



**PELABELAN TOTAL SUPER (a, d) -SISI ANTIMAGIC
PADA GRAF SISIR**

SKRIPSI

Oleh

SITI MUAFA

NIM 101810101026

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER**

2015



**PELABELAN TOTAL SUPER (a, d) -SISI ANTIMAGIC
PADA GRAF SISIR**

SKRIPSI

diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan Program Studi Matematika (S1) dan mencapai gelar Sarjana Sains

Oleh
Siti Muafa
NIM 101810101026

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER**

2015

PERSEMBAHAN

Dengan menyebut nama Allah yang maha pengasih lagi maha penyayang, serta sholawat dan salam selalu tercurahkan kepada Nabi Muhammad S.A.W, ku-persembahkan sebuah kebahagiaan dalam perjalanan hidupku teriring rasa terima kasihku yang terdalam kepada:

1. orang tuaku tercinta dan terkasih: Ibuku Siati dan Bapakku Muzaki, yang senantiasa mengalirkan rasa cinta dan kasih sayangnya serta cucuran keringat dan doa yang tiada pernah putus yang selalu mengiringiku dalam meraih cita-cita;
2. Ibu Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si. dan Bapak Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D yang telah memberikan bimbingan, dukungan dan motivasi selama ini;
3. teman-teman chaponiks yang selalu membantuku dan ada untukku;
4. teman-teman pejuang graf: (Rida, Karin, Nika, Ica, Sari, Anang, Latifah, Misi, Fia, Diana, Hendry, Angga) yang selalu memberikan dukungan untuk terus semangat;
5. teman-teman angkatan 2010 Matematika MIPA dan semuanya yang senantiasa membantuku dan menorehkan sebuah pengalaman indah yang tak terlupakan;
6. Dosen Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember yang telah memberikan ilmunya padaku.

MOTTO

"Karena itu, ingatlah kamu kepada-Ku niscaya Aku ingat (pula) kepadmu, dan bersyukurlah kepada-Ku, dan janganlah kamu mengingkari (nikmat)-Ku."
(QS.Al-Baqarah :152)*

"Dalam shalatku selama 40 tahun, aku tak pernah lupa mendo'akan guruku yang bernama Imam Syafi'i. Itu kulakukan karena aku memperoleh ilmu dari Allah lewat beliau."
(Yahya bin Said al-Qathan).**

"Sedikit makan, sedikit tidur dan sedikit kesenangan merupakan ciri-ciri orang yang dicintai oleh Allah".
(Abu Bakar bin Abdullah Al-Muzani)***

* *Departemen Agama Republik Indonesia*. 2005. *Al-Qur'an dan Terjemahannya*. Jakarta.

** www.hpsyafii.blogspot.com

*** www.garismiring.com

PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Siti Muafa

NIM : 101810101026

Menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang berjudul: Pelabelan Total Super (a, d) -Sisi Antimagic pada Graf Sisir adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali jika dalam pengutipan substansi disebutkan sumbernya, dan belum diajukan pada instansi manapun, serta bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa adanya tekanan dan paksaan dari pihak manapun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, April 2015

Yang menyatakan,

Siti Muafa

NIM. 101810101026

SKRIPSI

**PELABELAN TOTAL SUPER (a, d) -SISI ANTIMAGIC
PADA GRAF SISIR**

Oleh

Siti Muafa

NIM 101810101026

Pembimbing

Dosen Pembimbing Utama : Ika Hesti Agustin S.Si., M.Si
Dosen Pembimbing Anggota : Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D

PENGESAHAN

Skripsi berjudul Pelabelan Total Super (a,d) -Sisi Antimagic Pada Graf Sisir telah diuji dan disahkan oleh Fakultas Matematika Dan Ilmu Pengetahuan Alam pada:

Hari :

Tanggal :

Tempat : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember

Tim Penguji :

Dosen Pembimbing Utama,

Dosen Pembimbing Anggota,

Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si.

NIP.19840801 200801 2 006

Prof. Drs Dafik, M.Sc., Ph.D.

NIP.19680802 199303 1 004

Dosen Penguji Utama,

Dosen Penguji Anggota,

Drs. Rusli Hidayat, M.Sc.

NIP.19661012 199303 1 001

M. Ziaul Arif, S.Si., M.Sc.

NIP. 19850111 200812 1 002

Mengetahui,

Dekan Fakultas Matematika Dan Ilmu Pegetahuan Alam
Universitas Jember

Prof. Drs. Kusno, DEA.,Ph.D.

NIP. 19610108 198602 1 001

RINGKASAN

Pelabelan Total Super (a,d)-sisi Antimagic pada Graf Sisir; Siti Muafa, 101810101026; 2015: 83 halaman; Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Jember.

Pelabelan graf merupakan salah satu topik di dalam teori graf mengalami perkembangan. Salah satu jenis pelabelan adalah pelabelan total super (a, d)-sisi antimagic (*SEATL*), dimana a mendefinisikan bobot total terkecil dan d adalah nilai beda. Graf sisir yang dinotasikan Cb_n merupakan graf yang belum ditemukan *SEATL*-nya. Graf sisir tunggal dinotasikan Cb_n dan graf sisir gabungan saling lepas dinotasikan dengan mCb_n . Graf ini merupakan famili dari graf Ladder. Kardinalitas dari graf sisir tunggal yaitu, $p = 2n + 3$, $q = 4n + 3$, $V(Cb_n) = \{e, b, c, x_i, y_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan $E(Cb_n) = \{ec\} \cup \{eb\} \cup \{bc\} \cup \{cx_1\} \cup \{cy_1\} \cup \{ex_1\} \cup \{cx_2\} \cup \{x_iy_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_iy_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_ix_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_ix_{i+2}; 1 \leq i \leq n-2\}$.

Terlebih dahulu yang diperhatikan pada pelabelan ini adalah pendeteksian pola, dilanjutkan menentukan batas atas d , baik untuk graf tunggal maupun saling lepas. Setelah itu menentukan *SEATL* dari graf sisir yang menghasilkan 2 lemma dan 6 teorema. Isi dari lemma dan teorema tersebut antara lain:

- a. Ada pelabelan titik $(3, 1)$ -sisi antimagic pada graf sisir Cb_n jika $n \geq 3$, (Lemma 4.1.1);
- b. Ada pelabelan total super $(6n - 9, 0)$ -sisi antimagic pada graf sisir Cb_n untuk $n \geq 3$ (Teorema 4.1.1);
- c. Ada pelabelan total super $(4n + 8, 1)$ -sisi antimagic pada graf sisir Cb_n untuk $n \geq 3$ (Teorema 4.1.2);
- d. Ada pelabelan total super $(2n + 7, 2)$ -sisi antimagic pada graf sisir Cb_n untuk $n \geq 3$ (Teorema 4.1.3);
- e. Ada pelabelan titik $(\frac{3m+2k+1}{2}, 1)$ -sisi antimagic pada gabungan saling lepas graf sisir mCb_n jika $n \geq 3$, $m \geq 3$, m (Lemma 4.1.2);

- f. Ada pelabelan total super $(\frac{12nm+15m+3}{2}, 0)$ -sisi antimagic pada gabungan saling lepas dari graf sisir (mCb_n) jika $n \geq 3$, $m \geq 3$ dan m ganjil (Teorema 4.1.4);
- g. Ada pelabelan total super $(\frac{16nm+24m+8}{2}, 1)$ -sisi antimagic pada gabungan saling lepas graf sisir mCb_n jika $n \geq 3$, $m \geq 3$ dan m ganjil, (Teorema 4.1.5);
- h. Ada pelabelan super total super $(\frac{4nm+9m+5}{2}, 2)$ -sisi antimagic pada gabungan saling lepas graf sisir. (Teorema 4.1.6).

Dalam penelitian ini terdapat open problem yang disediakan bagi pembaca yaitu Pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic pada graf sisir mCb_n , untuk m genap.

KATA PENGANTAR

Puji syukur kehadirat Allah Swt atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul Pelabelan Total Super (a, d) -Sisi Antimagic Pada Graf Sisir. Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan pendidikan strata satu (S1) pada Program Studi Matematika Dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih atas bantuan dan bimbingan dalam penyusunan skripsi ini, terutama kepada yang terhormat:

1. Dekan Fakultas Matematika Dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
2. Ketua Jurusan Matematika Dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
3. Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si. selaku Dosen Pembimbing I dan Drs. Dafik, M.Sc.,Ph.D. selaku Dosen Pembimbing II yang telah meluangkan waktu, pikiran, dan perhatian dalam penulisan skripsi ini;
4. Drs. Rusli Hidayat M.Sc, selaku Dosen Penguji I dan Ziaul Arif, S.Si., M.Sc selaku Dosen Penguji II dan Dosen Pembimbing Akademik yang telah memberikan kritik dan saran dalam penulisan skripsi ini;
5. dosen dan karyawan Fakultas Matematika Dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
6. semua pihak yang telah membantu terselesaikannya skripsi ini.

Semoga amal dan kebaikan yang telah diberikan akan mendapat limpahan pahala dari Tuhan Yang Maha Esa. Penulis juga sangat mengharapkan kritik dan saran yang membangun dari semua pihak demi kesempurnaan penulisan skripsi ini. Akhir kata, semoga skripsi ini bermanfaat bagi semua pihak

Jember, April 2015

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	ii
PERSEMBAHAN	iii
HALAMAN MOTTO	iv
PERNYATAAN	v
PENGESAHAN	vii
RINGKASAN	viii
KATA PENGANTAR	x
DAFTAR ISI	xi
DAFTAR GAMBAR	xiii
DAFTAR TABEL	xiv
DAFTAR LAMBANG	xv
1 PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang Masalah	1
1.2 Rumusan Masalah	2
1.3 Batasan Masalah	2
1.4 Tujuan Penelitian	3
1.5 Manfaat Penelitian	3
2 TINJAUAN PUSTAKA	4
2.1 Terminologi Dasar Graf	4
2.1.1 Graf Khusus	8
2.2 Pelabelan Graf	11
2.2.1 Pelabelan Total Super (a,d) -sisi Antimagic	14
2.3 Fungsi dan Barisan Aritmatika	18
2.3.1 Fungsi	18
2.3.2 Barisan Aritmatika	19
2.4 Aplikasi	19
2.5 Hasil-Hasil Pelabelan Total Super (a, d) -Sisi Antimagic pada Graf Diskonektif	21
3 METODE PENELITIAN	24

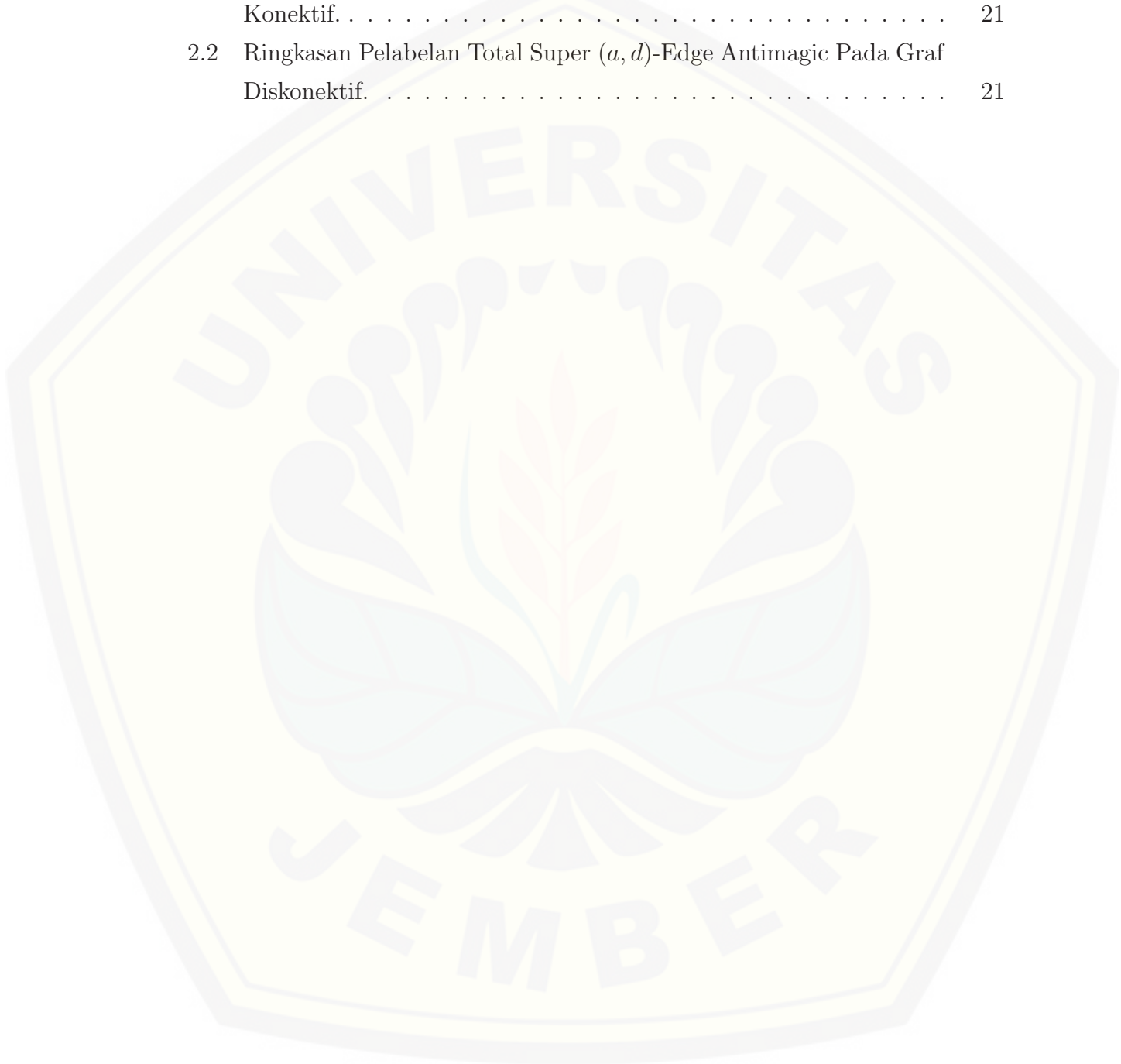
3.1	Metode Penelitian	24
3.2	Teknik Penelitian	24
4	HASIL DAN PEMBAHASAN	27
4.1	Hasil Penelitian	27
4.1.1	Pelabelan Total Super (a, d) -Sisi Antimagic pada Graf Sisir Tunggal (Cb_n)	27
4.1.2	Pelabelan Total Super (a, d) -Sisi Antimagic pada Gabungan Saling Lepas dari Graf Sisir (mCb_n)	41
4.2	Pembahasan	77
5	KESIMPULAN DAN SARAN	81
5.1	Kesimpulan	81
5.2	Saran	81
	DAFTAR PUSTAKA	82

DAFTAR GAMBAR

2.1	Contoh Graf	4
2.2	Beberapa Subgraf dari Graf G_1	6
2.3	Contoh Dua Graf yang Isomorfis	7
2.4	Matriks <i>adjacency</i> dari P_1 dan P_2	7
2.5	Contoh Graf yang Disjoint Union	8
2.6	Graf <i>Ladder</i> (L_5)	9
2.7	Graf Bianglala ($FW_{2,5}$)	10
2.8	Graf Buku Segitiga (Bt_5)	10
2.9	Graf Gunung (M_{2n})	11
2.10	Graf Sisir (Cb_6)	11
2.11	Pelabelan Titik	12
2.12	Pelabelan Sisi	13
2.13	Pelabelan Total	13
2.14	Pelabelan Total Super Pada Graf Bintang	20
3.1	Rancangan Penelitian Pelabelan Total Super	26
4.1	Graf Sisir Tunggal (Cb_n) dengan $n=6$	28
4.2	Label <i>EAVL</i> dari Cb_6	29
4.3	<i>SEATL</i> pada Graf Sisir Cb_6 ketika $d=0$	31
4.4	<i>SEATL</i> pada Graf Sisir Cb_6 ketika $d=1$	34
4.5	<i>SEATL</i> pada Graf Sisir Cb_6 ketika $d=2$	38
4.6	Graf Sisir Gabungan Saling Lepas (mCb_8) dengan $m=5$	42
4.7	Label <i>EAVL</i> dari $5Cb_8$	44
4.8	<i>SEATL</i> dari $5Cb_8$ ketika $d = 0$	48
4.9	<i>SEATL</i> dari $5Cb_8$ untuk $d = 1$	55
4.10	<i>SEATL</i> dari $5Cb_8$ untuk $d = 2$	70

DAFTAR TABEL

2.1	Ringkasan Pelabelan Total Super (a, d) -Edge Antimagic Pada Graf Konektif.	21
2.2	Ringkasan Pelabelan Total Super (a, d) -Edge Antimagic Pada Graf Diskonektif.	21



DAFTAR LAMBANG

G	=	Graf G
$G(V, E)$	=	Sebarang graf tak berarah dengan V adalah himpunan tak kosong dari semua titik dan E adalah himpunan sisi
v_n	=	Titik ke- n pada suatu graf
e_n	=	Sisi ke- n dari suatu graf
$ V(G) $	=	Banyaknya titik dari graf G yang disebut <i>order</i>
$ E(G) $	=	Banyaknya sisi dari graf G yang disebut ukuran (<i>size</i>)
$EA VL$	=	<i>Edge antimagic vertex labeling</i> atau pelabelan titik sisi antimagic
$SEATL$	=	<i>Super edge antimagic total labeling</i> atau pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic
d	=	Nilai beda barisan bobot sisi pada SEATL
a	=	Bobot sisi terkecil yang merupakan suku pertama barisan bobot sisi pada SEATL
Cb_n	=	Graf Sisir, dimana n menyatakan jumlah titik yang dari karakteristik graf sisir
mCb_n	=	Gabungan graf Sisir, dimana m menyatakan jumlah <i>copy</i> dari graf sisir
$\alpha(m)$	=	Fungsi bijektif pelabelan titik untuk graf sisir tunggal
w_{α_m}	=	Bobot sisi dari pelabelan titik α_m
$W\alpha_m$	=	Bobot total dari pelabelan total α_m
$\beta(v^k)$	=	Fungsi bijektif pelabelan titik gabungan graf sisir <i>copy</i> ke- k
$W\beta_m$	=	Bobot total dari pelabelan total β_p pada gabungan graf sisir

BAB 1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Teori graf merupakan salah satu bidang dalam ilmu Matematika. Bidang ini juga sering digunakan untuk membantu memecahkan persoalan yang sering kali muncul dalam kehidupan sehari-hari. Permasalahan tersebut dimodelkan kedalam bahasa Matematika, agar lebih mudah dimengerti dan dapat segera dicari solusinya. Pemodelan permasalahan biasanya direpresentasikan kedalam bentuk gambar, dimana gambar itu merupakan gabungan dari sejumlah titik dan garis atau biasa disebut sisi, dimana sisi tersebut menghubungkan titik-titik.

Salah satu topik didalam teori graf yang juga mengalami perkembangan adalah pelabelan. Pelabelan merupakan pemetaan bijektif yang memetakan himpunan dari elemen graf kepada himpunan bilangan bulat positif yang biasa disebut dengan label. Berdasarkan domain dari pemetaan, ada tiga macam pelabelan yaitu pelabelan titik, pelabelan sisi dan pelabelan total. Pelabelan titik merupakan pelabelan yang domain pemetaanya berupa himpunan titik. Pelabelan sisi merupakan pelabelan yang domain pemetaanya berupa himpunan sisi. Sedangkan untuk pelabelan total adalah pelabelan yang domain pemetaanya adalah himpunan titik dan sisi.

Salah satu jenis pelabelan adalah pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic atau disebut juga *SEATL* (Super Edge Antimagic Total Labeling). Pelabelan ini pertama kali diperkenalkan oleh Simanjutak, Bertault, dan Miller pada tahun 2000 (Dafik, 2007). Dimana a menyatakan bobot sisi terkecil dan d menyatakan nilai beda. Bobot sisi merupakan penjumlahan dari label dua titik yang mengapit sisi tersebut dan label sisi. Pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic merupakan pelabelan total pada sebuah graf, dimulai dengan melabeli semua titik dengan bilangan asli yang berurutan dan selanjutnya melabeli semua sisi. Dari pelabelan tersebut, nilai bobot sisi harus membentuk barisan aritmatika dan dicari pada graf konektif (tunggal) dan diskonektif (gabungan saling lepas yang isomorfis) dari

sebuah graf. Setiap graf yang memiliki pelabelan total super (a,d) -sisi antimagic memiliki batas atas, dimana batas ini berfungsi untuk mengetahui berapa nilai beda terbesar yang dimilikinya.

Berikut beberapa graf yang telah ditemukan pelabelan total super (a,d) -sisi antimagic-nya : Robiatul (2014) tentang pelabelan total super (a,d) -sisi antimagic graf Lampion, Djoni (2014) tentang pelabelan total super (a,d) -sisi antimagic pada graf Bianglala, Agnes (2014) tentang pelabelan total super (a,d) -sisi antimagic pada graf Buah Naga, Inge (2014) tentang pelabelan total super (a,d) -sisi antimagic pada graf Rem Cakram, Sih (2015) tentang pelabelan total super (a,d) -sisi antimagic pada graf Daun dan (Aprilia, 2015) tentang pelabelan total super (a,d) -sisi antimagic pada graf Semi Parasut.

