graf lengkap, Graf *windmill*.

a. Graf Lintasan

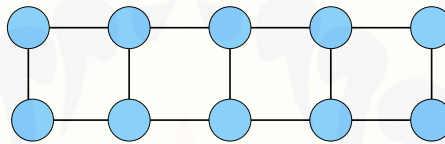
Graf lintasan atau *path graph* adalah graf yang terdiri dari satu lintasan. graf lintasan dengan n titik dinotasikan P_n dengan $n \geq 2$. Beberapa ciri khusus dari graf lintasan adalah setiap titik ujung dan titik pangkal selalu berderajat 1 dan titik selain titik ujung dan titik pangkal selalu berderajat 2 (Damayanti, 2011). Contoh graf lintasan P_5 dan P_6 dapat dilihat pada Gambar 2.5.



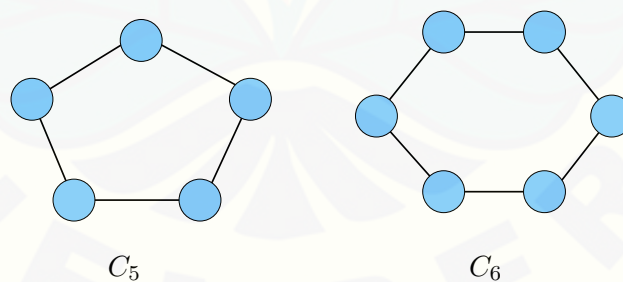
Gambar 2.5 Contoh graf lintasan

b. Graf Ladder

Graf Ladder yang dinotasikan dengan L_n , $n \geq 2$ adalah sebuah graf dengan titik $V(L_n) = \{u_i, v_i : 1 \leq i \leq n\}$ dan $E(L_n) = \{u_i u_{i+1}, v_i v_{i+1} : 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{u_i v_i : 1 \leq i \leq n\}$ (Martin baca, 2006). Graf ladder mempunyai $2n$ titik, dan $3n - 2$ sisi. Gambar 2.6 menunjukkan graf ladder dengan $n = 5$.

Gambar 2.6 Contoh graf ladder L_5 c. Graf Lingkaran (*Cycle*)

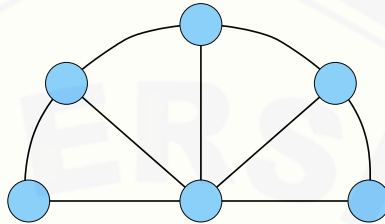
Graf lingkaran adalah graf sederhana yang setiap simpulnya berderajat dua. Graf lingkaran dengan n simpul dilambangkan dengan C_n (Gallian, 2009). Contoh graf ladder dapat dilihat pada Gambar 2.7.



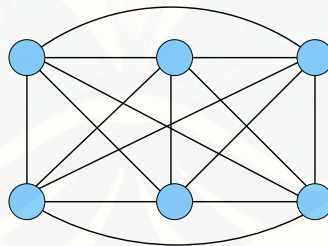
Gambar 2.7 Contoh graf lingkaran

d. Graf kipas (*Fan Graph*)

Graf kipas dinotasikan dengan F_n dimana $n \geq 2$ adalah graf yang didapat dengan menghubungkan semua titik dari graf lintasan P_n pada suatu titik yang disebut pusat (Baca dkk. 2007). Jadi, F_n terdiri dari $n + 1$ titik dan $2n - 1$ sisi. Contoh gambar dari graf kipas dapat dilihat pada Gambar ???. Contoh graf kipas dapat dilihat pada Gambar 2.8.

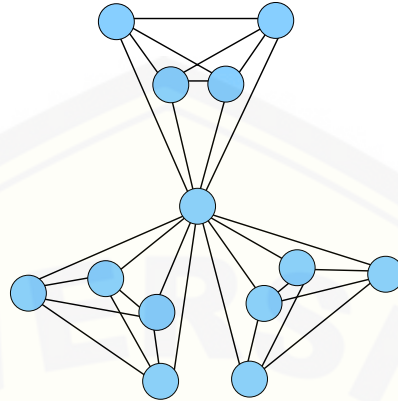
Gambar 2.8 Contoh graf kipas F_5 e. Graf Lengkap (*Complete graph*)

Graf lengkap adalah graf yang sederhana yang terhubung, karena setiap titiknya terhubung ke semua titik lainnya atau dengan kata lain setiap titik v terhubung dengan $(n - 1)$ titik-titik yang lainnya sehingga $deg(v) = n - 1$. Dengan kata lain, setiap titiknya bertetangga. Graf lengkap dengan n buah titik dilambangkan dengan K_n . Contoh graf lengkap dapat dilihat pada Gambar 2.9.

Gambar 2.9 Contoh graf lengkap K_6 f. Graf *Windmill*

Graf *windmill* atau kincir yang dinotasikan dengan WD_v^n dimana v merupakan jumlah titik yang terdapat pada graf *windmill*, sedangkan n merupakan salinan dari graph lengkap K_n dengan sebuah titik sebagai pusat titik

bersama dari semua salinan graph *windmill* tersebut. Contoh graf *windmill* dapat dilihat pada Gambar 2.10.



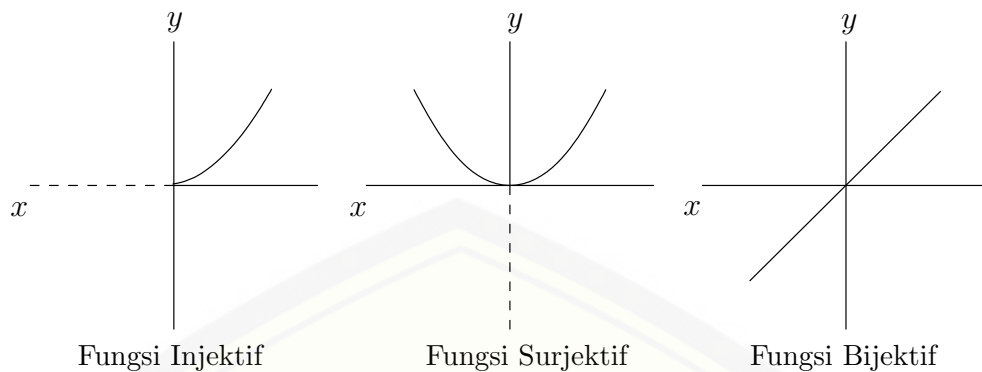
Gambar 2.10 Contoh graf *windmill* WD_5^3

2.3 Fungsi dan Barisan Aritmatika

Suatu fungsi f dari himpunan A ke himpunan B adalah sebuah himpunan f dari pasangan terurut $A \times B$ sedemikian hingga untuk setiap $a \in A$ terdapat secara tunggal $b \in B$ dengan $(a, b) \in f$, dengan kata lain jika $(a, b) \in f$ dan $(a, b') \in f$, maka $b = b'$. Himpunan A dinamakan daerah asal (*domain*) dan himpunan B dinamakan daerah kawan (*kodomain*). Sedangkan himpunan nilai yang diperoleh dari fungsi f dinamakan daerah hasil (*range*).

Berikut ini dijelaskan fungsi khusus yang berhubungan dalam penelitian pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic, yaitu:

1. Fungsi $f: A \rightarrow B$ disebut fungsi satu-satu atau fungsi injektif $\Leftrightarrow \forall a_1$ dan $a_2 \in A, a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$.
2. Fungsi $f: A \rightarrow B$ disebut fungsi kepada atau fungsi surjektif $\Leftrightarrow \forall b \in B, \exists a \in A \Rightarrow f(a) = b$. Dengan kata lain, suatu kodomain fungsi surjektif sama dengan kisarannya (*range*).
3. Fungsi $f: A \rightarrow B$ disebut fungsi bijektif apabila fungsi tersebut merupakan fungsi injektif sekaligus surjektif. Gambar 2.11 menunjukkan fungsi injektif, surjektif dan bijektif.



Gambar 2.11 Contoh grafik fungsi

Pada Gambar 2.11 menunjukkan bahwa terdapat fungsi injektif dimana $Domain = (0, \infty)$ dan $Kodomain = \mathfrak{R}$, fungsi surjektif dimana $Domain = \mathfrak{R}$ dan $Kodomain = (0, \infty)$ dan merupakan fungsi bijektif dimana $D = (-\infty, \infty)$ dan $K = (-\infty, \infty)$

Barisan bilangan dengan selisih antara suku-suku yang berurutan tetap disebut barisan aritmatika. Barisan ini dibentuk dengan cara menambah atau mengurangi suku sebelumnya dengan suatu bilangan tetap. Selisih bilangan tersebut aritmatika tersebut dinamakan dengan beda yang dinotasikan dengan d . Berdasarkan beda (d) barisan aritmatika dapat dibedakan menjadi dua yaitu barisan aritmatika naik dan barisan aritmatika turun. Barisan aritmatika yang mempunyai beda positif disebut barisan aritmetika naik, sedangkan jika bedanya negatif disebut barisan aritmetika turun. Pasangan suku-suku berurutan pada barisan aritmetika memiliki beda yang sama, sehingga akan mendapatkan kondisi sebagai berikut :

$$U_1 = U_1$$

$$U_2 = U_1 + d$$

$$U_3 = U_1 + 2d$$

$$\vdots$$

$$U_n = U_1 + d(n - 1)$$

2.4 Pelabelan Graf

2.4.1 Definisi Pelabelan Graf

Menurut Baca, dkk (2007), Pelabelan dari suatu graf merupakan suatu fungsi yang memasangkan unsur-unsur graf (titik, sisi, atau titik dan sisi) ke suatu (bilangan bulat) yang disebut label. Secara umum, fungsi f yang memetakan himpunan A ke dalam B disebut fungsi satu-satu jika setiap elemen dalam A mempunyai bayangan yang berbeda dalam B . Jika daerah asal (*domain*) dari pemetaan adalah titik disebut pelabelan titik (*vertex labeling*). Jika *domain* dari pemetaan adalah sisi disebut pelabelan sisi (*edge labeling*), dan jika *domain* pemetaan adalah titik dan sisi maka disebut pelabelan titik dan sisi atau pelabelan total (*total labeling*) (W.D Wallis,2000). Semua elemen-elemen pada graf dinomori dengan bilangan bulat positif yang berbeda.

Secara matematik, definisi pelabelan graf dapat dituliskan sebagai berikut:

Pelabelan graf $G = (V, E)$ adalah suatu pemetaan : $D \rightarrow N$, dimana D : domain, N : himpunan label dari G . Jika,

- a. $D = V$ maka disebut pelabelan titik
- b. $D = E$ maka disebut pelabelan sisi
- c. $D = V \cup E$ maka disebut pelabelan total

Pada pelabelan titik, jumlah label dua titik yang menempel pada suatu sisi disebut bobot sisi. jika semua sisi memiliki bobot sisi yang sama maka dinamakan pelabelan titik sisi ajaib tetapi jika sisi mempunyai bobot sisinya berbeda dan membentuk barisan aritmatika maka dinamakan pelabelan titik sisi anti ajaib *edge antimagic vertex labeling(EAVL)*. Sedangkan pada pelabelan total, bobot sisi adalah jumlah label dua titik dan sisi yang menempel pada suatu sisi. Jika sisi mempunyai bobot sisi yang sama maka dinamakan pelabelan-total-sisi-ajaib. jika semua sisi mempunyai bobot sisi berbeda dan himpunan bobot sisi membentuk barisan aritmatika maka disebut pelabelan total sisi anti ajaib (*edge antimagic total labeling*).

2.4.2 Pelabelan Selimut- \mathcal{H} -Antimagic

Suatu graf G dengan subgraf H memiliki keluarga subgraf $\mathcal{H} = \{H_1, H_2, H_3, \dots, H_k\}$ dengan sifat setiap sisi di G termuat sekurang-kurangnya pada satu graf H_i untuk suatu $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ disebut dengan pelabelan selimut (*covering*). Jika untuk setiap $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, H_i isomorfik dengan suatu subgraf H , maka H dikatakan suatu selimut- H dari G .

Pelabelan selimut- \mathcal{H} anti ajaib (*antimagic*) super pada graf G dengan v titik dan e sisi didefinisikan sebagai fungsi bijektif dari titik-titik dan sisi-sisi pada himpunan bilangan bulat dari 1 sampai sejumlah titik dan sisi, secara matematis ditulis dalam bentuk $f : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, |V(G)| + |E(G)|\}$ dengan sifat bahwa setiap subgraf dari G yang isomorfik dengan H dimana H juga subgraf dari G mempunyai total label $\omega(H)$ yang berbeda, $\omega(H) = \sum_{v \in V(H)} f(v) + \sum_{e \in E(H)} f(e)$. Graf G dikatakan memiliki pelabelan \mathcal{H} anti ajaib super jika himpunan titik $V(G)$ merupakan pemetaan bijektif f ke himpunan $\{1, 2, 3, \dots, |V(G)|\}$ (Gutierrez dan Llado, 2005). Langkah awal sebelum mencari pelabelan, terlebih dahulu menentukan nilai batas atas (d). Menentukan batas atas nilai beda d pada pelabelan selimut- \mathcal{H} -antimagic dapat ditentukan dengan lemma berikut.

Lemma 2.4.1. *Jika graf G adalah super (a, d) - \mathcal{H} antimagic total covering maka*

$$d \leq \frac{(p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H}{s - 1}$$

untuk $s = |H_i|$, $p_G = |V|$, $q_G = |E|$, $p_H = |V(H)|$, $q_H = |E(H)|$

Bukti. $f(V) = \{1, 2, 3, \dots, p_G\}$ dan $f(E) = \{p_G + 1, p_G + 2, p_G + 3, \dots, p_G + q_G\}$. Misalkan graf (p_G, q_G) mempunyai pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} antimagic total dekomposisi dengan fungsi total $f(\text{total}) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots, p_G + q_G\}$ maka himpunan bobot dekomposisi sebuah graf adalah $\{a, a + d, a + 2d, \dots, a(s - 1)d\}$ dimana a merupakan bobot dekomposisi terkecil maka berlaku:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + p_H + (p_G + 1) + (p_G + 2) + \dots + (p_G + q_H) &\leq a \\ \frac{p_H}{2}(1 + p_H) + q_H p_G + \frac{q_H}{2}(1 + q_H) &\leq a \\ \frac{p_H}{2} + \frac{p_H^2}{2} + q_H p_G + \frac{q_H}{2} + \frac{q_H^2}{2} &\leq a \end{aligned}$$

Sedangkan untuk nilai terbesar berlaku:

$$\begin{aligned}
 a + (s - 1)d &\leq p_G + (p_G - 1) + (p_G - 2) + \dots + (p_G - (p_H - 1)) + (p_G + q_G) \\
 &\quad + (p_G + q_G - 1) + (p_G + q_G - 2) + \dots + (p_G + q_G - (q_H - 1)) \\
 &= p_H p_G - \frac{p_H - 1}{2}(1 + (p_H - 1)) + q_H p_G + q_H p_G \\
 &\quad - \frac{q_H - 1}{2}(1 + (q_H - 1)) \\
 &= p_H p_G - \frac{p_H - 1}{2}(p_H) + q_H p_G + q_H q_G - \frac{q_H - 1}{2}(q_H)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (s - 1)d &\leq p_H p_G - \frac{p_H - 1}{2}(p_H) + q_H p_G + q_H q_G - \frac{q_H - 1}{2}(q_H) - a \\
 &\leq p_H p_G - \frac{p_H - 1}{2}(p_H) + q_H p_G + q_H p_G - \frac{q_H - 1}{2}(q_H) - \\
 &\quad \left(\frac{p_H}{2} + \frac{p_H^2}{2} + q_H p_G + \frac{q_H}{2} + \frac{q_H^2}{2}\right) \\
 &= p_H p_G - \frac{p_H^2}{2} + \frac{p_H}{2} + q_H q_G - \frac{q_H^2}{2} + \frac{q_H}{2} - \left(\frac{p_H}{2} + \frac{p_H^2}{2} + \frac{q_H}{2} + \frac{q_H^2}{2}\right) \\
 &= p_H p_G + q_H q_G - p_H^2 - q_H^2 \\
 &= p_H p_G - p_H^2 + q_H q_G - q_H^2 \\
 &= (p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H \\
 d &\leq \frac{(p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H}{(s - 1)}
 \end{aligned}$$

Dari persamaan diatas terbukti bahwa batas atas $d \leq \frac{(p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H}{s - 1}$ jika graf G memiliki pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} -antimagic total dekomposisi dari berbagai famili graf (Dafik. 2007).

2.4.3 Pelabelan Super (a, d) - \mathcal{H} Total Dekomposition

Pelabelan selimut dari G adalah $H = \{H_1, H_2, H_3, \dots, H_k\}$ keluarga subgraf dari G dengan sifat setiap sisi di G termuat pada sekurang-kurangnya satu graf H_i untuk suatu $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. Jika untuk setiap $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, H_i isomorfik dengan suatu subgraf \mathcal{H} , maka \mathcal{H} dikatakan selimut- \mathcal{H} dari G . Selanjutnya, jika selimut- \mathcal{H} dari G memiliki sifat yaitu setiap sisi G termuat dalam tepat satu graf H_i untuk suatu $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, maka selimut- \mathcal{H} disebut dekomposisi- \mathcal{H} , sehingga G

dikatakan memuat dekomposisi- \mathcal{H} atau G terdekomposisi atas \mathcal{H} (Rosyidah dan Dafik, 2014).

2.5 Amalgamasi

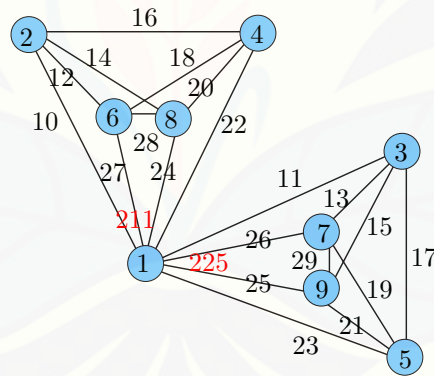
Amalgamasi-titik dari sebuah graf dapat dimisalkan H_i adalah suatu keluarga graf berhingga dan setiap H_i mempunyai suatu titik (v_i) yang disebut titik terminal (Carlos, 2006). Amalgamasi-titik dinotasikan dengan (H_i, v_i) dimana dibentuk oleh semua H_i dengan cara merekatkan seluruh titik terminalnya menjadi satu titik yang dinotasikan dengan $Amal(H, v, k)$ dimana k adalah suatu bilangan bulat positif. Jika terminalnya berupa suatu sisi, maka amalgamasi tersebut dinamakan amalgamasi-sisi yang dinotasikan dengan $Amal(H, e, k)$. Jika terminalnya adalah suatu subgraf terhubung taktrivial, maka amalgamasi tersebut dinamakan amalgamasi subgraf dinotasikan dengan $Amal(H, S, k)$. Di namakan titik terminal jika salah satu titik dari subgraf H_i direkatkan menjadi satu titik.

2.6 Aplikasi Graf pada Pembuatan Sandi

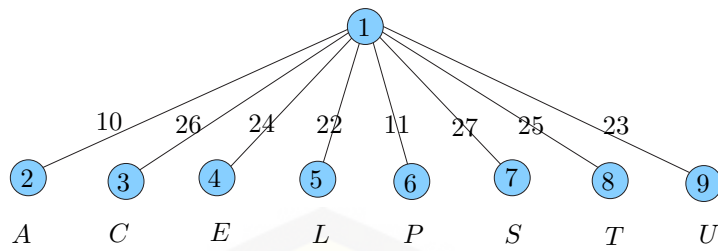
Pesatnya perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi membuat matematika menjadi sangat penting. Perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi tersebut tidak lepas dari peranan matematika. Teori graf merupakan cabang ilmu matematika yang perkembangannya sangat pesat. Teori graf berperan penting dalam menyelesaikan permasalahan dalam kehidupan sehari-hari. Salah satu contohnya adalah penerapan pelabelan total covering pada graf *windmill* WD_5^2 dalam pengiriman sebuah pesan rahasia *cryptophy*. Dalam *cryptophy* terdapat 2 istilah penting yaitu kalimat pesan (*plaintext*) yang selanjutnya dikembangkan dalam sebuah kalimat rahasia (*chiphertext*). Pelabelan graf dapat merubah sebuah *plaintext* ke *chiphertext*.

Misalkan seorang dosen mengirim sebuah pesan kemahasiswa bimbingannya "cepat lulus". Pertama-tama tentukan pelabelan SEATL dari sebuah graf, misalkan graf *windmill* (WD_5^2) dengan $d = 14$ seperti pada gambar 2.12. Kemudian tata huruf dalam pesan di atas sesuai dengan urutan abjad (spasi diabaikan), yaitu a, c, e, l, p, s, t, u. Selanjutnya bangunlah diagram pohon (*tree diagram*) yang berakar di label 1, kemudian lengkapilah dengan label sisinya sesuai pelabelan graf *windmill* (WD_5^2) dengan $d = 14$ seperti Gambar 2.13. Letakkan huruf-huruf yang

digunakan sesuai urutan abjad, dan urutkan label sisinya, maka terlihat bahwa ciphertext dari huruf a=10, c=11, e=22, l=23, p=26, s=27, t=24, u=25. Substitusikan pesan ke dalam pelabelan sisi, sehingga menjadi: 1011222326272425. Pesan rahasia bisa dikonversi dalam bilangan biner 0 dan 1, sehingga pesan menjadi lebih kompleks, dengan menggunakan aplikasi matlab kita dapat merubah huruf a menjadi 1010, dengan cara memasukkan `dec2base(10)`, selanjutnya untuk yang lainnya, c=1011, e=10110, l=10111, p=11010, s=11011, t=11010, u=11001. Sehingga akan diperoleh pesan sebagai berikut: 1011101101101010101101010111100110111100111011. Kita juga dapat menerapkan menggunakan teknik cryptosystem modulo 26 terhadap masing-masing hurufnya $a=\text{mod}(10,26)=10$, $c=\text{mod}(11,26)=11$, $e=\text{mod}(22,26)=22$, $l=\text{mod}(23,26)=23$, $p=\text{mod}(26,26)=0$, $s=\text{mod}(27,26)=1$, $t=\text{mod}(24,26)=24$, $u=\text{mod}(25,26)=25$. Berdasarkan pengkodean polyalphabetic dimana 0=a, 1=b, 3=c, 4=d, 5=e, 6=f, 7=g, 8=h, 9=i, 10=j, 11=k, 12=l, 13=m, 14=n, 15=o, 16=p, 17=q, 18=r, 19=s, 20=t, 21=u, 22=v, 23=w, 24=x, 25=y, 26=z. Sehingga hasil konversinya yaitu a=j, c=k, e=v, l=w, p=a, t=b, u=x, s=y. Pesan rahasia yang dihasilkan adalah sebagai berikut: kvajbwxwxy.



Gambar 2.12 Graf *windmill* (WD_5^2)



Gambar 2.13 Diagram pohon

2.7 Hasil-hasil Pelabelan Selimut Super (a, d) - \mathcal{H} -Antimagic

Beberapa rangkuman hasil pelabelan selimut super (a, d) - \mathcal{H} -antimagic pada graf konektif dan diskonektif yang dapat digunakan sebagai rujukan penelitian ini. Rangkuman yang tersedia pada bagian ini merupakan hasil penelitian yang diterbitkan sejak tahun 2009.

Tabel 2.1: Ringkasan pelabelan selimut super (a, d) - \mathcal{H} -antimagic untuk yang konektif.

Graf	a	d	Hasil
$W_n(\text{Graf Roda})$	$3h + 5$	3	$(a, d) - C_3$
	$2hn + 3h + n$	1	(Inayah, 2009) -
$B_n(\text{Graf Shackle Triangular Book})$	$61n + 59$	40	$(a, d) - Bt_3 + 2e$
			(Pudyaningrum, 2014) -
$B_n(\text{Triangular Ledder})$	$12nm - m + 4$	2	$(a, d) - Bt_3 + 2e$
	$10nm + m + 5,$	11	(Jamil, 2014) -
$B_n(\text{Graf Semi Windmill})$	$21n + 12$	9	$(a, d) - C_3 + e$
	$24n - 3$	2	(Citra, 2014) -

Tabel 2.2: Ringkasan pelabelan selimut super (a, d) - \mathcal{H} -antimagic untuk yang diskonektif.

Graf	a	d	Hasil
W_n (Graf <i>Triangular Ladder</i>)	$12nm - m + 4$ $10nm + m + 5$	2 4	$(a, d) - C_3$
	$m \geq 2$ dan $n \geq 2$	(Jamil, 2014)	-
W_n (Graf <i>Shackle Triangular Book</i>)	$73mn + 32m + 15$ $m \geq 2$ dan $n \geq 2$	15	$(a, d) - Bt_3 + 2e$
		(Agustin, 2014)	-



BAB 3. METODE PENELITIAN

3.1 Metode Penelitian

Metode penelitian yang digunakan adalah Metode deduktif aksiomatik. Sebelum melakukan metode deduktif aksiomatik terlebih dahulu kita merumuskan pola pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} -antimagic total dekomposisi untuk menentukan pola umumnya, yaitu dengan menurunkan beberapa aksioma dan teorema yang sudah ada, kemudian menerapkan pengertian dasar pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} -antimagic total dekomposisi pada graf *windmill*. Tujuan menurunkan teorema yang ada adalah untuk memperoleh pelabelan titik dan pelabelan sisi pada dekomposisi graf *windmill*. Kemudian diterapkan dalam pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} -antimagic total dekomposisi pada graf *windmill* baik yang tunggal maupun gabungan saling lepasnya.

3.2 Definisi Operasional

Definisi operasional variabel dalam rancangan penelitian ini adalah untuk memberikan gambaran secara sistematis. Graf *windmill* WD_5^n dimana $v = 5$ dan v merupakan jumlah titik yang terdapat pada graf *windmill*, sedangkan n merupakan salinan dari graph lengkap K_n . Graf *windmill* WD_5^n juga dapat diartikan sebagai amalamasi dari graf lengkap yang dinotasikan dengan $Amal(K_5, v, n)$. Pada penelitian ini digunakan penotasian WD_5^n . Beberapa variabel yang digunakan dalam penelitian ini meliputi : A, x_i, y_i, z_i, p_i , dimana A adalah titik pusat dari graf *windmill*, sedangkan x_i, y_i, z_i, p_i merupakan titik-titik yang terdapat pada graf *windmill* selain titik pusat. Penulisan pelabelan pada graf *windmill* tunggal maupun graf *windmill* gabungan saling lepasnya akan disajikan dengan warna yang berbeda, dimana angka dengan warna hitam menjelaskan pelabelan yang terdapat pada titik dan sisi, sedangkan angka dengan warna merah menjelaskan bobot selimutnya.

3.3 Rancangan Penelitian

Adapun rancangan penelitian ini yang digunakan untuk memberikan gambaran secara sistematis dalam penelitian. Rancangan penelitian yang dimaksud adalah sebagai berikut:

1. Penotasian Titik dan Sisi

Dekomposisi graf *windmill* adalah graf WD_5^n dengan $4n+1$ titik $V(WD_5^n) = \{A, x_i, y_i, z_i, p_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan $10n$ sisi $E(WD_5^n) = \{Ax_i, Ay_i, Az_i, Ap_i, x_iy_i, x_iz_i, x_ip_i, y_iz_i, y_ip_i, z_ip_i; 1 \leq i \leq n\}$. Adapun gabungan graf *windmill* mWD_5^n didefinisikan sebagai gabungan dari sebanyak m graf *graf windmill* yang mempunyai titik $V(mWD_5^n) = \{A^j, x_i^j, y_i^j, z_i^j, p_i^j; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$ dan sisi $E(mWD_5^n) = \{Ax_i^j \cup Ay_i^j \cup Az_i^j \cup Ap_i^j \cup x_i^jy_i^j \cup x_i^jz_i^j \cup x_i^jp_i^j \cup y_i^jz_i^j \cup y_i^jp_i^j \cup p_i^kz_i^k; 1 \leq i \leq n; 1 \leq k \leq m\}$.

2. Indikator Pelabelan

Indikator pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} -antimagic total dekomposisi pada *graf windmill* dalam penelitian ini adalah:

(a) Semua label titik berbeda

Pada pelabelan super dekomposisi WD_5^n -antimagic pada graf *windmill*, label titik merupakan fungsi bijektif dari himpunan titik pada graf *windmill* ke bilangan bulat positif dari 1 sampai n titik.

(b) Semua label sisi berbeda

Pada pelabelan super dekomposisi WD_5^n -antimagic pada graf *windmill*, label sisi merupakan fungsi bijektif dari himpunan sisi pada graf *windmill* ke bilangan bulat dari n titik ditambah 1 sampai sejumlah titik dan sisi.