Penelitian-penelitian sebelumnya membantu penulis untuk meneliti sebuah graf, yang diberi nama graf sisir, yang dinotasikan dengan Cb_n . Graf tersebut merupakan keluarga dari graf Ladder. Untuk graf gabungan yang saling lepas dinotasikan dengan mCb_n . Hal yang akan diteliti pada penelitian ini adalah mengenai pelabelan total super (a,d) -sisi antimagic pada graf tersebut, baik untuk graf tunggalnya maupun graf gabungannya. Serta mencari nilai batas atas yang dimiliki oleh graf Sisir.

1.2 Rumusan Masalah

Dari uraian latar belakang diatas dapat dirumuskan beberapa masalah dalam tugas akhir ini, yaitu sebagai berikut.

- a. Berapa batas atas dari pelabelan total super (a,d) -sisi antimagic pada graf sisir konektif dan gabungan saling lepas?
- b. Bagaimana fungsi bijektif dari pelabelan total super (a,d) -sisi antimagic pada graf konektif dan diskonektif?

1.3 Batasan Masalah

Agar permasalahan pada penelitian ini tidak meluas maka permasalahan hanya difokuskan pada.

- a. Graf berhingga yang sederhana, yaitu graf yang tidak mempunyai *loop* dan sisi ganda, serta bukan graf berarah.

- b. Seperti yang telah disebutkan diatas, notasi untuk graf tunggal sisir adalah Cb_n , sedangkan notasi untuk graf gabungannya adalah mCb_n , dimana $n \geq 3$ dan $m \geq 3$.
- c. Penelitian ini difokuskan pada nilai m ganjil.
- d. Graf gabungan saling lepas yang isomorfis dari graf sisir adalah gabungan dari graf sisir yang memiliki bentuk identik antara satu graf sisir dengan graf sisir lainnya.

1.4 Tujuan Penelitian

Sesuai latar belakang dan rumusan masalah diatas, tujuan dari penelitian ini sebagai berikut.

- a. Menentukan batas atas dari graf sisir konektif dan diskonektif.
- b. Menentukan fungsi bijektif dari pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic pada graf sisir konektif dan diskonektif.

1.5 Manfaat Penelitian

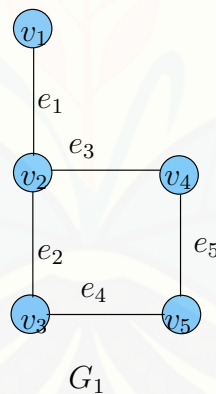
Manfaat yang diharapkan dari penelitian ini sebagai berikut.

- a. Menambah pengetahuan tentang pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic, khususnya terhadap graf sisir.
- b. Memberi motivasi kepada peneliti lain untuk meneliti pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic pada graf jenis lain.
- c. Hasil dari penelitian ini diharapkan digunakan untuk perluasan ilmu mengenai pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic.

BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Terminologi Dasar Graf

Sebuah graf didefinisikan sebagai pasangan himpunan tidak kosong yang dinotasikan dengan V yang elemen-elemennya disebut titik (*vertex*) dan himpunan boleh kosong yang dinotasikan dengan E yang elemen-elemennya disebut sisi (*edges*) (Hartsfield and Ringel, 1990). Berdasarkan definisi tersebut, sebuah graf harus memuat titik namun tidak harus memiliki sisi. Graf yang tidak memiliki sisi disebut graf kosong (*null graph*) dan dinotasikan dengan N . Setiap graf mempunyai *order* dan *size*, dimana *order* merupakan banyaknya titik yang dimiliki oleh sebuah graf dan dinotasikan dengan $|V|$. Sedangkan *size* merupakan banyaknya sisi yang dimiliki oleh sebuah graf dan dinotasikan dengan $|E|$. Sebuah graf disebut graf berhingga (*finite*) jika graf tersebut memiliki *order* dan *size* berhingga. Untuk graf yang memiliki *order* dan *size* tidak berhingga dinamakan graf tak-hingga (*infinite*).



Gambar 2.1 Contoh Graf

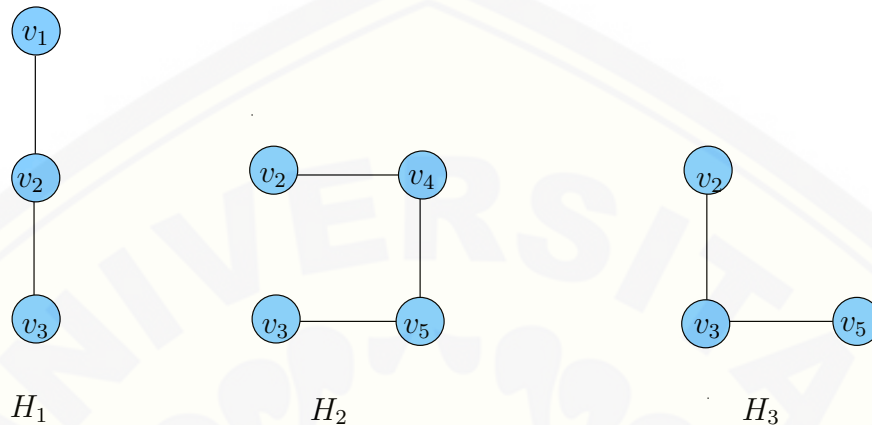
Gambar 2.1 memiliki *order* sebanyak 5 yaitu: v_1, v_2, v_3, v_4 dan v_5 . Sedangkan *size*-nya sebanyak 5 antara lain: e_1 yang menghubungkan titik v_1 dan v_2 , e_2 menghubungkan titik v_2 dan v_3 , e_3 menghubungkan titik v_2 dan v_4 , e_4 menghubung-

kan titik v_3 dan v_5 , selanjutnya e_5 menghubungkan titik v_4 dan v_5 . Dua titik dikatakan bertetangga (*adjacent*) jika ada sisi yang menghubungkan kedua titik tersebut. Pada graf G_1 , v_1 *adjacent* dengan v_2 dan v_2 *adjacent* dengan v_3 serta v_4 . Jika ada sebuah sisi yang menghubungkan dua titik, maka dapat dikatakan jika dua titik tersebut bersisian (*incident*) dengan sisi tersebut. Contoh pada graf G_1 , titik v_2 *incident* dengan sisi e_1, e_2, e_3 . Pada sebuah graf, derajat (*degree*) dari sebuah titik merupakan jumlah sisi yang bersisian dengan titik tersebut dengan notasi $d(v)$. Contohnya untuk graf G_1 , titik v_2 derajatnya adalah 3. Untuk graf yang setiap titiknya, mempunyai nilai derajat sama maka biasanya dinamakan graf reguler. Graf G_1 akan menjadi graf reguler ketika titik v_1 dan sisi e_1 dihapus. Dan untuk titik yang berderajat 0 dinamakan titik terisolasi (*isolated vertex*). Ketika sisi e_1 Pada graf G_1 terhapus maka titik v_1 menjadi titik terisolasi.

Berdasarkan arahnya, graf terbagi menjadi dua yaitu graf berarah dan graf tidak berarah. Graf berarah adalah graf yang sisinya mempunyai arah, sedangkan untuk graf tidak berarah adalah graf yang sisinya tidak berarah. Sisi yang menghubungkan satu titik dengan dirinya sendiri dinamakan *loop*. Dan jika terdapat dua atau lebih sisi yang titik ujungnya sama dinamakan sisi parallel. Sebuah graf yang tidak memuat *loop* dan sisi parallel dinamakan graf sederhana. Dan untuk graf yang memuat *loop* dan sisi parallel dinamakan graf tak sederhana. Graf tak sederhana terdiri dari dua macam yaitu graf ganda (*multigraph*) dan graf semu (*pseudograf*). Graf ganda adalah graf yang hanya mengandung sisi parallel saja sedangkan graf yang mengandung *loop* dan sisi parallel disebut graf semu (*pseudograf*).

Sebuah graf dikatakan mengandung sikel (*cycle*) jika memiliki jalan yang tertutup dengan barisan titik yang berbeda. Panjang dari sikel terpendek disebut *girth*. Jalan disebut tertutup jika titik awal dan titik akhirnya sama dan jika titik awal dan titik akhirnya berbeda disebut jalan terbuka. Pengertian jalan itu sendiri merupakan barisan berhingga dari titik-titik dan sisi-sisi secara bergantian. Panjang dari sebuah jalan adalah banyaknya sisi. Jalan yang sisinya tepat hanya dilewati sekali disebut jejak (*trail*). Untuk jalan yang semuanya titiknya berbeda dikatakan sebuah lintasan (*path*).

Sebuah graf H merupakan subgraf dari graf G jika setiap titik pada H adalah titik pada graf G serta setiap sisi pada graf H adalah sisi pada graf G , dengan kata lain $V(H) \subseteq V(G)$, $E(H) \subseteq E(G)$ (Dafik et al., 2008). Beberapa subgraf dari graf G_1 , terdapat pada gambar dibawah ini:



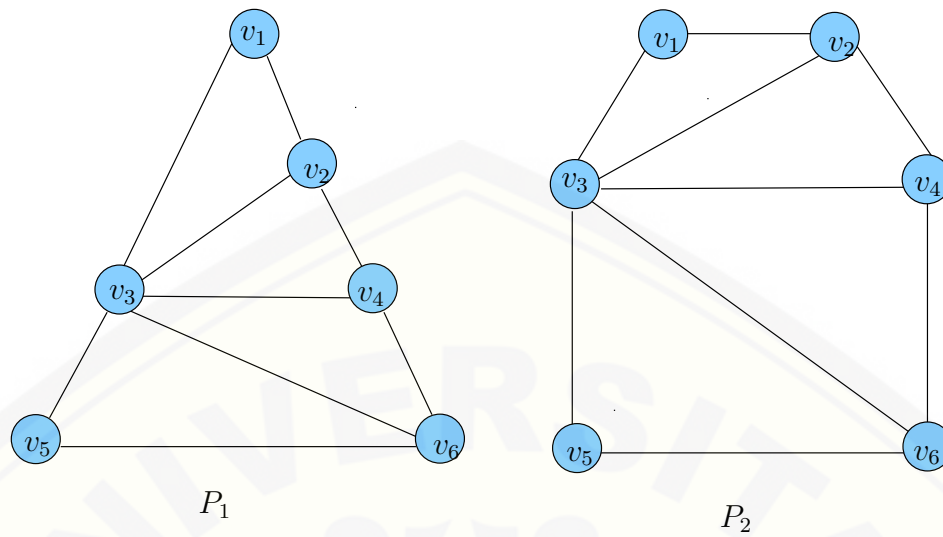
Gambar 2.2 Beberapa Subgraf dari Graf G_1

Dua buah graf, yang dikatakan sama namun bentuknya berbeda disebut graf yang isomorfis. Syarat-syarat yang diperlukan untuk menyatakan dua graf isomorfis adalah sebagai berikut.

- Kedua graf mempunyai jumlah titik yang sama.
- Kedua graf mempunyai jumlah sisi yang sama.
- Jumlah titik yang mempunyai derajat tertentu adalah sama.
- Kedua graf mempunyai *girth* yang sama.

Selain syarat-syarat tersebut ada juga cara lain untuk mengetahui keisomorfisan dari dua buah graf yaitu menggunakan matriks ketetanggaan (*adjacency*). Dengan ketentuan, titik-titik yang bertetangga diberi nilai 1 dan yang tidak bertetangga bernilai 0.

Sebuah graf dikatakan graf terhubung (*connected graph*) jika semua titik terhubung oleh sisi, jika ada titik yang tidak terhubung oleh sisi maka graf tersebut dikatakan graf tak terhubung (*disconnected graph*). Graf terhubung dapat diubah menjadi graf tak terhubung dengan cara melakukan penghapusan terhadap



Gambar 2.3 Contoh Dua Graf yang Isomorfis

Matriks *adjency* dari graf P_1 :

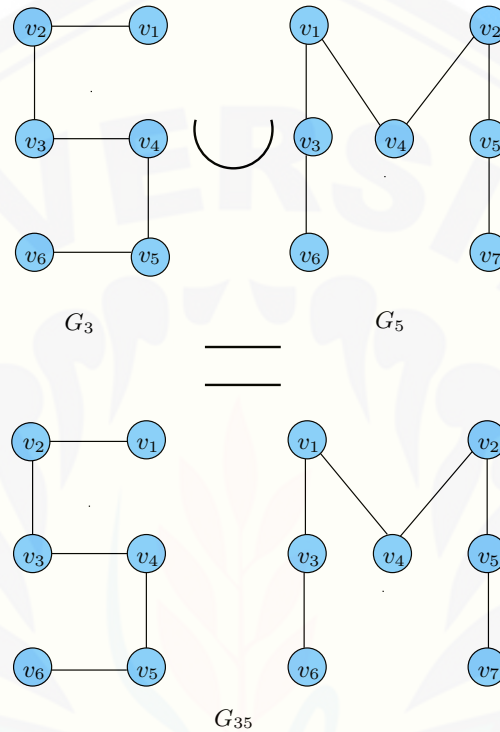
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriks *adjency* dari graf P_2 :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Gambar 2.4 Matriks *adjency* dari P_1 dan P_2

titik atau sisi. Untuk penghapusan titik, semua sisi yang bertetangga (*adjacent*) dengan titik yang akan dihapus juga ikut terhapus. Titik yang terhapus tersebut dinamakan titik potong (*cut vertex*). Sedangkan untuk penghapusan terhadap sisi hanya menghapus sisi tersebut. Sisi yang terhapus tersebut dinamakan jembatan (*bridge*).



Gambar 2.5 Contoh Graf yang Disjoint Union

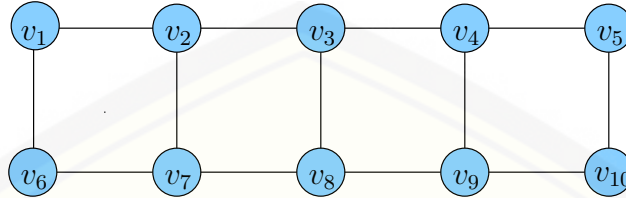
Dua graf dapat digabung menjadi satu graf baru, graf baru yang terbentuk dinamakan graf gabungan saling lepas. Gambar 2.5 merupakan contoh graf gabungan saling lepas dari graf G_3 dan graf G_5 dengan notasi $G_3 \cup G_5$.

2.1.1 Graf Khusus

Terdapat beberapa jenis graf khusus, berikut akan dijelaskan definisi dari beberapa graf khusus.

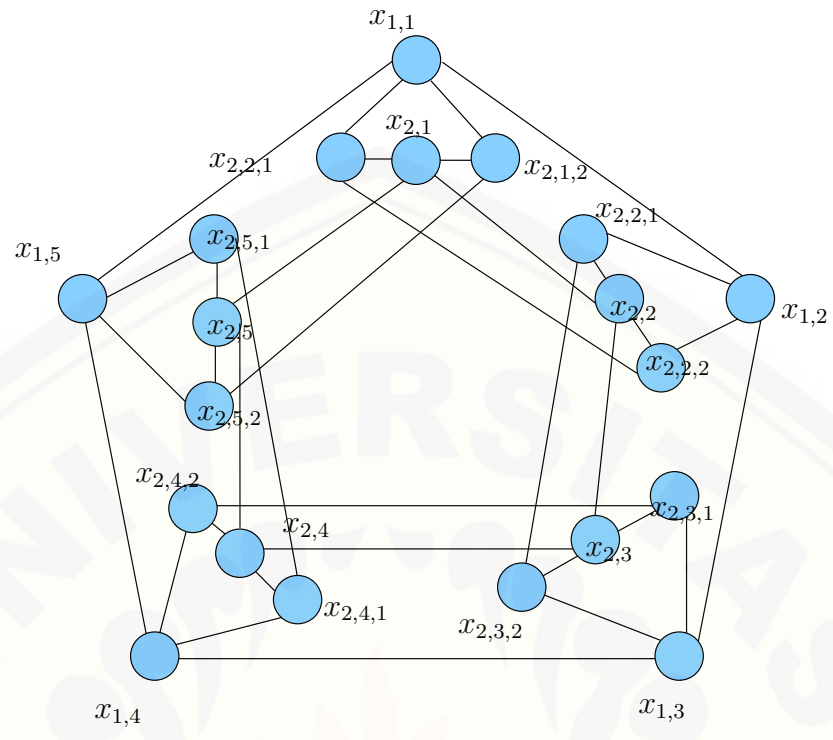
- a. Graf Ladder dilambangkan dengan L_n adalah sebuah graf yang sama dengan $K_2 \times P_n$ dengan titik $V(L_n) = \{u_i, v_i : 1 \leq i \leq n\}$ dan $E(L_n) = \{u_i u_{i+1},$

$v_i v_{i+1} : 1 \leq i \leq n-1 \} \cup \{u_i v_i : 1 \leq i \leq n\}$. Graf Ladder mempunyai $2n$ titik, dan $3n-2$ sisi. Gambar 2.6 menunjukkan contoh graf Ladder dengan $n = 5$.

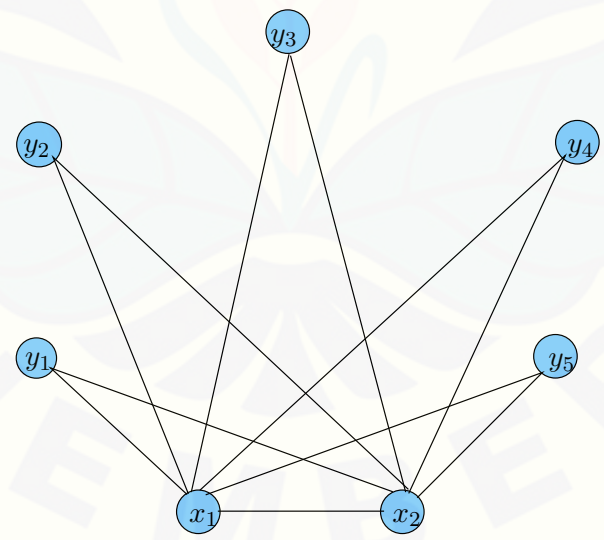


Gambar 2.6 Graf Ladder (L_5)

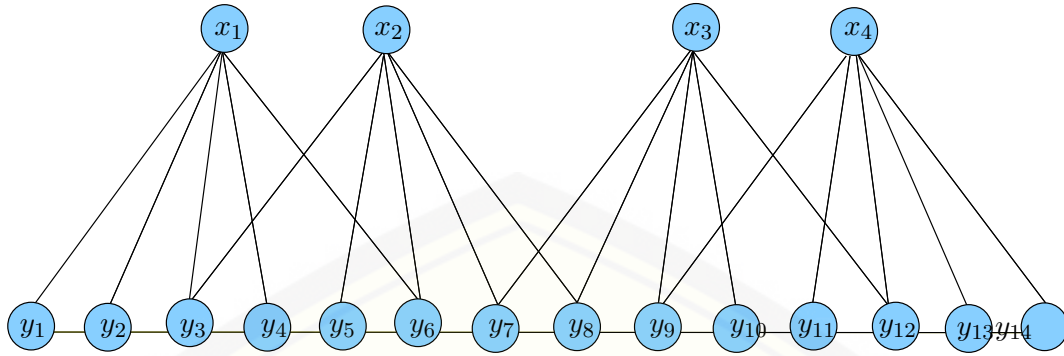
- b. Graf Bianglala merupakan graf yang dinotasikan dengan $FW_{m,n}$. Graf Bianglala adalah sebuah graf dengan himpunan titik $V(FW_{m,n}) = \{X_{i,j} : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\} \cup \{X_{i,j,k} : 2 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq 2\}$ dan himpunan sisi $E(FW_{m,n}) = \{X_{i,j} X_{i,j+1} ; 1 \leq j \leq m, 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{X_{i,j} X_{i,j,k} ; 2 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq 2\} \cup \{X_{i,j} X_{i+1,j,k} ; 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq 2\} \cup \{X_{i,j,k} X_{i,j+1,k+1} ; 2 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n-1, k = 1\} \cup \{X_{i,j,k} X_{i,j-1,k-1} ; 2 \leq i \leq m, \text{ untuk } j \text{ yang lainnya, } k=2\} \cup \{X_{i,j,k-1} X_{i,j-1,k} ; 2 \leq i \leq m, \text{ untuk } j \text{ yang lainnya, } k = 2\}$. Gambar 2.7 merupakan graf Bianglala $FW_{2,5}$.
- c. Graf Buku Segitiga dinotasikan dengan Bt_n adalah suatu graf yang merupakan famili dari graf Komplete tripartite $K_{m,n,l}$ dengan jumlah titik pada m dan n adalah satu dan jumlah titik pada l sebanyak n . Graf Buku Segitiga Bt_n merupakan graf yang terdiri dari n buah segitiga ($n \geq 1$) dengan setiap segitiga memiliki sebuah sisi yang dipakai bersama atau dengan kata lain setiap segitiga memiliki 2 titik yang sama. Graf buku tersusun dari 5 buah segitiga (Dafik et al., 2013).
- d. Graf Gunung, dinotasikan M_{2n} adalah sebuah graf dengan himpunan *vertex*, $|V| = \{x_i, y_j ; 1 \leq i \leq 2n \text{ dan } 1 \leq j \leq 6n + 2, n \in \mathbb{N}\}$ dan himpunan *edge*, $|E| = \{x_i y_{3i-2}, x_i y_{3i+3} \text{ untuk } i \text{ ganjil, } x_i y_{3i-3}, x_i y_{3i+2} \text{ untuk } i \text{ genap, } x_i y_{3i-1}, x_i y_{3i}, x_i y_{3i+1} \text{ untuk } i \text{ sebarang, } 1 \leq i \leq 2n \text{ dan } y_j y_{j+1}, 1 \leq j \leq 6n + 1\}$. Gambar 2.9 merupakan contoh graf Gunung (M_{2n}).