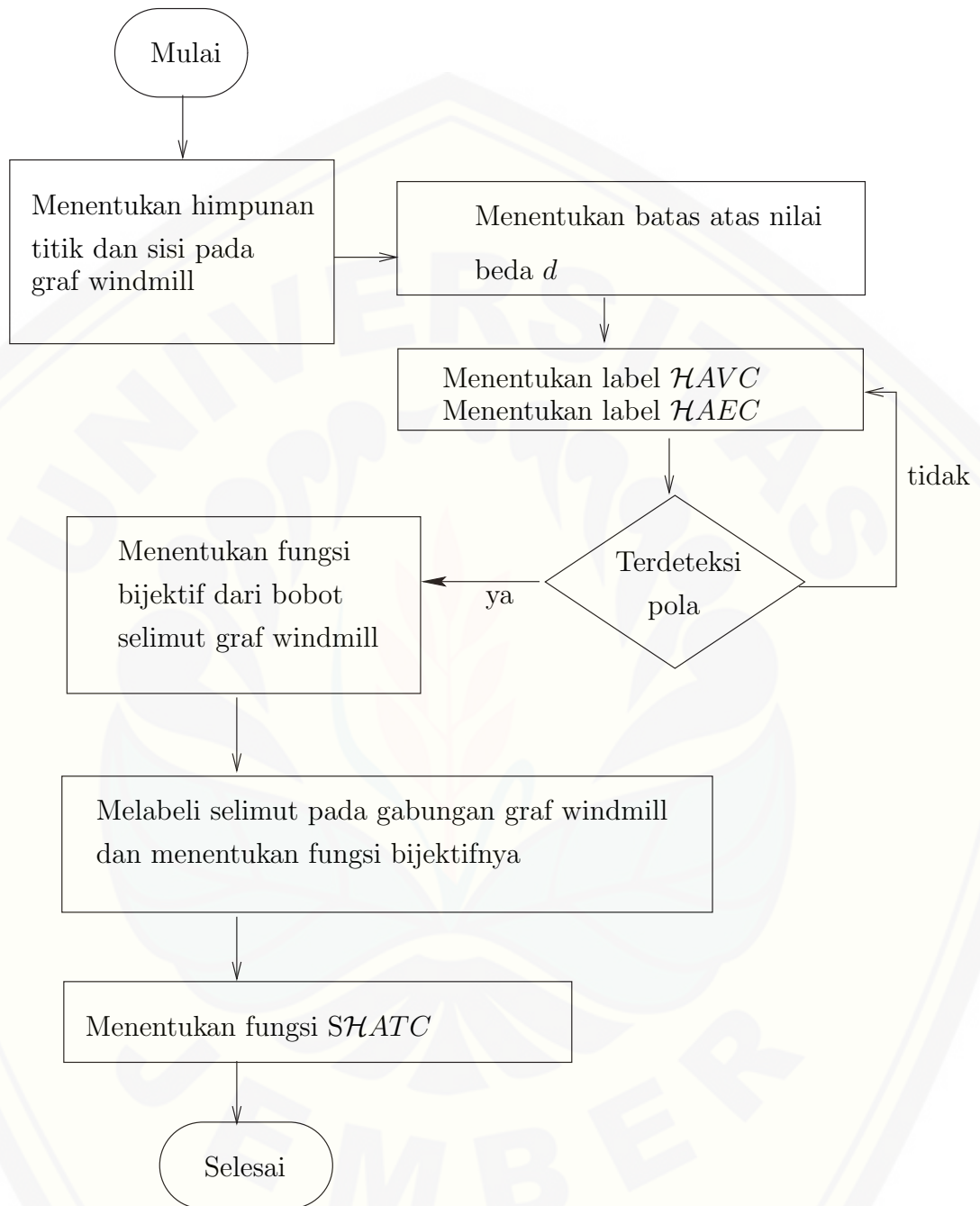
(c) Total label dekomposisi WD_5^n sebagai koleksi subgraf pada graf *windmill* mempunyai nilai dari bobot titik dan bobot sisi yang termuat di dalamnya dengan syarat tidak ada sisi yang di pakai bersama pada graf lainnya.

3.4 Teknik Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada dekomposisi *graf windmill* WD_5^n dan gabungan dekomposisi *graf windmill* WD_5^n . Adapun teknik penelitian adalah sebagai berikut:

- a. Menghitung jumlah titik p dan sisi q pada dekomposisi Graf *windmill* WD_5^n .
- b. Menentukan batas atas nilai beda d pada dekomposisi Graf *windmill* WD_5^n .
- c. Menentukan label $\mathcal{H}AVC$ (\mathcal{H} Antimagic Vertex Covering) atau pelabelan titik (a, d) - \mathcal{H} -antimagic total dekomposisi pada *graf windmill* dilanjutkan dengan $\mathcal{H}AEC$ (\mathcal{H} Antimagic Edge Covering) atau pelabelan sisi (a, d) - \mathcal{H} -antimagic total dekomposisi pada *graf windmill*.
- d. Menentukan fungsi bijektif pada dekomposisi graf *windmill* WD_5^n .
- e. Melabeli gabungan graf *windmill* mWD_5^n dengan SHATC (Super \mathcal{H} Antimagic Total Covering) atau pelabelan total super (a, d) - \mathcal{H} -antimagic dekomposisi.
- f. Menentukan fungsi bijektif pelabelan total super (a, d) - \mathcal{H} -antimagic dekomposisi gabungan graf *windmill* mWD_5^n .

penelitian ini akan dilakukan dengan menemukan berbagai pola pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} -total dekomposisi dengan banyak jenis nilai awal a serta nilai beda d yang ditentukan berdasarkan Lemma sehingga penelitian juga dapat dinyatakan dalam pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} -total dekomposisi pada graf *windmill*. Teknik penelitian yang dilakukan pada pelabelan tunggal juga dapat dilakukan pada gabungan saling lepas pada dekomposisi graf *windmill*. Secara umum, langkah-langkah penelitian diatas dapat dilihat dalam flowchart pada Gambar 3.1.

Gambar 3.1 Flowchart super (a, d) - \mathcal{H} total dekomposisi

BAB 4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dijelaskan hasil penelitian tentang pelabelan super \mathcal{H} -antimagic total dekomposisi pada graf *windmill* konektif dan diskonektif dengan menghasilkan teorema pelabelan super \mathcal{H} antimagic total dekomposisi pada graf *windmill*. Langkah awal dalam penelitian ini dengan menentukan nilai batas atas (d), menentukan $\mathcal{H}AVC$ dan $\mathcal{H}ATC$ kemudian menentukan \mathcal{SHATC} dan selanjutnya bobot selimut total \mathcal{SHATC} untuk membuktikan bahwa gabungan graf ini merupakan \mathcal{SHATC} .

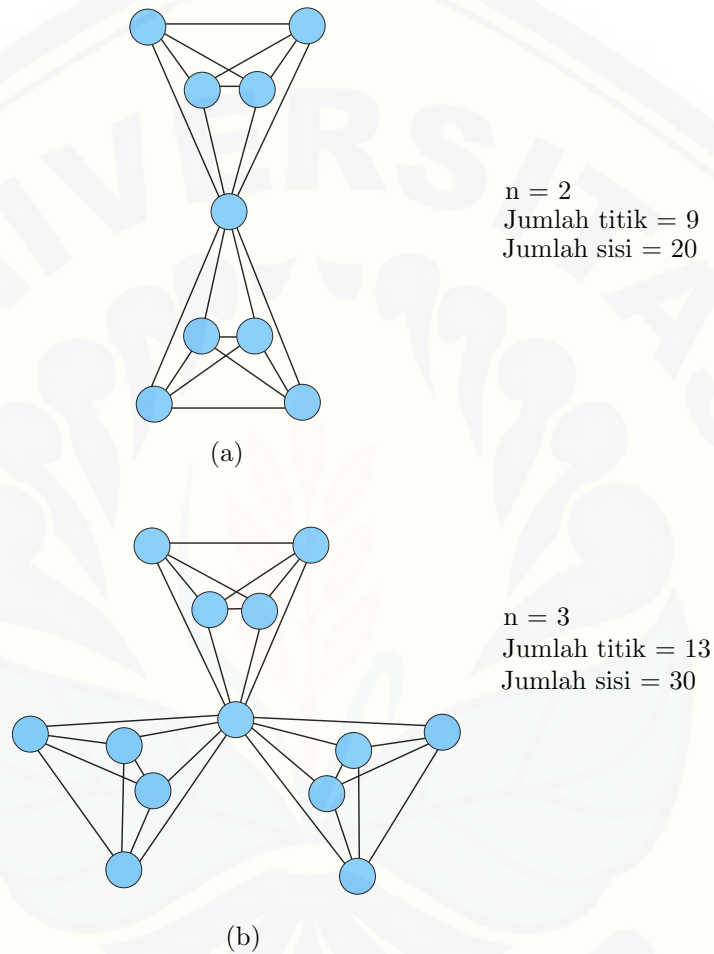
Hasil penelitian yang akan dibahas mengenai pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} -antimagic total dekomposisi pada graf *windmill* (WD_5^n) adalah lemma dan teorema yang diberi tanda \diamond . Terdapat 1 (satu) lemma, dan 25 (dua puluh lima) teorema baru yang ditemukan secara eksperimental dalam penelitian ini. Format penyajiannya diawali dengan pernyataan lemma dan teorema kemudian dilanjutkan dengan bukti dan contoh gambar. Contoh gambar merupakan ilustrasi dari teorema yang telah ditemukan sebagai visualisasi kebenaran pembuktian teorema. Berikut ini akan dijelaskan tahap-tahap bagaimana teorema tersebut ditemukan serta menjawab rumusan masalah yang ada.

4.1 Pelabelan Super (a, d) - \mathcal{H} Antimagic Total Dekomposisi pada Graf *Windmill* Konektif

Penentuan batas atas d merupakan hal yang penting dalam penelitian ini. Batas atas menjelaskan seberapa banyak nilai beda yang mungkin dimiliki oleh graf *windmill* konektif maupun diskonektif dalam pelabelan dekomposisi super antimagic. Menentukan nilai-nilai d tersebut, diperlukan jumlah titik (p_G) dan jumlah sisi (q_G) pada graf *windmill* konektif maupun diskonektif, serta perlu diketahui jumlah titik (p_H) dan jumlah sisi (q_H) pada subgraf atau selimut dari graf *windmill* konektif maupun diskonektif beserta jumlah selimutnya (s).

Dekomposisi graf *windmill* merupakan sebuah graf yang dinotasikan dengan WD_5^n dengan $V(WD_5^n) = \{A, x_i, y_i, z_i, p_i : 1 \leq i \leq n\}$ dan sisi $E(WD_5^n) =$

$\{Ax_i, Ay_i, Az_i, Ap_i, x_iy_i, x_iz_i, x_ip_i, y_iz_i, y_ip_i, z_ip_i; 1 \leq i \leq n\}$. Untuk jumlah titik $|V| = (p_G)$ dan sisinya $|E| = (q_G)$ serta jumlah titik (p_H) dan jumlah sisi (q_H) pada subgraf atau selimut graf *windmill* konektif. Nilai n yang dimaksudkan adalah banyaknya *expand* graf *windmill* WD_5 yang terdapat pada graf *windmill*. Gambar 4.1 merupakan sebuah ilustrasi untuk menentukan jumlah titik dan jumlah sisi pada graf *windmill*.



Gambar 4.1 Jumlah titik dan sisi (a) WD_5^2 , (b) WD_5^3

Berdasarkan pola pada Gambar 4.1 graf *windmill* WD_5^n dengan n yang berbeda, diperoleh rumusan jumlah titik pada graf *windmill* adalah $(p_G)=4n + 1$. Sedangkan jumlah sisi pada graf *windmill* WD_5^n merupakan jumlah seluruh sisi yang menghubungkan sebuah titik dengan titik yang lainnya pada graf tersebut sesuai definisi yang diberikan adalah $(q_G)=10n$. Subgraf berupa graf *windmill* WD_5 merupakan selimut dari graf *windmill* WD_5^n , maka jumlah titik yang meru-

pakan dekomposisi adalah $p_H = 5$, sedangkan jumlah sisi dekomposisi adalah $q_H = 10$ dan rumusan jumlah dekomposisi pada WD_5^n adalah n .

Diketahui jumlah titik $p_G = 4n + 1$ dan sisi $q_G = 10n$, sedangkan jumlah titik selimut adalah $p_H = 5$ dan jumlah sisi selimut adalah $q_H = 10$ dengan jumlah selimut $s = n$. Batas atas nilai beda d dapat di cari dengan menggunakan lemma 2.4.1, sehingga diperoleh hasil :

$$\begin{aligned}
 d &\leq \frac{(p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H}{s - 1} \\
 &= \frac{(4n + 1 - 5)5 + (10n - 10)10}{n - 1} \\
 &= \frac{(4n - 4)5 + (10n - 10)10}{n - 1} \\
 &= \frac{20n - 20 + 100n - 100}{n - 1} \\
 &= \frac{120n - 120}{n - 1} \\
 &= \frac{120(n - 1)}{n - 1} \\
 &= 120
 \end{aligned}$$

Karena pelabelan \mathcal{SHAT} selalu menggunakan bilangan bulat positif, maka nilai $d \geq 0$ dan d adalah bilangan bulat, sehingga $d \in \{0, 1, 2, 3, \dots, 120\}$. Selanjutnya penentuan fungsi bijektif pelabelan selimut super (a, d) - \mathcal{H} -antimagic akan disesuaikan dengan nilai d yang telah ditetapkan.

Menentukan pelabelan selimut super \mathcal{H} antimagic pada graf *windmill* menggunakan metode yang terdiri dari beberapa langkah. Metode tersebut diawali dengan menggunakan pendeteksian pola (*pattern recognition*) untuk menentukan pelabelan yang berlaku pada batas i yang telah ditemukan. Penentuan pola secara umum menggunakan fungsi-fungsi barisan aritmatika, dimana fungsi tersebut merupakan fungsi bijektif. Setelah fungsi bijektif diketahui dilakukan pembuktian secara deduktif matematik untuk membuktikan kebenaran dari teorema yang diperoleh. Teorema dalam penelitian ini bukan teorema yang *biimplikatif* atau karakteristik sehingga pembuktiannya hanya dilakukan satu arah. Berdasarkan hasil penggabungan pola melalui pedektesian pola (*pattern recognition*) dan konsep barisan aritmatika, maka diperoleh beberapa teorema dan akibat sebagai

berikut. Teorema yang ditemukan dalam penelitian ini tidak bersifat tunggal melainkan hanya bersifat keberadaan (*existence but not unique*).

Setelah mengetahui batas atas nilai d , langkah selanjutnya adalah menentukan pelabelan super \mathcal{H} antimagic total dekomposisi dengan terlebih dahulu menentukan fungsi bijektif melalui pengamatan pola dan menggunakan konsep barisan aritmatika dari titik dan sisi pada graf *windmill* WD_5^n , dimana $V(WD_5^n) = \{A, x_i, y_i, z_i, p_i : 1 \leq i \leq n\}$ dan sisi $E(WD_5^n) = \{Ax_i, Ay_i, Az_i, Ap_i, x_iy_i, x_iz_i, x_ip_i, y_iz_i, y_ip_i, z_ip_i; 1 \leq i \leq n\} : 1 \leq i \leq n\}$ untuk $n \geq 2$.

◇**Teorema 4.1.1.** *Ada pelabelan super $(98n + 22, 0)$ - WD_5 antimagic total dekomposisi pada graf windmill WD_5^n untuk $n \geq 2$.*

Bukti. Labeli titik graf windmill WD_5^n dengan fungsi bijektif f_1 sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f_1(A) &= 1 \\ f_1(x_i) &= i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ f_1(y_i) &= 2n - i + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ f_1(z_i) &= 2n + i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ f_1(p_i) &= 4n - i + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Dapat dilihat bahwa f_1 adalah fungsi bijektif yang memetakan WD_5^n ke himpunan bilangan bulat $f(V) = \{1, 2, 3, \dots, 4n + 1\}$. Jika w_{f_1} didefinisikan sebagai bobot dari pelabelan total dekomposisi pada graf *windmill* dimana bobot dekomposisi tersebut adalah $\mathcal{H} = WD_5$ sebagai dekomposisinya, Maka fungsi bijektif w_{f_1} dapat ditentukan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} w_{f_1} &= f_1(A) + f_1(x_i) + f_1(y_i) + f_1(z_i) + f_1(p_i) \\ &= (1) + (i + 1) + (2n - i + 2) + (2n + i + 1) + (4n - i + 2) \\ &= 8n + 7, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Labeli sisi graf *windmill* WD_5^n dengan fungsi bijektif f_1 dengan label sebagai

berikut:

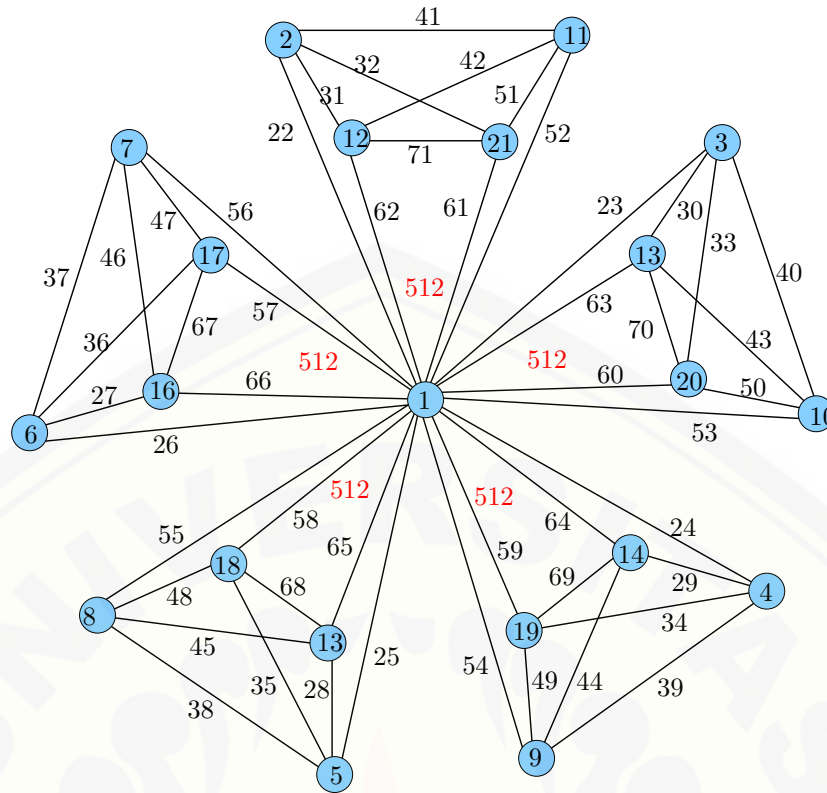
$$\begin{aligned}
 f_1(Ax_i) &= 4n + i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
 f_1(x_iz_i) &= 6n - i + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
 f_1(x_ip_i) &= 6n + i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
 f_1(x_iy_i) &= 8n - i + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
 f_1(y_iz_i) &= 8n + i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
 f_1(y_ip_i) &= 10n - i + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
 f_1(Ay_i) &= 10n + i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
 f_1(Ap_i) &= 12n - i + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
 f_1(Az_i) &= 12n + i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
 f_1(z_ip_i) &= 14n - i + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n
 \end{aligned}$$

Misalkan W_{f_1} didefinisikan sebagai bobot total dekomposisi pada graf *windmill* berdasarkan penjumlahan bobot dekomposisi dengan label sisinya maka w_{f_1} dan fungsi label sisi dengan syarat batas i yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 W_{f_1} &= w_{f_1} + f_1(Ax_i) + f_1(x_iz_i) + f_1(x_ip_i) + f_1(x_iy_i) + f_1(y_iz_i) + f_1(y_ip_i) + \\
 &\quad f_1(Ay_i) + f_1(Ap_i) + f_1(Az_i) + f_1(z_ip_i) \\
 &= 98n + 22, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n
 \end{aligned}$$

Dengan demikian maka didapatkan himpunan bobot total dekomposisi $W_{f_1} = \{98n + 22, 98n + 22, \dots, 98n + 22\}$. Sehingga terbukti bahwa pada graf *windmill* WD_5^n memiliki super $(98n + 22, 0) - WD_5$ antimagic total dekomposisi untuk $n \geq 2$. \square

Gambar 4.2 merupakan contoh super $(512, 0) - WD_5$ antimagic total dekomposisi pada graf *windmill* WD_5^5 , dimana nilai $a = 512$, $d = 0$, dan himpunan bobot total dekomposisi $W = \{512, 512, \dots, 512\}$.



Gambar 4.2 Super $(512, 0) - WD_5$ antimagic total dekomposisi pada WD_5^5

◇ **Teorema 4.1.2.** *Ada pelabelan super $(97n + 23, 2) - WD_5$ antimagic total dekomposisi pada graf windmill WD_5^n untuk $n \geq 2$.*

Bukti. Labeli titik graf windmill WD_5^n dengan fungsi bijektif f_2 sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 f_2(A) &= 1 \\
 f_2(x_i) &= i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
 f_2(y_i) &= n + i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
 f_2(z_i) &= 2n + i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
 f_2(p_i) &= 4n - i + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n
 \end{aligned}$$

Dapat dilihat bahwa f_2 adalah fungsi bijektif yang memetakan WD_5^n ke himpunan bilangan bulat $f(V) = \{1, 2, 3, \dots, 4n + 1\}$. Jika w_{f_2} didefinisikan sebagai bobot dari pelabelan total dekomposisi pada graf windmill dimana bobot dekomposisi tersebut adalah $\mathcal{H} = WD_5$ sebagai dekomposisinya, Maka fungsi bijektif w_{f_2}

dapat ditentukan sebagai berikut:

$$w_{f_2} = 7n + 2i + 6, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

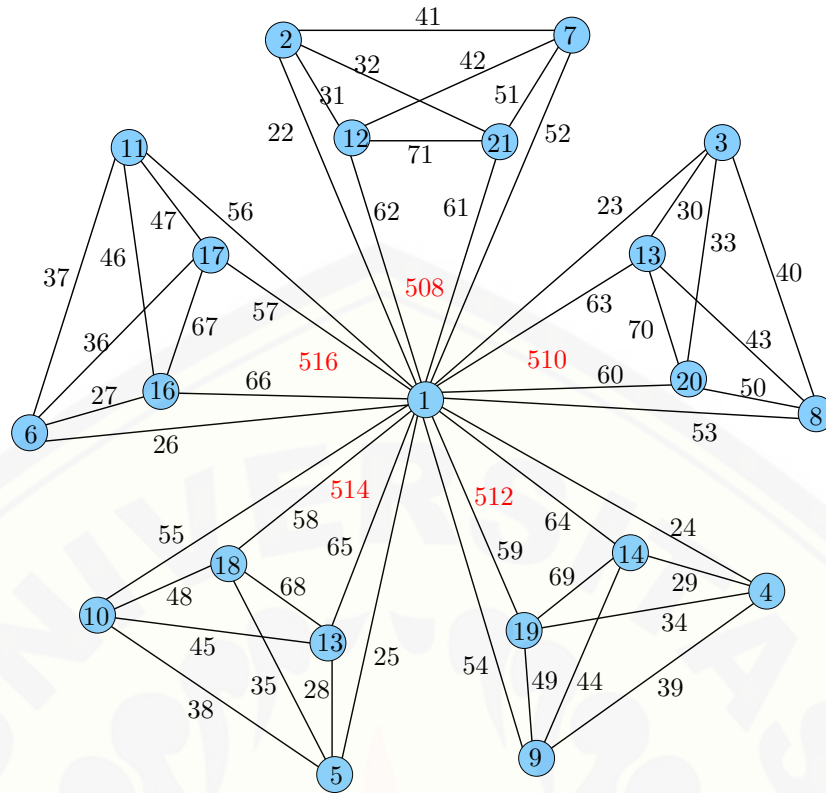
Gunakan label sisi yang terdapat pada teorema 4.1.1 kedalam teorema 4.1.2 untuk melabeli sisi graf dimana $f_2=f_1$ sehingga $f_2(Ax_i)=f_1(Ax_i)$, $f_2(x_iz_i)=f_1(x_iz_i)$, $f_2(x_ip_i)=f_1(x_ip_i)$, $f_2(x_iy_i)=f_1(x_iy_i)$, $f_2(y_iz_i)=f_1(y_iz_i)$, $f_2(y_ip_i)=f_1(y_ip_i)$, $f_2(Ay_i)=f_1(Ay_i)$, $f_2(Ap_i)=f_1(Ap_i)$, $f_2(Az_i)=f_1(Az_i)$, $f_2(z_ip_i)=f_1(z_ip_i)$.

Misalkan W_{f_2} didefinisikan sebagai bobot total dekomposisi pada graf *windmill* berdasarkan penjumlahan bobot dekomposisi dengan label sisinya maka w_{f_2} dan fungsi label sisi dengan syarat batas i yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$W_{f_2} = 97n + 2i + 21, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

Dengan demikian maka didapatkan himpunan bobot total dekomposisi $W_{f_2} = \{97n + 23, 97n + 25, \dots, 99n + 21\}$. Sehingga terbukti bahwa pada graf *windmill* WD_5^n memiliki super $(97n + 23, 2) - WD_5$ antimagic total dekomposisi untuk $n \geq 2$. \square

Gambar 4.3 merupakan contoh super $(508, 2) - WD_5$ antimagic total dekomposisi pada graf *windmill* WD_5^5 , dimana nilai $a = 508$, $d = 2$, dan himpunan bobot total dekomposisi $W = \{508, 510, \dots, 516\}$.



Gambar 4.3 Super $(508, 2) - WD_5$ antimagic total dekomposisi pada WD_5^5

◇**Teorema 4.1.3.** *Ada pelabelan super $(96n + 24, 4) - WD_5$ antimagic total dekomposisi pada graf windmill WD_5^n untuk $n \geq 2$.*

Bukti. pelabelan titik graf windmill WD_5^n dengan fungsi bijektif WD_5 sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 f_3(A) &= 1 \\
 f_3(x_i) &= i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
 f_3(y_i) &= n + i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
 f_3(z_i) &= 2n + i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
 f_3(p_i) &= 3n + i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n
 \end{aligned}$$

Dapat dilihat bahwa f_3 adalah fungsi bijektif yang memetakan WD_5^n ke himpunan bilangan bulat $f(V) = \{1, 2, 3, \dots, 4n + 1\}$. Jika w_{f_3} didefinisikan sebagai bobot dari pelabelan total dekomposisi pada graf windmill dimana bobot dekomposisi tersebut adalah $\mathcal{H} = WD_5$ sebagai dekomposisinya, Maka fungsi bijektif w_{f_3} dapat

ditentukan sebagai berikut:

$$w_{f_3} = 6n + 4i + 5, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

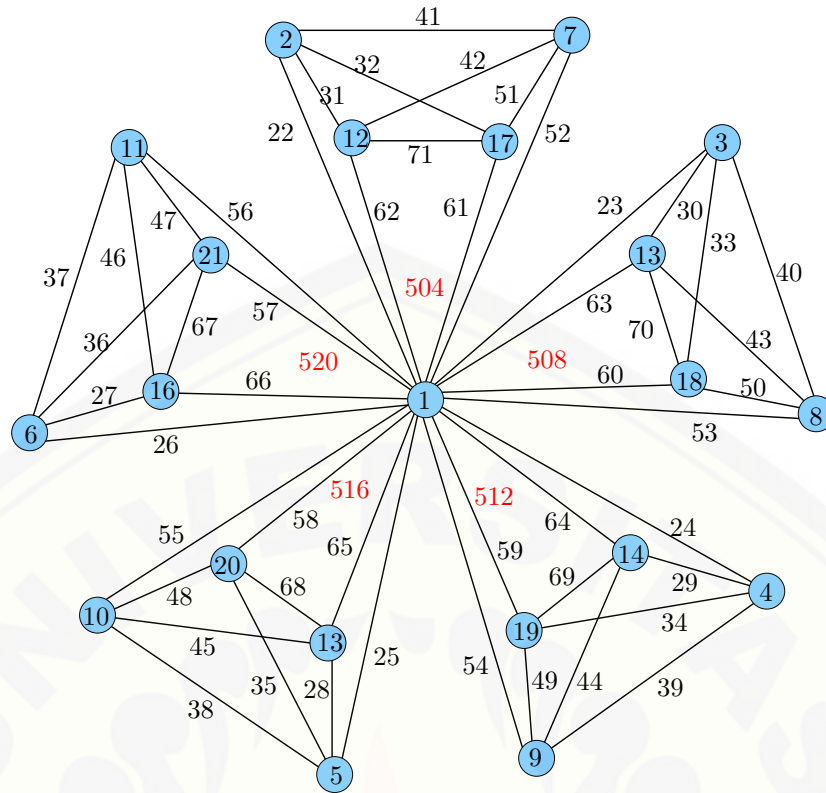
Gunakan label sisi yang terdapat pada teorema 4.1.1 kedalam teorema 4.1.3 untuk melabeli sisi graf dimana $f_2=f_1$ sehingga $f_3(Ax_i)=f_1(Ax_i)$, $f_3(x_iz_i)=f_1(x_iz_i)$, $f_3(x_ip_i)=f_1(x_ip_i)$, $f_3(x_iy_i)=f_1(x_iy_i)$, $f_3(y_iz_i)=f_1(y_iz_i)$, $f_3(y_ip_i)=f_1(y_ip_i)$, $f_3(Ay_i)=f_1(Ay_i)$, $f_3(Ap_i)=f_1(Ap_i)$, $f_3(Az_i)=f_1(Az_i)$, $f_3(z_ip_i)=f_1(z_ip_i)$.