Gambar 2.7 Graf Bianglala ($FW_{2,5}$)

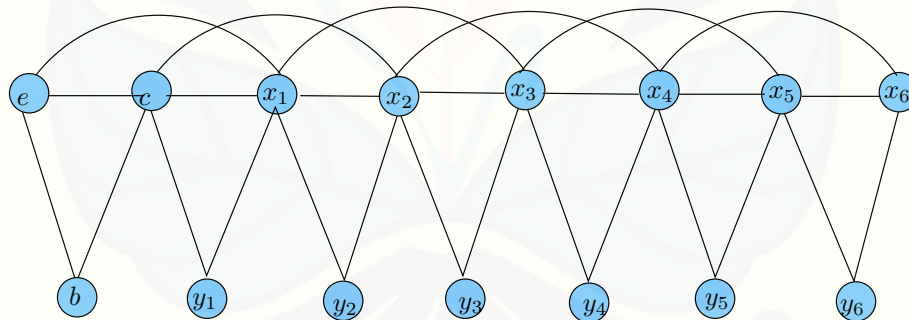


Gambar 2.8 Graf Buku Segitiga (Bt_5)



Gambar 2.9 Graf Gunung (M_{2n})

- e. Graf Sisir adalah salah satu graf yang merupakan famili dari graf Ladder. Graf sisir merupakan graf yang belum ditemukan pelabelannya. Graf sisir dinotasikan dengan Cb_n dimana $V(Cb_n) = \{e, b, c, x_i, y_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan $E(Cb_n) = \{ec\} \cup \{eb\} \cup \{bc\} \cup \{cx_1\} \cup \{cy_1\} \cup \{ex_1\} \cup \{cx_2\} \cup \{x_i y_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_i y_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_i x_{i+2}; 1 \leq i \leq n-2\}$. Titik e, b, c sifatnya tetap, titik yang bergerak ketika di-*expand* adalah titik x dan y . sehingga graf sisir ini di *expand* sebelah kanan. Gambar 2.10 adalah contoh graf sisir Cb_6 .



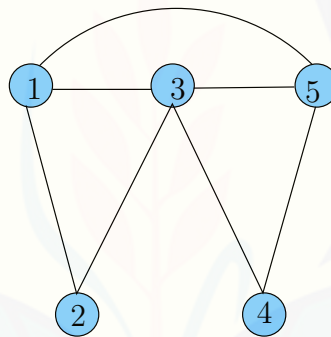
Gambar 2.10 Graf Sisir (Cb_6)

2.2 Pelabelan Graf

Pelabelan dari sebuah graf didefinisikan sebagai suatu pemetaan satu-satu dan onto yang memetakan himpunan elemen-elemen graf yaitu titik dan sisi ke

himpunan bilangan bulat positif. Fungsi f yang memetakan himpunan A (elemen-elemen graf) ke dalam himpunan B (bilangan bulat positif) disebut fungsi satu-satu jika setiap elemen di A mempunyai pasangan yang berbeda di B , domain memiliki tepat satu pasangan di kodomain. Disebut onto jika semua anggota di B mempunyai pasangan di A , anggota di A boleh mempunyai pasangan yang sama di B . Pemetaan fungsi satu-satu dan onto sering disebut pemetaan bijektif. Pemetaan bijektif merupakan pemetaan yang tidak ada anggota himpunan di A mempunyai pasangan yang sama di B , atau dengan kata lain semua elemen graf diberi nomor atau label dengan bilangan bulat positif yang berbeda. Jadi pelabelan graf $G = (V, E)$ merupakan suatu pemetaan $: D \rightarrow N$, dimana D menyatakan domain dan N menyatakan himpunan label dari graf G . Pelabelan graf terdiri dari 3 macam yaitu sebagai berikut.

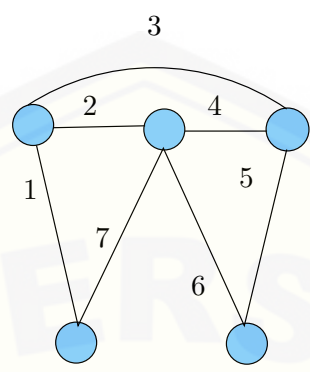
- a. Ketika $D = V$ maka disebut pelabelan titik, dimana hanya titik saja yang diberi label.



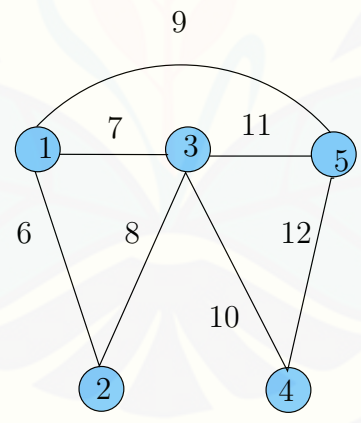
Gambar 2.11 Pelabelan Titik

- b. ketika $D = E$ maka disebut pelabelan sisi, dimana hanya sisi saja yang diberi label.
- c. Ketika $D = V \cup E$ maka disebut pelabelan total, dimana titik dan sisi sama-sama diberi label.

Pada tahun 1963, Sedlacek memperkenalkan konsep pelabelan magic kemudian pada tahun 1989, Hartsfield dan Ringel memperkenalkan konsep pelabelan



Gambar 2.12 Pelabelan Sisi



Gambar 2.13 Pelabelan Total

antimagic (Dafik, 2007). Mereka mendefinisikan sebuah pelabelan antimagic sebagai pelabelan sisi pada graf dengan bilangan bulat positif $1, 2, 3, \dots, n$ sehingga bobot pada masing-masing titik berbeda dengan bobot titik yang lainnya. Bodendiek dan Walther mendefinisikan konsep pelabelan (a,d) -antimagic sebagai pelabelan sisi dimana bobot dari titik-titiknya membentuk barisan aritmatika dengan suku awal a dan beda d (Dafik et al., 2012).

Nilai bobot sisi menentukan jenis pelabelan titik dan pelabelan total. Jika semua sisi mempunyai bobot sisi yang sama maka disebut pelabelan titik sisi ajaib dan pelabelan total sisi ajaib. Tetapi jika semua sisi mempunyai bobot sisi yang berbeda dan himpunan bobot sisi tersebut membentuk barisan aritmatika dengan a menyatakan bobot sisi terkecil atau suku pertama dan d menyatakan beda dari bobot sisi yang satu dengan yang lain maka disebut pelabelan titik sisi anti ajaib (*edge antimagic vertex labelling*) atau *EAVL* dan pada pelabelan total disebut pelabelan total sisi anti ajaib.

2.2.1 Pelabelan Total Super (a,d) -sisi Antimagic

Pelabelan total (a,d) -sisi antimagic adalah sebuah pemetaan satu-satu f dari $V(G) \cup E(G)$ ke bilangan bulat positif $\{1, 2, 3, \dots, p+q\}$ sehingga bobot sisinya $w(uv) = f(u) + f(v)$ pada semua sisi G adalah $\{a, a+d, a+2d, \dots, a+(q-1)d\}$ untuk $a > 0$ dan $d \geq 0$ serta keduanya adalah bilangan bulat positif. Sedangkan pelabelan total super (a,d) -sisi antiajaib pada sebuah graf $G=(V,E)$ adalah pelabelan titik dengan bilangan bulat positif $\{1, 2, 3, \dots, p\}$ dan pelabelan sisi dengan bilangan bulat positif $\{p+1, p+2, p+3, \dots, p+q\}$, dimana p menyatakan banyaknya titik dan q menyatakan banyaknya sisi. Dan bobot sisinya adalah $w(uv) = f(u) + f(v)$ pada semua sisi G sehingga himpunan bobot sisi yang terbentuk adalah $W = \{w(x,y) \mid xy \in E(G)\} = \{a, a+d, a+2d, \dots, a+(q-1)d\}$ untuk $a > 0$ dan $d \geq 0$. Dimana $\alpha(u)$ adalah label dari titik u , $\beta(v)$ adalah label dari titik v dan $\delta(uv)$ adalah label dari sisi uv . Untuk mencari batas atas nilai beda d pelabelan total super (a,d) -sisi antimagic dapat ditentukan dengan Lemma (Bača et al., 2009).

Lemma 1. *Jika sebuah graf dengan p titik dan q sisi memiliki pelabelan total super (a,d) -sisi antimagic, maka $d \leq \frac{2p+q-5}{q-1}$*

Bukti. $f(V) = \{1, 2, 3, \dots, p\}$ dan $f(E) = \{p + 1, p + 2, p + 3, \dots, p + q\}$.

Misalkan graf (p, q) adalah pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic dengan pemetaan $f : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, p + q\}$. Nilai minimum yang mungkin dari bobot sisi terkecil $\alpha(u) + \alpha(uv) + \alpha(v) = 1 + (p + 1) + 2 = p + 4$ dan dapat ditulis $p + 4 \leq a$. Sedangkan pada sisi yang lain, nilai maksimum yang mungkin dari bobot sisi terbesar diperoleh dari jumlah 2 label titik terbesar dan label sisi terbesar atau dapat ditulis $(p - 1) + (p + q) + p = 3p + q - 1$. Akibatnya:

$$a + (q - 1)d \leq 3p + q - 1 \quad (2.1)$$

$$d \leq \frac{3p + q - 1 - (p + 4)}{q - 1} \quad (2.2)$$

$$d \leq \frac{2p + q - 5}{q - 1} \quad (2.3)$$

Dari Lemma 1, telah terbukti dan diperoleh nilai $d \leq \frac{2p+q-5}{q-1}$ dari berbagai jenis atau famili graf. \square

Dafik dan Robiyatul pada tahun 2014 menurunkan sebuah lemma yang digunakan untuk mencari pelabelan total super $(a, 1)$ -sisi antimagic untuk jumlah sisi ganjil.

Lemma 2. Misalkan Υ merupakan sebuah himpunan bilangan berurutan $\Upsilon = \{c, c + 1, c + 2, \dots, c + k\}$, dengan k genap. Maka terdapat sebuah permutasi $\Pi(\Upsilon)$ dari anggota-anggota himpunan Υ sehingga $\Upsilon + \Pi(\Upsilon)$ juga merupakan sebuah himpunan bilangan berurutan yaitu $\Upsilon + \Pi(\Upsilon) = \{2c + \frac{k}{2}, 2c + \frac{k}{2} + 1, 2c + \frac{k}{2} + 2, \dots, 2c + \frac{3k}{2}\}$.

Bukti. Misal Υ adalah suatu himpunan bilangan berurutan $\Upsilon = \{v_i | v_i = c + (i - 1), 1 \leq i \leq k + 1\}$ dan k adalah genap. Selanjutnya didefinisikan nilai permutasi $\Pi(\Upsilon) = \{w_i | 1 \leq i \leq k + 1\}$ dari anggota Υ adalah sebagai berikut:

$$w_i = \begin{cases} c + i + \frac{k}{2} - 1, & \text{jika } 1 \leq i \leq \frac{k}{2} + 1 \\ c + i - (\frac{k}{2} + 2), & \text{jika } \frac{k}{2} + 2 \leq i \leq k + 1 \end{cases}$$

untuk membuktikan lemma 2, langkah pertama yang harus dilakukan adalah men-substitusikan nilai i sesuai batasan yang diberikan maka akan diperoleh w_i sebagai

berikut:

Untuk $1 \leq i \leq \frac{k}{2} + 1$ maka akan diperoleh hasil: untuk $i = 1$, maka $w_1 = c + \frac{k}{2}$; untuk $i = 2$, maka $w_2 = c + \frac{k}{2} + 1$; untuk $i = \frac{k}{2}$, maka $w_{\frac{k}{2}} = c + k - 1$; ...; untuk $i = \frac{k}{2} + 1$, maka $w_{\frac{k}{2}+1} = c + k$.

Sedangkan untuk nilai $\frac{k}{2} + 2 \leq i \leq k + 1$ diperoleh hasil: untuk $i = \frac{k}{2} + 2$, maka $w_{\frac{k}{2}+2} = c$; untuk $i = \frac{k}{2} + 3$, maka $w_4 = c + 1$; ...; untuk $i = k$, maka $w_k = c + \frac{k}{2} - 2$; untuk $i = k + 1$, maka $w_{k+1} = c + \frac{k}{2} - 1$.

Jika Υ dinyatakan dalam himpunan v_i dan $\Pi(\Upsilon)$ dinyatakan dalam himpunan w_i seperti telah disampaikan sebelumnya, maka akan diperoleh: $\Upsilon + \Pi(\Upsilon) = \{v_i + w_i | 1 \leq i \leq k + 1\}$

Berdasarkan substitusi nilai i , maka diperoleh:

$$\begin{aligned} \text{untuk } i = 1 \rightarrow v_1 + w_1 &= c + \left(c + \frac{k}{2}\right) \\ &= 2c + \frac{k}{2} \\ \text{untuk } i = 2 \rightarrow v_2 + w_2 &= (c + 1) + \left(c + 2 + \frac{k}{2} + 1\right) \\ &= 2c + \frac{k}{2} + 2 \\ &\dots \\ \text{untuk } i = \frac{k}{2} \rightarrow v_{\frac{k}{2}} + w_{\frac{k}{2}} &= \left(c + \frac{k}{2} - 1\right) + \left(c + \frac{3k}{2} - 2\right) \\ &= 2c + \frac{3}{2} - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{untuk } i = \frac{k}{2} + 1 &\rightarrow v_{\frac{k}{2}+1} + w_{\frac{k}{2}+1} = (c + \frac{k}{2}) + (c + k) \\
 &= 2c + \frac{3k}{2} \\
 \text{untuk } i = \frac{k}{2} + 2 &\rightarrow v_{\frac{k}{2}+2} + w_{\frac{k}{2}+2} = (c + \frac{k}{2} + 1) + (c) \\
 &= 2c + \frac{k}{2} + 1 \\
 &\dots \\
 \text{untuk } i = k &\rightarrow v_k + w_k = (c + k - 1) + (c + \frac{k}{2} - 2) \\
 &= 2c + \frac{3}{2} - 3 \\
 \text{untuk } i = k + 1 &\rightarrow v_{k+1} + w_{k+1} = (c + k) + (c + \frac{k}{2} - 1) \\
 &= 2c + \frac{3k}{2} - 1
 \end{aligned}$$

Jika diurutkan mulai dari nilai terkecil hingga terbesar, maka diperoleh: $\{2c + \frac{k}{2}, 2c + \frac{k}{2} + 1, 2c + \frac{k}{2} + 2, \dots, 2c + \frac{3k}{2}\}$. Dengan demikian rumusan tersebut terbukti benar. \square

Selain 2, teorema berikut juga digunakan untuk menemukan pelabelan total super $(a, 1)$ -sisi antimagic pada gabungan graf untuk jumlah sisi ganjil (Sugeng et al., 2006).

Teorema 2.2.1. *Misalkan G_k untuk $k = 1, 2, \dots, m$ adalah graf dengan jumlah titik p dan jumlah sisi q dan memiliki pelabelan super $(a, 1)$ -EAT. Maka, gabungan saling lepas dari $\bigcup_{k=1}^m G_k$ juga memiliki super $(b, 1)$ -EAT.*

Bukti. Misalkan G_k , $k = 1, 2, \dots, m$ adalah sebuah graf yang memiliki p titik dan q sisi. Perlu diketahui bahwa G_k tidak harus isomorfis dengan G_j untuk $k = j$. Misalkan untuk setiap G_k , $k = 1, 2, \dots, m$ memiliki sebuah pelabelan super $(a, 1)$ -EAT berdasarkan f_i , sedemikian hingga:

$$\begin{aligned}
 f_k &= V(G_k) \rightarrow \{1, 2, \dots, p\} \\
 &= E(G_k) \rightarrow \{p + 1, p + 2, \dots, p + q\}
 \end{aligned}$$

dan $\{f_k(u) + f_k(v) + f_k(uv); uv \in E(G_k)\} = \{a, a + 1, \dots, a + q - 1\}$

Definisi pelabelan f untuk semua titik dan sisi dari $\bigcup_{k=1}^m G_k$ adalah sebagai berikut:

$$f(x) = \begin{cases} m[f_i(x) - 1] + i, & \text{jika } x \in V(G_i) \\ mf_i(x) + 1 - i, & \text{jika } x \in E(G_i) \end{cases}$$

Bobot total dari gabungan $\bigcup_{k=1}^m G_k$ adalah $\{f(u) + f(v) + f(uv) : uv \in E(\bigcup_{k=1}^m G_k)\}$ sama dengan $\{m(a - 2) + 2, m(a - 2) + 3, \dots, m(a + q - 2) + 1\}$. \square

2.3 Fungsi dan Barisan Aritmatika

2.3.1 Fungsi

Fungsi atau pemetaan dari himpunan A ke himpunan B merupakan suatu relasi yang memasangkan atau memetakan setiap anggota dari A dengan anggota pada B. Fungsi tersebut dapat dinotasikan dengan:

$$f : A \rightarrow B$$

Ada beberapa istilah dalam fungsi yaitu daerah asal (domain), daerah kawan (kodomain) dan hasil (range). Domain merupakan daerah asal fungsi f dilambangkan dengan D_f . Kodomain merupakan daerah kawan fungsi f dilambangkan dengan K_f . Dan range merupakan himpunan daerah hasil pemetaan. Range fungsi f dilambangkan dengan R_f . Ada beberapa jenis fungsi yang berhubungan dengan penelitian ini.

- Fungsi $f: A \rightarrow B$ dikatakan fungsi satu-satu atau injektif jika dan hanya jika domain mempunyai tepat satu pasangan yang berbeda di kodomain, dan anggota kodomain boleh tidak mempunyai pasangan di domain.
- Fungsi $f: A \rightarrow B$ dikatakan fungsi onto atau surjektif jika dan hanya jika semua kodomain mempunyai pasangan di domain, dan anggota kodomain boleh mempunyai pasangan yang sama di domain.
- Fungsi $f: A \rightarrow B$ dikatakan fungsi bijektif jika dan hanya jika fungsi yang injektif sekaligus fungsi yang surjektif. Pelabelan dalam penelitian ini adalah fungsi bijektif. Domain dalam fungsi ini merupakan gabungan dari himpunan titik dan himpunan sisi, kodomainnya adalah himpunan bilangan bulat positif sedangkan range-nya adalah label titik dan sisi. Pelabelan

total super (a,d) -sisi antimagic dikatakan fungsi injektif karena himpunan elemen-elemen graf mempunyai hanya satu pasangan di kodomain dan setiap pasangan berbeda. Dikatakan surjektif karena semua kodomain (himpunan bilangan bulat positif) berpasangan dengan domain.

2.3.2 Barisan Aritmatika

Barisan Aritmatika yaitu barisan yang suku-sukunya diperoleh dengan menambah suatu bilangan tetap ke suku sebelumnya. Bilangan tetap tersebut dikatakan sebuah beda dilambangkan dengan d , sedangkan suku yang pertama dinotasikan dengan a .

Berdasarkan tanda nilai beda, barisan aritmatika terbagi menjadi dua yaitu barisan aritmatika naik dan barisan aritmatika turun. Dikatakan barisan aritmatika naik jika nilai beda bertanda positif. Sedangkan jika nilai beda bertanda negatif maka dikatakan barisan tersebut barisan aritmatika turun. Rumus umum untuk barisan aritmatika adalah:

$$U_n = a + d(n - 1)$$

dan untuk mencari nilai bedanya adalah:

$$d = U_n - U_{n-1}$$

Berikut contoh barisan aritmatika:

- a. 23, 30, 37, 42, 49, ...
- b. 25, 20, 15, 10, 5, ...

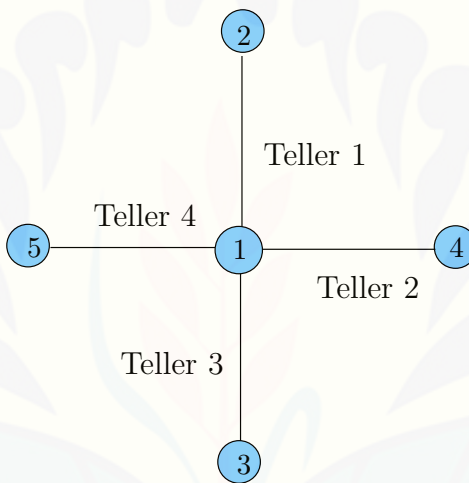
Pada penelitian ini, nilai bobot sisi dari semua sisi harus membentuk barisan aritmatika. Jika nilai $d = 0$ maka pelabelan tersebut dikatakan magic, tetapi jika nilai $d > 0$ maka dikatakan pelabelan antimagic. Rumus umum dari barisan aritmatika akan digunakan untuk menentukan fungsi titik dan fungsi sisi dari graf sisir konektif dan diskonektif.

2.4 Aplikasi

Aplikasi teori graf saat ini sangat luas dalam kehidupan sehari-hari dan dipakai dalam berbagai bidang ilmu. Seperti ilmu komputer, riset operasi, dan

ilmu kimia. Banyak permasalahan yang dapat dimodelkan dengan bentuk graf. Seperti, permasalahan untuk merencanakan rute yang efektif untuk pengiriman surat, rute pembuangan sampah, rute pembersihan salju, dipecahkan dengan model yang menggunakan representasi jalur dalam graf.

Aplikasi dari pelabelan graf juga luas penggunaannya dalam kehidupan sehari-hari, salah satunya adalah pembuatan password untuk teller bank. Pembuatan password ini bertujuan untuk menjaga keamanan data ketika teller menginputkan segala transaksi yang dilakukan oleh nasabah, sebelum data tersebut disetujui oleh atasannya. Untuk mengembangkan password tersebut dibutuhkan representasi graf. Dimisalkan sisi adalah teller dan label sisi serta label dua titik yang mengapit sisi tersebut merupakan password untuk teller tersebut.