Misalkan W_{f_3} didefinisikan sebagai bobot total dekomposisi pada graf *windmill* berdasarkan penjumlahan bobot dekomposisi dengan label sisinya maka w_{f_3} dan fungsi label sisi dengan syarat batas i yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$W_{f_3} = 96n + 4i + 20, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

Dengan demikian maka didapatkan himpunan bobot total dekomposisi $W_{f_3} = \{96n + 24, 96n + 28, \dots, 100n + 20\}$. Sehingga terbukti bahwa pada graf *windmill* WD_5^n memiliki super $(96n + 24, 4) - WD_5$ antimagic total dekomposisi untuk $n \geq 2$. \square

Gambar 4.4 merupakan contoh super $(504, 4) - WD_5$ antimagic total dekomposisi pada graf *windmill* WD_5^5 , dimana nilai $a = 504$, $d = 4$, dan himpunan bobot total dekomposisi $W = \{504, 508, \dots, 520\}$.



Gambar 4.4 Super $(504, 4) - WD_5$ antimagic total dekomposisi pada WD_5^5

◇**Teorema 4.1.4.** Ada pelabelan super $(95n + 25, 6) - WD_5$ antimagic total dekomposisi pada graf windmill WD_5^n untuk $n \geq 2$.

Bukti. Labeli titik graf windmill WD_5^n dengan menggunakan label titik yang terdapat pada teorema 4.1.2 kedalam teorema 4.1.4 dimana $f_4 = f_2$, sehingga $f_4(A) = f_2(A)$, $f_4(x_i) = f_2(x_i)$, $f_4(y_i) = f_2(y_i)$, $f_4(z_i) = f_3(z_i)$, $f_4(p_i) = f_2(p_i)$. Dengan demikian maka bobot $w_{f_4} = 7n + 2i + 6$.

Labeli sisi graf windmill WD_5^n dengan fungsi bijektif f_4 sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f_4(Ax_i) &= 4n + 2i, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ f_4(x_i z_i) &= 4n + 2i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ f_4(x_i p_i) &= 8n - 2i + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

$$f_4(x_i y_i) = 8n - 2i + 3, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$f_4(y_i z_i) = 8n + 2i, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$f_4(y_i p_i) = 8n + 2i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$f_4(A y_i) = 12n - 2i + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$f_4(A p_i) = 12n - 2i + 3, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$f_4(A z_i) = 12n + 2i, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

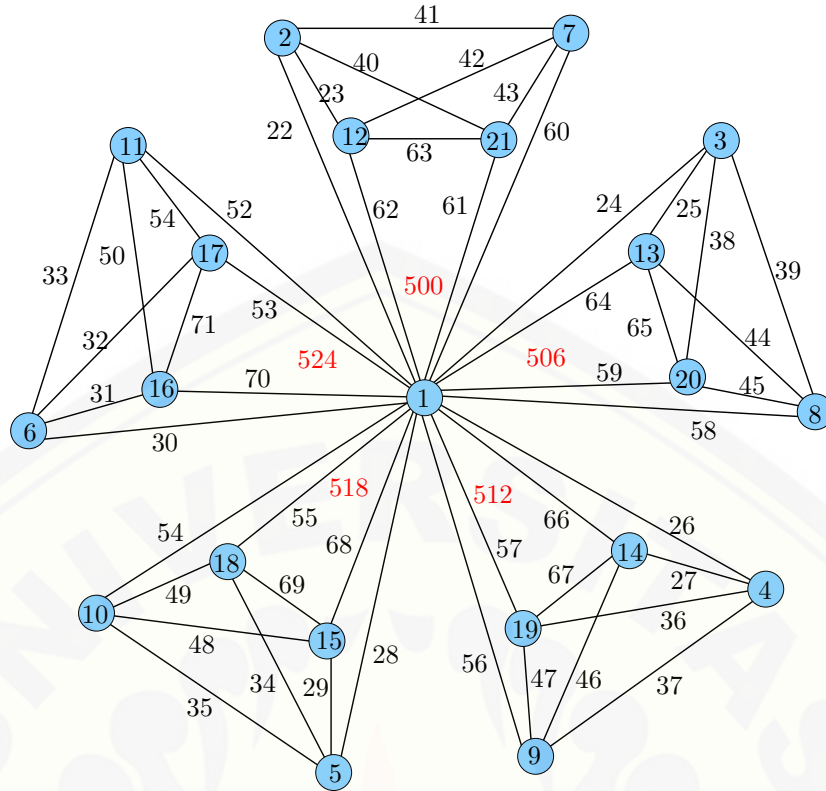
$$f_4(z_i p_i) = 12n + 2i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

Misalkan W_{f_4} didefinisikan sebagai bobot total dekomposisi pada graf *windmill* berdasarkan penjumlahan bobot dekomposisi dengan label sisinya maka w_{f_4} dan fungsi label sisi dengan syarat batas i yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$W_{f_4} = 95n + 6i + 19, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

Dengan demikian maka didapatkan himpunan bobot total dekomposisi $W_{f_4} = \{95n + 25, 95n + 31, \dots, 101n + 19\}$. Sehingga terbukti bahwa pada graf *windmill* WD_5^n memiliki super $(95n + 25, 6) - WD_5$ antimagic total dekomposisi untuk $n \geq 2$. \square

Gambar 4.5 merupakan contoh super $(500, 6) - WD_5$ antimagic total dekomposisi pada graf *windmill* WD_5^n , dimana nilai $a = 500$, $d = 6$, dan himpunan bobot total dekomposisi $W = \{500, 506, \dots, 524\}$.



Gambar 4.5 Super $(500, 6) - WD_5$ antimagic total dekomposisi pada WD_5^5

◇**Teorema 4.1.5.** *Ada pelabelan super $(94n + 26, 8) - WD_5$ antimagic total dekomposisi pada graf windmill WD_5^n untuk $n \geq 2$.*

Bukti. Labeli titik graf windmill WD_5^n dengan fungsi bijektif f_5 sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 f_5(A) &= 1 \\
 f_5(x_i) &= 2i, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
 f_5(y_i) &= 2i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
 f_5(z_i) &= 2n + 2i, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
 f_5(p_i) &= 2n + 2i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n
 \end{aligned}$$

Dapat dilihat bahwa f_5 adalah fungsi bijektif yang memetakan WD_5^n ke himpunan bilangan bulat $f(V) = \{1, 2, 3, \dots, 4n + 1\}$. Jika w_{f_4} didefinisikan sebagai bobot dekomposisi dari pelabelan total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas dimana bobot dekomposisi tersebut adalah $\mathcal{H} = WD_5$ sebagai dekomposisinya,

Maka fungsi bijektif w_{f_5} dapat ditentukan sebagai berikut:

$$w_{f_5} = 4n + 8i + 3, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

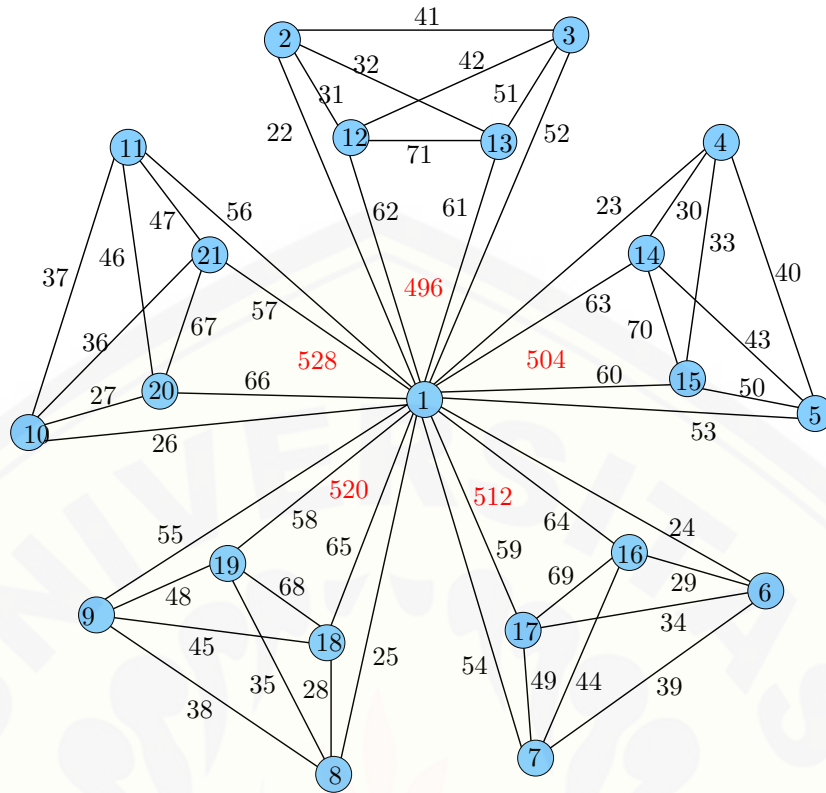
Gunakan label sisi yang terdapat pada teorema 4.1.1 kedalam teorema 4.1.5 untuk melabeli sisi graf dimana $f_5=f_1$ sehingga $f_5(Ax_i)=f_1(Ax_i)$, $f_5(x_iz_i)=f_1(x_iz_i)$, $f_5(x_ip_i)=f_1(x_ip_i)$, $f_5(x_iy_i)=f_1(x_iy_i)$, $f_5(y_iz_i)=f_1(y_iz_i)$, $f_5(y_ip_i)=f_1(y_ip_i)$, $f_5(Ay_i)=f_1(Ay_i)$, $f_5(Ap_i)=f_1(Ap_i)$, $f_5(Az_i)=f_1(Az_i)$, $f_5(z_ip_i)=f_1(z_ip_i)$. Labeli sisi graf windmill WD_5^n dengan fungsi bijektif f_5 sebagai berikut:

Misalkan W_{f_5} didefinisikan sebagai bobot total dekomposisi pada pada graf *windmill* berdasarkan penjumlahan bobot dekomposisi dengan label sisinya maka w_{f_5} dan fungsi label sisi dengan syarat batas i yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$W_{f_5} = 94n + 8i + 18, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

Dengan demikian maka didapatkan himpunan bobot total dekomposisi $W_{f_5} = \{94n + 26, 94n + 34, \dots, 102n + 18\}$. Sehingga terbukti bahwa pada graf *windmill* WD_5^n memiliki super $(94n + 26, 8) - WD_5$ antimagic total dekomposisi untuk $n \geq 2$. \square

Gambar 4.6 merupakan contoh super $(496, 8) - WD_5$ antimagic total dekomposisi pada graf *windmill* WD_5^5 , dimana nilai $a = 496$, $d = 8$, dan himpunan bobot total dekomposisi $W = \{496, 502, \dots, 528\}$.



Gambar 4.6 Super (496, 8) – WD_5 antimagic total dekomposisi pada WD_5^5

◇ **Teorema 4.1.6.** Ada pelabelan super $(93n+27, 10)$ - WD_3 antimagic total dekomposisi pada graf windmill WD_5^n untuk $n \geq 2$.

Bukti. Labeli titik graf windmill WD_5^n dengan menggunakan label titik yang terdapat pada teorema 4.1.2 kedalam teorema 4.1.4 dimana $f_6=f_1$, sehingga $f_6(A)=f_1(A)$, $f_6(x_i)=f_1(x_i)$, $f_6(y_i)=f_1(y_i)$, $f_6(z_i)=f_1(z_i)$, $f_6(p_i)=f_1(p_i)$. Dengan demikian maka bobot $w_{f_6} = 8n + 7$. Labeli sisi graf windmill WD_5^n dengan fungsi bijektif f_6 sebagai berikut:

$$f_6(Ax_i) = 4n + i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$f_6(x_iz_i) = 5n + i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$f_6(x_ip_i) = 6n + i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

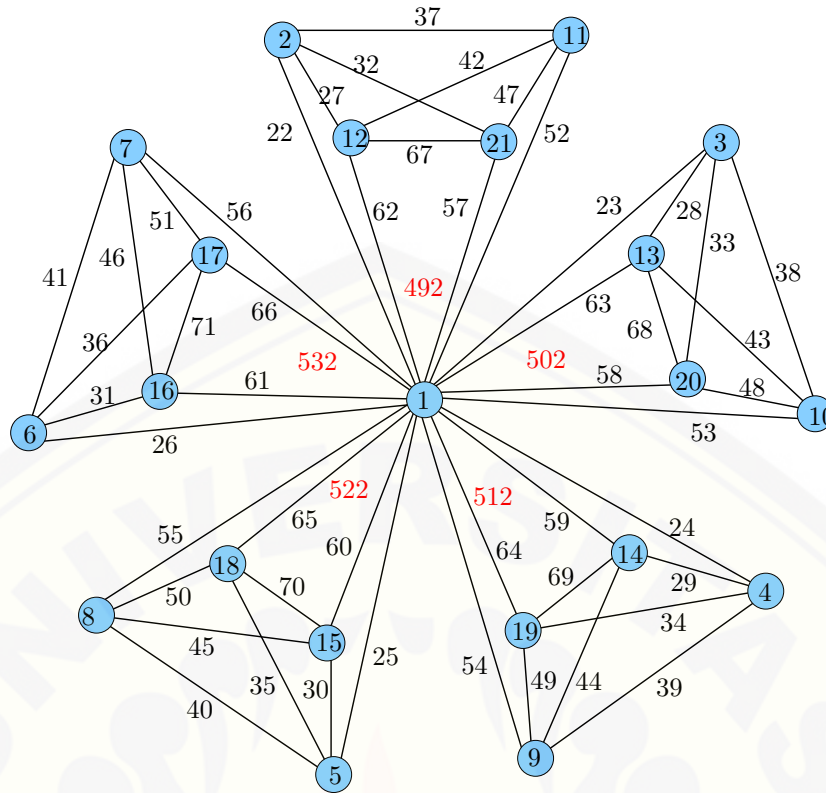
$$\begin{aligned}
f_6(x_i y_i) &= 7n + i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
f_6(y_i z_i) &= 8n + i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
f_6(y_i p_i) &= 9n + i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
f_6(A y_i) &= 10n + i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
f_6(A p_i) &= 11n + i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
f_6(A z_i) &= 12n + i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
f_6(z_i p_i) &= 13n + i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n
\end{aligned}$$

Misalkan W_{f_6} didefinisikan sebagai bobot total dekomposisi pada graf *windmill* berdasarkan penjumlahan bobot dekomposisi dengan label sisinya maka w_{f_6} dan fungsi label sisi dengan syarat batas i yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$W_{f_6} = 93n + 10i + 17, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

Dengan demikian maka didapatkan himpunan bobot total dekomposisi $W_{f_6} = \{93n + 27, 93n + 37, \dots, 103n + 17\}$. Sehingga terbukti bahwa pada graf *windmill* WD_5^n memiliki super $(93n + 27, 10) - WD_5$ antimagic total dekomposisi untuk $n \geq 2$. \square

Gambar 4.7 merupakan contoh super $(492, 10) - WD_5$ antimagic total dekomposisi pada graf *windmill* WD_5^5 , dimana nilai $a = 492$, $d = 10$, dan himpunan bobot total dekomposisi $W = \{492, 502, \dots, 532\}$.



Gambar 4.7 Super $(492, 10) - WD_5$ antimagic total dekomposisi pada WD_5^5

◇ **Teorema 4.1.7.** Ada pelabelan super $(92n+28, 12) - WD_5$ antimagic total dekomposisi pada graf windmill WD_5^n untuk $n \geq 2$.

Bukti. Labeli titik graf *windmill* WD_5^n dengan menggunakan label titik yang terdapat pada teorema 4.1.2 kedalam teorema 4.1.7 dimana $f_7=f_2$, sehingga $f_7(A)=f_2(A)$, $f_7(x_i)=f_2(x_i)$, $f_7(y_i)=f_2(y_i)$, $f_7(z_i)=f_2(z_i)$, $f_7(p_i)=f_2(p_i)$. Dengan demikian maka bobot $w_{f_4} = 7n + 2i + 6$.

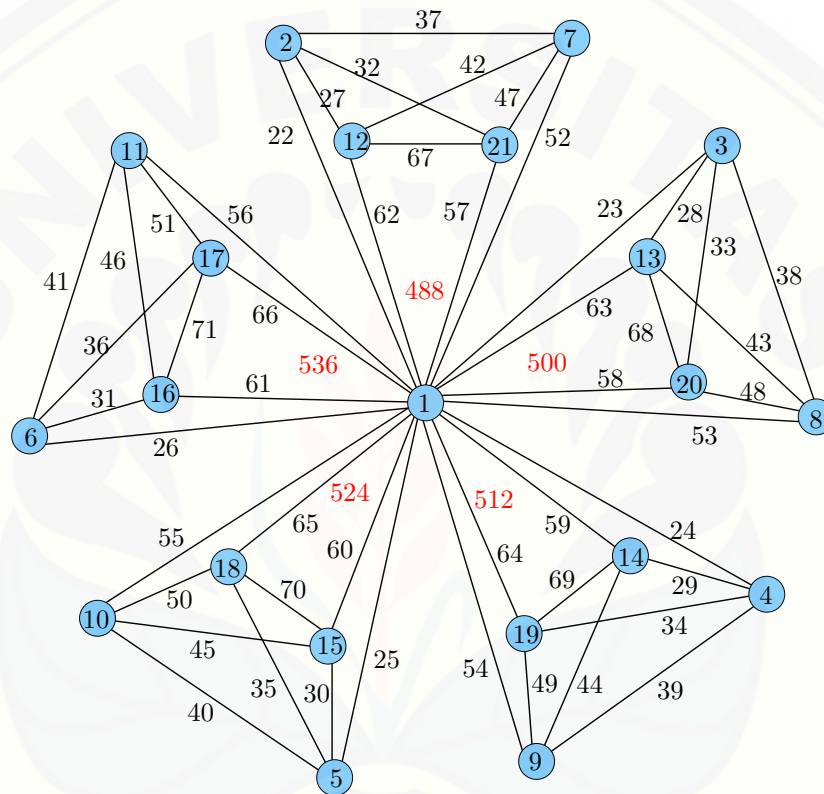
Gunakan label sisi yang terdapat pada teorema 4.1.6 kedalam teorema 4.1.7 untuk melabeli sisi graf dimana $f_7=f_6$ sehingga $f_7(Ax_i)=f_6(Ax_i)$, $f_7(x_i z_i)=f_6(x_i z_i)$, $f_7(x_i p_i)=f_6(x_i p_i)$, $f_7(x_i y_i)=f_6(x_i y_i)$, $f_7(y_i z_i)=f_6(y_i z_i)$, $f_7(y_i p_i)=f_6(y_i p_i)$, $f_7(Ay_i)=f_6(Ay_i)$, $f_7(Ap_i)=f_6(Ap_i)$, $f_7(Az_i)=f_6(Az_i)$, $f_7(z_i p_i)=f_6(z_i p_i)$.

Misalkan W_{f_7} didefinisikan sebagai bobot total dekomposisi pada pada graf *windmill* berdasarkan penjumlahan bobot dekomposisi dengan label sisinya maka w_{f_7} dan fungsi label sisi dengan syarat batas i yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$W_{f_7} = 92n + 12i + 16, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

Dengan demikian maka didapatkan himpunan bobot total dekomposisi $W_{f_7} = \{92n + 28, 92n + 40, \dots, 104n + 16\}$. Sehingga terbukti bahwa pada graf *windmill* WD_5^n memiliki super $(92n + 28, 12) - WD_5$ antimagic total dekomposisi untuk $n \geq 2$. \square

Gambar 4.8 merupakan contoh super $(488, 12) - WD_5$ antimagic total dekomposisi pada graf *windmill* WD_5^5 , dimana nilai $a = 488$, $d = 12$, dan himpunan bobot total dekomposisi $W = \{488, 500, \dots, 536\}$.



Gambar 4.8 Super $(488, 12) - WD_5$ antimagic total dekomposisi pada WD_5^5

◇ **Teorema 4.1.8.** *Ada pelabelan super $(91n+29, 14)$ - WD_5 antimagic total dekomposisi pada graf windmill WD_5^n untuk $n \geq 2$.*

Bukti. Labeli titik graf windmill WD_5^n dengan menggunakan label titik yang terdapat pada teorema 4.1.3 kedalam teorema 4.1.8 dimana $f_8=f_3$, sehingga $f_8(A)=f_3(A)$, $f_8(x_i)=f_3(x_i)$, $f_8(y_i)=f_3(y_i)$, $f_8(z_i)=f_3(z_i)$, $f_8(p_i)=f_3(p_i)$. Dengan demikian maka bobot $w_{f_8} = 6n + 4i + 5$.

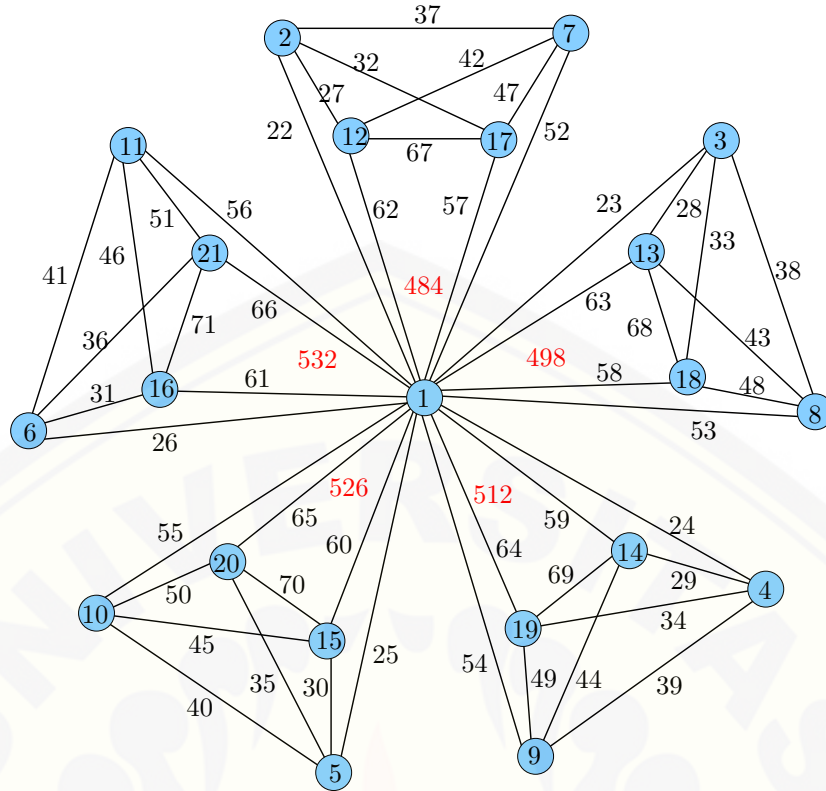
Gunakan label sisi yang terdapat pada teorema 4.1.6 kedalam teorema 4.1.8 untuk melabeli sisi graf dimana $f_8=f_6$ sehingga $f_8(Ax_i)=f_6(Ax_i)$, $f_8(x_iz_i)=f_6(x_iz_i)$, $f_8(x_ip_i)=f_6(x_ip_i)$, $f_8(x_iy_i)=f_6(x_iy_i)$, $f_8(y_iz_i)=f_6(y_iz_i)$, $f_8(y_ip_i)=f_6(y_ip_i)$, $f_8(Ay_i)=f_6(Ay_i)$, $f_8(Ap_i)=f_6(Ap_i)$, $f_8(Az_i)=f_6(Az_i)$, $f_8(z_ip_i)=f_6(z_ip_i)$.

Misalkan W_{f_8} didefinisikan sebagai bobot total dekomposisi pada pada graf windmill berdasarkan penjumlahan bobot dekomposisi dengan label sisinya maka w_{f_8} dan fungsi label sisi dengan syarat batas i yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$W_{f_8} = 91n + 14i + 15, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

Dengan demikian maka didapatkan himpunan bobot total dekomposisi $W_{f_8} = \{91n + 29, 91n + 43, \dots, 105n + 15\}$. Sehingga terbukti bahwa pada graf windmill WD_5^n memiliki super $(91n + 29, 14) - WD_5$ antimagic total dekomposisi untuk $n \geq 2$. □

Gambar 4.9 merupakan contoh super $(484, 14) - WD_5$ antimagic total dekomposisi pada graf windmill WD_5^5 , dimana nilai $a = 484$, $d = 14$, dan himpunan bobot total dekomposisi $W = \{484, 498, \dots, 532\}$.



Gambar 4.9 Super $(484, 14) - WD_5$ antimagic total dekomposisi pada WD_5^5

◇ **Teorema 4.1.9.** Ada pelabelan super $(89n+31, 18) - WD_5$ antimagic total dekomposisi pada graf windmill WD_5^n untuk $n \geq 2$.

Bukti. Labeli titik graf windmill WD_5^n dengan menggunakan label titik yang terdapat pada teorema 4.1.5 kedalam teorema 4.1.9 dimana $f_9=f_5$, sehingga $f_9(A)=f_5(A)$, $f_9(x_i)=f_5(x_i)$, $f_9(y_i)=f_5(y_i)$, $f_9(z_i)=f_5(z_i)$, $f_9(p_i)=f_5(p_i)$. Dengan demikian maka bobot $w_{f_4} = 4n + 8i + 3$.

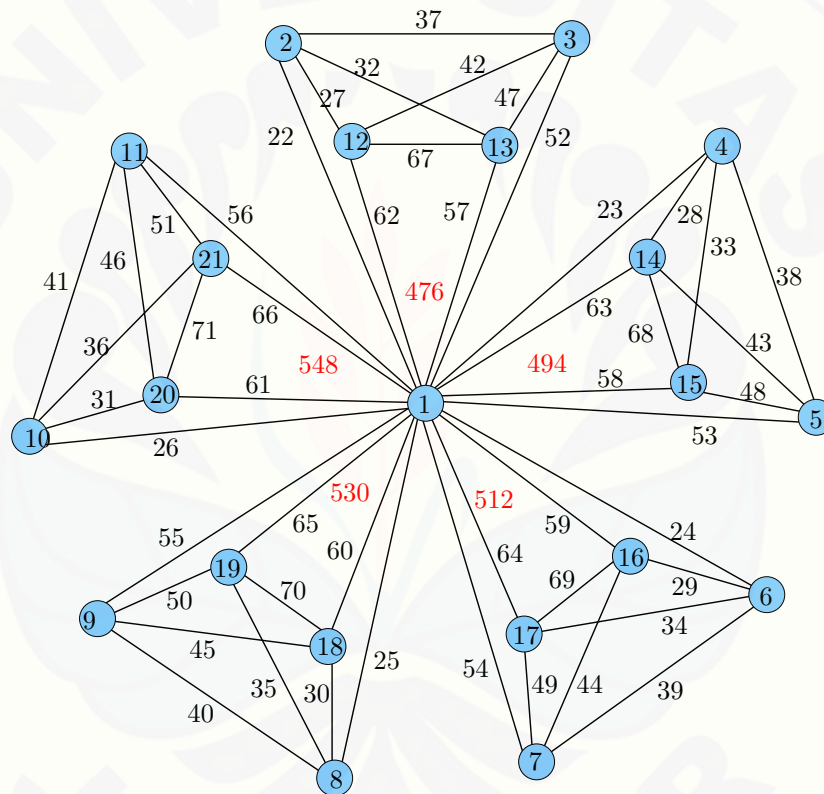
Gunakan label sisi yang terdapat pada teorema 4.1.6 kedalam teorema 4.1.9 untuk melabeli sisi graf dimana $f_9=f_6$ sehingga $f_9(Ax_i)=f_6(Ax_i)$, $f_9(x_iz_i)=f_6(x_iz_i)$, $f_9(x_ip_i)=f_6(x_ip_i)$, $f_9(x_iy_i)=f_6(x_iy_i)$, $f_9(y_iz_i)=f_6(y_iz_i)$, $f_9(y_ip_i)=f_6(y_ip_i)$, $f_9(Ay_i)=f_6(Ay_i)$, $f_9(Ap_i)=f_6(Ap_i)$, $f_9(Az_i)=f_6(Az_i)$, $f_9(z_ip_i)=f_6(z_ip_i)$.

Misalkan W_{f_9} didefinisikan sebagai bobot total dekomposisi pada pada graf windmill berdasarkan penjumlahan bobot dekomposisi dengan label sisinya maka w_{f_9} dan fungsi label sisi dengan syarat batas i yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$W_{f_9} = 89n + 18i + 13, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

Dengan demikian maka didapatkan himpunan bobot total dekomposisi $W_{f_9} = \{89n + 31, 89n + 49, \dots, 107n + 13\}$. Sehingga terbukti bahwa pada graf *windmill* WD_5^n memiliki super $(89n + 31, 18) - WD_5$ antimagic total dekomposisi untuk $n \geq 2$. \square

Gambar 4.10 merupakan contoh super $(476, 18) - WD_5$ antimagic total dekomposisi pada graf *windmill* WD_5^5 , dimana nilai $a = 476$, $d = 18$, dan himpunan bobot total dekomposisi $W = \{476, 494, \dots, 548\}$.



Gambar 4.10 Super $(476, 18) - WD_5$ antimagic total dekomposisi pada WD_5^5

◇ **Teorema 4.1.10.** *Ada pelabelan super $(88n+32, 20)$ - WD_5 antimagic total dekomposisi pada graf windmill WD_v^n untuk $n \geq 2$.*

Bukti. Labeli titik graf *windmill* WD_5^n dengan menggunakan label titik yang terdapat pada teorema 4.1.1 kedalam teorema 4.1.10 dimana $f_10=f_3$, sehingga $f_{10}(A)=f_1(A)$, $f_{10}(x_i)=f_1(x_i)$, $f_{10}(y_i)=f_1(y_i)$, $f_{10}(z_i)=f_1(z_i)$, $f_{10}(p_i)=f_1(p_i)$. Dengan demikian maka bobot $w_{f_{10}} = 8n + 7$.

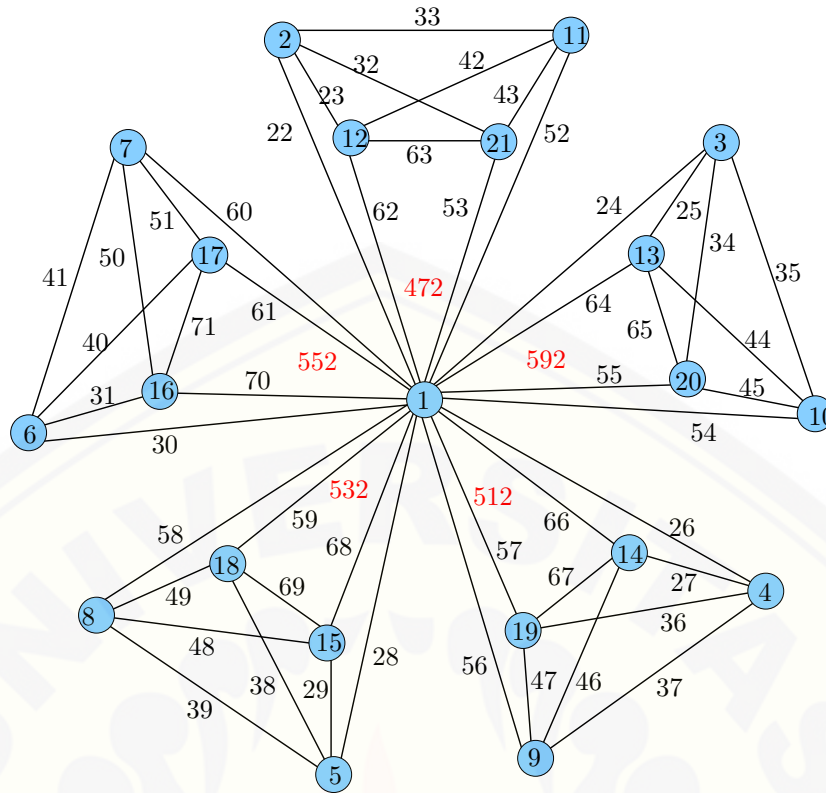
Gunakan label sisi yang terdapat pada teorema 4.1.4 kedalam teorema 4.1.10 untuk melabeli sisi graf dimana $f_{10}=f_4$ sehingga $f_{10}(Ax_i)=f_4(Ax_i)$, $f_{10}(x_i z_i)=f_4(x_i z_i)$, $f_{10}(x_i p_i)=f_4(x_i p_i)$, $f_{10}(x_i y_i)=f_4(x_i y_i)$, $f_{10}(y_i z_i)=f_4(y_i z_i)$, $f_{10}(y_i p_i)=f_4(y_i p_i)$, $f_{10}(Ay_i)=f_4(Ay_i)$, $f_{10}(Ap_i)=f_4(Ap_i)$, $f_{10}(Az_i)=f_4(Az_i)$, $f_{10}(z_i p_i)=f_4(z_i p_i)$.

Misalkan $W_{f_{10}}$ didefinisikan sebagai bobot total dekomposisi pada pada graf *windmill* berdasarkan penjumlahan bobot dekomposisi dengan label sisinya maka $w_{f_{10}}$ dan fungsi label sisi dengan syarat batas i yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$W_{f_{10}} = 88n + 20i + 12, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

Dengan demikian maka didapatkan himpunan bobot total dekomposisi $W_{f_{10}} = \{88n + 32, 88n + 52, \dots, 108n + 12\}$. Sehingga terbukti bahwa pada graf *windmill* WD_v^n memiliki super $(88n + 32, 20) - WD_5$ antimagic total dekomposisi untuk $n \geq 2$. □

Gambar 4.11 merupakan contoh super $(472, 20) - WD_5$ antimagic total dekomposisi pada graf windmill WD_5^5 , dimana nilai $a = 472$, $d = 20$, dan himpunan bobot total dekomposisi $W = \{472, 492, \dots, 552\}$.



Gambar 4.11 Super $(472, 20) - WD_5$ antimagic total dekomposisi pada WD_5^n

◇ **Teorema 4.1.11.** *Ada pelabelan super $(86n+34, 24) - WD_5$ antimagic total dekomposisi pada graf windmill WD_5^n untuk $n \geq 2$.*

Bukti. Labeli titik graf *windmill* WD_5^n dengan menggunakan label titik yang terdapat pada teorema 4.1.3 kedalam teorema 4.1.11 dimana $f_1 1 = f_3$, sehingga $f_{11}(A) = f_1(A)$, $f_{11}(x_i) = f_1(x_i)$, $f_{11}(y_i) = f_1(y_i)$, $f_{11}(z_i) = f_1(z_i)$, $f_{11}(p_i) = f_1(p_i)$. Dengan demikian maka bobot $w_{f_{11}} = 6n + 4i + 5$.

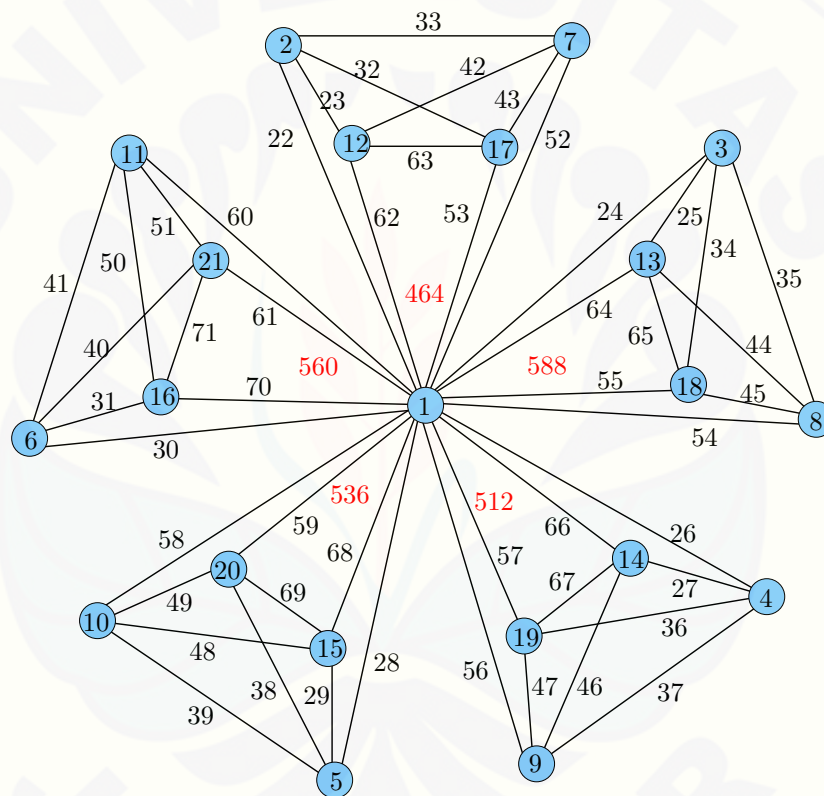
Gunakan label sisi yang terdapat pada teorema 4.1.4 kedalam teorema 4.1.11 untuk melabeli sisi graf dimana $f_1 1 = f_4$ sehingga $f_{11}(Ax_i) = f_4(Ax_i)$, $f_{11}(x_i z_i) = f_4(x_i z_i)$, $f_{11}(x_i p_i) = f_4(x_i p_i)$, $f_{11}(x_i y_i) = f_4(x_i y_i)$, $f_{11}(y_i z_i) = f_4(y_i z_i)$, $f_{11}(y_i p_i) = f_4(y_i p_i)$, $f_{11}(Ay_i) = f_4(Ay_i)$, $f_{11}(Ap_i) = f_4(Ap_i)$, $f_{11}(Az_i) = f_4(Az_i)$, $f_{11}(z_i p_i) = f_4(z_i p_i)$.

Misalkan $W_{f_{11}}$ didefinisikan sebagai bobot total dekomposisi pada pada graf *windmill* berdasarkan penjumlahan bobot dekomposisi dengan label sisinya maka $w_{f_{11}}$ dan fungsi label sisi dengan syarat batas i yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$W_{f_{11}} = 86n + 24i + 10, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

Dengan demikian maka didapatkan himpunan bobot total dekomposisi $W_{f_{11}} = \{86n + 34, 86n + 58, \dots, 110n + 10\}$. Sehingga terbukti bahwa pada graf *windmill* WD_5^n memiliki super $(88n + 32, 24) - WD_5$ antimagic total dekomposisi untuk $n \geq 2$. \square

Gambar 4.12 merupakan contoh super $(464, 24) - WD_5$ antimagic total dekomposisi pada graf *windmill* WD_5^n , dimana nilai $a = 464$, $d = 24$, dan himpunan bobot total dekomposisi $W = \{464, 488, \dots, 560\}$.



Gambar 4.12 Super $(464, 24) - WD_5$ antimagic total dekomposisi pada WD_5^5

◇ **Teorema 4.1.12.** *Ada pelabelan super $(84n+36, 28)$ - WD_5 antimagic total dekomposisi pada graf windmill WD_5^n untuk $n \geq 2$.*

Bukti. Labeli titik graf *windmill* WD_5^n dengan menggunakan label titik yang terdapat pada teorema 4.1.5 kedalam teorema 4.1.12 dimana $f_{12}=f_5$, sehingga $f_{12}(A)=f_5(A)$, $f_{12}(x_i)=f_5(x_i)$, $f_{12}(y_i)=f_5(y_i)$, $f_{12}(z_i)=f_5(z_i)$, $f_{12}(p_i)=f_5(p_i)$. Dengan demikian maka bobot $w_{f_{12}} = 4n + 8i + 3$.

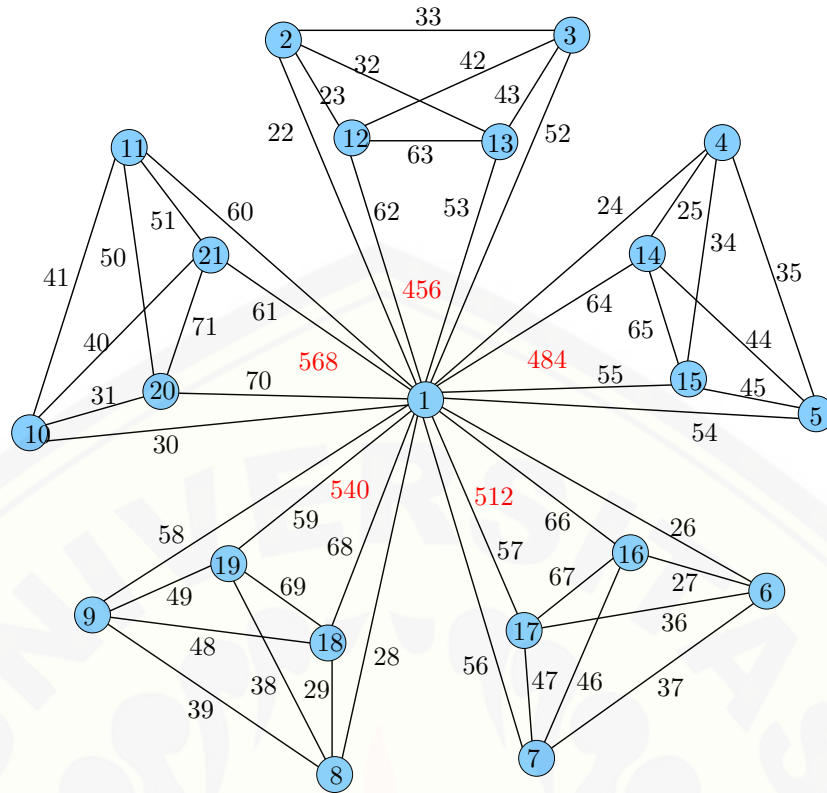
Gunakan label sisi yang terdapat pada teorema 4.1.4 kedalam teorema 4.1.12 untuk melabeli sisi graf dimana $f_{12}=f_4$ sehingga $f_{12}(Ax_i)=f_4(Ax_i)$, $f_{12}(x_i z_i)=f_4(x_i z_i)$, $f_{12}(x_i p_i)=f_4(x_i p_i)$, $f_{12}(x_i y_i)=f_4(x_i y_i)$, $f_{12}(y_i z_i)=f_4(y_i z_i)$, $f_{12}(y_i p_i)=f_4(y_i p_i)$, $f_{12}(Ay_i)=f_4(Ay_i)$, $f_{12}(Ap_i)=f_4(Ap_i)$, $f_{12}(Az_i)=f_4(Az_i)$, $f_{12}(z_i p_i)=f_4(z_i p_i)$.

Misalkan $W_{f_{12}}$ didefinisikan sebagai bobot total dekomposisi pada pada graf *windmill* berdasarkan penjumlahan bobot dekomposisi dengan label sisinya maka $w_{f_{12}}$ dan fungsi label sisi dengan syarat batas i yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$W_{f_{12}} = 84n + 28i + 8, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

Dengan demikian maka didapatkan himpunan bobot total dekomposisi $W_{f_{12}} = \{84n + 36, 84n + 66, \dots, 112n + 8\}$. Sehingga terbukti bahwa pada graf *windmill* WD_5^n memiliki super $(84n + 36, 28) - WD_5$ antimagic total dekomposisi untuk $n \geq 2$. □

Gambar 4.13 merupakan contoh super $(456, 28) - WD_5$ antimagic total dekomposisi pada graf *windmill* WD_5^5 . dimana nilai $a = 456$, $d = 28$, dan himpunan bobot total dekomposisi $W = \{456, 484, \dots, 568\}$.



Gambar 4.13 Super $(456, 28)$ – WD_5 antimagic total dekomposisi pada WD_5^5

◇ **Teorema 4.1.13.** *Ada pelabelan super $(73n+47, 50)$ - WD_5 antimagic total dekomposisi pada graf windmill WD_5^n untuk $n \geq 2$.*

Bukti. Labeli titik graf windmill WD_5^n dengan menggunakan label titik yang terdapat pada teorema 4.1.1 kedalam teorema 4.1.13 dimana $f_{13}=f_1$, sehingga $f_{13}(A)=f_1(A)$, $f_{13}(x_i)=f_1(x_i)$, $f_{13}(y_i)=f_1(y_i)$, $f_{13}(z_i)=f_1(z_i)$, $f_{13}(p_i)=f_1(p_i)$. Dengan demikian maka bobot $w_{f_{13}} = 4n + 7$.

Labeli sisi graf windmill WD_5^n dengan fungsi bijektif f_{13} sebagai berikut:

$$f_{13}(Ax_i) = 4n + 5i - 3, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$f_{13}(x_i z_i) = 4n + 5i - 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

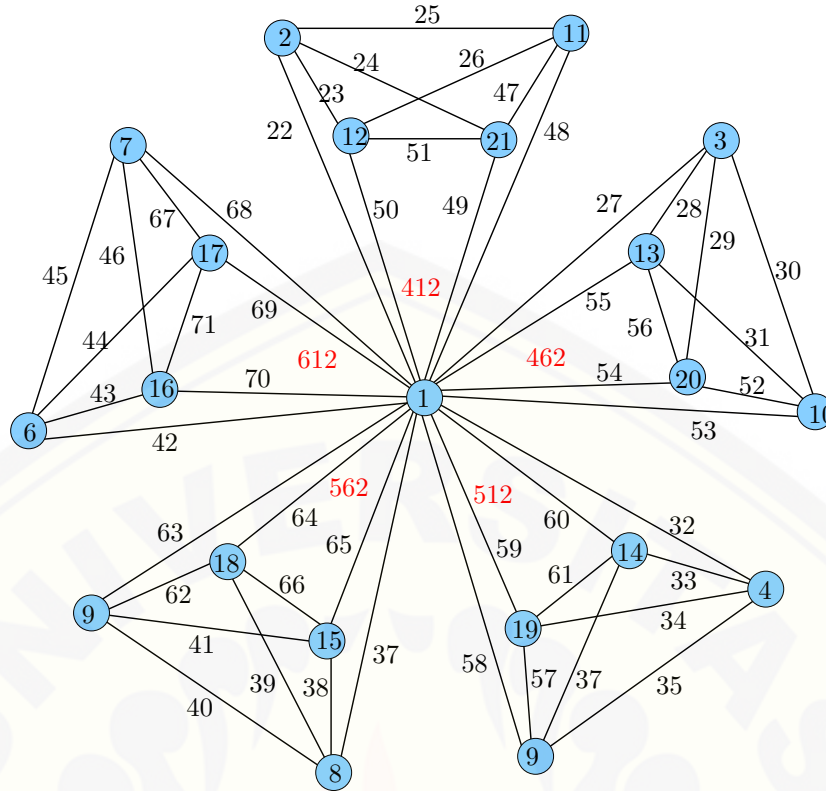
$$\begin{aligned}
 f_{13}(x_i p_i) &= 4n + 5i - 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
 f_{13}(x_i y_i) &= 4n + 5i, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
 f_{13}(y_i z_i) &= 4n + 5i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
 f_{13}(y_i p_i) &= 9n + 5i - 3, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
 f_{13}(A y_i) &= 9n + 5i - 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
 f_{13}(A p_i) &= 9n + 5i - 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
 f_{13}(A z_i) &= 9n + 5i, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
 f_{13}(z_i p_i) &= 9n + 5i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n
 \end{aligned}$$

Misalkan $W_{f_{13}}$ didefinisikan sebagai bobot total dekomposisi pada graf *windmill* berdasarkan penjumlahan bobot dekomposisi dengan label sisinya maka $w_{f_{13}}$ dan fungsi label sisi dengan syarat batas i yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$W_{f_{13}} = 73n + 50i - 3, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

Dengan demikian maka didapatkan himpunan bobot total dekomposisi $W_{f_{13}} = \{73n + 47, 73n + 97, \dots, 123n - 3\}$. Sehingga terbukti bahwa pada graf *windmill* WD_5^n memiliki super $(73n + 47, 50) - WD_5$ antimagic total dekomposisi untuk $n \geq 2$. \square

Gambar 4.14 merupakan contoh super $(412, 50) - WD_5$ antimagic total dekomposisi pada graf *windmill* WD_5^5 , dimana nilai $a = 412$, $d = 50$, dan himpunan bobot total dekomposisi $W = \{412, 462, \dots, 612\}$.



Gambar 4.14 Super $(412, 50) - WD_5$ antimagic total dekomposisi pada WD_5^5

◇**Teorema 4.1.14.** *Ada pelabelan super $(72n + 48, 52) - WD_5$ antimagic total dekomposisi pada graf graf windmill WD_5^n untuk $n \geq 2$.*

Bukti. Labeli titik graf *windmill* WD_5^n dengan menggunakan label titik yang terdapat pada teorema 4.1.2 kedalam teorema 4.1.14 dimana $f_{14}=f_2$, sehingga $f_{14}(A)=f_2(A)$, $f_{14}(x_i)=f_2(x_i)$, $f_{14}(y_i)=f_2(y_i)$, $f_{14}(z_i)=f_2(z_i)$, $f_{14}(p_i)=f_2(p_i)$. Dengan demikian maka bobot $w_{f_{14}} = 7n + 2i + 6$.

Gunakan label sisi yang terdapat pada teorema 4.1.13 kedalam teorema 4.1.14 untuk melabeli sisi graf dimana $f_{14}=f_{13}$ sehingga $f_{14}(Ax_i)=f_{13}(Ax_i)$, $f_{14}(x_i z_i) = f_{13}(x_i z_i)$, $f_{14}(x_i p_i)=f_{13}(x_i p_i)$, $f_{14}(x_i y_i)=f_{13}(x_i y_i)$, $f_{14}(y_i z_i)=f_{13}(y_i z_i)$, $f_{14}(y_i p_i)=f_{13}(y_i p_i)$, $f_{14}(Ay_i)=f_{13}(Ay_i)$, $f_{14}(Ap_i)=f_{13}(Ap_i)$, $f_{14}(Az_i)=f_{13}(Az_i)$, $f_{14}(z_i p_i)=f_{13}(z_i p_i)$.

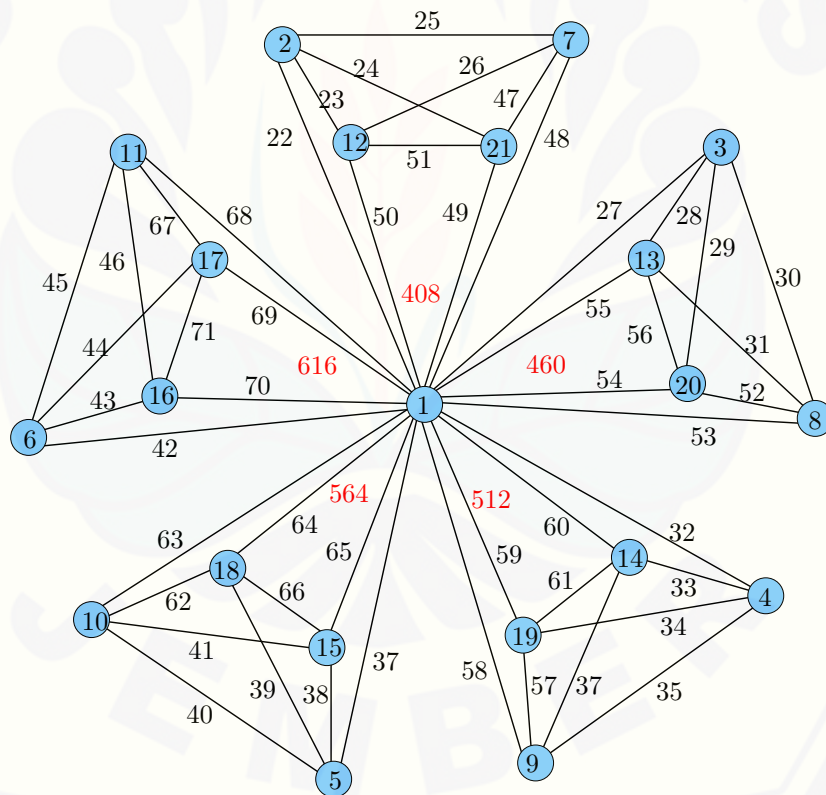
Misalkan $W_{f_{14}}$ didefinisikan sebagai bobot total dekomposisi pada pada graf *windmill* berdasarkan penjumlahan bobot dekomposisi dengan label sisinya maka $w_{f_{14}}$ dan fungsi label sisi dengan syarat batas i yang bersesuaian, sehingga dapat

dirumuskan sebagai berikut:

$$W_{f_{14}} = 72n + 52i - 4, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

Dengan demikian maka didapatkan himpunan bobot total dekomposisi $W_{f_{14}} = \{72n + 48, 72n + 100, \dots, 124n - 4\}$. Sehingga terbukti bahwa pada graf *windmill* WD_5^n memiliki super $(72n + 48, 52) - WD_5$ antimagic total dekomposisi untuk $n \geq 2$. \square

Gambar 4.15 merupakan contoh super $(408, 52) - WD_5$ antimagic total dekomposisi pada graf *windmill* WD_5^5 , dimana nilai $a = 408$, $d = 52$, dan himpunan bobot total dekomposisi $W = \{408, 460, \dots, 616\}$.



Gambar 4.15 Super $(408, 52) - WD_5$ antimagic total dekomposisi pada WD_5^5

◇ **Teorema 4.1.15.** *Ada pelabelan super $(71n+49, 54)$ - WD_5 antimagic total dekomposisi pada graf windmill WD_5^n untuk $n \geq 2$.*

Bukti. Labeli titik graf *windmill* WD_5^n dengan menggunakan label titik yang terdapat pada teorema 4.1.3 kedalam teorema 4.1.15 dimana $f_{15}=f_3$, sehingga $f_{15}(A)=f_3(A)$, $f_{15}(x_i)=f_3(x_i)$, $f_{15}(y_i)=f_3(y_i)$, $f_{15}(z_i)=f_3(z_i)$, $f_{15}(p_i)=f_3(p_i)$. Dengan demikian maka bobot $w_{f_{14}} = 6n + 4i + 5$.

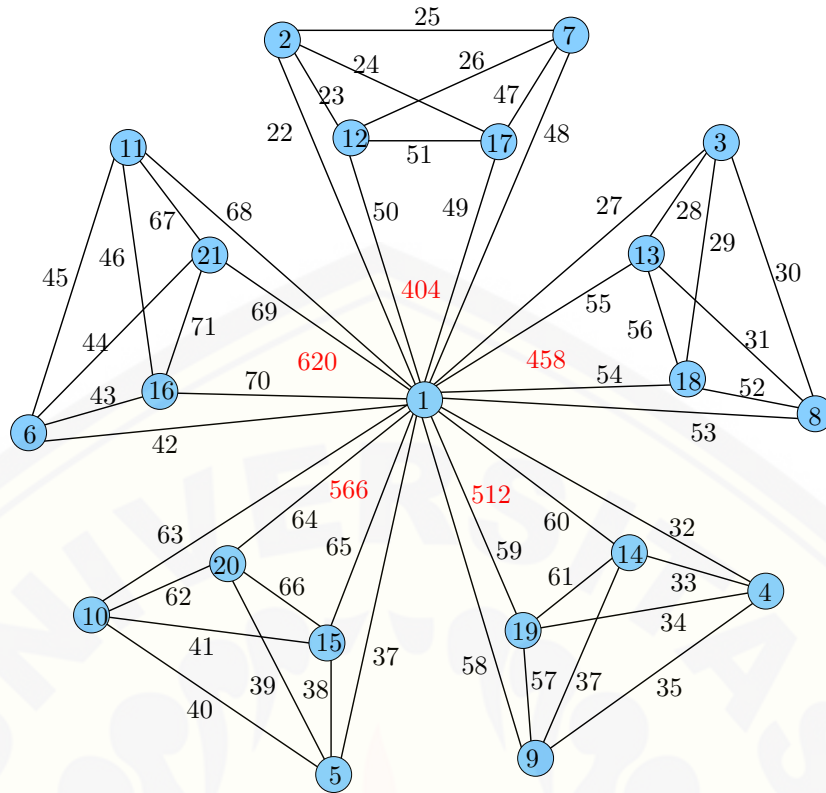
Gunakan label sisi yang terdapat pada teorema 4.1.13 kedalam teorema 4.1.15 untuk melabeli sisi graf dimana $f_{15}=f_{13}$ sehingga $f_{15}(Ax_i)=f_{13}(Ax_i)$, $f_{15}(x_i z_i) = f_{13}(x_i z_i)$, $f_{15}(x_i p_i) = f_{13}(x_i p_i)$, $f_{15}(x_i y_i) = f_{13}(x_i y_i)$, $f_{15}(y_i z_i) = f_{13}(y_i z_i)$, $f_{15}(y_i p_i) = f_{13}(y_i p_i)$, $f_{15}(Ay_i) = f_{13}(Ay_i)$, $f_{15}(Ap_i) = f_{13}(Ap_i)$, $f_{15}(Az_i) = f_{13}(Az_i)$, $f_{15}(z_i p_i) = f_{13}(z_i p_i)$.

Misalkan $W_{f_{14}}$ didefinisikan sebagai bobot total dekomposisi pada pada graf *windmill* berdasarkan penjumlahan bobot dekomposisi dengan label sisinya maka $w_{f_{14}}$ dan fungsi label sisi dengan syarat batas i yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$W_{f_{15}} = 71n + 54i - 5, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

Dengan demikian maka didapatkan himpunan bobot total dekomposisi $W_{f_{14}} = \{71n + 49, 71n + 104, \dots, 125n - 5\}$. Sehingga terbukti bahwa pada graf *windmill* WD_5^n memiliki super $(71n + 49, 54) - WD_5$ antimagic total dekomposisi untuk $n \geq 2$. □

Gambar 4.16 merupakan contoh super $(404, 54) - WD_5$ antimagic total dekomposisi pada graf *windmill* WD_5^5 , dimana nilai $a = 404$, $d = 54$, dan himpunan bobot total dekomposisi $W = \{404, 458, \dots, 620\}$.



Gambar 4.16 Super $(404, 54) - WD_5$ antimagic total dekomposisi pada WD_5^5

◇ **Teorema 4.1.16.** *Ada pelabelan super $(69n+65, 58) - WD_5$ antimagic total dekomposisi pada graf windmill WD_5^n untuk $n \geq 2$.*

Bukti. Labeli titik graf windmill WD_5^n dengan menggunakan label titik yang terdapat pada teorema 4.1.5 kedalam teorema 4.1.16 dimana $f_{16} = f_5$, sehingga $f_{16}(A) = f_5(A)$, $f_{16}(x_i) = f_5(x_i)$, $f_{16}(y_i) = f_5(y_i)$, $f_{16}(z_i) = f_5(z_i)$, $f_{16}(p_i) = f_5(p_i)$. Dengan demikian maka bobot $w_{f_{16}} = 4n + 8i + 3$.