Gambar 2.14 Pelabelan Total Super Pada Graf Bintang

Password yang terbentuk dari representasi graf tersebut adalah:

Teller 1 : 011016012

Teller 2 : 011018014

Teller 3 : 011017013

Teller 4 : 011019015

2.5 Hasil-Hasil Pelabelan Total Super (a, d) -Sisi Antimagic pada Graf Diskonektif

Pada bagian ini disajikan beberapa rangkuman hasil pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic pada graf konektif dan diskonektif yang dapat digunakan sebagai rujukan penelitian ini.

Tabel 2.1: Ringkasan Pelabelan Total Super (a, d) -Edge Antimagic Pada Graf Konektif.

Graf	d	Hasil
<i>Diamond</i> (Dl_n) (Laelatus, 2011)	$d \leq 2$	$d \in \{0, 1, 2\}$; $n \geq 2$
<i>Graf Tangga</i> (St_n) (Ira, 2011)	$d \leq 2$	$d \in \{0, 1, 2\}$; $n \geq 2$
<i>Graf Buah Naga</i> ($Df_{m,n}$) (Nurvitaningrum et al., 2014b)	$d \leq 2$	$d \in \{0, 1, 2\}$; $m \geq 2$ m genap, $n \geq 1$ dan n ganjil
<i>Graf Rem Cakram</i> ($Db_{n,p}$) (Arianti et al., 2014a)	$d \leq 2$	$d \in \{0, 1, 2\}$; $n \geq 3$ n ganjil dan $p \geq 2$
<i>Graf Daun</i> (Lg_n) (Yunika et al., 2014b)	$d \leq 2$	$d \in \{0, 1, 2\}$; $n \geq 1$
<i>Graf Semi Parasut</i> (SP_{2n-1}) (Aprilia et al., 2014b)	$d \leq 2$	$d \in \{0, 1, 2\}$; $n \geq 1$

Tabel 2.2: Ringkasan Pelabelan Total Super (a, d) -Edge Antimagic Pada Graf Diskonektif.

Graf	d	Hasil	Open Problem
mDl_n	$d < 3$	<ul style="list-style-type: none"> • $d \in \{0, 1, 2\}$ • untuk $m \geq 3$ ganjil • $d \in \{1\}$ 	<ul style="list-style-type: none"> • jika $d \in \{0, 2\}$ untuk $1 \leq j \leq m$ genap

Graph	d	Hasil	Open Problem
		untuk $m \geq 2$ dan m sembarang (L. Syakdiyah, 2011)	
mSt_n	$d \leq 2$	<ul style="list-style-type: none"> • $d \in \{0, 1, 2\}$ untuk $m \geq 3$ ganjil $n \geq 2$ • $d \in \{0, 1, 2\}$ untuk $m \geq 2$ sembarang $n \geq 2$ (Ira, 2011)	<ul style="list-style-type: none"> • jika $d \in \{0, 2\}$ untuk $m \geq 2$ genap dan $n \geq 2$
$cDf_{m,n}$	< 3	<ul style="list-style-type: none"> • $d \in \{0, 1, 2\}$ $n \geq 1$ $m \geq 2$ dan genap $c \geq 3$ dan ganjil (Nurvitaningrum et al., 2014a)	<ul style="list-style-type: none"> • jika $d \in \{0, 1, 2\}$ untuk n genap • jika $d \in \{0, 1, 2\}$ untuk c genap
$mDb_{n,p}$	< 3	<ul style="list-style-type: none"> • $d \in \{0, 1, 2\}$ $n \geq 3$ $p \geq 2$ $m \geq 3$ (Arianti et al., 2014b)	<ul style="list-style-type: none"> • jika $d \in \{0, 1, 2\}$ untuk $n \geq 3$ $m \geq 3$ dan m genap
mLg_n	< 3	<ul style="list-style-type: none"> • $d \in \{0, 2\}$ $n \geq 1$ dan n ganjil $m \geq 3$ dan m ganjil $m \geq 3$ untuk n ganjil dan $m = 1 \pmod 4$ 	<ul style="list-style-type: none"> • jika $d \in \{0, 2\}$ untuk $n \geq 1$ $m = 3 \pmod 4$ • jika $d = 1$ untuk $n \geq 2$ dan n genap $m \geq 3$ (Yunika et al., 2014a)
mSP_{2n-1}	< 3	<ul style="list-style-type: none"> • $d \in \{0, 1, 2\}$ untuk $n \geq 2$ dan genap • $d \in \{0, 1, 2\}$ untuk $m \geq 3, n \geq 2$ dan m ganjil • $d \in \{0, 1, 2\}$ untuk 	<ul style="list-style-type: none"> • jika $d = 1$ untuk n ganjil • jika $d = 1$ untuk $n \geq 2$ dan $m = 3 \pmod 4$ • jika $d \in \{0, 1, 2\}$

Graph	d	Hasil	Open Problem
		$n \geq 2$ $m = 1 \pmod 4$, n genap (Aprilia et al., 2014a)	untuk $n \geq 2$ dan m genap



BAB 3. METODE PENELITIAN

3.1 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah deskriptif aksiomatik, dimana metode tersebut menurunkan teorema yang telah ada, selanjutnya akan diterapkan pada penelitian ini baik untuk graf tunggal maupun gabungan saling lepasnya. Dalam penelitian ini, terlebih dahulu akan ditentukan label titik, jika polanya terdeteksi, langkah selanjutnya adalah melabeli sisi lalu kita tentukan nilai batas atas dari graf sisir. Nilai tersebut akan digunakan dalam pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic pada graf sisir. Proses tersebut berlaku untuk graf tunggal maupun graf gabungan saling lepasnya.

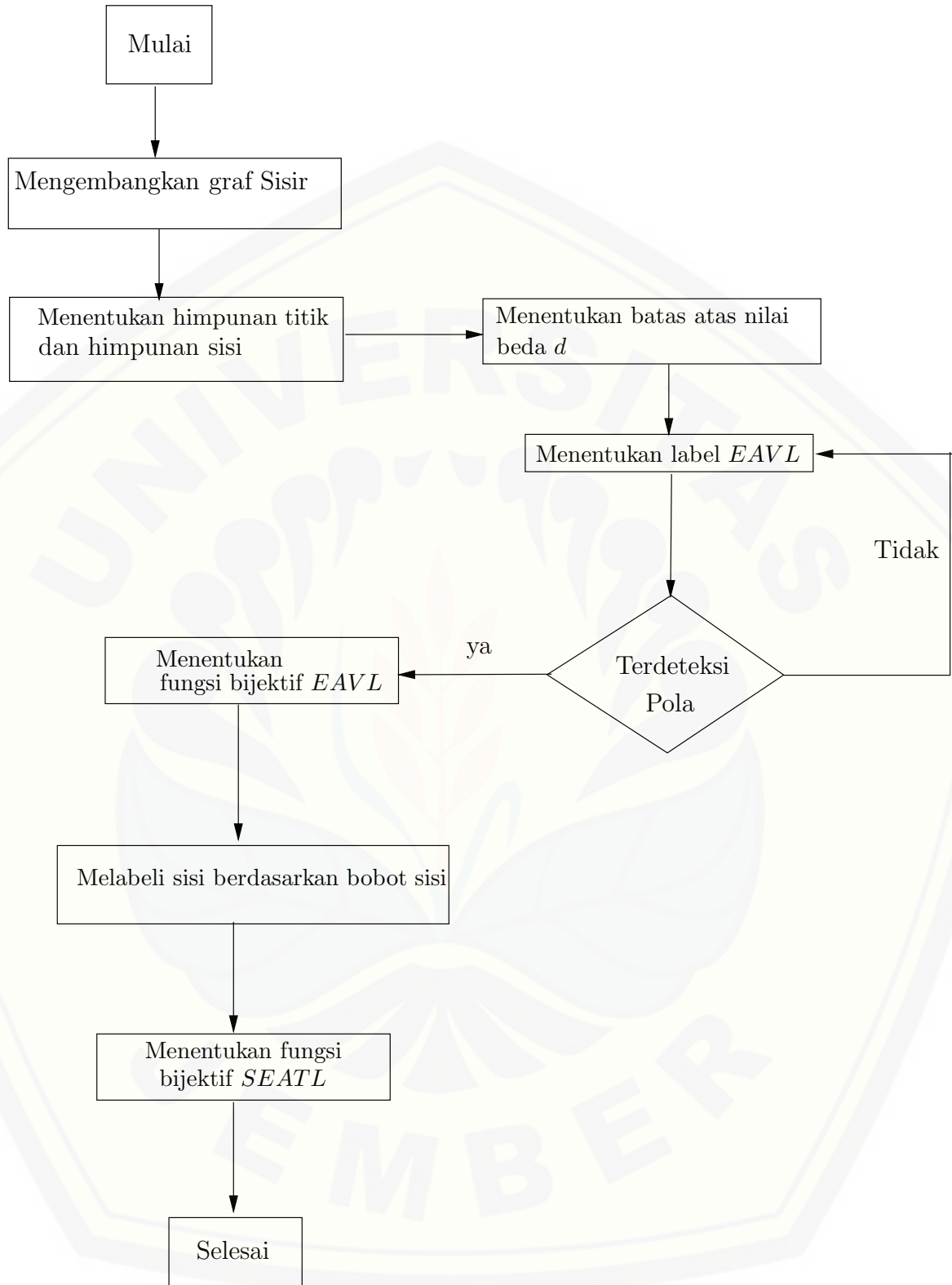
3.2 Teknik Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada graf sisir baik untuk graf tunggal maupun graf gabungan saling lepasnya. Adapun teknik penelitian adalah sebagai berikut.

- a. Menghitung jumlah titik p dan sisi q pada graf sisir Cb_n .
- b. Menentukan batas atas nilai beda d pada graf sisir Cb_n sesuai dengan Lemma 1.
- c. Menentukan label *EAVL* (*edge-antimagic vertex labeling*) atau pelabelan titik (a, d) -sisi antimagic pada graf sisir Cb_n ,
- d. Apabila label *EAVL* berlaku untuk beberapa graf baik secara *heuristik* maupun *deterministik* maka dikatakan pelabelan itu *expandable* sehingga dilanjutkan menentukan algoritma *EAVL* pada graf sisir Cb_n .
- e. Menentukan fungsi bijektif *EAVL* pada graf sisir Cb_n .
- f. Melabeli graf sisir Cb_n , dengan *SEATL* (*super (a, d) edge antimagic total labeling*) atau pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic dengan nilai beda d yang *feasible*.
- g. Menentukan fungsi bijektif pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic pada graf sisir Cb_n .

Untuk penelitian pada gabungan saling lepas graf sisir juga sama dengan teknik penelitian seperti di atas namun secara umum, langkah-langkah penelitian di atas dapat juga disajikan dalam bagan diagram alir pada gambar 3.1.





Gambar 3.1 Rancangan Penelitian Pelabelan Total Super

BAB 4. HASIL DAN PEMBAHASAN

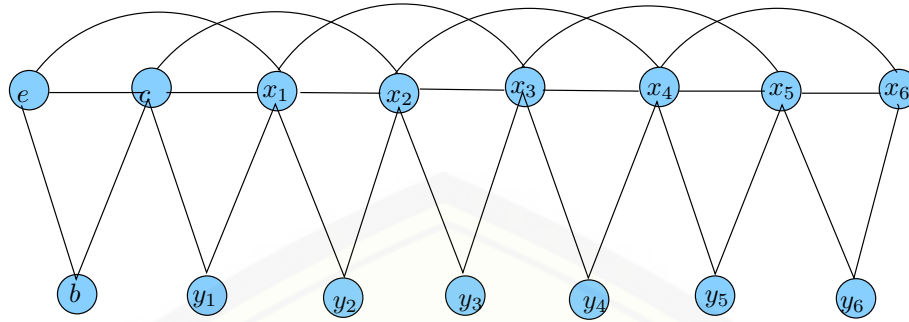
Penelitian ini diawali dengan menentukan jumlah titik (p) dan jumlah sisi (q) dari graf sisir, menentukan nilai batas atas (d), menentukan label titik ($EAVL$) beserta fungsinya, menentukan bobot sisi $EAVL$ beserta fungsinya, menentukan $SEATL$ beserta fungsinya dan menentukan bobot sisi total $SEATL$ beserta fungsinya juga. Langkah-langkah tersebut diterapkan pada graf tunggal maupun gabungan saling lepas dari graf sisir. Hasil dari pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic pada graf Sisir Cb_n adalah 2 lemma dan 6 teorema yang diberi tanda \diamond . Pernyataan dari lemma dan teorema tersebut kemudian dibuktikan, dan disertai dengan visualisasi gambar. Lemma dan teorema pada penelitian ini tidak bersifat *biimplikatif* sehingga pembuktiannya hanya dilakukan satu arah. Berikut hasil dari penelitian yang akan menjawab rumusan pada bab sebelumnya.

4.1 Hasil Penelitian

4.1.1 Pelabelan Total Super (a, d) -Sisi Antimagic pada Graf Sisir Tunggal (Cb_n)

Seperti yang telah disebutkan diatas, pertama kali kita menentukan p dan q dari graf sisir tunggal. Dari gambar 4.5 dapat kita tentukan p dan q . Didapatkan $p=2n+3$ dan $q=4n+3$.

Langkah selanjutnya adalah menentukan batas atas dari graf sisir tunggal dengan menggunakan lemma 1. Untuk menentukan nilai d kita menggunakan nilai



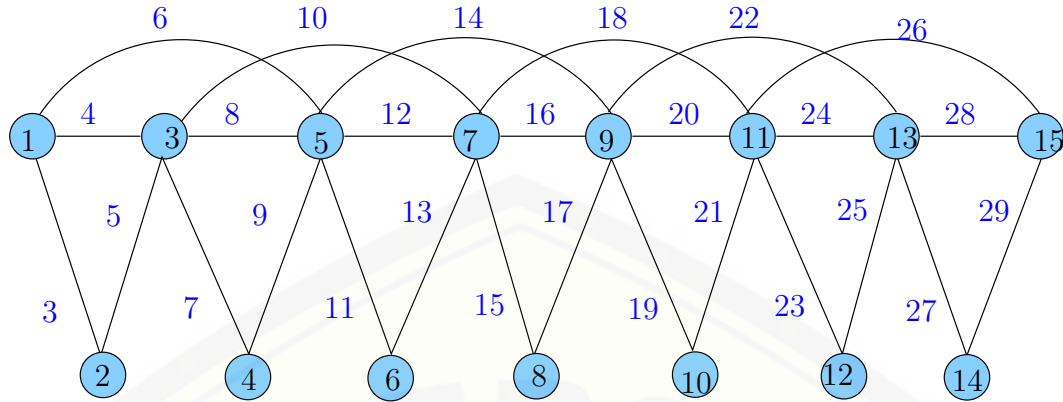
Jumlah titik = 15
Jumlah sisi = 27

Gambar 4.1 Graf Sisir Tunggal (Cb_n) dengan $n=6$

p dan q yang sudah didapat,

$$\begin{aligned}
 d &\leq \frac{2p + q - 5}{q - 1} \\
 &= \frac{2(2n + 3) + (4n + 3) - 5}{(4n + 3) - 1} \\
 &= \frac{8n + 4}{4n + 2} \\
 &\leq 2
 \end{aligned}$$

Kita mendapatkan nilai $d \leq 2$, sehingga himpunan d adalah $d \in \{0, 1, 2\}$. Pada pelabelan bilangan yang digunakan adalah bilangan bulat dan pada $SEATL$ yang digunakan adalah bilangan bulat positif, sehingga elemen untuk d adalah $0, 1, 2$. Setelah mendapatkan nilai d , kita lanjutkan untuk melabeli titik pada graf sisir tunggal. Pada langkah ini, selain mencari label titik kita juga mencari fungsi dari $V(Cb_n)$, melalui pengamatan pola dan penggunaan konsep barisan aritmatika. Elemen dari $V(Cb_n)$ antara lain $\{e, b, c, x_i, y_i; 1 \leq i \leq n\}$. Penjumlahan dua label titik yang bersisian akan menghasilkan bobot sisi. Dari masing-masing bobot sisi yang didapat, kita cari fungsinya yang konsepnya sama seperti ketika mencari fungsi titik. Akan dihasilkan sebuah lemma yang berhubungan dengan pelabelan titik, yaitu:



Gambar 4.2 Label $EAVL$ dari Cb_6

◇ **Lemma 4.1.1.** *Ada pelabelan $(3,1)$ -sisi antimagic titik pada graf sisir Cb_n untuk $n \geq 3$.*

Bukti. Melabeli setiap titik pada graf sisir tunggal. Didefinisikan $\alpha_1 : V(Cb_n) \rightarrow \{1, 2, \dots, 2n + 3\}$ adalah fungsi titik yang bijektif pada graf sisir. Didefinisikan juga w_{α_1} adalah bobot sisi. Fungsi-fungsi yang didapat antara lain:

$$\begin{aligned} \alpha_1(e) &= 1 \\ \alpha_1(b) &= 2 \\ \alpha_1(c) &= 3 \\ \alpha_1(y_i) &= 2i + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ \alpha_1(x_i) &= 2i + 3, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ w_{\alpha_1}(eb) &= 3 \\ w_{\alpha_1}(ec) &= 4 \\ w_{\alpha_1}(bc) &= 5 \\ w_{\alpha_1}(ex_1) &= 6 \\ w_{\alpha_1}(cy_1) &= 7 \\ w_{\alpha_1}(cx_1) &= 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_{\alpha_1}(x_i y_i) &= 4i + 5, & 1 \leq i \leq n \\
w_{\alpha_1}(cx_2) &= 10 \\
w_{\alpha_1}(x_i y_{i+1}) &= 4i + 7, & 1 \leq i \leq n - 1 \\
w_{\alpha_1}(x_i x_{i+1}) &= 4i + 8, & 1 \leq i \leq n - 1 \\
w_{\alpha_1}(x_i x_{i+2}) &= 4i + 10, & 1 \leq i \leq n - 2
\end{aligned}$$

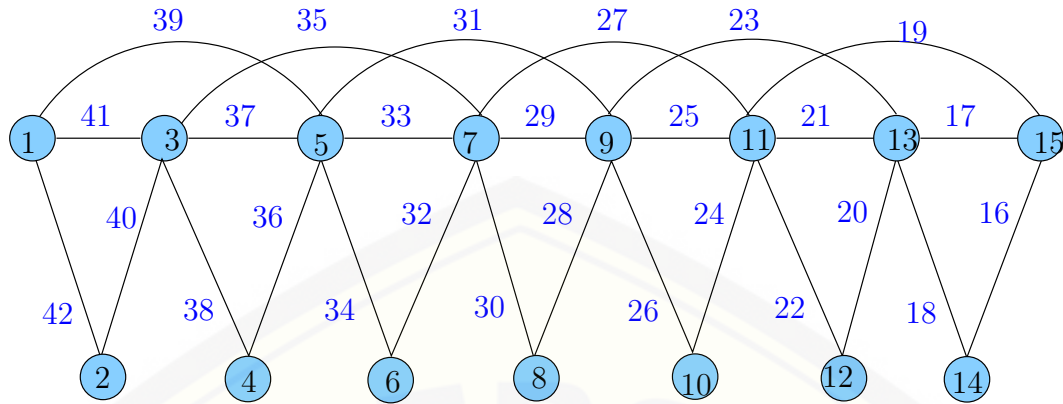
Pada fungsi bobot sisi yang mengandung nilai i , masukkan nilai i sesuai dengan selangnya. Akan didapat nilai-nilai berurutan yang akan membentuk himpunan $\bigcup_{k=1}^{11} w_{\alpha_1} = \{3, 4, 5, \dots, 4i+5\}$. Diketahui bobot sisi terkecil terletak pada $w_{\alpha_1}(eb) = 3$, dan bobot sisi terbesar terletak pada $w_{\alpha_1}(x_i y_i) = 4i+5$ untuk $i = n$. Nilai-nilai tersebut membentuk barisan aritmatika dengan suku awal $a = 3$ dan beda $d = 1$, sehingga dapat ditulis himpunan $w_{\alpha_1} = \{3, 4, \dots, 4n+5\}$. Kita gunakan rumus U_n untuk mengetahui apakah benar bobot sisi terbesar terletak di $w_{\alpha_1}(x_i y_i)$, dengan mensubstitusikan nilai awal $a = 3$ dan nilai $d = 1$ ke rumus tersebut.