Gunakan label sisi yang terdapat pada teorema 4.1.13 kedalam teorema 4.1.16 untuk melabeli sisi graf dimana $f_{16} = f_{13}$ sehingga $f_{16}(Ax_i) = f_{13}(Ax_i)$, $f_{16}(x_i z_i) = f_{13}(x_i z_i)$, $f_{16}(x_i p_i) = f_{13}(x_i p_i)$, $f_{16}(x_i y_i) = f_{13}(x_i y_i)$, $f_{16}(y_i z_i) = f_{13}(y_i z_i)$, $f_{16}(y_i p_i) = f_{13}(y_i p_i)$, $f_{16}(Ay_i) = f_{13}(Ay_i)$, $f_{16}(Ap_i) = f_{13}(Ap_i)$, $f_{16}(Az_i) = f_{13}(Az_i)$, $f_{16}(z_i p_i) = f_{13}(z_i p_i)$.

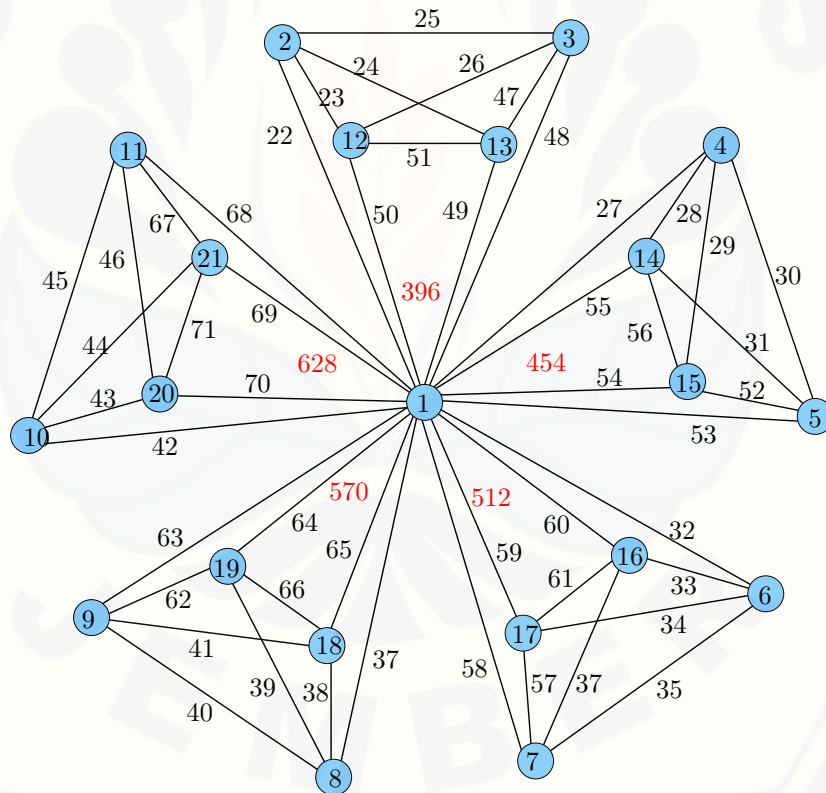
Misalkan $W_{f_{16}}$ didefinisikan sebagai bobot total dekomposisi pada graf windmill berdasarkan penjumlahan bobot dekomposisi dengan label sisinya maka $w_{f_{16}}$ dan fungsi label sisi dengan syarat batas i yang bersesuaian, sehingga dapat diru-

muskan sebagai berikut:

$$W_{f_{16}} = 69n + 58i - 7, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

Dengan demikian maka didapatkan himpunan bobot total dekomposisi $W_{f_{16}} = \{69n + 65, 69n + 109, \dots, 127n - 7\}$. Sehingga terbukti bahwa pada graf *windmill* WD_5^n memiliki super $(396, 58) - WD_5$ antimagic total dekomposisi untuk $n \geq 2$. \square

Gambar 4.17 merupakan contoh super $(396, 58) - WD_5$ antimagic total dekomposisi pada graf *windmill* WD_5^5 , dimana nilai $a = 396$, $d = 58$, dan himpunan bobot total dekomposisi $W = \{396, 454, \dots, 628\}$.



Gambar 4.17 Super $(69n + 65, 58) - WD_5$ antimagic total dekomposisi pada WD_5^5

◇ **Teorema 4.1.17.** *Ada pelabelan super $(48n + 72, 100)$ - WD_5 antimagic total dekomposisi pada graf windmill WD_5^n untuk $n \geq 2$.*

Bukti. Labeli titik graf *windmill* WD_5^n dengan menggunakan label titik yang terdapat pada teorema 4.1.1 kedalam teorema 4.1.17 dimana $f_{17}=f_1$, sehingga $f_{17}(A)=f_1(A)$, $f_{17}(x_i)=f_1(x_i)$, $f_{17}(y_i)=f_1(y_i)$, $f_{17}(z_i)=f_1(z_i)$, $f_{17}(p_i)=f_1(p_i)$. Dengan demikian maka bobot $w_{f_{16}} = 8n + 7$.

Labeli sisi graf *windmill* WD_5^n dengan fungsi bijektif f_{17} sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f_{17}(Ax_i) &= 4n + 10i - 8, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ f_{17}(x_i z_i) &= 4n + 10i - 7, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ f_{17}(x_i p_i) &= 4n + 10i - 6, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ f_{17}(x_i y_i) &= 4n + 10i - 5, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ f_{17}(y_i z_i) &= 4n + 10i - 4, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ f_{17}(y_i p_i) &= 4n + 10i - 3, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ f_{17}(Ay_i) &= 4n + 10i - 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ f_{17}(Ap_i) &= 4n + 10i - 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ f_{17}(Az_i) &= 4n + 10i, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ f_{17}(z_i p_i) &= 4n + 10i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

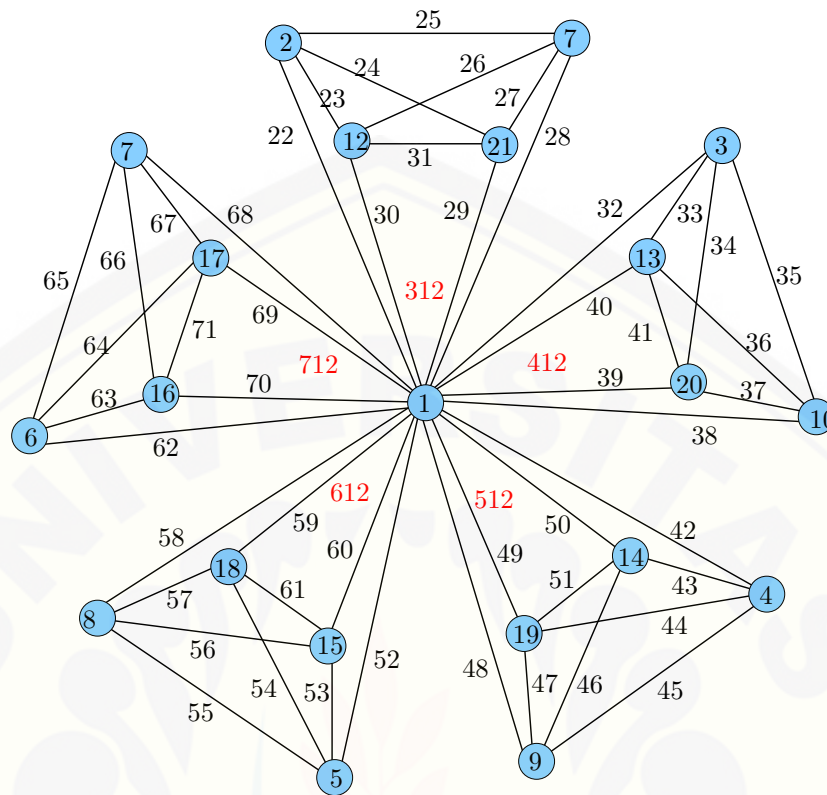
Jika $W_{f_{17}}$ didefinisikan sebagai bobot total dekomposisi pada graf *windmill* berdasarkan penjumlahan bobot dekomposisi dengan label sisinya maka $w_{f_{17}}$ dan fungsi label sisi dengan syarat batas i yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$W_{f_{17}} = 48n + 100i - 28, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

Dengan demikian maka didapatkan himpunan bobot total dekomposisi $W_{f_{17}} = \{48n + 72, 48n + 172, \dots, 148n - 28\}$. Sehingga terbukti bahwa pada graf *windmill* WD_5^n memiliki super $(48n + 72, 100)$ - WD_5 antimagic total dekomposisi untuk $n \geq 2$. □

Gambar 4.18 merupakan contoh super $(312, 100)$ - WD_5 antimagic total dekomposisi pada graf *windmill* WD_5^5 , dimana nilai $a = 312$, $d = 100$, dan him-

punan bobot total dekomposisi $W = \{312, 412, \dots, 712\}$.



Gambar 4.18 Super $(312, 100) - WD_5$ antimagic total dekomposisi pada WD_5^5

◇ **Teorema 4.1.18.** *Ada pelabelan super $(47n + 73, 102) - WD_5$ antimagic total dekomposisi pada graf windmill WD_5^n untuk $n \geq 2$.*

Bukti. Labeli titik graf *windmill* WD_5^n dengan fungsi bijektif f_{18} sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 f_{18}(A) &= 1 \\
 f_{18}(x_i) &= i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
 f_{18}(y_i) &= 2n - i + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
 f_{18}(z_i) &= 2n + i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
 f_{18}(p_i) &= 3n + i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n
 \end{aligned}$$

Dapat dilihat bahwa f_{18} adalah fungsi bijektif yang memetakan WD_5^n ke himpunan bilangan bulat $f(V) = \{1, 2, 3, \dots, 4n+1\}$. Jika $w_{f_{18}}$ didefinisikan sebagai bobot dekomposisi dari pelabelan total dekomposisi pada graf *windmill* dimana

bobot dekomposisi tersebut adalah $\mathcal{H}=WD_5$ sebagai dekomposisinya, Maka fungsi bijektif $w_{f_{18}}$ dapat ditentukan sebagai berikut:

$$w_{f_{18}} = 7n + 2i + 6, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

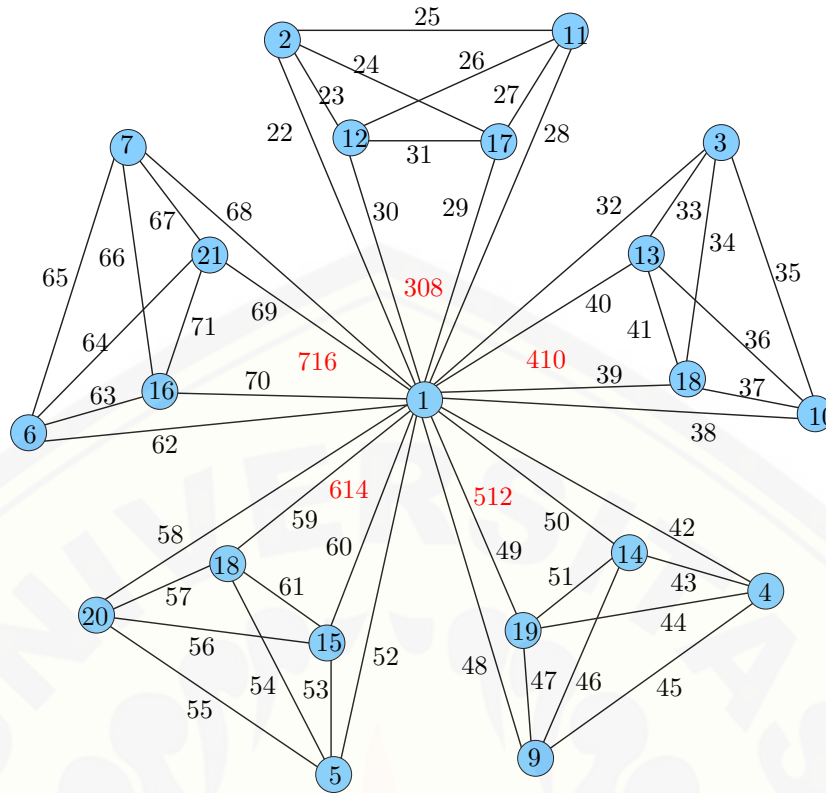
Gunakan label sisi yang terdapat pada teorema 4.1.17 kedalam teorema 4.1.18 untuk melabeli sisi graf dimana $f_{18}=f_{17}$ sehingga $f_{18}(Ax_i)=f_{17}(Ax_i)$, $f_{18}(x_iz_i) = f_{17}(x_iz_i)$, $f_{18}(x_ip_i)=f_{17}(x_ip_i)$, $f_{18}(x_iy_i)=f_{17}(x_iy_i)$, $f_{18}(y_iz_i)=f_{17}(y_iz_i)$, $f_{18}(y_ip_i) = f_{17}(y_ip_i)$, $f_{18}(Ay_i)=f_{17}(Ay_i)$, $f_{18}(Ap_i)=f_{17}(Ap_i)$, $f_{18}(Az_i)=f_{17}(Az_i)$, $f_{18}(z_ip_i)=f_{17}(z_ip_i)$.

Misalkan $W_{f_{18}}$ didefinisikan sebagai bobot total dekomposisi pada graf *windmill* berdasarkan penjumlahan bobot dekomposisi dengan label sisinya maka $w_{f_{18}}$ dan fungsi label sisi dengan syarat batas i yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$W_{f_{18}} = 47n + 102i - 29, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

Dengan demikian maka didapatkan himpunan bobot total dekomposisi $W_{f_{18}} = \{47n + 73, 47n + 175, \dots, 149n - 29\}$. Sehingga terbukti bahwa pada graf *windmill* WD_5^n memiliki super $(47n + 73, 102) - WD_5$ antimagic total dekomposisi untuk $n \geq 2$. □

Gambar 4.19 merupakan contoh super $(308, 102) - WD_5$ antimagic total dekomposisi pada graf *windmill* WD_5^5 , dimana nilai $a = 308$, $d = 102$, dan himpunan bobot total dekomposisi $W = \{308, 410, \dots, 716\}$.



Gambar 4.19 Super $(308, 102) - WD_5$ antimagic total dekomposisi pada WD_5^5

◇**Teorema 4.1.19.** *Ada pelabelan super $(46n + 74, 104) - WD_5$ antimagic total dekomposisi pada graf windmill WD_5^n untuk $n \geq 2$.*

Bukti. Labeli titik graf windmill WD_5^n dengan menggunakan label titik yang terdapat pada teorema 4.1.3 kedalam teorema 4.1.19 dimana $f_{19} = f_3$, sehingga $f_{19}(A) = f_3(A)$, $f_{19}(x_i) = f_3(x_i)$, $f_{19}(y_i) = f_3(y_i)$, $f_{19}(z_i) = f_3(z_i)$, $f_{19}(p_i) = f_3(p_i)$. Dengan demikian maka bobot $w_{f_{19}} = 6n + 4i + 5$.

Gunakan label sisi yang terdapat pada teorema 4.1.17 kedalam teorema 4.1.19 untuk melabeli sisi graf dimana $f_{19} = f_{17}$ sehingga $f_{19}(Ax_i) = f_{17}(Ax_i)$, $f_{19}(x_i z_i) = f_{17}(x_i z_i)$, $f_{19}(x_i p_i) = f_{17}(x_i p_i)$, $f_{19}(x_i y_i) = f_{17}(x_i y_i)$, $f_{19}(y_i z_i) = f_{17}(y_i z_i)$, $f_{19}(y_i p_i) = f_{17}(y_i p_i)$, $f_{19}(Ay_i) = f_{17}(Ay_i)$, $f_{19}(Ap_i) = f_{17}(Ap_i)$, $f_{19}(Az_i) = f_{17}(Az_i)$, $f_{19}(z_i p_i) = f_{17}(z_i p_i)$.

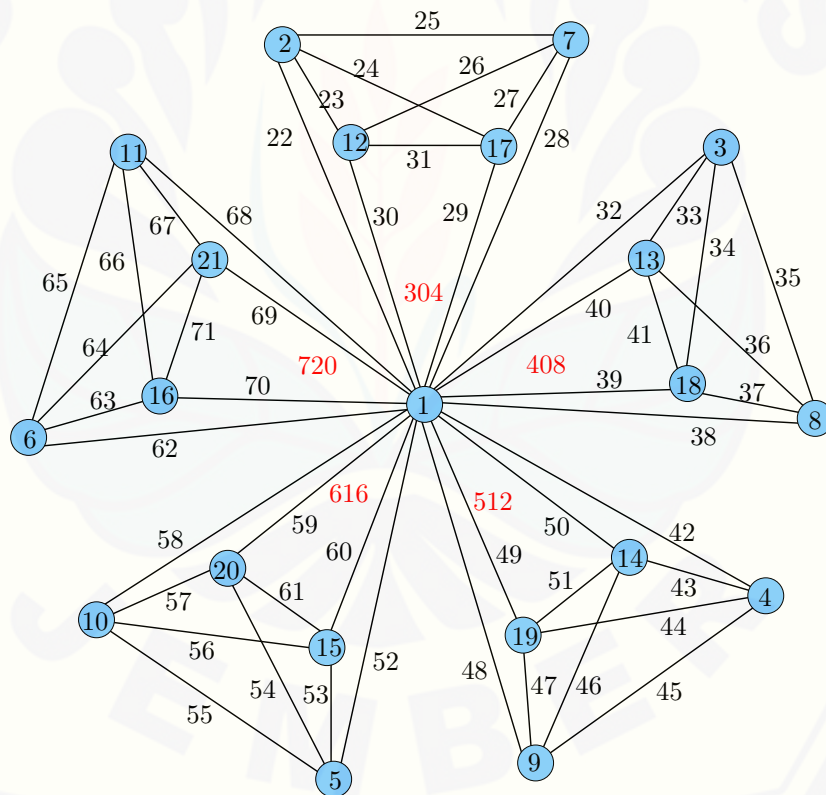
Misalkan $W_{f_{19}}$ didefinisikan sebagai bobot total dekomposisi pada graf windmill berdasarkan penjumlahan bobot dekomposisi dengan label sisinya maka $w_{f_{19}}$ dan fungsi label sisi dengan syarat batas i yang bersesuaian, sehingga dapat diru-

muskan sebagai berikut:

$$W_{f_{19}} = 46n + 104i - 30, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

Dengan demikian maka didapatkan himpunan bobot total dekomposisi $W_{f_{19}} = \{46n + 74, 46n + 173, \dots, 150n - 30\}$. Sehingga terbukti bahwa pada graf *windmill* WD_5^n memiliki super $(46n + 74, 104) - WD_5$ antimagic total dekomposisi untuk $n \geq 2$. \square

Gambar 4.20 merupakan contoh super $(304, 104) - WD_5$ antimagic total dekomposisi pada graf *windmill* WD_5^5 , dimana nilai $a = 304$, $d = 104$, dan himpunan bobot total dekomposisi $W = \{304, 408, \dots, 720\}$.



Gambar 4.20 Super $(304, 104) - WD_5$ antimagic total dekomposisi pada WD_5^5

◇ **Teorema 4.1.20.** *Ada pelabelan super $(44n + 76, 108)$ - WD_5 antimagic total dekomposisi pada graf windmill WD_5^n untuk $n \geq 2$.*

Bukti. Labeli titik graf *windmill* WD_5^n dengan menggunakan label titik yang terdapat pada teorema 4.1.5 kedalam teorema 4.1.20 dimana $f_2=5$, sehingga $f_2(A)=5(A)$, $f_2(x_i)=5(x_i)$, $f_2(y_i)=5(y_i)$, $f_2(z_i)=5(z_i)$, $f_2(p_i)=5(p_i)$. Dengan demikian maka bobot $w_{f_2} = 4n + 8i + 3$.

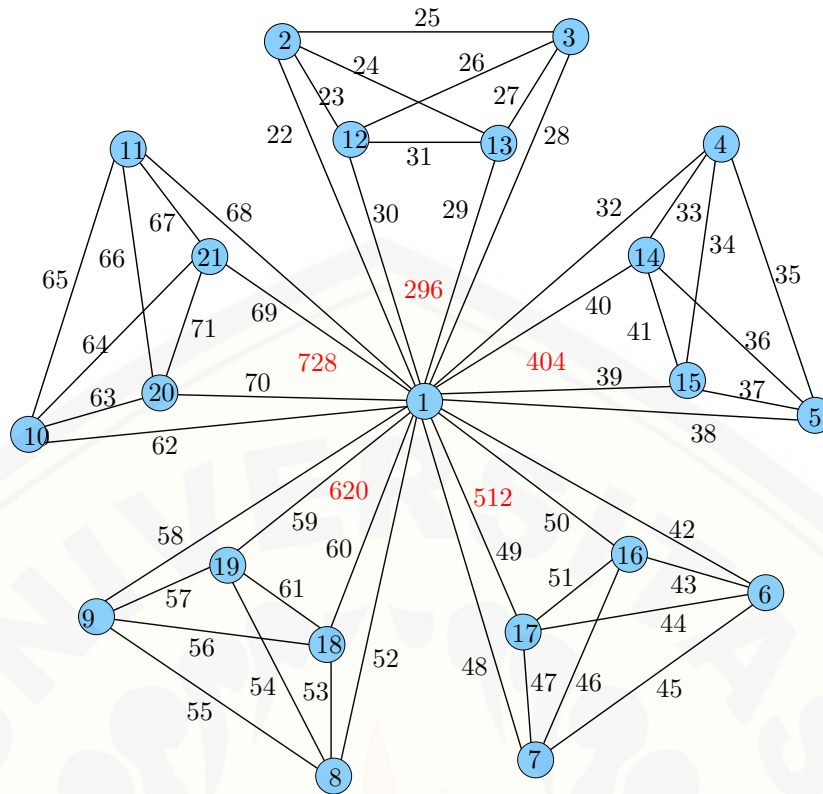
Gunakan label sisi yang terdapat pada teorema 4.1.17 kedalam teorema 4.1.20 untuk melabeli sisi graf dimana $f_2=17$ sehingga $f_2(Ax_i)=17(Ax_i)$, $f_2(x_i z_i) = 17(x_i z_i)$, $f_2(x_i p_i) = 17(x_i p_i)$, $f_2(x_i y_i) = 17(x_i y_i)$, $f_2(y_i z_i) = 17(y_i z_i)$, $f_2(y_i p_i) = 17(y_i p_i)$, $f_2(Ay_i) = 17(Ay_i)$, $f_2(Ap_i) = 17(Ap_i)$, $f_2(Az_i) = 17(Az_i)$, $f_2(z_i p_i) = 17(z_i p_i)$.

Misalkan W_{f_2} didefinisikan sebagai bobot total dekomposisi pada graf *windmill* berdasarkan penjumlahan bobot dekomposisi dengan label sisinya maka w_{f_2} dan fungsi label sisi dengan syarat batas i yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$W_{f_2} = 46n + 108i - 32, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

Dengan demikian maka didapatkan himpunan bobot total dekomposisi $W_{f_2} = \{44n + 76, 44n + 184, \dots, 148n - 28\}$. Sehingga terbukti bahwa pada graf *windmill* WD_5^n memiliki super $(44n + 76, 108) - WD_5$ antimagic total dekomposisi untuk $n \geq 2$. □

Gambar 4.21 merupakan contoh super $(296, 108) - WD_5$ antimagic total dekomposisi pada graf *windmill* WD_5^5 , dimana nilai $a = 296$, $d = 108$, dan himpunan bobot total dekomposisi $W = \{296, 404, \dots, 728\}$.



Gambar 4.21 Super (296, 108) – WD_5 antimagic total dekomposisi pada WD_5^5

4.2 Pelabelan Super (a, d) - \mathcal{H} Antimagic Total Dekomposisi pada Graf *Windmill* Diskonektif

Penelitian ini merupakan pengembangan dari pada graf *windmill* konektif. Gabungan pada graf *windmill* didefinisikan mWD_5^n dengan salinan sebanyak m . Gabungan pada graf *windmill* dengan $V(mWD_5^n) = \{A^j, x_i^j, y_i^j, z_i^j : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ dan sisi $E(mWD_5^n) = \{Ax_i^j, Ay_i^j, Az_i^j, Ap_i^j, x_i^j y_i^j, x_i^j z_i^j, x_i^j p_i^j, y_i^j z_i^j, y_i^j p_i^j, p_i^k z_i^k; 1 \leq i \leq n ; 1 \leq j \leq m\}$.

Pada graf *windmill* diskonektif, dalam menentukan batas atas d perlu diketahui juga kardinalitas jumlah titik (p_G) dan jumlah sisi (q_G). Jumlah titik dan jumlah sisi pada mWD_5^n dapat ditentukan terlebih dahulu dengan mencermati definisi gabungan saling lepas pada suatu graf. Gabungan saling lepas pada graf *windmill* yang dinotasikan dengan mWD_5^n didefinisikan sebagai gabungan saling lepas dari m buah salinan graf *windmill* dengan $1 \leq j \leq m$. Sehingga jumlah titik graf *windmill* mWD_5^n adalah m kali jumlah titik graf WD_5^n dapat dituliskan dengan $p_G = m(4n + 1) = 4nm + m$ dan jumlah sisi graf mWD_5^n adalah m kali

jumlah sisi graf WD_5^n dapat dituliskan dengan $q_G = m(10n) = 10nm$. Sedangkan jumlah titik pada graf *windmill* mWD_5^n adalah m kali jumlah titik pada graf *windmill* WD_5^n , yaitu $p_H = m(5) = 5m$ dan jumlah sisi pada graf *windmill* mWD_5^n adalah m kali jumlah sisi pada graf *windmill* WD_5^n , dapat ditulis dengan $q_H = m(10) = 10m$. Jumlah graf *windmill* mWD_5^n adalah m kali jumlah graf *windmill* tunggal mWD_5^n , dapat dituliskan $s = m(n) = nm$.

Batas atas d gabungan saling lepas pada graf *windmill* mWD_5^n juga dapat ditentukan dengan menggunakan Lemma 4.1.1. Diketahui jumlah titik pada graf mWD_5^n adalah $p_G = 4nm + m$ dan jumlah sisi $q_G = 10nm$. Sedangkan jumlah titik pada dekomposisi graf *windmill* mWD_5^n adalah $p_H = 5m$ dan jumlah sisi pada dekomposisi graf *windmill* $q_H = 10m$ dengan jumlah selimut mWD_5^n adalah $s = n - 1$ untuk m adalah jumlah salinan dari graf *windmill* dan n adalah banyaknya *expand* dari graf *windmill*. Dengan demikian batas atas nilai beda d tersebut adalah:

$$\begin{aligned}
 d &\leq \frac{(p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H}{ms - 1} \\
 &= \frac{(m(4n + 1) - 5)5 + (m(10n) - 10)10}{mn - 1} \\
 &= \frac{(4nm + m - 5)5 + (10mn - 10)10}{mn - 1} \\
 &= \frac{20mn + 5m - 25 + 100mn - 100}{mn - 1} \\
 &= \frac{120mn - 5m - 125}{mn - 1} \\
 &= 120 + \frac{5(m - 1)}{mn - 1}, \text{ dimana, } 0 < \frac{5(m - 1)}{mn - 1} \leq 2 \\
 &\leq 122
 \end{aligned}$$

Sesuai dengan pelabelan *SHATD* pada graf *windmill* konektif, gabungan saling lepas graf *windmill* juga menggunakan bilangan bulat positif, sehingga nilai $d \geq 0$ dan d adalah bilangan bulat. Sehingga dapat disimpulkan $d \in \{0, 1, 2, 3, \dots, 118, 119, 120\}$. Selanjutnya akan ditentukan fungsi bijektif super (a, d) - \mathcal{H} antimagic total dekomposisi graf *windmill* sesuai dengan nilai d yang telah ditetapkan.

Sama seperti pada graf *windmill* konektif, metode yang digunakan dalam menemukan pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} antimagic total dekomposisi pada gabungan saling lepas graf *windmill* mWD_5^n terdiri dari beberapa langkah yang diawali dengan menggunakan pendeteksian pola (*pattern recognition*) untuk menentukan pelabelan yang berlaku sampai dengan batas i, j yang telah ditemukan. Kemudian untuk menentukan pola secara umum digunakan fungsi-fungsi dalam barisan aritmatika untuk menentukan fungsi bijektifnya. Setelah fungsi bijektif diketahui maka harus dibuktikan secara deduktif matematik untuk membuktikan kebenaran dari teorema-teorema tersebut.

Perlu diketahui bahwa teorema dalam penelitian ini adalah bukan teorema yang biimplikatif atau karakteristik sehingga pembuktiannya hanya dilakukan satu arah. Dari hasil penggabungan pola melalui *pattern recognition* dan konsep barisan aritmatika, maka diperoleh teorema dan akibat sebagai berikut. Teorema yang ditemukan dalam penelitian ini tidak bersifat tunggal (berkenaan dengan sifat ketunggalan) melainkan hanya bersifat keberadaan (*existence but not unique*).

Untuk menentukan pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} antimagic total dekomposisi pada gabungan graf *windmill* konektif. Terlebih dahulu harus diketahui batas atas nilai d untuk gabungan graf sebanyak m graf *windmill*, dengan menggunakan rumus yang telah ada.