Dari penjelasan di atas disimpulkan jika w_{α_1} membentuk barisan aritmatika dengan suku awal $a = 3$ dengan beda $d = 1$. Sehingga graf sisir tunggal Cb_n mempunyai pelabelan $(3, 1)$ -sisi antimagic titik untuk $n \geq 3$. Gambar 4.2 merupakan contoh pelabelan titik $(3, 1)$ -sisi antimagic beserta bobot sisinya pada graf sisir (Cb_n) . \square

Berdasarkan himpunan bobot sisi di atas, selanjutnya kita akan melabeli sisi dari graf sisir tunggal ketika nilai $d=0$, $d=1$, dan $d=2$. Untuk melabeli sisi ketika $d=0$, kita mulai dari bobot sisi terbesar sampai yang terkecil. Setelah mendapatkan pola kita lanjutkan untuk mencari fungsi sisi. Dan akhirnya menghasilkan sebuah teorema yaitu:

Teorema 4.1.1. *Ada pelabelan total super $(6n - 9, 0)$ -sisi antimagic total pada graf sisir (Cb_n) untuk $n \geq 3$.*

Bukti. Gunakan label titik pada lemma 4.1.1 untuk melabeli titiknya sehingga fungsi titik $\alpha_1 =$ fungsi titik α_2 . Dan fungsi sisi dari α_2 untuk pelabelan total super $(a, 0)$ -sisi antimagic pada graf sisir adalah:



Gambar 4.3 $SEATL$ pada Graf Sisir Cb_6 ketika $d=0$

$$\begin{aligned} \alpha_2(x_i y_i) &= 6n - 4i + 4, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ \alpha_2(x_i x_{i+1}) &= 6n - 4i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n - 1 \\ \alpha_2(x_i y_{i+1}) &= 6n - 4i + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n - 1 \\ \alpha_2(x_i x_{i+2}) &= 6n - 4i - 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n - 2 \\ \alpha_2(cx_2) &= 6n - 1, \\ \alpha_2(cx_1) &= 6n + 1, \\ \alpha_2(cy_1) &= 6n + 2, \\ \alpha_2(ex_1) &= 6n + 3, \\ \alpha_2(bc) &= 6n + 4, \\ \alpha_2(ec) &= 6n + 5, \\ \alpha_2(eb) &= 6n + 6, \end{aligned}$$

Dapat disimpulkan bahwa fungsi sisi α_2 adalah fungsi bijektif karena $\alpha_2 : E(Cb_n) \rightarrow \{6n-4i+4, 6n-4i+1, \dots, 6n+6\}$. Didefinisikan W_{α_2} adalah fungsi bobot total dari pelabelan total pada graf sisir. W_{α_2} diperoleh dengan menjumlahkan fungsi bobot sisi $EAVL$ (w_{α_1}) dengan fungsi label sisi α_1 yang bersesuaian. Fungsi bobot totalnya antara lain:

$$\begin{aligned}W_{\alpha_2}(eb) &= w_{\alpha_1}(eb) + \alpha_2(eb) \\ &= (6n + 6) + (3) \\ &= 6n + 9\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}W_{\alpha_2}(ec) &= w_{\alpha_1}(ec) + \alpha_2(ec) \\ &= (6n + 5) + (4) \\ &= 6n + 9\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}W_{\alpha_2}(bc) &= w_{\alpha_1}(bc) + \alpha_2(bc) \\ &= (6n + 4) + (5) \\ &= 6n + 9\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}W_{\alpha_2}(ex_1) &= w_{\alpha_1}(ex_1) + \alpha_2(ex_1) \\ &= (6n + 3) + (6) \\ &= 6n + 9\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}W_{\alpha_2}(cy_1) &= w_{\alpha_1}(cy_1) + \alpha_2(cy_1) \\ &= (6n + 2) + (7) \\ &= 6n + 9\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}W_{\alpha_2}(cx_1) &= w_{\alpha_1}(cx_1) + \alpha_2(cx_1) \\ &= (6n + 1) + (8) \\ &= 6n + 9\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}W_{\alpha_2}(x_i y_i) &= w_{\alpha_1}(x_i y_i) + \alpha_2(x_i y_i) \\ &= (6n - 4i + 4) + (4i + 5) \\ &= 6n + 9\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}W_{\alpha_2}(cx_2) &= w_{\alpha_1}(cx_2) + \alpha_2(cx_2) \\ &= (6n - 1) + (10) \\ &= 6n + 9\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_2}(x_i y_{i+1}) &= w_{\alpha_1}(x_i y_{i+1}) + \alpha_2(x_i y_{i+1}) \\
&= (6n - 4i + 2) + (4i + 7) \\
&= 6n + 9
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_2}(x_i x_{i+1}) &= w_{\alpha_1}(x_i x_{i+1}) + \alpha_2(x_i x_{i+1}) \\
&= (6n - 4i + 1) + (4i + 8) \\
&= 6n + 9
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_2}(x_i x_{i+2}) &= w_{\alpha_1}(x_i x_{i+2}) + \alpha_2(x_i x_{i+2}) \\
&= (6n - 4i - 1) + (4i + 10) \\
&= 6n + 9
\end{aligned}$$

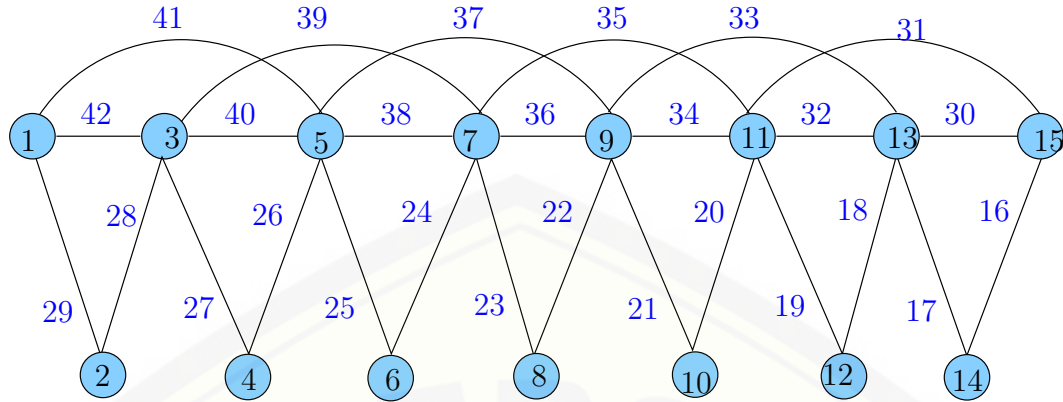
Dapat dilihat bahwa semua bobot totalnya menghasilkan fungsi yang sama. Sehingga himpunan dari bobot total dapat ditulis $W = \{6n+9, 6n+9, \dots, 6n+9\}$. Sehingga terbukti bahwa graf sisir (Cb_n) dengan $n \geq 3$ mempunyai pelabelan total super $(45, 0)$ -sisi antimagic dengan $a = 6n + 9$ dan $d = 0$. \square

Setelah membuktikan pada $d=0$, selanjutnya akan mencari pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic di $d=1$, dengan langkah-langkah yang sama seperti sebelumnya. Kita turunkan, sebuah teorema untuk $d=1$.

Teorema 4.1.2. *Ada pelabelan total super $(4n + 8, 1)$ -sisi antimagic pada graf sisir (Cb_n) untuk $n \geq 3$.*

Bukti. Gunakan label titik pada lemma 4.1.1 untuk melabeli titiknya sehingga fungsi titik $\alpha_1 =$ fungsi titik α_3 . Setelah melabeli sisi didapatkan fungsi sisi α_3 untuk pelabelan total super $(a, 1)$ -sisi antimagic pada graf sisir adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\alpha_3(x_i y_i) &= 4n - 2i + 4, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
\alpha_3(x_i y_{i+1}) &= 4n - 2i + 3, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n - 1 \\
\alpha_3(cy_1) &= 4n + 3, \\
\alpha_3(bc) &= 4n + 4, \\
\alpha_3(eb) &= 4n + 5, \\
\alpha_3(x_i x_{i+1}) &= 6n - 2i + 4, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n - 1
\end{aligned}$$



Gambar 4.4 $SEATL$ pada Graf Sisir Cb_6 ketika $d=1$

$$\begin{aligned} \alpha_3(x_i x_{i+2}) &= 6n - 2i + 3, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n - 2 \\ \alpha_3(cx_2) &= 6n + 3, \\ \alpha_3(cx_1) &= 6n + 4, \\ \alpha_3(ex_1) &= 6n + 5, \\ \alpha_3(ec) &= 6n + 6, \end{aligned}$$

Fungsi sisi α_3 adalah fungsi bijektif karena $\alpha_3 : E(Cb_n) \rightarrow \{4n-2i+4, 4n-2i+3, \dots, 6n+6\}$. Didefinisikan W_{α_3} adalah fungsi bobot total dari pelabelan total pada graf sisir. W_{α_3} diperoleh dengan menjumlahkan fungsi bobot sisi $EAVL$ (w_{α_1}) yang terdapat pada lemma 4.1.1 dengan fungsi label sisi α_3 yang bersesuaian. Fungsi bobot totalnya antara lain:

$$\begin{aligned} W_{\alpha_3}(x_i y_i) &= w_{\alpha_1}(x_i y_i) + \alpha_3(x_i y_i) \\ &= (4i + 5) + (4n - 2i + 4) \\ &= 4n + 2i + 9 \\ W_{\alpha_3}(x_i y_{i+1}) &= w_{\alpha_1}(x_i y_{i+1}) + \alpha_3(x_i y_{i+1}) \\ &= (4i + 7) + (4n - 2i + 3) \\ &= 4n + 2i + 10 \\ W_{\alpha_3}(cy_1) &= w_{\alpha_1}(cy_1) + \alpha_3(cy_1) \\ &= (7) + (4n + 3) \\ &= 4n + 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\alpha_3}(bc) &= w_{\alpha_1}(bc) + \alpha_3(bc) \\
 &= (5) + (4n + 4) \\
 &= 4n + 9
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\alpha_3}(ec) &= w_{\alpha_1}(ec) + \alpha_3(ec) \\
 &= (4) + (6n + 6) \\
 &= 6n + 10
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\alpha_3}(x_i x_{i+1}) &= w_{\alpha_1}(x_i x_{i+1}) + \alpha_3(x_i x_{i+1}) \\
 &= (4i + 8) + (6n - 2i + 4) \\
 &= 6n + 2i + 12
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\alpha_3}(x_i x_{i+2}) &= w_{\alpha_1}(x_i x_{i+2}) + \alpha_3(x_i x_{i+2}) \\
 &= (4i + 10) + (6n - 2i + 3) \\
 &= 6n + 2i + 13
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\alpha_3}(cx_2) &= w_{\alpha_1}(cx_2) + \alpha_3(cx_2) \\
 &= (10) + (6n + 3) \\
 &= 6n + 13
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\alpha_3}(cx_1) &= w_{\alpha_1}(cx_1) + \alpha_3(cx_1) \\
 &= (8) + (6n + 4) \\
 &= 6n + 12
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\alpha_3}(ex_1) &= w_{\alpha_1}(ex_1) + \alpha_2(ex_1) \\
 &= (6) + (6n + 5) \\
 &= 6n + 11
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\alpha_3}(eb) &= w_{\alpha_1}(eb) + \alpha_3(eb) \\
 &= (3) + (4n + 5) \\
 &= 4n + 8
 \end{aligned}$$

Bobot total diatas bila dikumpulkan semua akan membentuk himpunan bobot total. Dengan memasukkan nilai i dan nilai n dapat diketahui letak fungsi bobot sisi terkecil dan fungsi bobot terbesar. Bobot sisi terkecil pertama adalah

$W_{\alpha_3}(eb)$, bobot sisi terkecil kedua adalah $W_{\alpha_2}(eb)$ dan bobot sisi terbesar adalah $W_{\alpha_3}(x_i x_{i+1})$ ketika $i = n - 1$. Himpunan bobot total tersebut membentuk barisan aritmatika dengan suku awal $a = 4n + 8$ dengan beda $d = 1$, dan dapat ditulis $W = \{4n+8, 4n+9, \dots, 8n+10\}$. Untuk mengetahui apakah benar bobot sisi terbesar pada graf sisir terletak pada $W = x_i x_{i+1}$, kita gunakan rumus U_n dengan mensubstitusikan nilai awal $a = 4n + 8$ dan beda $d = 1$

Berdasarkan uraian diatas dapat disimpulkan bahwa terbukti graf sisir (Cb_n) untuk $n \geq 3$ mempunyai pelabelan total super $(4n + 8, 1)$ -sisi antimagic. \square

Ada sebuah lemma yang dapat dijadikan sebagai bukti alternatif untuk membuktikan bahwa graf sisir Cb_n mempunyai pelabelan total super $(4n + 8, 1)$ -sisi antimagic. Lemma tersebut adalah lemma 2 yang dikembangkan oleh Dafik, Robiyatul pada tahun 2014.

Bukti. Berdasarkan lemma 4.1.1 bahwa graf sisir memiliki pelabelan $(3, 1)$ -sisi antimagic titik untuk $n \geq 3$. Sehingga graf sisir Cb_n memiliki himpunan bobot sisi yaitu $\{3, 4, n + 5, \dots, 4n + 5\}$, dengan nilai beda $d = 1$.

Himpunan bobot sisi Cb_n adalah $w = \{3, 4, 5, \dots, 4n + 5\}$ misalkan dinyatakan dalam $\Upsilon = \{c, c + 1, c + 2, \dots, c + k\}$ maka diperoleh nilai $c = 3$ dan $k = 4n + 2$. Berdasarkan lemma 2, $\Pi(\Upsilon)$ adalah permutasi nilai Υ sedemikian hingga nilai $\Upsilon + (\Pi(\Upsilon) + \eta)$ adalah bobot total dari fungsi tersebut.

$$\begin{aligned} \Upsilon + (\Pi(\Upsilon) + \eta) &= a \\ c + (c + i + \frac{k}{2} - 1) + \eta &= 4n + 8 \\ 3 + (3 + 1 + \frac{4n + 2}{2} - 1) + \eta &= 4n + 8 \\ 3 + 3 + 1 + \frac{4n + 2}{2} - 1 + \eta &= 4n + 8 \\ \eta &= 4n + 8 - 6 - 2n - 1 \\ \eta &= 2n + 1 \\ \eta &= \frac{k}{2} \end{aligned}$$

$\Upsilon + (\Pi(\Upsilon) + \eta)$ adalah fungsi bobot total dari graf sisir. Lemma 4.1.1 telah

menyebutkan bobot total terkecil terletak pada $i = 1$ sehingga:

$$\begin{aligned}\Upsilon + (\Pi(\Upsilon) + \eta) &= c + (c + i + \frac{k}{2} - 1 + \frac{k}{2}) \\ &= 2c + k \\ &= 2(3) + 4n + 2 \\ &= 4n + 8\end{aligned}$$

bobot total terkecil kedua terletak di $i = \frac{k}{2} + 2$:

$$\begin{aligned}\Upsilon + (\Pi(\Upsilon) + \eta) &= c + \frac{k}{2} + 1 + c + i - \frac{k}{2} - 2 + \frac{k}{2} \\ &= 2c + \frac{k}{2} + 2 - 1 + \frac{k}{2} \\ &= 2c + k + 1 \\ &= 2(3) + 4n + 2 + 1 \\ &= 4n + 9\end{aligned}$$

bobot total terbesar terletak di $i = \frac{k}{2} + 1$:

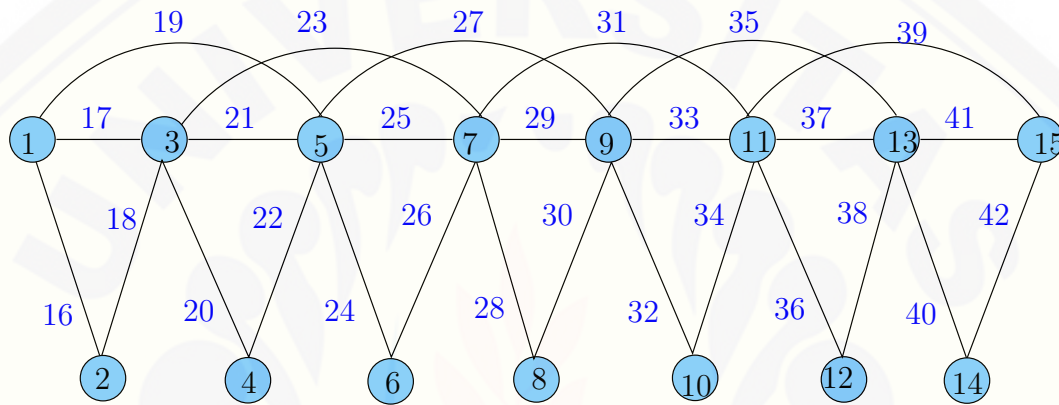
$$\begin{aligned}\Upsilon + (\Pi(\Upsilon) + \eta) &= c + \frac{k}{2} + c + i + \frac{k}{2} - 1 + \frac{k}{2} \\ &= 2c + \frac{3k}{2} + \frac{k}{2} + 1 - 1 \\ &= 2c + 2k \\ &= 2(3) + 2(4n + 2) \\ &= 8n + 10\end{aligned}$$

Berdasarkan hasil perhitungan lemma 2 bobot terkecil adalah $4n + 8$ dan bobot terbesar adalah $8n + 10$. Nilai keduanya sama dengan nilai yang terdapat pada teorema 4.1.2. Sehingga terbukti bahwa graf sisir Cb_n memiliki pelabelan

total super $(4n + 8, 1)$ -sisi antimagic untuk $n \geq 3$. \square

Terakhir kita mencari pelabelan sisi untuk $d=2$. Untuk melabeli sisi $d=2$, kita mulai melabeli sisi dari bobot sisi terkecil sampai bobot sisi terbesar. Langkah selanjutnya masih sama seperti $d=0$ dan $d=1$. Kembali kita dapatkan sebuah teorema yaitu:

Teorema 4.1.3. *Ada pelabelan total super $(2n + 7, 2)$ -sisi antimagic pada graf sisir Cb_n untuk $n \geq 3$.*



Gambar 4.5 *SEATL* pada Graf Sisir Cb_6 ketika $d=2$

Bukti. Menggunakan label titik pada lemma 4.1.1 untuk melabeli titiknya, sehingga fungsi titik α_1 =fungsi titik α_4 . Setelah diketahui label sisi dilanjutkan mencari fungsi sisi α_4 untuk pelabelan total super $(a, 2)$ -sisi antimagic pada graf sisir dan didapat:

$$\begin{aligned} \alpha_4(eb) &= 2n + 4, \\ \alpha_4(ec) &= 2n + 5, \\ \alpha_4(bc) &= 2n + 6, \\ \alpha_4(ex_1) &= 2n + 7, \\ \alpha_4(cy_1) &= 2n + 8, \\ \alpha_4(cx_1) &= 2n + 9, \\ \alpha_4(x_iy_i) &= 2n + 4i + 6, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_4(cx_2) &= 2n + 11, \\
\alpha_4(x_i y_{i+1}) &= 2n + 4i + 8, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n - 1 \\
\alpha_4(x_i x_{i+1}) &= 2n + 4i + 9, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n - 1 \\
\alpha_4(x_i x_{i+2}) &= 2n + 4i + 11, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n - 2
\end{aligned}$$

Karena $\alpha_4 : E(Cb_n) \rightarrow \{2n+4, 2n+5, \dots, 2n+4i+11\}$ maka fungsi sisi α_4 adalah fungsi bijektif. W_{α_4} adalah fungsi bobot total dari pelabelan total pada graf sisir. W_{α_4} diperoleh dengan menjumlahkan fungsi bobot sisi $EAVL$ (w_{α_1}) yang terdapat pada lemma 4.1.1 dengan fungsi label sisi α_4 yang bersesuaian. Fungsi bobot totalnya antara lain:

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_4}(eb) &= w_{\alpha_1}(eb) + \alpha_4(eb) \\
&= (3) + (2n + 4) \\
&= 2n + 7
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_4}(ec) &= w_{\alpha_1}(ec) + \alpha_4(ec) \\
&= (4) + (2n + 5) \\
&= 2n + 9
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_4}(bc) &= w_{\alpha_1}(bc) + \alpha_4(bc) \\
&= (5) + (2n + 6) \\
&= 2n + 11
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_4}(ex_1) &= w_{\alpha_1}(ex_1) + \alpha_4(ex_1) \\
&= (6) + (2n + 7) \\
&= 2n + 13
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_4}(cy_1) &= w_{\alpha_1}(cy_1) + \alpha_4(cy_1) \\
&= (7) + (2n + 8) \\
&= 2n + 15
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_4}(cx_1) &= w_{\alpha_1}(cx_1) + \alpha_4(cx_1) \\
&= (8) + (2n + 9) \\
&= 2n + 17
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_4}(x_i y_i) &= w_{\alpha_1}(x_i y_i) + \alpha_4(x_i y_i) \\
&= (4i + 5) + (2n + 4i + 6) \\
&= 2n + 8i + 11
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_4}(cx_2) &= w_{\alpha_1}(cx_2) + \alpha_4(cx_2) \\
&= (10) + (2n + 11) \\
&= 2n + 21
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_4}(x_i y_{i+1}) &= w_{\alpha_1}(x_i y_{i+1}) + \alpha_4(x_i y_{i+1}) \\
&= (4i + 7) + (2n + 4i + 8) \\
&= 2n + 8i + 15
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_4}(x_i x_{i+1}) &= w_{\alpha_1}(x_i x_{i+1}) + \alpha_4(x_i x_{i+1}) \\
&= (4i + 8) + (2n + 4i + 9) \\
&= 2n + 8i + 17
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_4}(x_i x_{i+2}) &= w_{\alpha_1}(x_i x_{i+2}) + \alpha_4(x_i x_{i+2}) \\
&= (4i + 10) + (2n + 4i + 11) \\
&= 2n + 8i + 21
\end{aligned}$$

Dengan memasukkan nilai i dan nilai n didapat himpunan bobot total $\{2n+7, 2n+9, \dots, 2n+8i+11\}$. Diketahui letak fungsi bobot sisi terkecil dan fungsi bobot terbesar. Bobot sisi terkecil pertama adalah $W_{\alpha_4}(eb)$ dan bobot sisi terbesar adalah $W_{\alpha_4}(x_i y_i)$ ketika $i = n$. Himpunan bobot total tersebut membentuk barisan aritmatika dengan suku awal $a = 2n+7$ dengan beda $d = 2$. Untuk mengetahui apakah benar bobot sisi terbesar pada graf sisir terletak pada $W_{\alpha_4}=x_i y_i$, kita gunakan rumus U_n dengan mensubstitusikan nilai awal $a = 2n + 7$ dengan beda $d=2$. Berdasarkan uraian diatas dapat disimpulkan bahwa terbukti graf sisir Cb_n untuk $n \geq 3$ mempunyai pelabelan total super $(2n + 7, 2)$ -sisi antimagic. \square