◇ **Teorema 4.2.1.** *Ada diskonektif graf windmill (mWD_5^n) memiliki super $(\frac{195mn+29m+15}{2}, 0)$ - WD_5 antimagic total dekomposisi untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 3$ dimana m ganjil.*

Bukti. Labeli titik gabungan saling lepas graf *windmill* (mWD_5^n) dengan fungsi bijektif f_{21} sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f_{21}(A) &= j, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \\ f_{21}(x_i^j) &= mi + j, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \\ f_{21}(y_i^j) &= 2mn - 2mi + 2m - j + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \\ f_{21}(z_i^j) &= 2mn + mi + 2m - 2j + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, \frac{m+1}{2} \leq j \leq m \\ f_{21}(z_i^j) &= 2mn + mi + m - 2j + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq \frac{m-1}{2} \end{aligned}$$

$$f_{21}(p_i^j) = \frac{8mn - 2mi + m + 2j + 1}{2}, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, \frac{m+1}{2} \leq j \leq m$$

$$f_{21}(p_i^j) = \frac{8mn - 2mi + 3m + 2j + 1}{2}, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq \frac{m-1}{2}$$

Dapat dilihat bahwa f_{21} adalah fungsi bijektif yang memetakan (mWD_5^n) ke himpunan bilangan bulat $f(V) = \{1, 2, 3, \dots, 4nm + m\}$. Jika $w_{f_{21}}$ didefinisikan sebagai bobot dekomposisi dari pelabelan total dekomposisi pada graf *windmill* dimana bobot dekomposisi tersebut adalah $\mathcal{H}=WD_5$ sebagai dekomposisinya, maka fungsi bijektif $w_{f_{21}}$ dapat ditentukan sebagai berikut:

$$w_{f_{21}} = \frac{16mn + 9m + 5}{2}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$$

Labeli sisi gabungan saling lepas pada graf *windmill* (mWD_5^n) dengan fungsi bijektif f_{21} sebagai berikut:

$$f_{21}(A^j x_i^j) = 4nm + mi + j, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$$

$$f_{21}(x_i^j z_i^j) = 6nm - mi + 2m - j + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$$

$$f_{21}(x_i^j p_i^j) = 6nm + mi + j, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$$

$$f_{21}(x_i^j y_i^j) = 8nm - mi + 2m - j + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$$

$$f_{21}(y_i^j z_i^j) = 8nm + mi + j, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$$

$$f_{21}(y_i^j w_i^j) = 10nm - mi + 2m - j + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$$

$$f_{21}(A^j y_i^j) = 10nm + mi + j, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$$

$$f_{21}(A^j p_i^j) = 12nm - mi + 2m - j + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$$

$$f_{21}(A^j z_i^j) = 12nm + mi + j, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$$

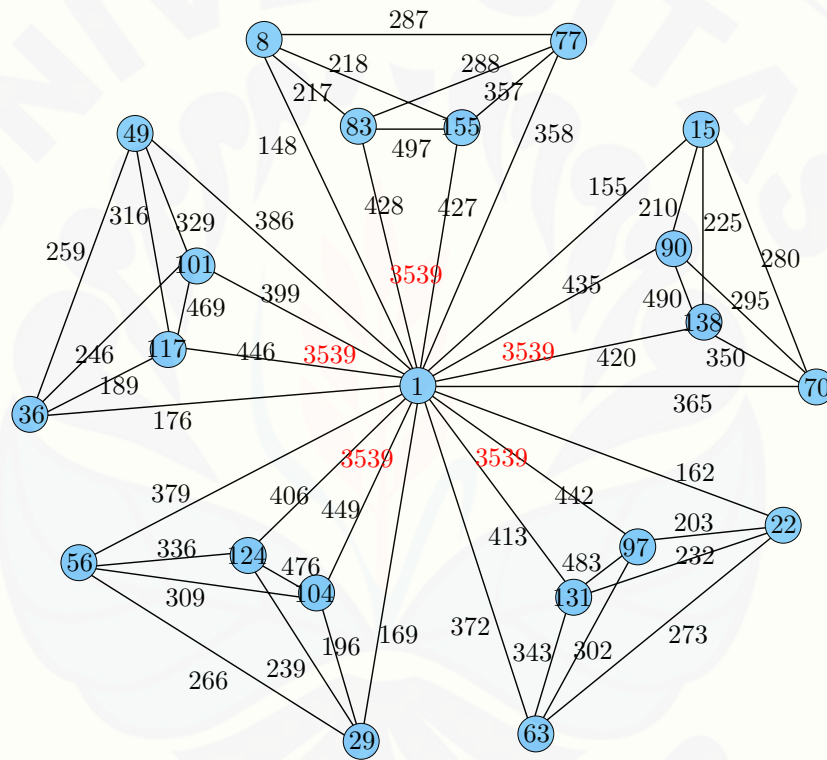
$$f_{21}(z_i^j p_i^j) = 14nm - mi + 2m - j + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$$

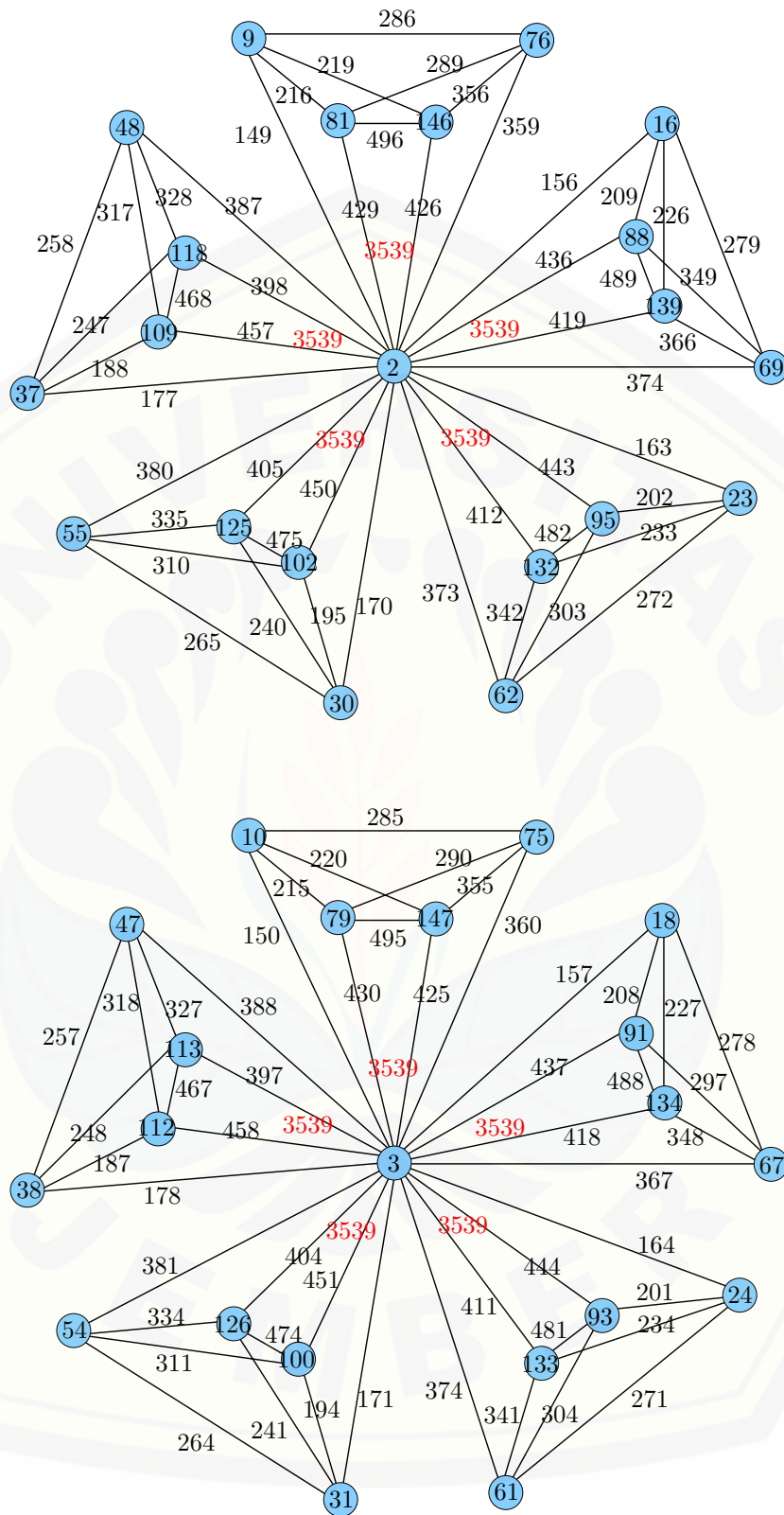
Misalkan $W_{f_{21}}$ didefinisikan sebagai bobot total pada graf *windmill* berdasarkan penjumlahan bobot selimut dengan label sisinya maka $w_{f_{21}}$ dan fungsi label sisi dengan syarat batas i dan j yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

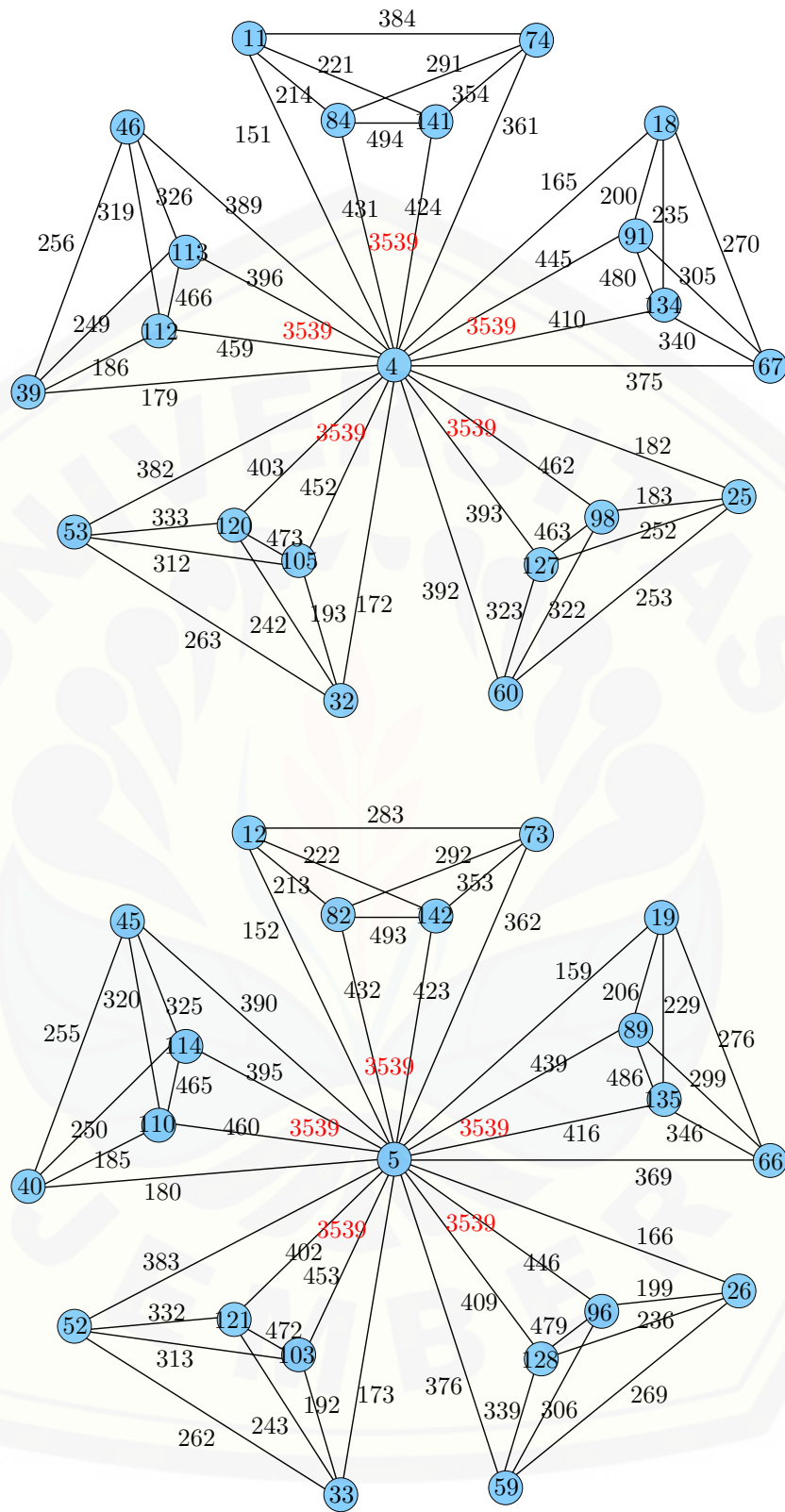
$$W_{f_{21}} = \frac{196mn + 29m + 15}{2}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$$

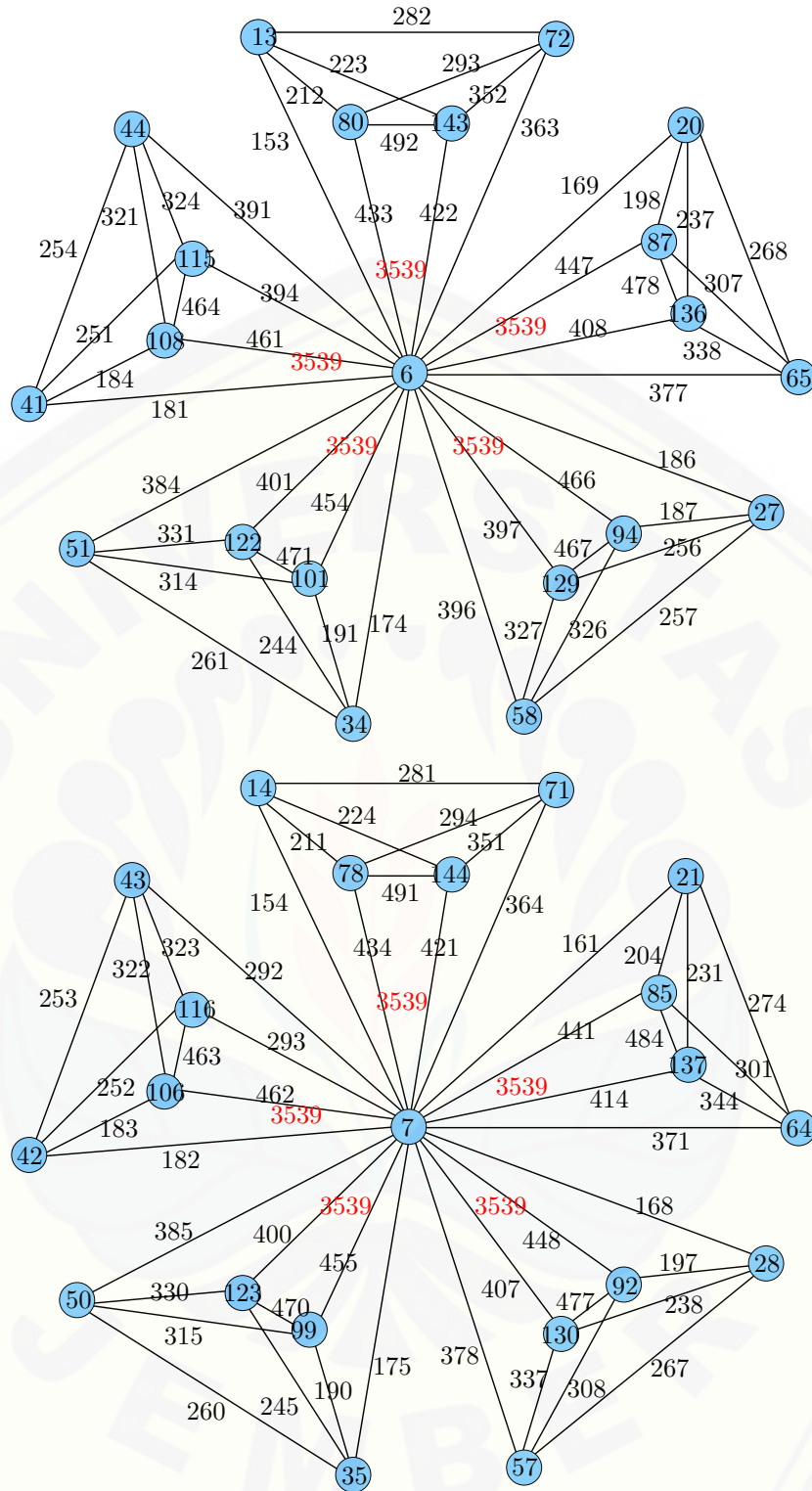
Dengan demikian maka didapatkan himpunan bobot total dekomposisi $W_{f_{21}} = \{\frac{196mn+29m+15}{2}, \frac{196mn+29m+15}{2}, \dots, \frac{196mn+29m+15}{2}\}$. Sehingga terbukti bahwa gabungan saling lepas graf *windmill* mWD_5^n memiliki super $(\frac{196mn+29m+15}{2}, 0) - WD_5$ antimagic total dekomposisi untuk $n \geq 2, m \geq 3$ dan m ganjil. \square

Gambar 4.22 merupakan contoh super $(3539, 0) - WD_5$ antimagic total dekomposisi pada gabungan graf *windmill* ($7WD_5^5$) dengan himpunan bobot total dekomposisi $W = \{3539, 3539, \dots, 3539\}$.









Gambar 4.22 Super $(3539, 0) - WD_5$ antimagic total dekomposisi pada gabungan saling lepas $(7WD_5^5)$

◇ **Teorema 4.2.2.** *Ada diskonektif graf windmill (mWD_5^n) memiliki super $(\frac{186mn+29m+25}{2}, 10)$ - WD_5 antimagic total dekomposisi untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 3$ dimana m ganjil.*

Bukti. Labeli titik gabungan saling lepas pada graf *windmill* (mWD_5^n) dengan menggunakan label titik yang terdapat pada teorema 4.2.1 ke dalam teorema 4.2.2 dimana $f_{22}=f_{21}$. Sehingga $f_{22}(A)=f_{21}(A)$, $f_{22}(x_i^j)=f_{21}(x_i^j)$, $f_{22}(y_i^j)=f_{21}(y_i^j)$, $f_{22}(z_i^j)=f_{21}(z_i^j)$, $f_{22}(p_i^j)=f_{21}(p_i^j)$. Dengan demikian maka bobot dekomposisi dari pelabelan total dekomposisi pada gabungan saling lepas graf *windmill* yang didefinisikan dengan $w_{f_{22}}=w_{f_{21}}=\frac{16mn+9m+5}{2}$.

Labeli sisi gabungan saling lepas graf *windmill* (mWD_5^n) dengan fungsi bijektif f_{22} sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f_{22}(A^j x_i^j) &= 4nm + mi + j, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \\ f_{22}(x_i^j z_i^j) &= 5nm + mi + j, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \\ f_{22}(x_i^j p_i^j) &= 6nm + mi + j, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \\ f_{22}(x_i^j y_i^j) &= 7nm + mi + j, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \\ f_{22}(y_i^j z_i^j) &= 8nm + mi + j, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \\ f_{22}(y_i^j w_i^j) &= 9nm + mi + j, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \\ f_{22}(A^j y_i^j) &= 10nm + mi + j, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \\ f_{22}(A^j p_i^j) &= 11nm + mi + j, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \\ f_{22}(A^j z_i^j) &= 12nm + mi + j, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \\ f_{22}(z_i^j p_i^j) &= 13nm + mi + j, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \end{aligned}$$

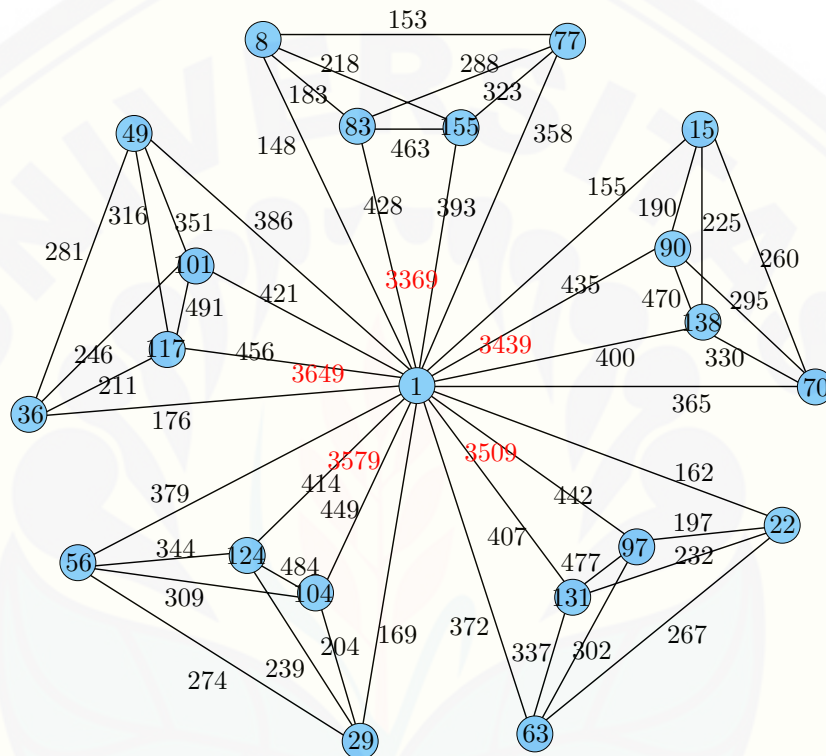
Misalkan $W_{f_{22}}$ didefinisikan sebagai bobot total dekomposisi pada graf *windmill* berdasarkan penjumlahan bobot selimut dengan label sisinya maka $w_{f_{22}}$ dan fungsi label sisi dengan syarat batas i dan j yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

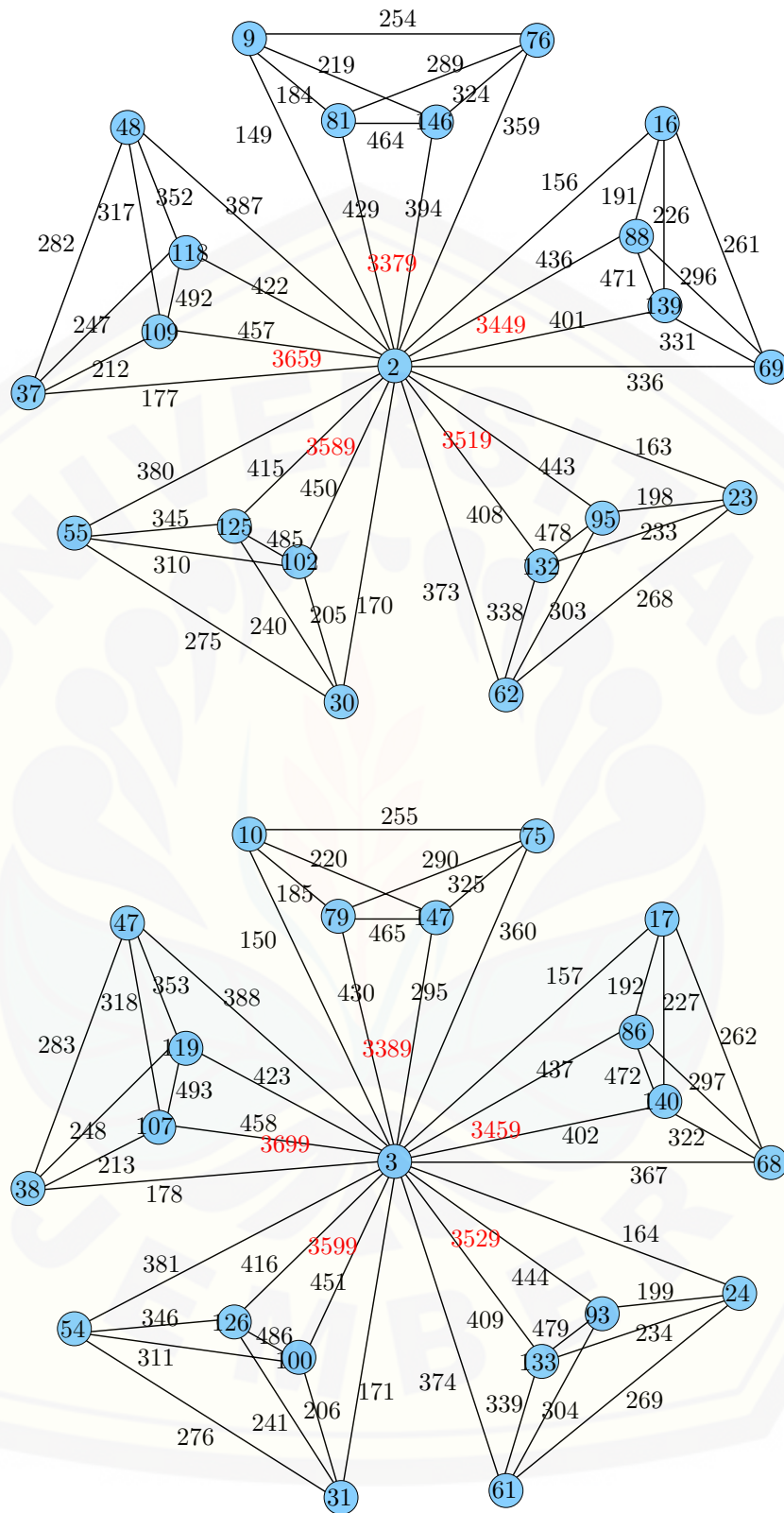
$$W_{f_{22}} = \frac{186mn + 20mi + 9m + 20j + 5}{10}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$$

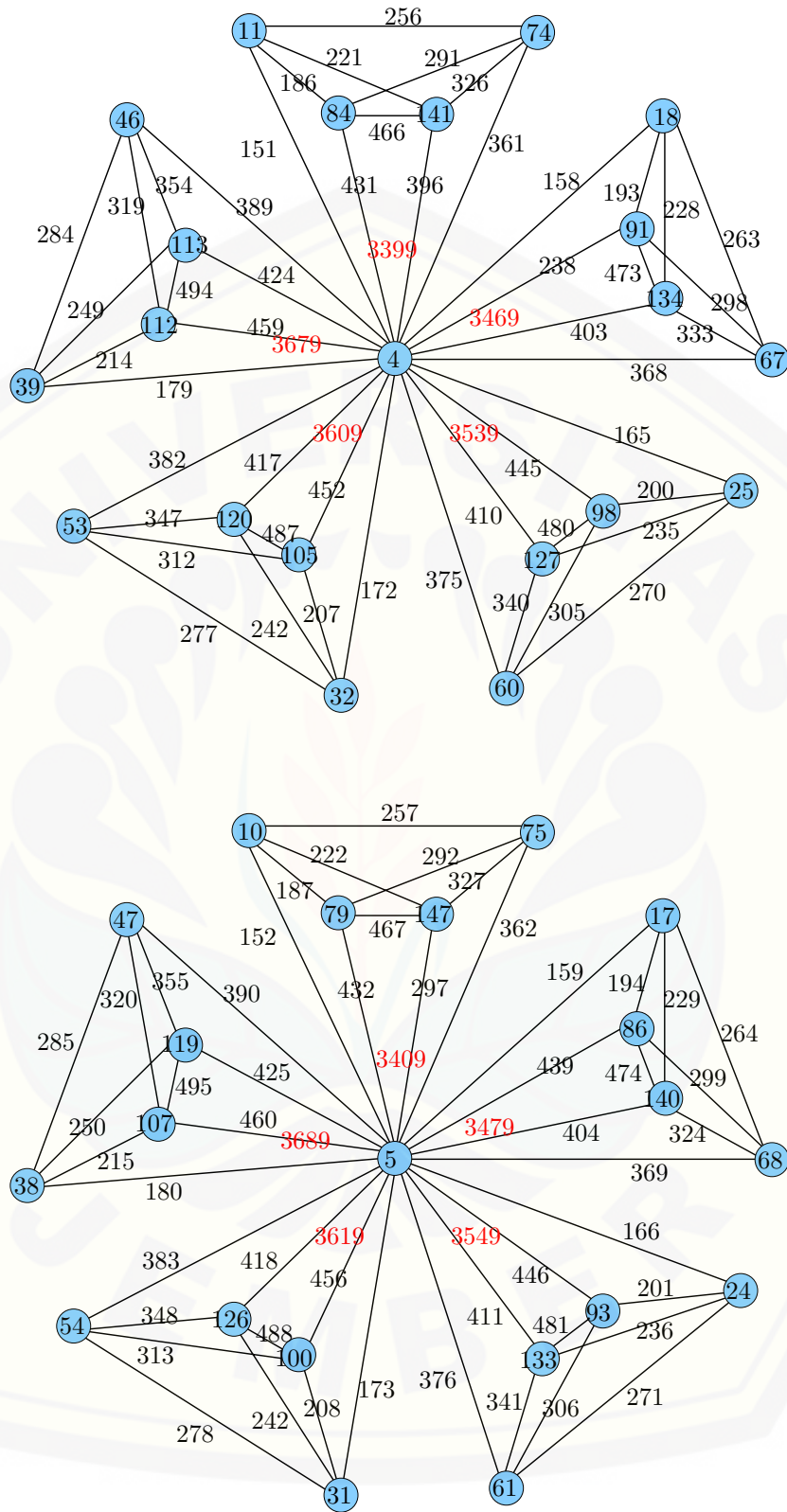
Dengan demikian maka didapatkan himpunan bobot total dekomposisi $W_{f_{22}} = \{\frac{186mn+29m+25}{2}, \frac{186mn+29m+45}{2}, \dots, \frac{206mn+29m+5}{2}\}$. Sehingga terbukti bahwa gabu-

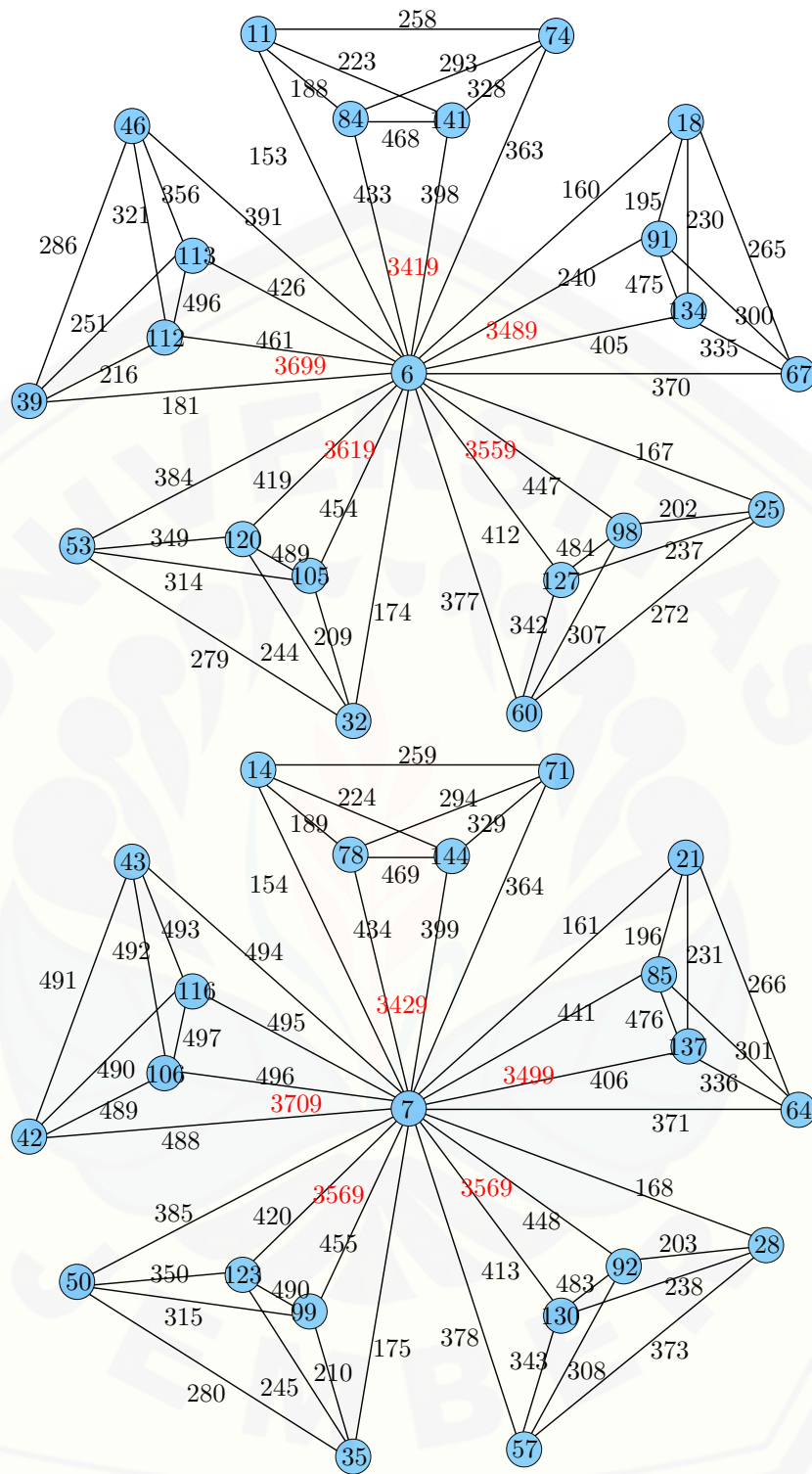
gan saling lepas graf $windmill\ mWD_5^n$ memiliki super $(\frac{186mn+29m+25}{2}, 10) - WD_5$ antimagic total dekomposisi untuk $n \geq 2, m \geq 3$ dan m ganjil. \square

Gambar 4.23 merupakan contoh super $(3369, 10) - WD_5$ antimagic total dekomposisi pada gabungan graf $windmill\ (7WD_5^2)$ dengan himpunan bobot total dekomposisi $W = \{3369, 3379, \dots, 3709\}$.