4.1.2 Pelabelan Total Super (a, d) -Sisi Antimagic pada Gabungan Saling Lepas dari Graf Sisir (mCb_n)

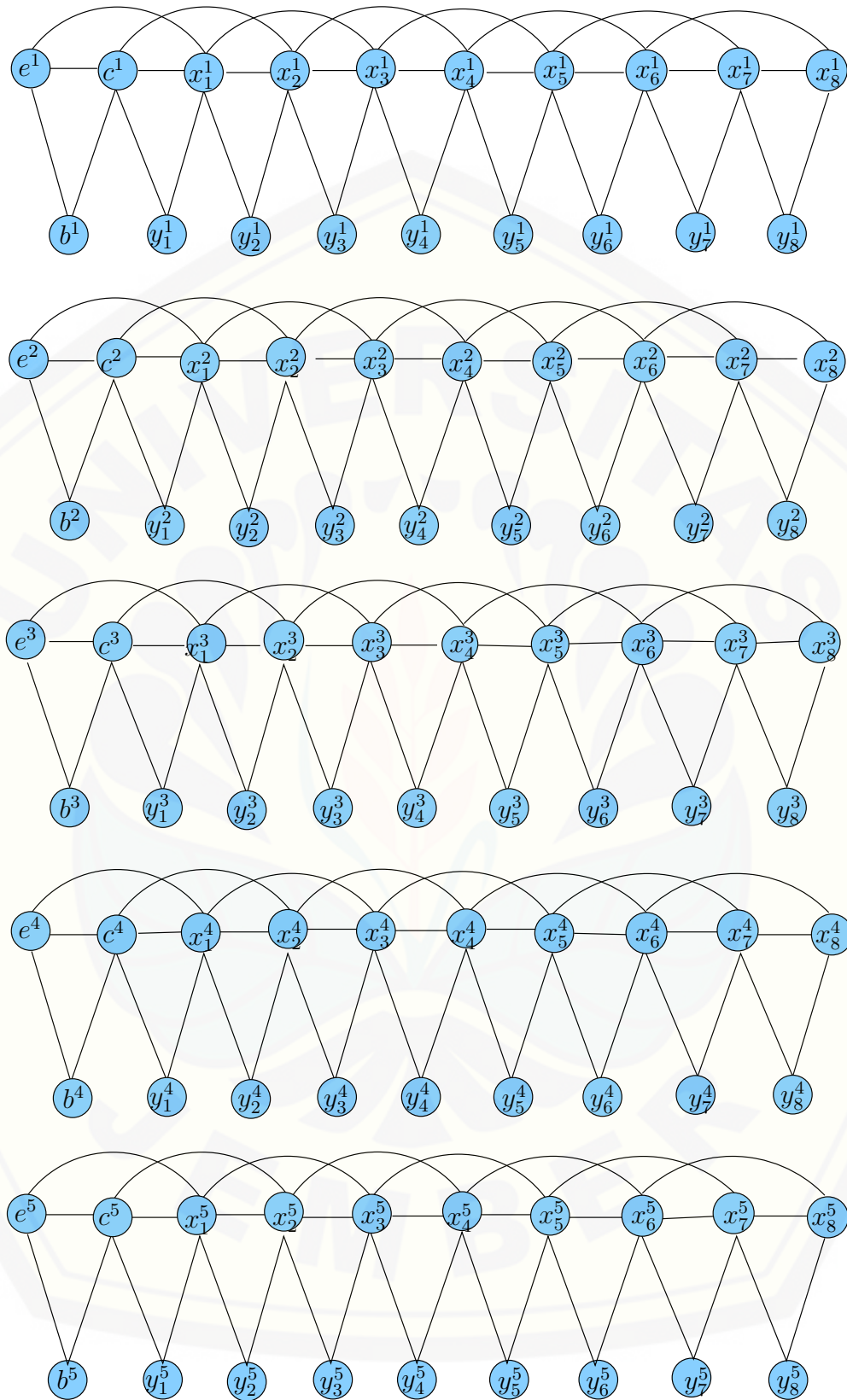
Pada pembahasan ini, peneliti akan menentukan pelabelan total super (a, d) -sisi *antimagic* pada gabungan saling lepas dari graf sisir yang dinotasikan dengan mCb_n dimana m adalah banyaknya gabungan dari graf sisir. Langkah-langkah pada pembahasan ini sama dengan langkah-langkah pada graf tunggal. Pertama kali kita menentukan kardinalitas dari gabungan saling lepas graf sisir. Kardinalitas ini akan digunakan untuk mengerjakan langkah-langkah selanjutnya.

Dalam kardinalitas kita akan menentukan fungsi untuk p , fungsi q , himpunan titik (V) dan himpunan sisi (E). Dari gambar 4.6, didapat $p=2nm+3m$, $q=4nm+3m$. $V(mCb_n) = \{e^k, b^k, c^k, x_i^k, y_i^k; 1 \leq i \leq n\}$ dan $E(Cb_n) = \{e^k c^k\} \cup \{e^k b^k\} \cup \{b^k c^k\} \cup \{e^k x_1^k\} \cup \{c^k y_1^k\} \cup \{c^k x_1^k\} \cup \{c^k x_2^k\} \cup \{x_i^k y_i^k; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_i^k y_{i+1}^k; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_i^k x_{i+1}^k; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_i^k x_{i+2}^k; 1 \leq i \leq n-2\}$.

Setelah nilai p dan q diperoleh, maka nilai d dapat dicari menggunakan lemma 1, seperti dibawah ini:

$$\begin{aligned} d &\leq \frac{2p_1 + q_1 - 5}{q_1 - 1} \\ &= \frac{2(2nm + 3m) + (4nm + 3m) - 5}{(4nm + 3m) - 1} \\ &= \frac{4nm + 6m + 4nm + 3m - 5}{4nm + 3m - 1} \\ &= \frac{8nm + 9m - 5}{4nm + 3m - 1} \\ &\leq 2 + \frac{3m - 3}{4nm + 3m - 1} \end{aligned}$$

Karena d adalah bilangan bulat positif maka $d < 3$ atau $d \in \{0, 1, 2\}$. Selanjutnya adalah menentukan pelabelan titik $(a, 1)$ -sisi antimagic pada gabungan graf sisir. Sekaligus menentukan fungsi bijektif berdasarkan pengamatan pola dan konsep barisan aritmatika. Lemma 4.1.2 adalah lemma yang berhubungan dengan pelabelan titik $(a, 1)$ -sisi antimagic pada gabungan graf sisir.



Gambar 4.6 Graf Sisir Gabungan Saling Lepas (mC_b8) dengan $m=5$

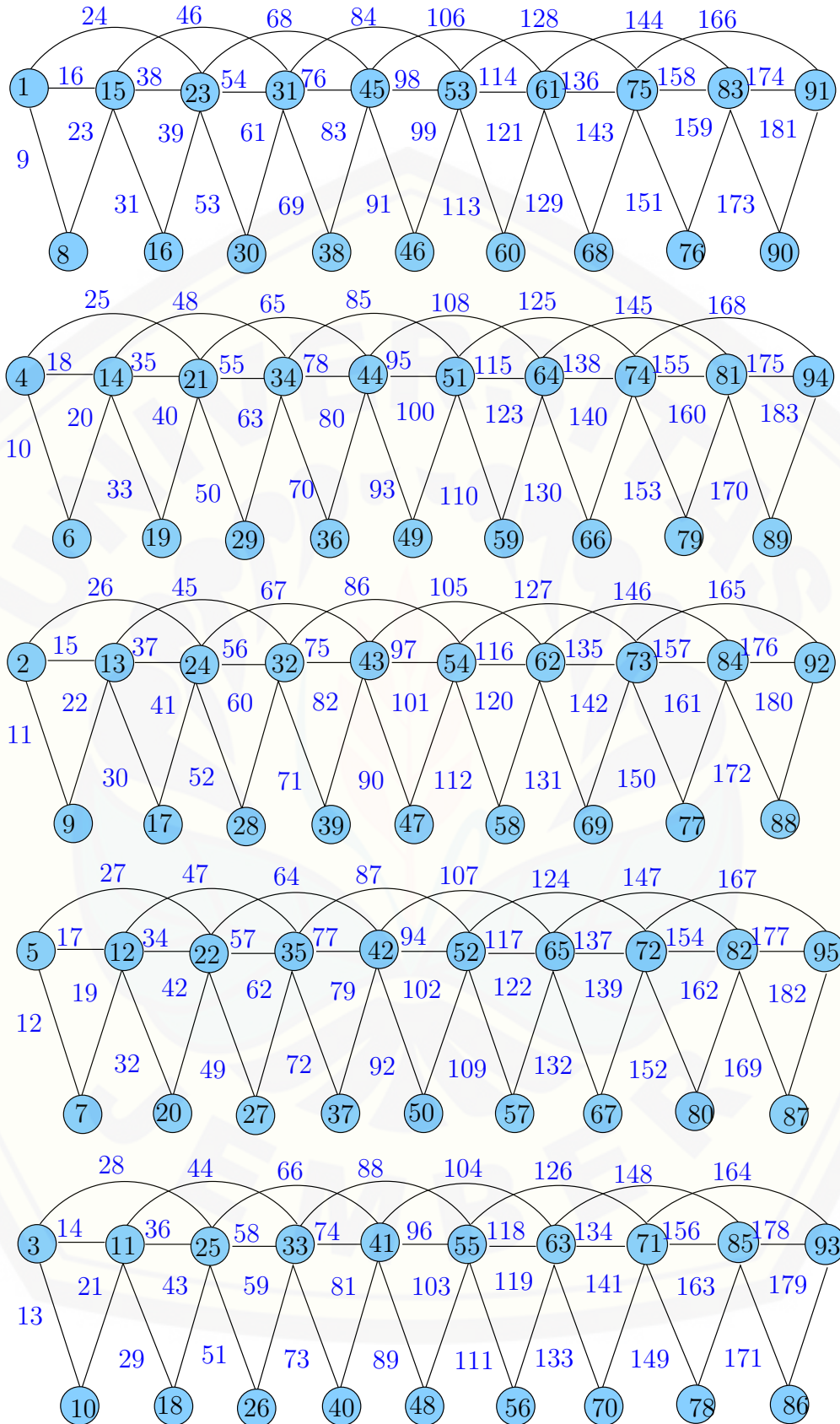
◇ **Lemma 4.1.2.** *Ada pelabelan titik $(\frac{3m+2k+1}{2}, 1)$ -sisi antimagic pada gabungan graf sisir (mCb_n) jika $n \geq 3$, $m \geq 3$ dan m ganjil.*

Bukti. Melabeli setiap titik pada gabungan graf sisir mCb_n . Didefinisikan $\beta_1 : V(mCb_n) \rightarrow \{1, 2, \dots, 2nm+3m\}$ adalah fungsi bijektif titik dari gabungan saling lepas graf sisir. Didapat fungsi titik untuk β_1 sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \beta_1(e^k) &= \begin{cases} \frac{k+1}{2}, & \text{untuk } 1 \leq k \leq m, k \text{ ganjil} \\ \frac{m+1+k}{2} & \text{untuk } 1 \leq k \leq m, k \text{ genap} \end{cases} \\ \beta_1(b^k) &= \begin{cases} \frac{2m+k}{2}, & \text{untuk } 1 \leq k \leq m, k \text{ genap} \\ \frac{3m+k}{2} & \text{untuk } 1 \leq k \leq m, k \text{ ganjil} \end{cases} \\ \beta_1(c^k) &= 3m - k + 1 \text{ untuk } 1 \leq k \leq m \\ \beta_1(y_i^k) &= \begin{cases} \frac{4im+4m+k}{2}, & \text{untuk } i = 1 \text{ mod } 3, 1 \leq k \leq m, k \text{ genap} \\ \frac{4im+5m+k}{2}, & \text{untuk } i = 1 \text{ mod } 3, 1 \leq k \leq m, k \text{ ganjil} \end{cases} \\ \beta_1(x_i^k) &= \begin{cases} \frac{4im+2m+k+1}{2}, & \text{untuk } i = 1 \text{ mod } 3, 1 \leq k \leq m, k \text{ ganjil} \\ \frac{4im+3m+k+1}{2}, & \text{untuk } i = 1 \text{ mod } 3, 1 \leq k \leq m, k \text{ genap} \end{cases} \\ \beta_1(c_i^k) &= 2im + 2m - k + 1 \text{ untuk } i = 2 \text{ mod } 3, 1 \leq k \leq m, \\ \beta_1(x_i^k) &= \begin{cases} \frac{4im+4m+k+1}{2}, & \text{untuk } i = 2 \text{ mod } 3, 1 \leq k \leq m, k \text{ ganjil} \\ \frac{4im+5m+k+1}{2}, & \text{untuk } i = 2 \text{ mod } 3, 1 \leq k \leq m, k \text{ genap} \end{cases} \\ \beta_1(y_i^k) &= \begin{cases} \frac{4im+2m+k}{2}, & \text{untuk } i = 3 \text{ mod } 3, 1 \leq k \leq m, k \text{ genap} \\ \frac{4im+3m+k}{2}, & \text{untuk } i = 3 \text{ mod } 3, 1 \leq k \leq m, k \text{ ganjil} \end{cases} \\ \beta_1(x_i^k) &= 2im + 3m - k + 1 \text{ untuk } i = 3 \text{ mod } 3, 1 \leq k \leq m, \end{aligned}$$

Rumus diatas dapat direduksi menjadi:

$$\begin{aligned} \beta_1(e^k) &= \frac{(1+(-1)^k)m+2k+2}{4}; \text{ untuk } 1 \leq k \leq m \\ \beta_1(b^k) &= \frac{(6+1+(-1)^k)m+2k}{4}; \text{ untuk } 1 \leq k \leq m \\ \beta_1(y_i^k) &= \frac{(10+1+(-1)^k)m+8im+2k}{4}; \text{ untuk } i = 1 \text{ mod } 3, 1 \leq k \leq m \end{aligned}$$



Gambar 4.7 Label *EAVL* dari $5Cb_8$

$$\begin{aligned}\beta_1(x_i^k) &= \frac{(4+1+(-1)^k)m+8im+2k+2}{4}; \text{ untuk } i = 1 \text{ mod } 3, 1 \leq k \leq m \\ \beta_1(x_i^k) &= \frac{(8+1+(-1)^k)m+8im+2k+2}{4}; \text{ untuk } i = 2 \text{ mod } 3, 1 \leq k \leq m \\ \beta_1(y_i^k) &= \frac{(6+1+(-1)^k)m+8im+2k}{4}; \text{ untuk } i = 3 \text{ mod } 3, 1 \leq k \leq m\end{aligned}$$

Berdasarkan fungsi titik diatas, didapatkan himpunan fungsi titik untuk graf sisir gabungan $\{\frac{k+1}{2}, \frac{m+k+1}{2}, \dots, 2im + 3m - k + 1\}$. Didefinisikan bobot sisi dari $EAVL$ adalah w_{β_1} , bobot sisi didapatkan dengan menjumlahkan label dua titik yang mengapit sebuah sisi. Fungsi-fungsi dari bobot sisi antara lain.

$$\begin{aligned}w_{\beta_1}(e^k b^k) &= 3m + 2k + 1 \text{ untuk } 1 \leq k \leq m, \\ w_{\beta_1}(e^k c^k) &= \begin{cases} \frac{6m-k+3}{2}, & \text{ untuk } 1 \leq k \leq m, k \text{ ganjil} \\ \frac{7m-k+3}{2}, & \text{ untuk } 1 \leq k \leq m, k \text{ genap} \end{cases} \\ w_{\beta_1}(b^k c^k) &= \begin{cases} \frac{8m-k+2}{2}, & \text{ untuk } 1 \leq k \leq m, k \text{ genap} \\ \frac{9m-k+2}{2}, & \text{ untuk } 1 \leq k \leq m, k \text{ ganjil} \end{cases} \\ w_{\beta_1}(e^k x_1^k) &= 9m + 2k + 1 \text{ untuk } 1 \leq k \leq m \\ w_{\beta_1}(c^k y_1^k) &= \begin{cases} \frac{12m-k+3}{2}, & \text{ untuk } 1 \leq k \leq m, k \text{ ganjil} \\ \frac{13m-k+3}{2}, & \text{ untuk } 1 \leq k \leq m, k \text{ genap} \end{cases} \\ w_{\beta_1}(c^k x_1^k) &= \begin{cases} \frac{14m-k+2}{2}, & \text{ untuk } 1 \leq k \leq m, k \text{ genap} \\ \frac{15m-k+2}{2}, & \text{ untuk } 1 \leq k \leq m, k \text{ ganjil} \end{cases} \\ w_{\beta_1}(x_i^k y_i^k) &= 8im + 7m + 2k + 1 \text{ untuk } i = 3 \text{ mod } 3, 1 \leq k \leq m, \\ w_{\beta_1}(c^k x_2) &= \begin{cases} \frac{18m-k+5}{2}, & \text{ untuk } 1 \leq k \leq m, k \text{ ganjil} \\ \frac{19m-k+3}{2}, & \text{ untuk } 1 \leq k \leq m, k \text{ genap} \end{cases} \\ w_{\beta_1}(x_i^k y_{i+1}^k) &= \begin{cases} \frac{8im+12m-k+2}{2}, & \text{ untuk } i = 1 \text{ mod } 3, 1 \leq k \leq m, k \text{ genap} \\ \frac{8im+13m-k+2}{2}, & \text{ untuk } i = 1 \text{ mod } 3, 1 \leq k \leq m, k \text{ ganjil} \end{cases} \\ w_{\beta_1}(x_i^k x_{i+1}^k) &= 8im + 13m + 2k + 1 \text{ untuk } i = 1 \text{ mod } 3, 1 \leq k \leq m, \\ w_{\beta_1}(x_i^k y_i^k) &= \begin{cases} \frac{8im+8m-k+3}{2}, & \text{ untuk } i = 2 \text{ mod } 3, 1 \leq k \leq m, k \text{ ganjil} \\ \frac{8im+9m-k+2}{2}, & \text{ untuk } i = 2 \text{ mod } 3, 1 \leq k \leq m, k \text{ genap} \end{cases} \\ w_{\beta_1}(x_i^k x_{i+2}^k) &= \begin{cases} \frac{8im+18m-k+2}{2}, & \text{ untuk } i = 1 \text{ mod } 3, 1 \leq k \leq m, k \text{ genap} \\ \frac{8im+19m-k+2}{2}, & \text{ untuk } i = 1 \text{ mod } 3, 1 \leq k \leq m, k \text{ ganjil} \end{cases} \\ w_{\beta_1}(x_i^k y_{i+1}^k) &= 8im + 13m + 2k + 1 \text{ untuk } i = 2 \text{ mod } 3, 1 \leq k \leq m \\ w_{\beta_1}(x_i^k x_{i+1}^k) &= \begin{cases} \frac{8im+14m-k+3}{2}, & \text{ untuk } i = 2 \text{ mod } 3, 1 \leq k \leq m, k \text{ ganjil} \\ \frac{8im+15m-k+3}{2}, & \text{ untuk } i = 2 \text{ mod } 3, 1 \leq k \leq m, k \text{ genap} \end{cases}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 w_{\beta_1}(x_i^k y_i^k) &= \begin{cases} \frac{8im+8m-k+2}{2}, & \text{untuk } i = 3 \bmod 3, 1 \leq k \leq m, k \text{ genap} \\ \frac{8im+9m-k+2}{2}, & \text{untuk } i = 3 \bmod 3, 1 \leq k \leq m, k \text{ ganjil} \end{cases} \\
 w_{\beta_1}(x_i^k x_{i+2}^k) &= 8im + 17m + 2k + 1 \text{ untuk } i = 2 \bmod 3, 1 \leq k \leq m, \\
 w_{\beta_1}(x_i^k y_{i+1}^k) &= \begin{cases} \frac{8im+12m-k+5}{2}, & \text{untuk } i = 3 \bmod 3, 1 \leq k \leq m, k \text{ ganjil} \\ \frac{8im+13m-k+3}{2}, & \text{untuk } i = 3 \bmod 3, 1 \leq k \leq m, k \text{ genap} \end{cases} \\
 w_{\beta_1}(x_i^k x_{i+1}^k) &= \begin{cases} \frac{8im+14m-k+1}{2}, & \text{untuk } i = 3 \bmod 3, 1 \leq k \leq m, k \text{ genap} \\ \frac{8im+15m-k+2}{2}, & \text{untuk } i = 3 \bmod 3, 1 \leq k \leq m, k \text{ ganjil} \end{cases} \\
 w_{\beta_1}(x_i^k x_{i+2}^k) &= \begin{cases} \frac{8im+18m-k+3}{2}, & \text{untuk } i = 3 \bmod 3, 1 \leq k \leq m, k \text{ ganjil} \\ \frac{8im+19m-k+3}{2}, & \text{untuk } i = 3 \bmod 3, 1 \leq k \leq m, k \text{ genap} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Rumus diatas dapat direduksi menjadi:

$$\begin{aligned}
 w_{\beta_1}(e^k c^k) &= \frac{(12+1+(-1)^k)m+2k+6}{4}; \text{ untuk } 1 \leq k \leq m \\
 w_{\beta_1}(b^k c^k) &= \frac{(18-1+(-1)^k)m-2k+4}{4}; \text{ untuk } 1 \leq k \leq m \\
 w_{\beta_1}(c^k y_1^k) &= \frac{(24+1+(-1)^k)m-2k+6}{4}; \text{ untuk } 1 \leq k \leq m \\
 w_{\beta_1}(c^k x_1^k) &= \frac{(30-1+(-1)^k)m-2k+4}{4}; \text{ untuk } 1 \leq k \leq m \\
 w_{\beta_1}(c^k x_2^k) &= \frac{(36+1+(-1)^i)m-2k+10}{4}; \text{ untuk } 1 \leq k \leq m \\
 w_{\beta_1}(x_i^k y_{i+1}^k) &= \frac{(26-1+(-1)^k)m+16im-2k+4}{4}; \text{ untuk } i = 1 \bmod 3, 1 \leq k \leq m \\
 w_{\beta_1}(x_i^k y_i^k) &= \frac{16im+(8+1+(-1)^k)m-2k+6-(1+(-1)^k)}{4}; \text{ untuk } i = 2 \bmod 3, \\
 & \quad 1 \leq k \leq m \\
 w_{\beta_1}(x_i^k x_{i+2}^k) &= \frac{(38-1+(-1)^k)m+16im-2k+4}{4}; \text{ untuk } i = 1 \bmod 3, 1 \leq k \leq m \\
 w_{\beta_1}(x_i^k x_{i+2}^k) &= \frac{(28+1+(-1)^k)m+16im-2k+6}{4}; \text{ untuk } i = 2 \bmod 3, 1 \leq k \leq m \\
 w_{\beta_1}(x_i^k y_i^k) &= \frac{16im+(18-1+(-1)^k)m-2k+4}{4}; \text{ untuk } i = 3 \bmod 3, 1 \leq k \leq m \\
 w_{\beta_1}(x_i^k y_{i+1}^k) &= \frac{16im+(24+1+(-1)^k)m-2k+10-2(1+(-1)^k)}{4}; \text{ untuk } i = 3 \bmod 3, \\
 & \quad 1 \leq k \leq m \\
 w_{\beta_1}(x_i^k x_{i+1}^k) &= \frac{16im+(30-1+(-1)^k)m-2k+4-(1+(-1)^k)}{4}; \text{ untuk } i = 3 \bmod 3, \\
 & \quad 1 \leq k \leq m \\
 w_{\beta_1}(x_i^k x_{i+2}^k) &= \frac{(36+1+(-1)^k)m-2k+4-(1+(-1)^k)}{4}; \text{ untuk } i = 3 \bmod 3, \\
 & \quad 1 \leq k \leq m
 \end{aligned}$$