Gambar 4.23 Super $(3369, 10) - WD_5$ antimagic total dekomposisi pada gabungan graf *windmill* $(7WD_5^5)$

◇ **Teorema 4.2.3.** *Ada diskonektif graf windmill (mWD_5^n) memiliki super $(\frac{176mn+29m+35}{2}, 20)$ - WD_5 antimagic total dekomposisi untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 3$ dimana m ganjil.*

Bukti. Labeli titik gabungan saling lepas pada graf *windmill* (mWD_5^n) dengan menggunakan label titik yang terdapat pada teorema 4.2.1 ke dalam teorema 4.2.3 dimana $f_{23}=f_{21}$. Sehingga $f_{23}(A)=f_{21}(A)$, $f_{23}(x_i^j)=f_{21}(x_i^j)$, $f_{23}(y_i^j)=f_{21}(y_i^j)$, $f_{23}(z_i^j)=f_{21}(z_i^j)$, $f_{23}(p_i^j)=f_{21}(p_i^j)$. Dengan demikian maka bobot dekomposisi dari pelabelan total dekomposisi pada gabungan saling lepas graf *windmill* yang didefinisikan dengan $w_{f_{22}}=w_{f_{21}}=\frac{16mn+9m+5}{2}$.

Labeli sisi gabungan saling lepas graf *windmill* (mWD_5^n) dengan fungsi bijektif f_{23} sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f_{23}(A^j x_i^j) &= 4nm + 2mi - m + 2j - 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \\ f_{23}(x_i^j z_i^j) &= 4nm + 2mi - m + 2j, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \\ f_{23}(x_i^j p_i^j) &= 6nm + 2mi - m + 2j - 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \\ f_{23}(x_i^j y_i^j) &= 6nm + 2mi - m + 2j, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \\ f_{23}(y_i^j z_i^j) &= 8nm + 2mi - m + 2j - 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \\ f_{23}(y_i^j w_i^j) &= 8nm + 2mi - m + 2j, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \\ f_{23}(A^j y_i^j) &= 10nm + 2mi - m + 2j - 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \\ f_{23}(A^j p_i^j) &= 10nm + 2mi - m + 2j, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \\ f_{23}(A^j z_i^j) &= 12nm + 2mi - m + 2j - 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \\ f_{23}(z_i^j p_i^j) &= 12nm + 2mi - m + 2j, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \end{aligned}$$

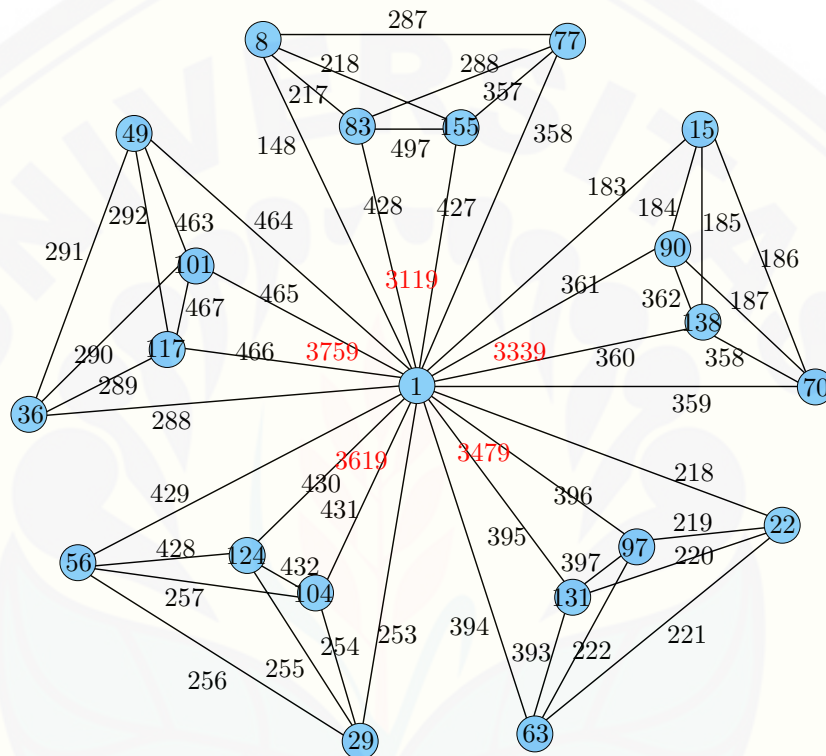
Misalkan $W_{f_{23}}$ didefinisikan sebagai bobot total dekomposisi pada graf *windmill* berdasarkan penjumlahan bobot selimut dengan label sisinya maka $w_{f_{23}}$ dan fungsi label sisi dengan syarat batas i dan j yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

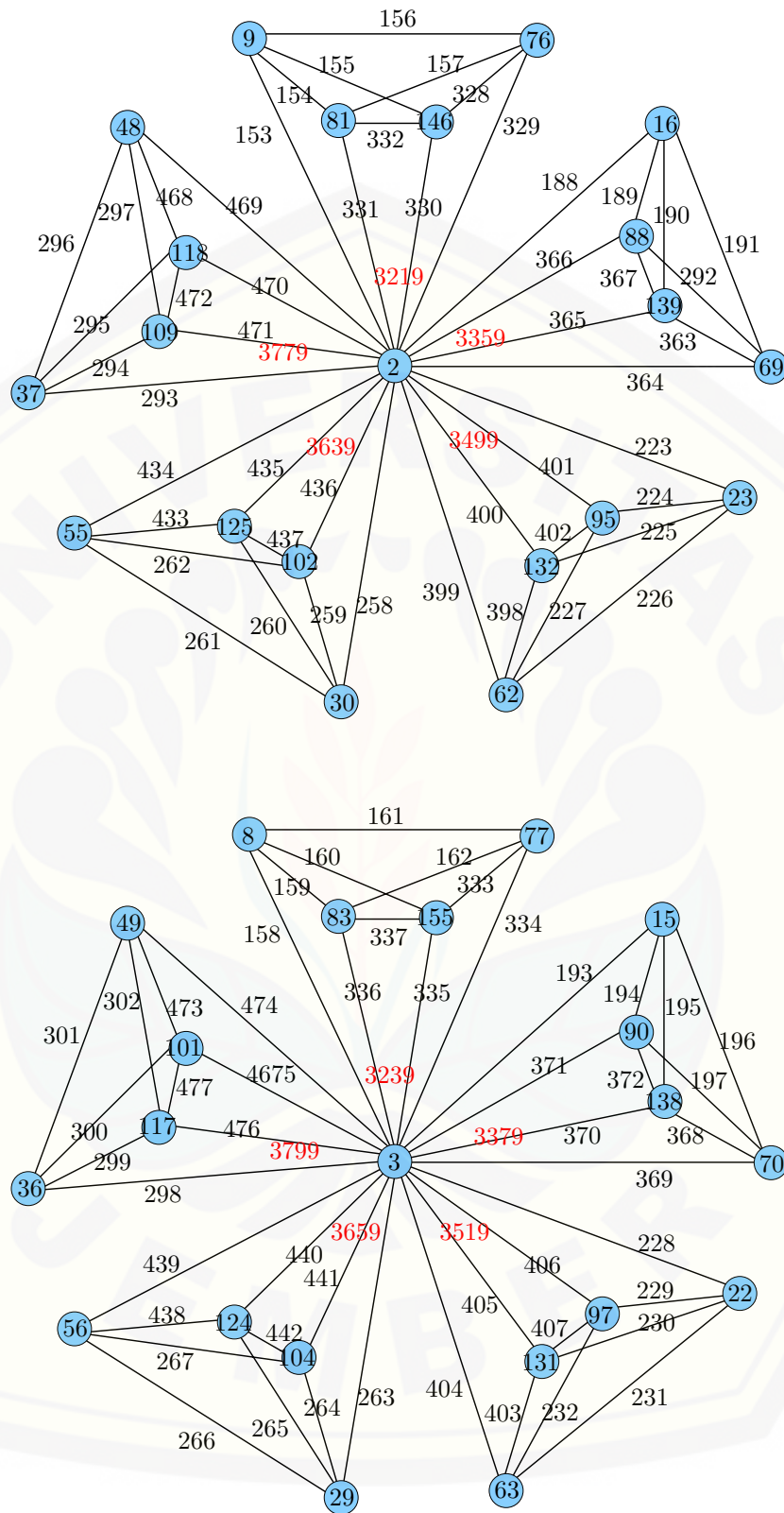
$$W_{f_{23}} = \frac{176mn + 40mi - 11m + 40j - 5}{2}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$$

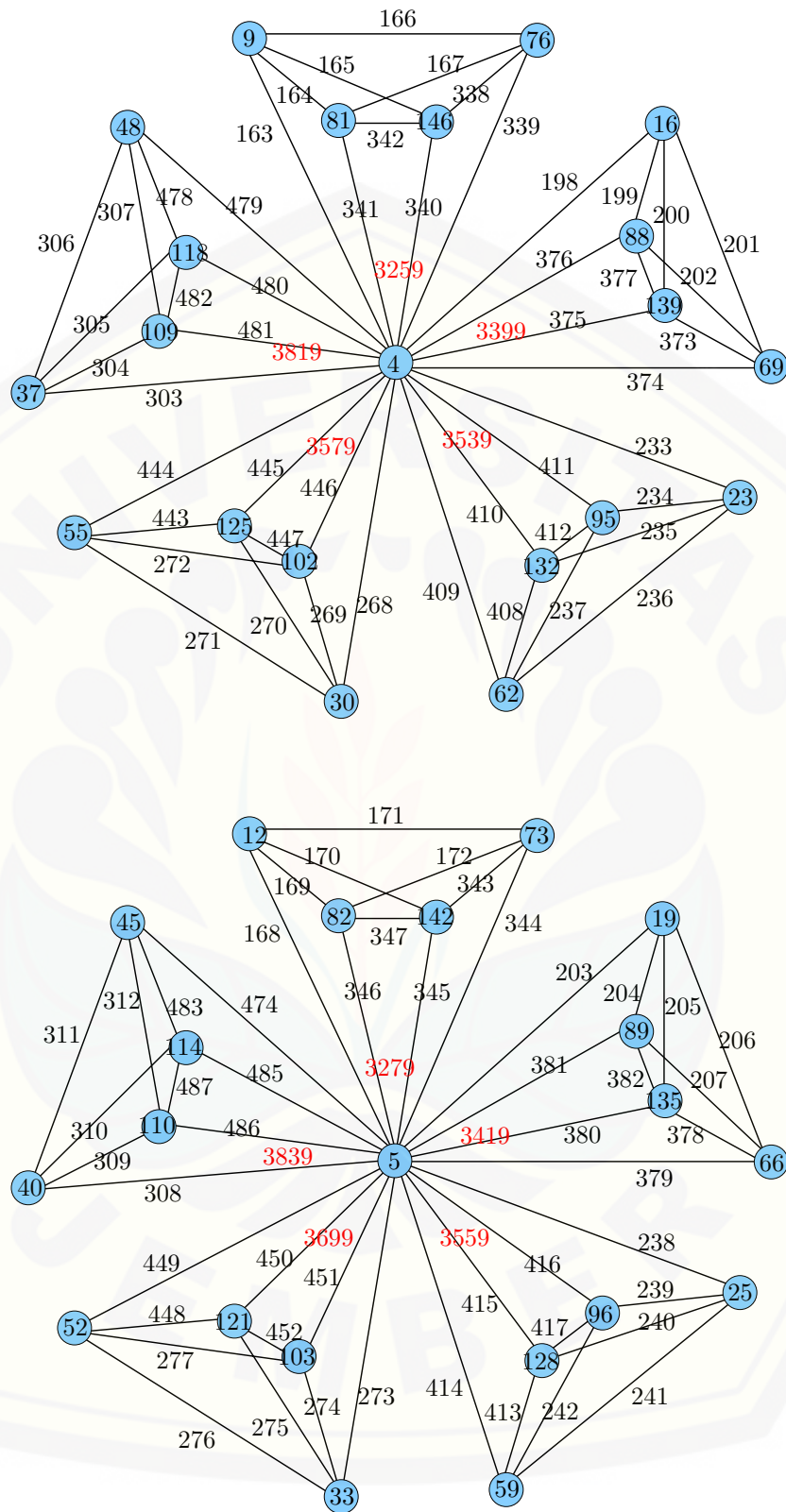
Dengan demikian maka didapatkan himpunan bobot total dekomposisi $W_{f_{23}} = \{\frac{176mn+29m+35}{2}, \frac{176mn+29m+75}{2}, \dots, \frac{216mn+29m-5}{2}\}$. Sehingga terbukti bahwa gabu-

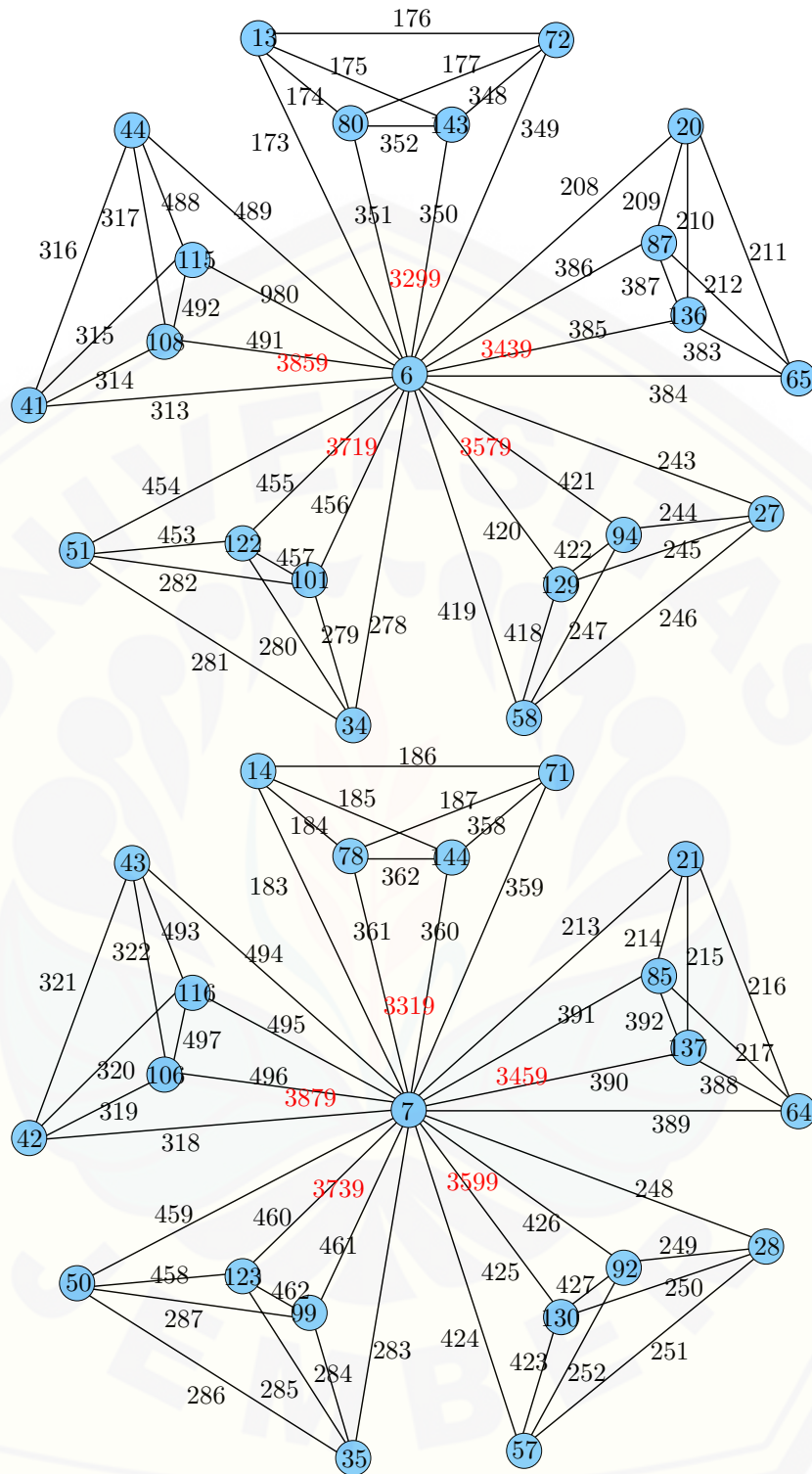
gan saling lepas graf $windmill\ mWD_5^n$ memiliki super $(\frac{176mn+29m+35}{2}, 20) - WD_5$ antimagic total dekomposisi untuk $n \geq 2, m \geq 3$ dan m ganjil. \square

Gambar 4.24 merupakan contoh super $(3199, 20) - WD_5$ antimagic total dekomposisi pada gabungan graf $windmill\ (7WD_5^2)$ dengan himpunan bobot total dekomposisi $W = \{3199, 3219, \dots, 3879\}$.









Gambar 4.24 Super $(3199, 20) - WD_5$ antimagic total dekomposisi pada gabungan saling lepas $(7WD_5^5)$

◇ **Teorema 4.2.4.** *Ada diskonektif graf windmill (mWD_5^n) memiliki super $(\frac{146mn+29m+65}{2}, 50)$ - WD_5 antimagic total dekomposisi untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 3$ dimana m ganjil.*

Bukti. Labeli titik gabungan saling lepas pada graf *windmill* (mWD_5^n) dengan menggunakan label titik yang terdapat pada teorema 4.2.1 ke dalam teorema 4.2.4 dimana $f_{24}=f_{21}$. Sehingga $f_{24}(A)=f_{21}(A)$, $f_{24}(x_i^j)=f_{21}(x_i^j)$, $f_{24}(y_i^j)=f_{21}(y_i^j)$, $f_{24}(z_i^j)=f_{21}(z_i^j)$, $f_{24}(p_i^j)=f_{21}(p_i^j)$. Dengan demikian maka bobot dekomposisi dari pelabelan total dekomposisi pada gabungan saling lepas graf *windmill* yang didefinisikan dengan $w_{f_{24}}=w_{f_{21}}=\frac{16mn+9m+5}{2}$.

Labeli sisi gabungan saling lepas graf *windmill* (mWD_5^n) dengan fungsi bijektif f_{24} sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f_{24}(A^j x_i^j) &= 4nm + 5mi - 4m + 5j - 4, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \\ f_{24}(x_i^j z_i^j) &= 4nm + 5mi - 4m + 5j - 3, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \\ f_{24}(x_i^j p_i^j) &= 4nm + 5mi - 4m + 5j - 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \\ f_{24}(x_i^j y_i^j) &= 4nm + 5mi - 4m + 5j - 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \\ f_{24}(y_i^j z_i^j) &= 4nm + 5mi - 4m + 5j, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \\ f_{24}(y_i^j w_i^j) &= 9nm + 5mi - 4m + 5j - 4, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \\ f_{24}(A^j y_i^j) &= 9nm + 5mi - 4m + 5j - 3, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \\ f_{24}(A^j p_i^j) &= 9nm + 5mi - 4m + 5j - 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \\ f_{24}(A^j z_i^j) &= 9nm + 5mi - 4m + 5j - 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \\ f_{24}(z_i^j p_i^j) &= 9nm + 5mi - 4m + 5j, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \end{aligned}$$

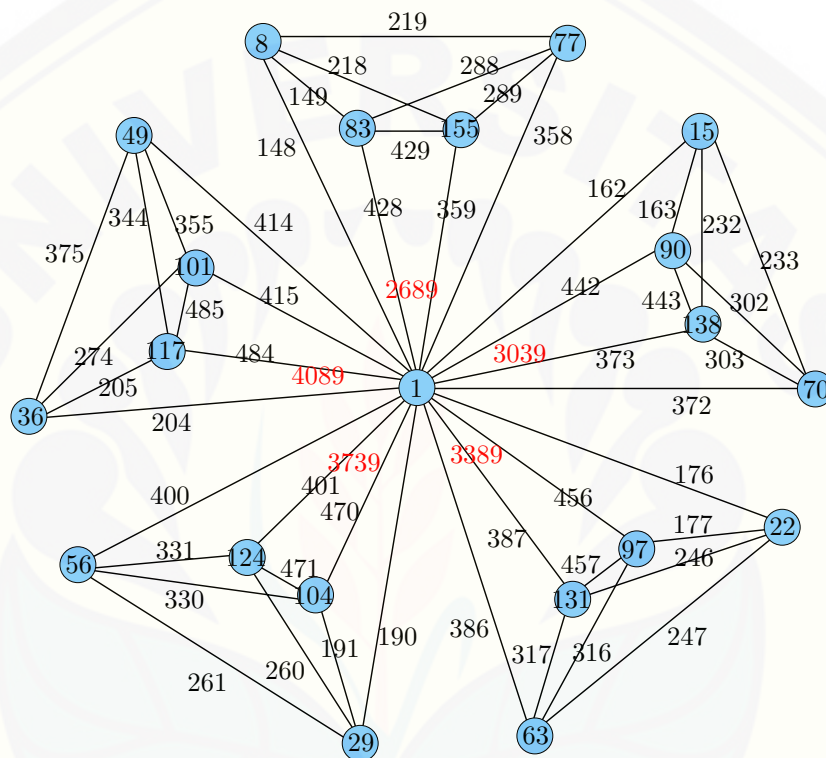
Misalkan $W_{f_{24}}$ didefinisikan sebagai bobot total dekomposisi pada graf *windmill* berdasarkan penjumlahan bobot selimut dengan label sisinya maka $w_{f_{24}}$ dan fungsi label sisi dengan syarat batas i dan j yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

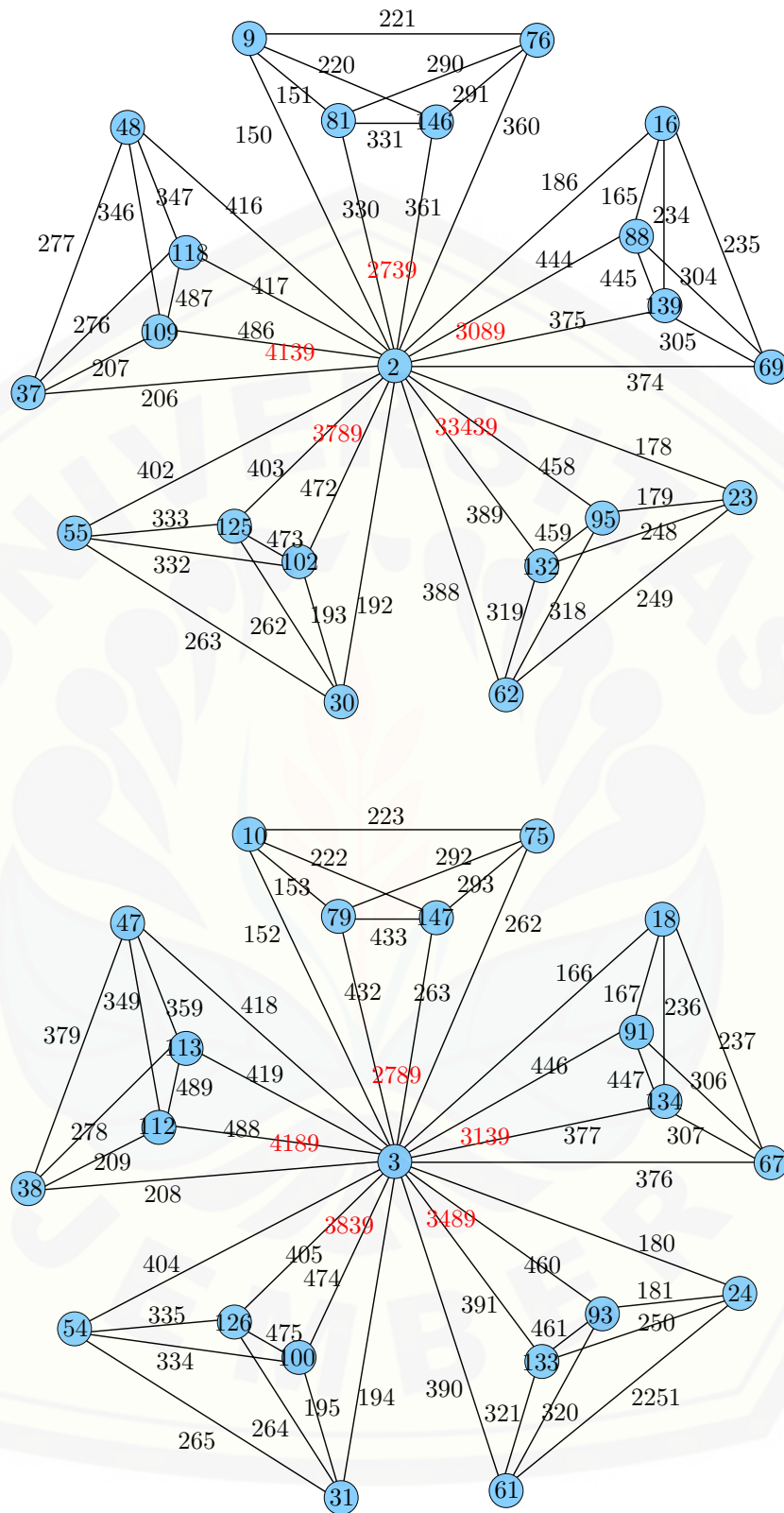
$$W_{f_{24}} = \frac{146mn + 100mi - 71m + 100j - 35}{2}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$$

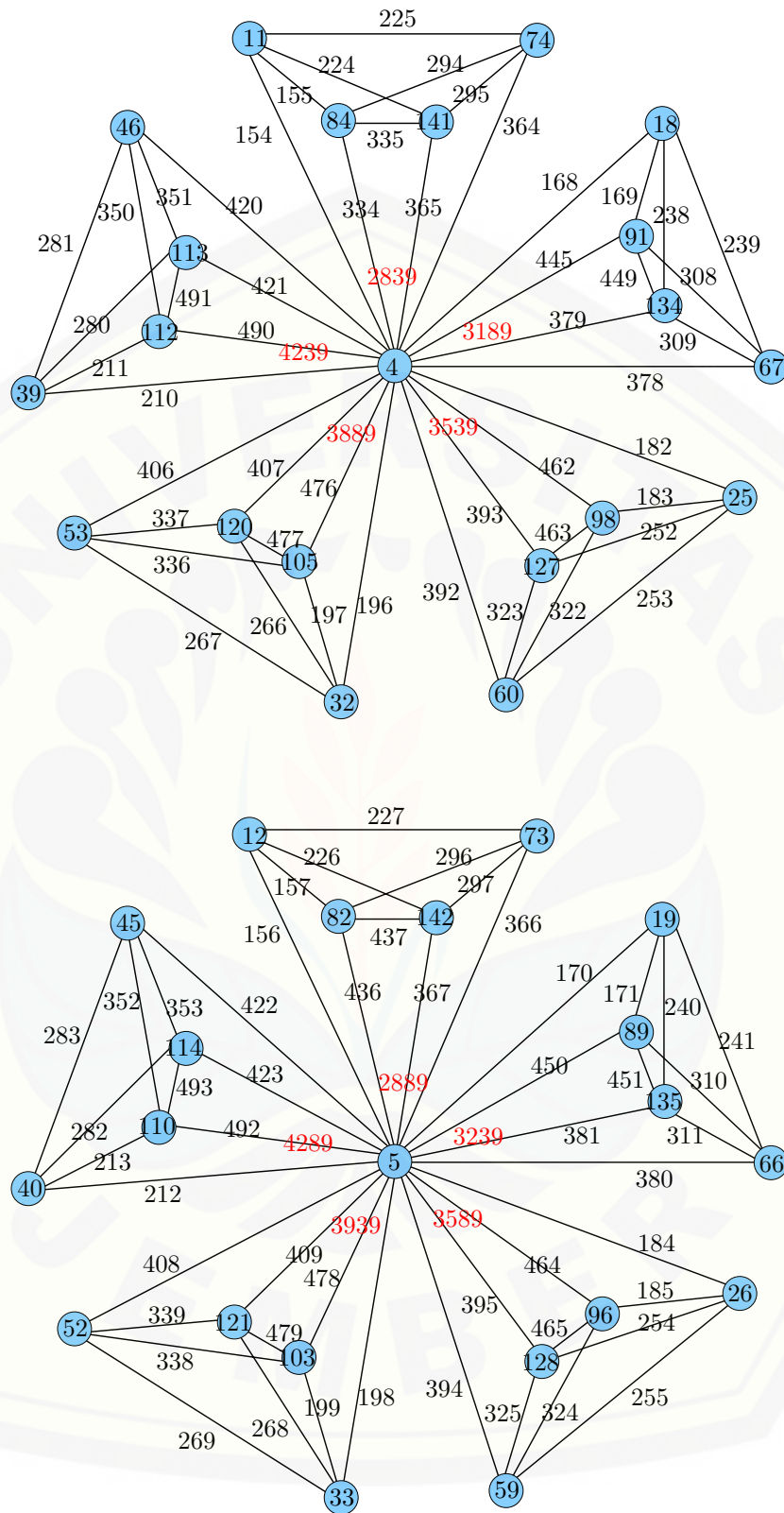
Dengan demikian maka didapatkan himpunan bobot total dekomposisi $W_{f_{24}} = \{\frac{146mn+29m+65}{2}, \frac{146mn+29m+165}{2}, \dots, \frac{246mn+29m-35}{2}\}$. Sehingga terbukti bahwa gabu-

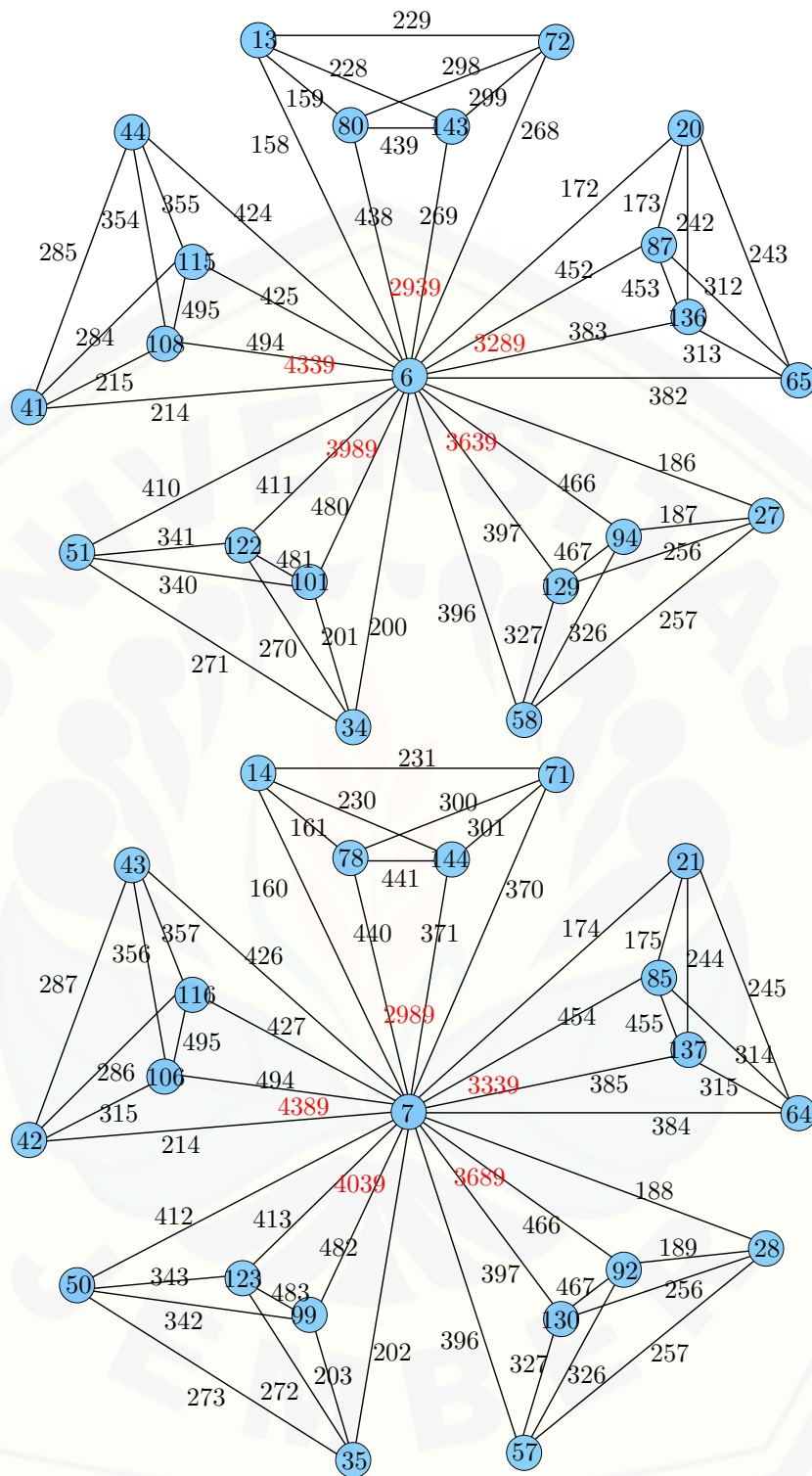
gan saling lepas graf $windmill\ mWD_5^n$ memiliki super $(\frac{146mn+29m+65}{2}, 50) - WD_5$ antimagic total dekomposisi untuk $n \geq 2, m \geq 3$ dan m ganjil. \square

Gambar 4.25 merupakan contoh super $(2689, 50) - WD_5$ antimagic total dekomposisi pada gabungan graf $windmill\ (7WD_5^2)$ dengan himpunan bobot total dekomposisi $W = \{2689, 2739, \dots, 4389\}$.









Gambar 4.25 Super $(2689, 50) - WD_5$ antimagic total dekomposisi pada gabungan saling lepas $(7WD_5^5)$

◇ **Teorema 4.2.5.** *Ada diskonektif graf windmill mWD_5^n memiliki super $(\frac{96nm-151m+115}{2}, 100)$ - WD_5 antimagic total dekomposisi untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 3$ dimana m ganjil.*

Bukti. Labeli titik gabungan saling lepas pada graf *windmill* (mWD_5^n) dengan menggunakan label titik yang terdapat pada teorema 4.2.1 ke dalam teorema 4.2.5 dimana $f_{25}=f_{21}$. Sehingga $f_{25}(A)=f_{21}(A)$, $f_{25}(x_i^j)=f_{21}(x_i^j)$, $f_{25}(y_i^j)=f_{21}(y_i^j)$, $f_{25}(z_i^j)=f_{21}(z_i^j)$, $f_{25}(p_i^j)=f_{21}(p_i^j)$. Dengan demikian maka bobot dekomposisi dari pelabelan total dekomposisi pada gabungan saling lepas graf *windmill* yang didefinisikan dengan $w_{f_{25}}=w_{f_{21}}=\frac{16mn+9m+5}{2}$.

Labeli sisi gabungan saling *windmill* mWD_5^n dengan fungsi bijektif f_{25} sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f_{25}(A^j x_i^j) &= 4nm + 10mi - 9m + 10j - 9, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \\ f_{25}(x_i^j z_i^j) &= 4nm + 10mi - 9m + 10j - 8, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \\ f_{25}(x_i^j p_i^j) &= 4nm + 10mi - 9m + 10j - 7, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \\ f_{25}(x_i^j y_i^j) &= 4nm + 10mi - 9m + 10j - 6, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \\ f_{25}(y_i^j z_i^j) &= 4nm + 10mi - 9m + 10j - 5, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \\ f_{25}(y_i^j w_i^j) &= 4nm + 10mi - 9m + 10j - 4, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \\ f_{25}(A^j y_i^j) &= 4nm + 10mi - 9m + 10j - 3, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \\ f_{25}(A^j p_i^j) &= 4nm + 10mi - 9m + 10j - 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \\ f_{25}(A^j z_i^j) &= 4nm + 10mi - 9m + 10j - 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \\ f_{25}(z_i^j p_i^j) &= 4nm + 10mi - 9m + 10j, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \end{aligned}$$

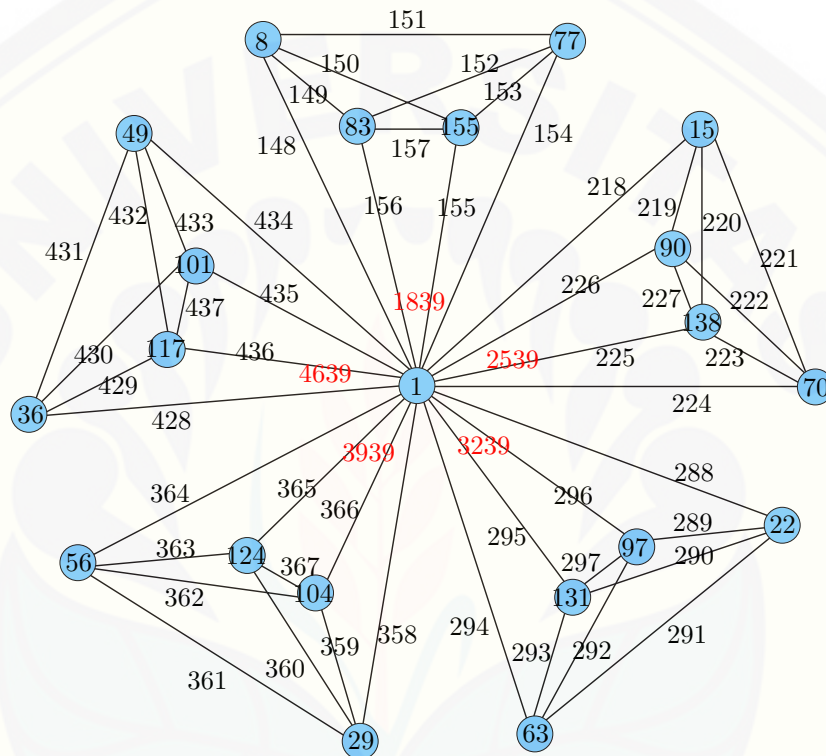
Misalkan $W_{f_{25}}$ didefinisikan sebagai bobot total dekomposisi pada graf *windmill* berdasarkan penjumlahan bobot selimut dengan label sisinya maka $w_{f_{25}}$ dan fungsi label sisi dengan syarat batas i dan j yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

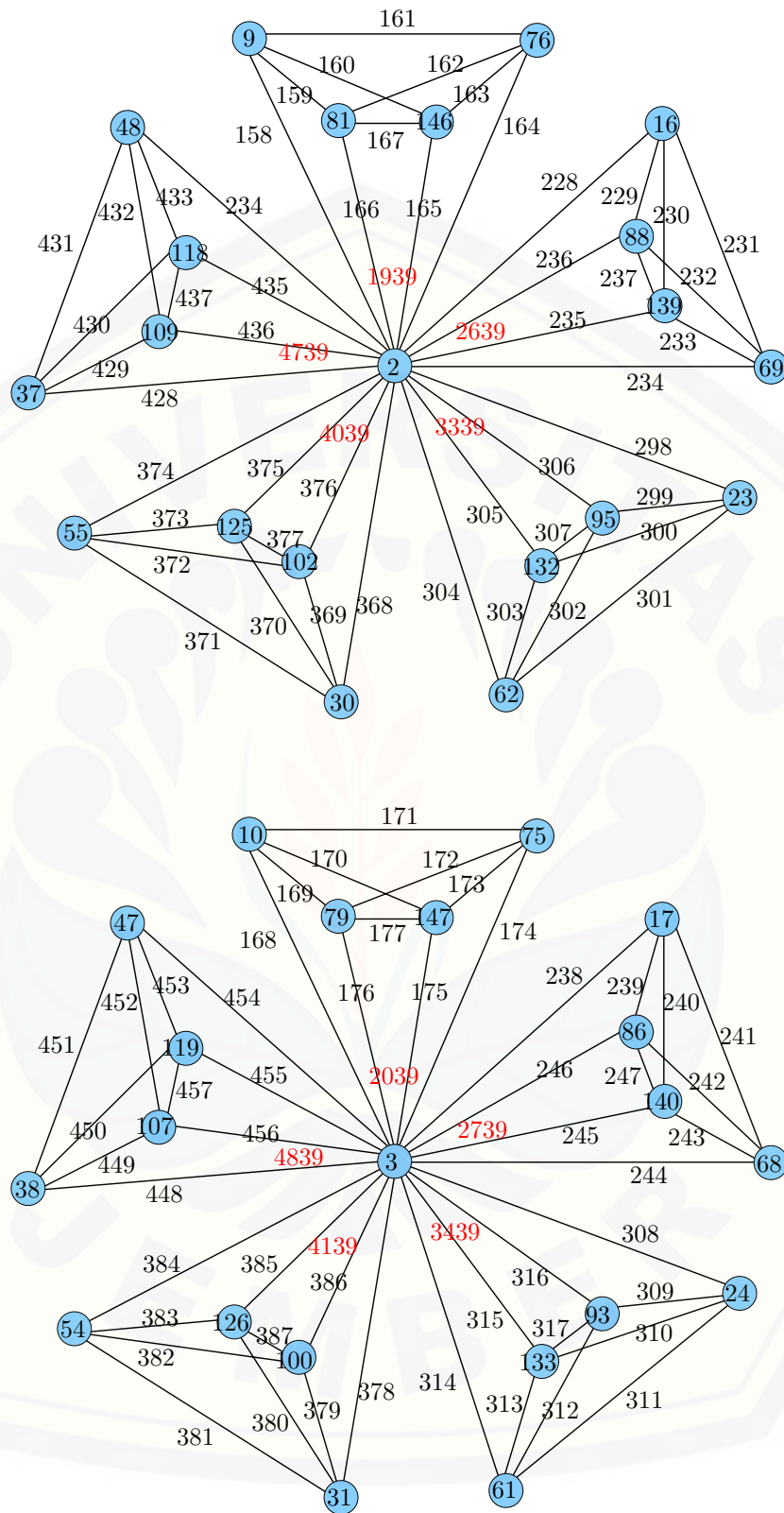
$$W_{f_{25}} = 96mn + 20mi - 171m + 200j - 85; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$$

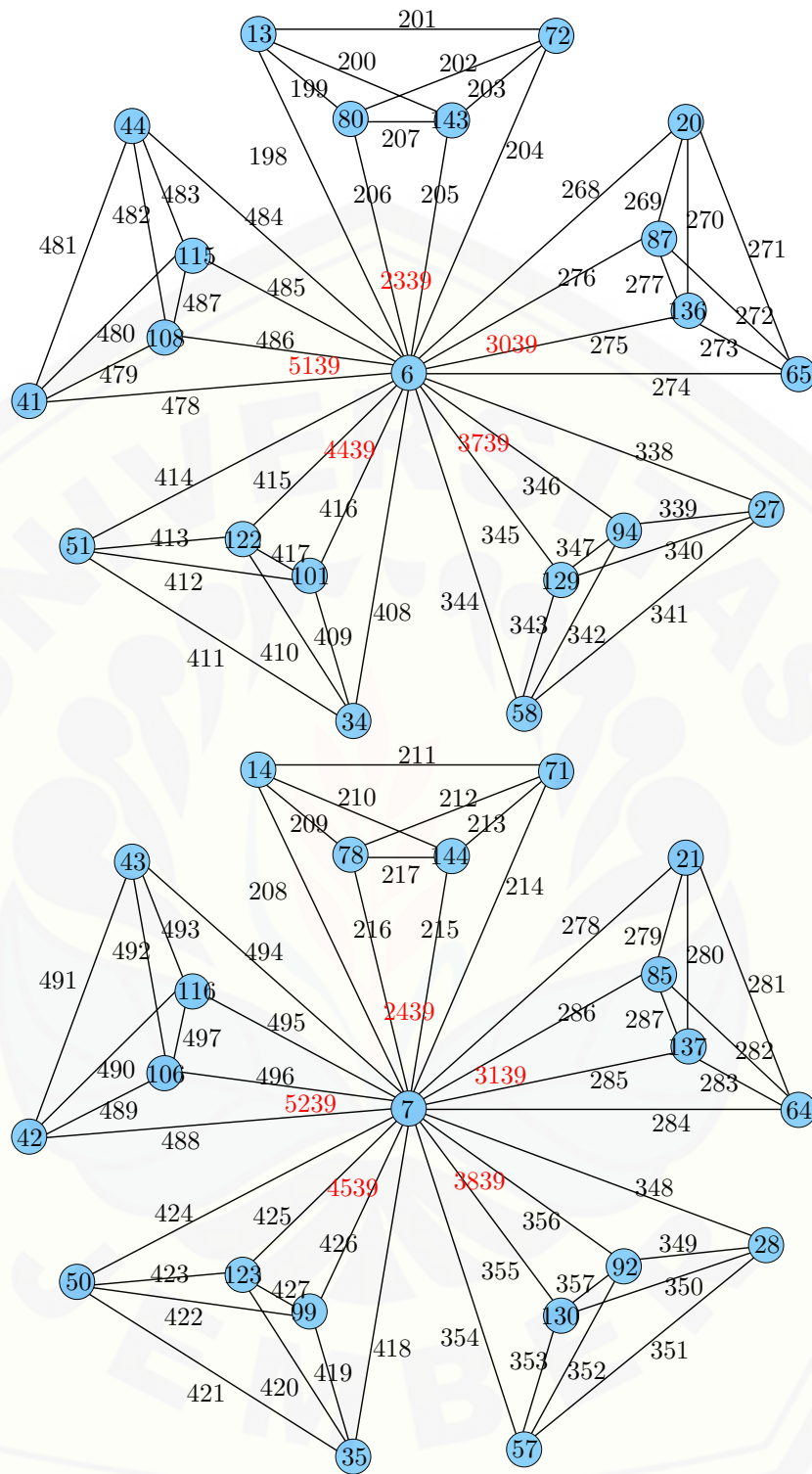
Dengan demikian maka didapatkan himpunan bobot total dekomposisi $W_{f_{21}} = \{\frac{96mn+151m+115}{2}, \frac{96mn+151m+215}{2}, \dots, \frac{116mn+151m+129}{2}\}$. Sehingga terbukti bahwa gabu-

gan saling lepas pada graf *windmill* (mWD_5^n) memiliki super $(\frac{96mn+151m+115}{2}, 100)$ - WD_5 antimagic total dekomposisi untuk $n \geq 2$, $m \geq 3$ dan m ganjil. \square

Gambar 4.26 merupakan contoh super $(1839, 100)$ - WD_5 antimagic total dekomposisi pada gabungan graf *windmill* ($7WD_5^2$) dengan himpunan bobot total dekomposisi $W = \{1839, 1939, \dots, 5239\}$.







Gambar 4.26 Super $(1839, 100) - WD_5$ antimagic total dekomposisi pada gabungan graf *windmill* $(7WD_5^5)$

4.3 Hasil dan Pembahasan

Metode penelitian ini digunakan untuk menentukan kardinalitas, menentukan batas atas nilai d , menentukan fungsi titik, fungsi bobot dekomposisi, fungsi sisi, dan fungsi bobot total dekomposisi pada graf *windmill* tunggal (WD_5^n) maupun gabungan saling lepasnya (mWD_5^n). Berdasarkan hasil perhitungan menggunakan lemma 4.1.1 diperoleh nilai d yang mungkin untuk super (a, d) - \mathcal{H} antimagic total dekomposisi pada graf *windmill* (WD_5^n) tunggal maupun graf *windmill* (mWD_5^n) gabungan saling lepasnya, dimana untuk yang tunggal $d \in \{0, 1, 2, \dots, 119, 120\}$, sedangkan yang gabungan saling lepasnya $d \in \{0, 1, 2, \dots, 119, 122\}$.

Terdapat 25 teorema yang ada pada penelitian ini, dimana 20 teorema untuk graf *windmill* (mWD_5^n) tunggal, dan 5 teorema untuk graf *windmill* (mWD_5^n) gabungan saling lepasnya. Teorema pada graf *windmill* (mWD_5^n) tunggal diperoleh dari 20 jenis pelabelan yang berbeda, dimana terdapat 5 formasi pelabelan titik, dan 5 formasi pelabelan sisi. sedangkan teorema pada graf *windmill* (mWD_5^n) gabungan saling lepas diperoleh dari 5 jenis pelabelan yang berbeda, dimana terdapat 1 formasi pelabelan titik, dan 5 formasi pelabelan sisi. Pada pelabelan graf *windmill* (mWD_5^n) gabungan saling lepas diperoleh dari formasi pelabelan yang terdapat pada graf *windmill* (mWD_5^n) tunggal.

Menurut hasil penelitian yang telah dilakukan, peneliti telah mendapatkan Super \mathcal{H} -antimagic total dekomposisi graf *windmill* tunggal untuk $d \in \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 24, 28, 50, 52, 54, 58, 100, 102, 104\}$ dan Super \mathcal{H} -antimagic total dekomposisi untuk gabungan saling lepas pada graf *windmill* $d \in \{0, 10, 20, 50, 100\}$.

BAB 5. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dari pembahasan pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa:

1. Pada graf *windmill* konektif (WD_5^n) memiliki pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} antimagic total dekomposisi untuk $d = \{0, 1, 2, \dots, 119, 120\}$. Hasil penelitian ini dibuktikan pada teorema bahwa graf *windmill* (WD_5^n) terdapat fungsi bijektif pelabelan super $(98n+22, 0)$, $(97n+23, 2)$, $(96n+24, 4)$, $(95n+25, 6)$, $(94n+26, 8)$, $(93n+27, 10)$, $(92n+28, 12)$, $(91n+29, 14)$, $(89n+31, 18)$, $(88n+32, 20)$, $(86n+34, 24)$, $(84n+36, 28)$, $(73n+47, 50)$, $(72n+48, 52)$, $(71n+49, 54)$, $(69n+65, 58)$, $(48n+72, 100)$, $(47n+73, 102)$, $(46n+74, 104)$, $(44n+76)$, $(108-WD_5)$ antimagic total covering untuk $n \geq 2$.
2. Pada graf *windmill* diskonektif (nWD_5^n) memiliki pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} total dekomposisi untuk $d = \{0, 1, 2, \dots, 119, 120m\}$. Hasil penelitian ini dibuktikan bahwa Gabungan saling lepas graf *windmill* terdapat fungsi bijektif pelabelan super $(\frac{196mn+29m+15}{2}, 0)$, $(\frac{186mn+29m+25}{2}, 10)$, $(\frac{176mn+29m+35}{2}, 20)$, $(\frac{146mn+29m+65}{2}, 50)$, $(\frac{96mn+151m+115}{2}, 100)$ - WD_5 antimagic total dekomposisi untuk $n \geq 2$, $m \geq 3$ dan m ganjil.

5.2 Saran

Berdasarkan hasil penelitian mengenai pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} antimagic total dekomposisi pada graf *windmill* (WD_5^n) serta mengacu pada *open problem* dari hasil penelitian yang telah ditemukan, maka peneliti memberikan saran kepada pembaca agar dapat melakukan penelitian pada pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} antimagic total total dekomposisi pada graf *windmill* (WD_5^n), dengan $n \geq 2$ kecuali $d \in \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 24, 28, 50, 52, 54, 58, 100, 102, 104\}$. Serta untuk pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} antimagic total covering pada gabungan saling lepas, dengan $n \geq 2$ dan $m \geq 3$ untuk $d \leq 120$ kecuali $d \in \{0, 10, 20, 50, 100\}$.

DAFTAR SUMBER RUJUKAN

- Agustin, I.H, Pudyaningrum, P. R. H., dan Dafik. 2014. Super (a, d) - \mathcal{H} -antimagic total selimut pada sackle graf tringular book. *Prosiding Seminar Matematika dan Pendidikan Matematika, 1308-1320*.
- Baca, M., Lin, Y., Miller, M., Youssef, MZ. 2007. Edge-antimagic graphs. *Discrete Mathematics 307,1232-1244*.
- Carlos, K. 2006. Generalized book and cm snakes and prime graphs. *ARS COMBINATORIA 80,215-221*.
- Dafik. (2007). *Structural Properties and Labeling of Graph. Australia : Tidak dipublikasikan (Tesis)*.
- Dafik. (2015). Teori Graph, Aplikasi dan Tumbuhnya Keterampilan Berpikir Tingkat Tinggi.
- Damayanti, R.T. (2011). Automorfisme graf bintang dan graf lintasan. *Universitas Brawijaya. Vol. 2, 35-40*.
- Gallian, J. A. (2009). Dinamyc survey of graph labeling. *The Electronic Journal of Combinatorics*.
- Gutierrez, A. dan Lladó, A. 2005. Magic Coverings. *Of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing. Vol.55: 451-461*.
- Inayah, N., Simanjutak, R., Salman, A. (2009). On (a,d) - \mathcal{H} -Antimagic Covering of Graphs. *The Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing 71,273-281*.
- Inayah, N. (2013). Pelabelan $(a, d) - \mathcal{H}$ -Anti Ajaib Pada Beberapa Kelas Graf. *Institut Teknologi Bandung : Tidak dipublikasikan (Disertasi)*.
- Jamil, N. A., Agustin, I. H., and Dafik (2014). Super $(a, d) - \mathcal{H}$ -antimagic total covering pada gabungan saling lepas graf triangular ladder. *Prosiding Semnas Pendidikan Matematika Ahmad Dahlan*.
- Kotzig, A dan Rosa, A. (1970). Magic valuations of finite graphs. *Canad. Math. Bull. 13,451-461*.

- Pudyaningrum, P. R. H., Agustin, I. H., and Dafik (2014). Pengembangan total selimut super $(a, d) - H$ -antimagic pada graf shackle triangular book. *Prosiding Semnas Pendidikan Matematika Ahmad Dahlan*.
- Rosyidah, K. dan Dafik, D. (2014) Super (a, d) -H Total Decomposition of Graf Helm. *Prosiding Seminar Matematika dan Pendidikan Matematika, 1287=1295*.
- WD Wallis, ET Baskoro, M Miller, Slamini. (2002). Edge-magic total labelings. *Australasian Journal of Combinatorics. 177-190*.
- Wuni, S. C., Agustin, I.H., Dafik.(2014) Super $(a, d) - H$ -antimagic total covering pada graf semi windmill. *Prosiding Seminar Matematika dan Pendidikan Matematika Ahmad Dahlan, 1286-1295*.