Dari himpunan bobot sisi $\{\frac{3m+3}{2}, \dots, \frac{8nm+9m+1}{2}\}$, didapat bobot sisi terkecil terletak pada fungsi $w_{\beta_1}(e^k b^k)$ untuk $k = 2$ yaitu $\frac{3m+3}{2}$. Dan bobot terbesar

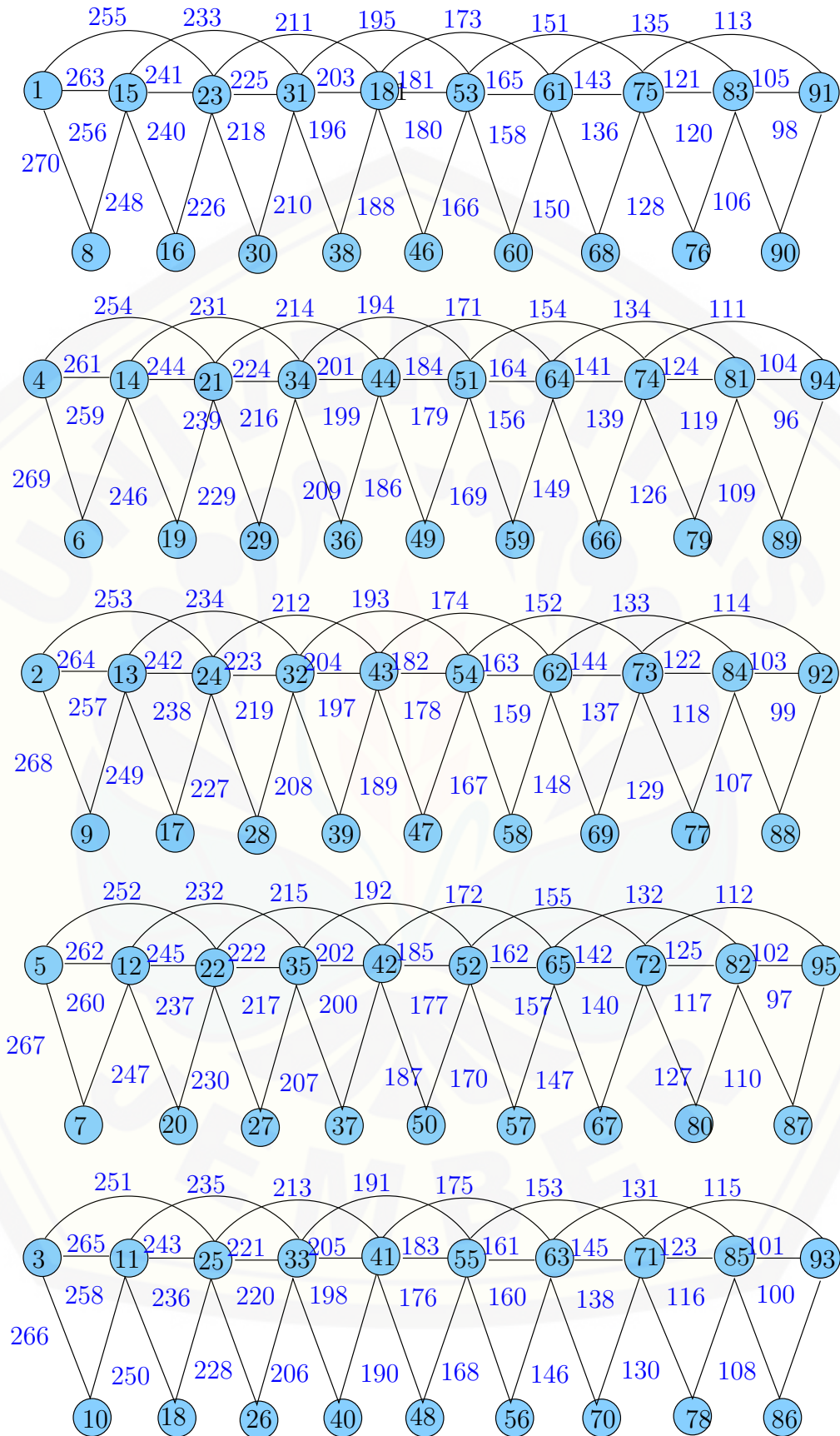
terletak pada $w_{\beta_1}(x_i^k y_i^k)$ untuk $i = n$ dan $k = 1$ yaitu $\frac{8nm+9m+1}{2}$. Dengan menggunakan rumus U_n kita dapat membuktikan hal tersebut, dengan memasukkan nilai $a = \frac{3m+3}{2}$ dan $d=1$. Berdasarkan uraian diatas terbukti bahwa graf mCb_n mempunyai pelabelan $(\frac{3m+3}{2}, 1)$ -sisi antimagic titik untuk $n \geq 3$, $m \geq 3$ dan m ganjil. Gambar 4.7 merupakan contoh pelabelan titik $(9, 1)$ -sisi antimagic. \square

Pada pembuktian lemma diatas, hanya berlaku untuk m ganjil dan ≥ 3 . Setelah membuktikan lemma 4.1.2, dilanjutkan melabeli sisi ketika $d = 0$ beserta fungsinya dan menghitung bobot total beserta fungsinya juga. Untuk melabeli sisi di $d = 0$, dimulai dari melabeli bobot sisi terbesar sampai bobot sisi terkecil.

Teorema 4.1.4. *Ada pelabelan total super $(\frac{12nm+15m+3}{2}, 0)$ -sisi antimagic pada gabungan saling lepas dari graf sisir mCb_n untuk $n \geq 3$, $m \geq 3$ dan m ganjil.*

Bukti. Menggunakan label titik pada lemma 4.7 untuk melabeli titik dari gabungan graf sisir sehingga fungsi titik β_1 =fungsi titik β_2 . Selanjutnya melabeli sisi dan menentukan fungsi sisi. Didefinsikan W_{β_2} adalah fungsi bobot total ketika $d = 0$. Bobot total didapat dari menjumlahkan bobot sisi dan label dua titik yang mengapit sisi tersebut. Berikut fungsi sisi dari β_2 dan fungsi bobot total W_{β_2} .

$$\begin{aligned} \beta_2(x_i^k y_i^k) &= \begin{cases} \frac{12nm-8im+6m+k}{2}, & \text{untuk } i = 2 \text{ mod } 3, 1 \leq k \leq m, k \text{ genap} \\ \frac{12nm-8im+7m+k}{2} & \text{untuk } i = 2 \text{ mod } 3, 1 \leq k \leq m, k \text{ ganjil} \end{cases} \\ \beta_2(x_i^k x_{i+1}^k) &= 6nm - 4im + m - k + 1 \text{ untuk } i = 1 \text{ mod } 3, 1 \leq k \leq m, \\ \beta_2(x_i^k y_{i+1}^k) &= \begin{cases} \frac{12nm-8im+2m+k+1}{2}, & \text{untuk } i = 1 \text{ mod } 3, 1 \leq k \leq m, k \text{ ganjil} \\ \frac{12nm-8im+3m+k+1}{2}, & \text{untuk } i = 1 \text{ mod } 3, 1 \leq k \leq m, k \text{ genap} \end{cases} \\ \beta_2(x_i^k x_{i+2}^k) &= \begin{cases} \frac{12nm-8im-4m+k}{2}, & \text{untuk } i = 3 \text{ mod } 3, 1 \leq k \leq m, k \text{ genap} \\ \frac{12nm-8im-3m+k}{2}, & \text{untuk } i = 3 \text{ mod } 3, 1 \leq k \leq m, k \text{ ganjil} \end{cases} \\ \beta_2(x_i^k y_i^k) &= 6nm - 4im + 4m - k + 1 \text{ untuk } i = 1 \text{ mod } 3, 1 \leq k \leq m, \\ \beta_2(x_i^k x_{i+1}^k) &= \begin{cases} \frac{12nm-8im+k+1}{2}, & \text{untuk } i = 3 \text{ mod } 3, 1 \leq k \leq m, k \text{ ganjil} \\ \frac{12nm-8im+m+k+1}{2}, & \text{untuk } i = 3 \text{ mod } 3, 1 \leq k \leq m, k \text{ genap} \end{cases} \end{aligned}$$



Gambar 4.8 SEATL dari $5Cb_8$ ketika $d = 0$

$$\begin{aligned}
 \beta_2(x_i^k y_{i+1}^k) &= \begin{cases} \frac{12nm-8im+2m+k}{2}, & \text{untuk } i = 3 \bmod 3, 1 \leq k \leq m, k \text{ genap} \\ \frac{12nm-8im+3m+k}{2}, & \text{untuk } i = 3 \bmod 3, 1 \leq k \leq m, k \text{ ganjil} \end{cases} \\
 \beta_2(x_i^k x_{i+2}^k) &= 6nm - 4im - m - k + 1 \text{ untuk } i = 2 \bmod 3, 1 \leq k \leq m, \\
 \beta_2(x_i^k y_i^k) &= \begin{cases} \frac{12nm-8im+6m+k+1}{2}, & \text{untuk } i = 3 \bmod 3, 1 \leq k \leq m, k \text{ ganjil} \\ \frac{12nm-8im+7m+k+1}{2}, & \text{untuk } i = 3 \bmod 3, 1 \leq k \leq m, k \text{ genap} \end{cases} \\
 \beta_2(x_i^k x_{i+1}^k) &= \begin{cases} \frac{12nm-8im+k}{2}, & \text{untuk } i = 2 \bmod 3, 1 \leq k \leq m, k \text{ genap} \\ \frac{12nm-8im+m+k}{2}, & \text{untuk } i = 2 \bmod 3, 1 \leq k \leq m, k \text{ ganjil} \end{cases} \\
 \beta_2(x_i^k y_{i+1}^k) &= 6nm - 4im + 2m - k + 1 \text{ untuk } i = 2 \bmod 3, 1 \leq k \leq m, \\
 \beta_2(x_i^k x_{i+2}^k) &= \begin{cases} \frac{12nm-8im-4m+k+1}{2}, & \text{untuk } i = 1 \bmod 3, 1 \leq k \leq m, k \text{ ganjil} \\ \frac{12nm-8im-3m+k+1}{2}, & \text{untuk } i = 1 \bmod 3, 1 \leq k \leq m, k \text{ genap} \end{cases} \\
 \beta_2(c^k x_2^k) &= \begin{cases} \frac{12nm-4m+k}{2}, & \text{untuk } 1 \leq k \leq m, k \text{ genap} \\ \frac{12nm-3m+k}{2}, & \text{untuk } 1 \leq k \leq m, k \text{ ganjil} \end{cases} \\
 \beta_2(c^k x_1^k) &= \begin{cases} \frac{12nm+m+k+1}{2}, & \text{untuk } 1 \leq k \leq m, k \text{ ganjil} \\ \frac{12nm+2m+k}{2}, & \text{untuk } 1 \leq k \leq m, k \text{ genap} \end{cases} \\
 \beta_2(c^k y_1^k) &= \begin{cases} \frac{12nm+2m+k}{2}, & \text{untuk } 1 \leq k \leq m, k \text{ genap} \\ \frac{12nm+3m+k}{2}, & \text{untuk } 1 \leq k \leq m, k \text{ ganjil} \end{cases} \\
 \beta_2(e^k x_1^k) &= 6nm + 3m - k + 1 \text{ untuk } 1 \leq k \leq m, \\
 \beta_2(b^k c^k) &= \begin{cases} \frac{12nm+6m+k+1}{2}, & \text{untuk } 1 \leq k \leq m, k \text{ ganjil} \\ \frac{12nm+7m+k+1}{2}, & \text{untuk } 1 \leq k \leq m, k \text{ genap} \end{cases} \\
 \beta_2(e^k c^k) &= \begin{cases} \frac{12nm+8m+k}{2}, & \text{untuk } 1 \leq k \leq m, k \text{ genap} \\ \frac{12nm+9m+k}{2}, & \text{untuk } 1 \leq k \leq m, k \text{ ganjil} \end{cases} \\
 \beta_2(e^k b^k) &= 6nm + 6m - k + 1 \text{ untuk } 1 \leq k \leq m
 \end{aligned}$$

Rumus diatas dapat direduksi menjadi:

$$\begin{aligned}
 \beta_2(x_i^k y_i^k) &= \frac{(14+1(-1)^k)m+24nm-16im+2k}{4}; \text{ untuk } i = 2 \bmod 3, 1 \leq k \leq m \\
 \beta_2(x_i^k y_{i+1}^k) &= \frac{24nm-16im+(4+1+(-1)^k)m+2k}{4}; \text{ untuk } i = 1 \bmod 3, 1 \leq k \leq m \\
 \beta_2(y_i^k) &= \frac{24nm-16im+(4+1+(-1)^k)m+2k}{4}; \text{ untuk } i = 3 \bmod 3, 1 \leq k \leq m
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \beta_2(x_i^k x_{i+1}^k) &= \frac{24nm-16im-(1+(-1)^k)m+2k+2}{4}; \text{ untuk } i = 3 \bmod 3, 1 \leq k \leq m \\
 \beta_2(x_i^k y_{i+1}^k) &= \frac{24nm-16im+(6-1+(-1)^k)m+2k}{4}; \text{ untuk } i = 3 \bmod 3, 1 \leq k \leq m \\
 \beta_2(x_i^k y_i^k) &= \frac{24nm-16im+(12+1+(-1)^k)m+2k+2}{4}; \text{ untuk } i = 3 \bmod 3, 1 \leq k \leq m \\
 \beta_2(x_i^k x_{i+1}^k) &= \frac{24nm-16im+(2-1+(-1)^k)m+2k}{4}; \text{ untuk } i = 2 \bmod 3, 1 \leq k \leq m \\
 \beta_2(x_i^k x_{i+2}^k) &= \frac{24nm-16im+(8-1+(-1)^k)m+2k+2}{4}; \text{ untuk } i = 1 \bmod 3, 1 \leq k \leq m \\
 \beta_2(c^k x_2^k) &= \frac{24nm-(6+1+(-1)^k)m+2k}{4}; \text{ untuk } 1 \leq k \leq m \\
 \beta_2(c^k x_1^k) &= \frac{24nm-(2+1+(-1)^k)m+2k+2}{4}; \text{ untuk } 1 \leq k \leq m \\
 \beta_2(c^k y_1^k) &= \frac{24nm+(6-1+(-1)^k)m+2k}{4}; \text{ untuk } 1 \leq k \leq m \\
 \beta_2(b^k c^k) &= \frac{24nm+(12+1+(-1)^k)m+2}{4}; \text{ untuk } 1 \leq k \leq m \\
 \beta_2(e^k c^k) &= \frac{24nm+(18-1+(-1)^k)m+2k}{4}; \text{ untuk } 1 \leq k \leq m
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\beta_2}(e^k b^k) &= \{w_{\beta_1}(e^k b^k) + \beta_2(e^k b^k); \text{ untuk } 1 \leq k \leq m, \} \\
 &= \left(\frac{3m+2k+1}{2} + 6nm + 6m - k + 1\right) \\
 &= \frac{3m+1+2k+12nm+12m-2k+2}{2} \\
 &= \frac{12nm+15m+3}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\beta_2}(e^k c^k) &= \{w_{\beta_1}(e^k c^k) + \beta_2(e^k c^k); \text{ untuk } 1 \leq k \leq m, k \text{ ganjil}\} \\
 &= \left(\frac{6m-k+3}{2}\right) + \left(\frac{12nm+9m+k}{2}\right) \\
 &= \frac{12nm+15m+3}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\beta_2}(e^k c^k) &= \{w_{\beta_1}(e^k c^k) + \beta_2(e^k c^k); \text{ untuk } 1 \leq k \leq m, k \text{ genap}\} \\
 &= \left(\frac{7m-k+3}{2}\right) + \left(\frac{12nm+8m+k}{2}\right) \\
 &= \frac{12nm+15m+3}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\beta_2}(b^k c^k) &= \{w_{\beta_1}(b^k c^k) + \beta_2(b^k c^k); \text{ untuk } 1 \leq k \leq m, k \text{ genap}\} \\
 &= \left(\frac{8m-k+2}{2}\right) + \left(\frac{12nm+7m+k+1}{2}\right) \\
 &= \frac{12nm+15m+3}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\beta_2}(b^k c^k) &= \{w_{\beta_1}(b^k c^k) + \beta_2(b^k c^k); \text{ untuk } 1 \leq k \leq m, k \text{ ganjil}\} \\
 &= \left(\frac{9m-k+2}{2}\right) + \left(\frac{12nm+6m+k+1}{2}\right) \\
 &= \frac{12nm+15m+3}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\beta_2}(e^k x_1^k) &= \{w_{\beta_1}(e^k x_1^k) + \beta_2(a^k x_1^k); \text{ untuk } 1 \leq k \leq m, \} \\
 &= \left(\frac{9m+2k+1}{2}\right) + \left(\frac{12nm+6m-2k+2}{2}\right) \\
 &= \frac{12nm+15m+3}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\beta_2}(c^k y_1^k) &= \{w_{\beta_1}(c^k y_1^k) + \beta_2(c^k y_1^k); \text{ untuk } 1 \leq k \leq m, k \text{ ganjil}\} \\
 &= \left(\frac{12m-k+3}{2}\right) + \left(\frac{12nm+3m+k}{2}\right) \\
 &= \frac{12nm+15m+3}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\beta_2}(c^k y_1^k) &= \{w_{\beta_1}(c^k y_1^k) + \beta_2(c^k y_1^k); \text{ untuk } 1 \leq k \leq m, k \text{ genap}\} \\
 &= \left(\frac{13m-k+3}{2}\right) + \left(\frac{12nm+2m+k}{2}\right) \\
 &= \frac{12nm+15m+3}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\beta_2}(c^k x_1^k) &= \{w_{\beta_1}(c^k x_1^k) + \beta_2(c^k x_1^k); \text{ untuk } 1 \leq k \leq m, k \text{ genap}\} \\
 &= \left(\frac{14m-k+2}{2}\right) + \left(\frac{12nm+m+k+1}{2}\right) \\
 &= \frac{12nm+15m+3}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\beta_2}(c^k x_1^k) &= \{w_{\beta_1}(c^k x_1^k) + \beta_2(c^k x_1^k); \text{ untuk } 1 \leq k \leq m, k \text{ ganjil}\} \\
 &= \left(\frac{15m-k+2}{2}\right) + \left(\frac{12nm+k+1}{2}\right) \\
 &= \frac{12nm+15m+3}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\beta_2}(x_i^k y_i^k) &= \{w_{\beta_1}(x_i^k y_i^k) + \beta_2(x_i^k y_i^k); \text{ untuk } i = 1 \text{ mod } 3, 1 \leq k \leq m, \} \\
 &= \left(\frac{8im+7m+2k+1}{2}\right) + \left(\frac{12nm-8im+8m-2k+2}{2}\right) \\
 &= \frac{12nm+15m+3}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\beta_2}(c^k x_2^k) &= \{w_{\beta_1}(c^k x_2^k) + \beta_2(c^k x_2^k); \text{ untuk } 1 \leq k \leq m, k \text{ ganjil}\} \\
 &= \left(\frac{18m-k+3}{2}\right) + \left(\frac{12nm-3m+k}{2}\right) \\
 &= \frac{12nm+15m+3}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\beta_2}(c^k x_2^k) &= \{w_{\beta_1}(c^k x_2^k) + \beta_2(c^k x_2^k); \text{ untuk } 1 \leq k \leq m, k \text{ genap}\} \\
 &= \left(\frac{19m-k+3}{2}\right) + \left(\frac{12nm-4m+k}{2}\right) \\
 &= \frac{12nm+15m+3}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\beta_2}(x_i^k y_{i+1}^k) &= \{w_{\beta_1}(x_i^k y_{i+1}^k) + \beta_2(x_i^k y_{i+1}^k); \text{ untuk } i = 1 \text{ mod } 3, \\
 &\quad 1 \leq k \leq m, k \text{ genap}\} \\
 &= \left(\frac{8im+12m-k+2}{2}\right) + \left(\frac{12nm-8im+3m+k+1}{2}\right) \\
 &= \frac{12nm+15m+3}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\beta_2}(x_i^k y_{i+1}^k) &= \{w_{\beta_1}(x_i^k y_{i+1}^k) + \beta_2(x_i^k y_{i+1}^k); \text{ untuk } i = 1 \text{ mod } 3, \\
 &\quad 1 \leq k \leq m, k \text{ ganjil}\} \\
 &= \left(\frac{8im+13m-k+2}{2}\right) + \left(\frac{12nm-8im+2m+k+1}{2}\right) \\
 &= \frac{12nm+15m+3}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{\beta_2}(x_i^k x_{i+1}^k) &= \{w_{\beta_1}(x_i^k x_{i+1}^k) + \beta_2(x_i^k x_{i+1}^k); \text{ untuk } i = 1 \bmod 3, 1 \leq k \leq m\} \\ &= \left(\frac{8im+13m+2k+1}{2}\right) + \left(\frac{12nm-8im+2m-2k+2}{2}\right) \\ &= \frac{12nm+15m+3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{\beta_2}(x_i^k y_i^k) &= \{w_{\beta_1}(x_i^k y_i^k) + \beta_2(x_i^k y_i^k); \text{ untuk } i = 2 \bmod 3, 1 \leq k \leq m, k \text{ ganjil}\} \\ &= \left(\frac{8im+8m-k+3}{2}\right) + \left(\frac{12nm-8im+7m+k}{2}\right) \\ &= \frac{12nm+15m+3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{\beta_2}(x_i^k y_i^k) &= \{w_{\beta_1}(x_i^k y_i^k) + \beta_2(x_i^k y_i^k); \text{ untuk } i = 2 \bmod 3, 1 \leq k \leq m, k \text{ genap}\} \\ &= \left(\frac{8im+9m-k+3}{2}\right) + \left(\frac{12nm-8im+6m+k}{2}\right) \\ &= \frac{12nm+15m+3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{\beta_2}(x_i^k x_{i+2}^k) &= \{w_{\beta_1}(x_i^k x_{i+2}^k) + \beta_2(x_i^k x_{i+2}^k); \text{ untuk } i = 1 \bmod 3, \\ &\quad 1 \leq k \leq m, k \text{ genap}\} \\ &= \left(\frac{8im+18m-k+2}{2}\right) + \left(\frac{12nm-8im-3m+k+1}{2}\right) \\ &= \frac{12nm+15m+3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{\beta_2}(x_i^k x_{i+2}^k) &= \{w_{\beta_1}(x_i^k x_{i+2}^k) + \beta_2(x_i^k x_{i+2}^k); \text{ untuk } i = 1 \bmod 3, \\ &\quad 1 \leq k \leq m, k \text{ ganjil}\} \\ &= \left(\frac{8im+19m-k+2}{2}\right) + \left(\frac{12nm-8im-4m+k+1}{2}\right) \\ &= \frac{12nm+15m+3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{\beta_2}(x_i^k y_{i+1}^k) &= \{w_{\beta_1}(x_i^k y_{i+1}^k) + \beta_2(x_i^k y_{i+1}^k); \text{ untuk } i = 1 \bmod 3, 1 \leq k \leq m\} \\ &= \left(\frac{8im+11m+2k+1}{2}\right) + \left(\frac{12nm-8im+4m-2k+2}{2}\right) \\ &= \frac{12nm+15m+3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{\beta_2}(x_i^k x_{i+1}^k) &= \{w_{\beta_1}(x_i^k x_{i+1}^k) + \beta_2(x_i^k x_{i+1}^k); \text{ untuk } i = 2 \bmod 3, \\ &\quad 1 \leq k \leq m, k \text{ ganjil}\} \\ &= \left(\frac{8im+14m-k+3}{2}\right) + \left(\frac{12nm-8im+m+k+1}{2}\right) \\ &= \frac{12nm+15m+3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{\beta_2}(x_i^k x_{i+1}^k) &= \{w_{\beta_1}(x_i^k x_{i+1}^k) + \beta_2(x_i^k x_{i+1}^k); \text{ untuk } i = 2 \bmod 3, \\ &\quad 1 \leq k \leq m, k \text{ genap}\} \\ &= \left(\frac{8im+15m-k+3}{2}\right) + \left(\frac{12nm-8im+k}{2}\right) \\ &= \frac{12nm+15m+3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\beta_2}(x_i^k y_i^k) &= \{w_{\beta_1}(x_i^k y_i^k) + \beta_2(x_i^k y_i^k); \text{ untuk } i = 3 \bmod 3, \\
 &\quad 1 \leq k \leq m, k \text{ genap}\} \\
 &= \left(\frac{8im+8m-k+2}{2}\right) + \left(\frac{12nm-8im+7m+k+1}{2}\right) \\
 &= \frac{12nm+15m+3}{2} \\
 W_{\beta_2}(x_i^k y_i^k) &= \{w_{\beta_1}(x_i^k y_i^k) + \beta_2(x_i^k y_i^k); \text{ untuk } i = 3 \bmod 3, \\
 &\quad 1 \leq k \leq m, k \text{ ganjil}\} \\
 &= \left(\frac{8im+9m-k+2}{2}\right) + \left(\frac{12nm-8im+6m+k+1}{2}\right) \\
 &= \frac{12nm+15m+3}{2} \\
 W_{\beta_2}(x_i^k x_{i+2}^k) &= \{w_{\beta_1}(x_i^k x_{i+2}^k) + \beta_2(x_i^k x_{i+2}^k); \text{ untuk } i = 2 \bmod 3, 1 \leq k \leq m\} \\
 &= \left(\frac{8im+17m+2k+1}{2}\right) + \left(\frac{12nm-8im-2m-2k+2}{2}\right) \\
 &= \frac{12nm+15m+3}{2} \\
 W_{\beta_2}(x_i^k y_{i+1}^k) &= \{w_{\beta_1}(x_i^k y_{i+1}^k) + \beta_2(x_i^k y_{i+1}^k); \text{ untuk } i = 3 \bmod 3, \\
 &\quad 1 \leq k \leq m, k \text{ ganjil}\} \\
 &= \left(\frac{8im+12m-k+3}{2}\right) + \left(\frac{12nm-8im+3m+k}{2}\right) \\
 &= \frac{12nm+15m+3}{2} \\
 W_{\beta_2}(x_i^k y_{i+1}^k) &= \{w_{\beta_1}(x_i^k y_{i+1}^k) + \beta_2(x_i^k y_{i+1}^k); \text{ untuk } i = 3 \bmod 3, \\
 &\quad 1 \leq k \leq m, k \text{ genap}\} \\
 &= \left(\frac{8im+13m-k+3}{2}\right) + \left(\frac{12nm-8im+2m+k}{2}\right) \\
 &= \frac{12nm+15m+3}{2} \\
 W_{\beta_2}(x_i^k x_{i+1}^k) &= \{w_{\beta_1}(x_i^k x_{i+1}^k) + \beta_2(x_i^k x_{i+1}^k); \text{ untuk } i = 3 \bmod 3, \\
 &\quad 1 \leq k \leq m, k \text{ genap}\} \\
 &= \left(\frac{8im+14m-k+2}{2}\right) + \left(\frac{12nm-8im+m+k+1}{2}\right) \\
 &= \frac{12nm+15m+3}{2} \\
 W_{\beta_2}(x_i^k x_{i+1}^k) &= \{w_{\beta_1}(x_i^k x_{i+1}^k) + \beta_2(x_i^k x_{i+1}^k); \text{ untuk } i = 3 \bmod 3, \\
 &\quad 1 \leq k \leq m, k \text{ ganjil}\} \\
 &= \left(\frac{8im+15m-k+2}{2}\right) + \left(\frac{12nm-8im+k+1}{2}\right) \\
 &= \frac{12nm+15m+3}{2} \\
 W_{\beta_2}(x_i^k x_{i+2}^k) &= \{w_{\beta_1}(x_i^k x_{i+2}^k) + \beta_2(x_i^k x_{i+2}^k); \text{ untuk } i = 3 \bmod 3, \\
 &\quad 1 \leq k \leq m, k \text{ ganjil}\} \\
 &= \left(\frac{8im+18m-k+3}{2}\right) + \left(\frac{12nm-8im-3m+k}{2}\right) \\
 &= \frac{12nm+15m+3}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\beta_2}(x_i^k x_{i+2}^k) &= \{w_{\beta_1}(x_i^k x_{i+2}^k) + \beta_2(x_i^k x_{i+2}^k); \text{ untuk } i = 3 \bmod 3, \\
 &\quad 1 \leq k \leq m, k \text{ genap}\} \\
 &= \left(\frac{8im+19m-k+3}{2}\right) + \left(\frac{12nm-8im-4m+k}{2}\right) \\
 &= \frac{12nm+15m+3}{2}
 \end{aligned}$$

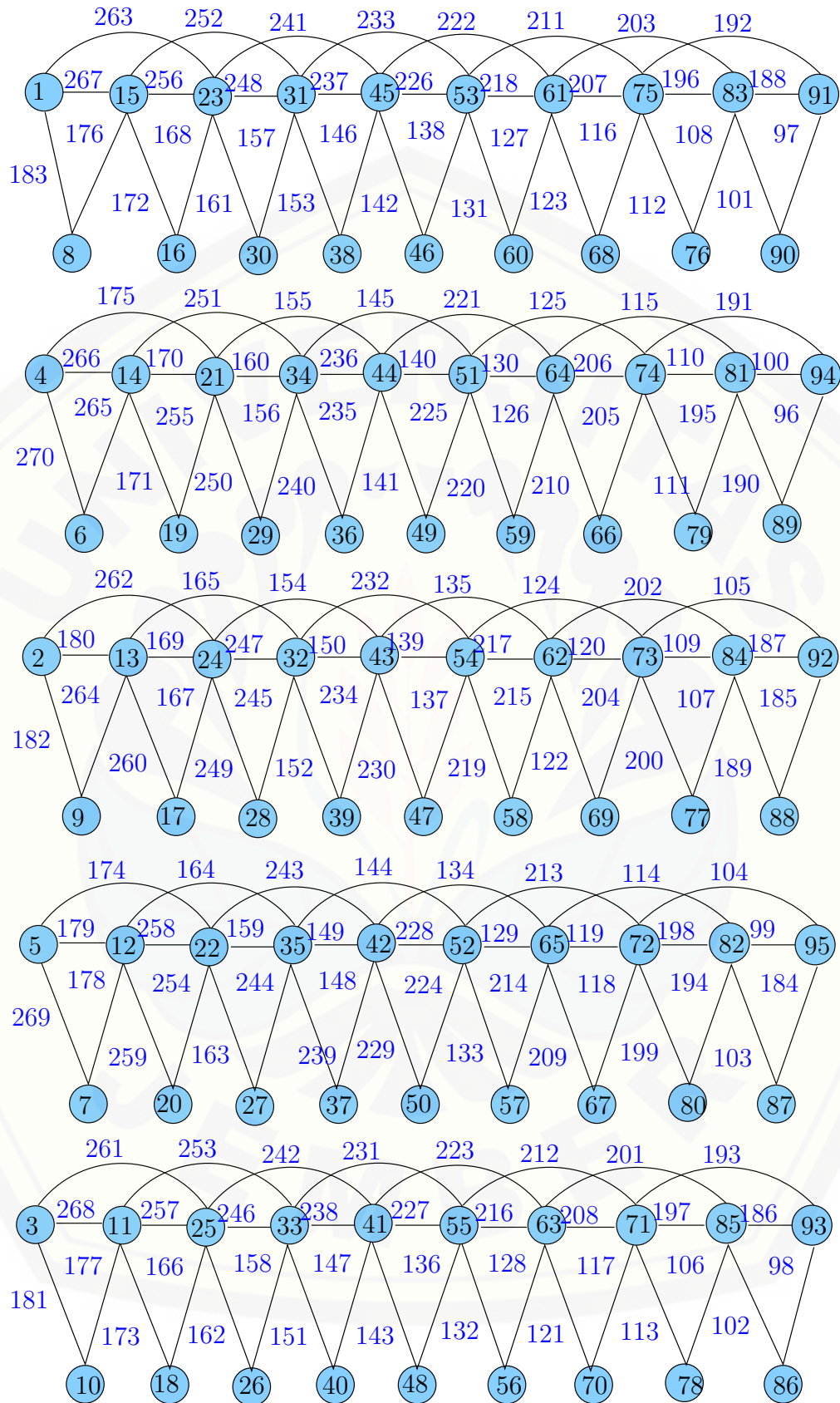
Semua bobot total menghasilkan nilai fungsi yang sama. Hal ini berarti fungsi bobot terkecil dan fungsi bobot terbesar bernilai sama dan nilai $d = 0$. Himpunan bobot total dapat ditulis $W_{\beta_1} = \left\{\frac{12nm+15m+3}{2}, \frac{12nm+15m+3}{2}, \dots, \frac{12nm+15m+3}{2}\right\}$. Sehingga terbukti bahwa gabungan saling lepas graf sisir mCb_n mempunyai pelabelan total super $(\frac{12nm+15m+3}{2}, 0)$ -sisi antimagic untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 3$ serta m ganjil. \square

Pada teorema diatas hanya untuk $m \geq 3$ dan ganjil. Setelah ditemukan pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic pada $d = 0$, dilanjutkan mencari pada $d = 1$. Setiap sisi dilabeli lalu menentukan fungsi setiap sisinya. Kemudian menghitung bobot total beserta fungsinya.

Teorema 4.1.5. *Ada pelabelan total super $(\frac{16nm+24m+8}{2}, 1)$ -sisi antimagic total pada gabungan saling lepas graf sisir mCb_n jika $n \geq 3$, $m \geq 3$ dan m ganjil.*

Bukti. Melabeli setiap titik seperti pada lemma 4.1.2, sehingga fungsi titik bijektif β_1 =fungsi titik bijektif β_3 . Fungsi sisi untuk β_3 adalah:

$$\begin{aligned}
 \beta_3(x_i^k y_i^k) &= \frac{16nm - 8im + 12m + k + 2}{4} \text{ untuk } i = 2 \bmod 3, k = 2 \bmod 4 \\
 \beta_3(x_i^k y_i^k) &= \frac{16nm - 8im + 13m + k + 2}{4} \text{ untuk } i = 2 \bmod 3, k = 3 \bmod 4 \\
 \beta_3(x_i^k x_{i+1}^k) &= \frac{8nm - 4im + 4m - k + 2}{2} \text{ untuk } i = 1 \bmod 3, k = \text{genap} \\
 \beta_3(x_i^k y_{i+1}^k) &= \frac{16nm - 8im + 8m + k + 3}{4} \text{ untuk } i = 1 \bmod 3, k = 1 \bmod 4 \\
 \beta_3(x_i^k y_{i+1}^k) &= \frac{16nm - 8im + 9m + k + 3}{4} \text{ untuk } i = 1 \bmod 3, k = 2 \bmod 4
 \end{aligned}$$



Gambar 4.9 SEATL dari $5Cb_8$ untuk $d = 1$

$$\begin{aligned}
 \beta_3(x_i^k y_{i+2}^k) &= \frac{16nm - 8im + 2m + k + 2}{4} \text{ untuk } i = 3 \text{ mod } 3, k = 4 \text{ mod } 4 \\
 \beta_3(x_i^k x_{i+2}^k) &= \frac{16nm - 8im + 3m + k + 2}{4} \text{ untuk } i = 3 \text{ mod } 3, k = 1 \text{ mod } 4 \\
 \beta_3(x_i^k y_i^k) &= \frac{16nm - 8im + 14m - 2k + 4}{4} \text{ untuk } i = 1 \text{ mod } 3, k = \text{ ganjil} \\
 \beta_3(x_i^k x_{i+1}^k) &= \frac{16nm - 8im + 6m + k + 3}{4} \text{ untuk } i = 3 \text{ mod } 3, k = 3 \text{ mod } 4 \\
 \beta_3(x_i^k x_{i+1}^k) &= \frac{16nm - 8im + 7m + k + 3}{4} \text{ untuk } i = 3 \text{ mod } 3, k = 4 \text{ mod } 4 \\
 \beta_3(x_i^k x_{i+1}^k) &= \frac{16nm - 8im + 6m + k + 2}{4} \text{ untuk } i = 2 \text{ mod } 3, k = 4 \text{ mod } 4 \\
 \beta_3(x_i^k y_{i+1}^k) &= \frac{16nm - 8im + 8m + k + 2}{4} \text{ untuk } i = 3 \text{ mod } 3, k = 2 \text{ mod } 4 \\
 \beta_3(x_i^k y_{i+1}^k) &= \frac{16nm - 8im + 9m + k + 2}{4} \text{ untuk } i = 3 \text{ mod } 3, k = 3 \text{ mod } 4 \\
 \beta_3(x_i^k x_{i+2}^k) &= \frac{16nm - 8im + 4m - 2k + 4}{4} \text{ untuk } i = 2 \text{ mod } 3, k = \text{ genap} \\
 \beta_3(x_i^k y_i^k) &= \frac{16nm - 8im + 12m + k + 3}{4} \text{ untuk } i = 3 \text{ mod } 3, k = 1 \text{ mod } 4 \\
 \beta_3(x_i^k y_i^k) &= \frac{16nm - 8im + 13m + k + 3}{4} \text{ untuk } i = 3 \text{ mod } 3, k = 2 \text{ mod } 4 \\
 \beta_3(x_i^k x_{i+1}^k) &= \frac{16nm - 8im + 7m + k + 2}{4} \text{ untuk } i = 2 \text{ mod } 3, k = 1 \text{ mod } 4 \\
 \beta_3(x_i^k y_{i+1}^k) &= \frac{16nm - 8im + 10m - 2k + 4}{4} \text{ untuk } i = 2 \text{ mod } 3, k = \text{ ganjil} \\
 \beta_3(x_i^k x_{i+2}^k) &= \frac{16nm - 8im + 2m + k + 3}{4} \text{ untuk } i = 1 \text{ mod } 3, k = 3 \text{ mod } 4 \\
 \beta_3(x_i^k x_{i+2}^k) &= \frac{16nm - 8im + 3m + k + 3}{4} \text{ untuk } i = 1 \text{ mod } 3, k = 4 \text{ mod } 4 \\
 \beta_3(c^k x_2^k) &= \frac{16nm + 2m + k + 2}{4} \text{ untuk } k = 4 \text{ mod } 4 \\
 \beta_3(c^k x_2^k) &= \frac{16nm + 3m + k + 2}{4} \text{ untuk } k = 1 \text{ mod } 4 \\
 \beta_3(c^k x_1^k) &= \frac{16nm + 6m + k + 3}{4} \text{ untuk } k = 3 \text{ mod } 4 \\
 \beta_3(c^k x_1^k) &= \frac{16nm + 7m + k + 3}{4} \text{ untuk } k = 4 \text{ mod } 4 \\
 \beta_3(c^k y_1^k) &= \frac{16nm + 8m + k + 2}{4} \text{ untuk } k = 2 \text{ mod } 4 \\
 \beta_3(c^k y_1^k) &= \frac{16nm + 9m + k + 2}{4} \text{ untuk } k = 3 \text{ mod } 4 \\
 \beta_3(e^k x_1^k) &= \frac{16nm + 12m - 2k + 4}{4} \text{ untuk } k = \text{ genap}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \beta_3(b^k c^k) &= \frac{16nm + 12m + k + 3}{4} \text{ untuk } k = 1 \pmod{4} \\
 \beta_3(b^k c^k) &= \frac{16nm + 13m + k + 3}{4} \text{ untuk } k = 2 \pmod{4} \\
 \beta_3(e^k c^k) &= \frac{16nm + 14m + k + 2}{4} \text{ untuk } k = 4 \pmod{4} \\
 \beta_3(e^k c^k) &= \frac{16nm + 15m + k + 2}{4} \text{ untuk } k = 1 \pmod{4} \\
 \beta_3(e^k b^k) &= \frac{16nm + 18m - 2k + 4}{4} \text{ untuk } k = \text{ganjil} \\
 \beta_3(x_i^k y_i^k) &= \frac{24nm - 8im + 18m + k + 2}{4} \text{ untuk } i = 2 \pmod{3}, k = 4 \pmod{4} \\
 \beta_3(x_i^k y_i^k) &= \frac{24nm - 8im + 19m + k + 2}{4} \text{ untuk } i = 2 \pmod{3}, k = 1 \pmod{4} \\
 \beta_3(x_i^k x_{i+1}^k) &= \frac{24nm - 8im + 14m - 2k + 4}{4} \text{ untuk } i = 1 \pmod{3}, k = \text{ganjil} \\
 \beta_3(x_i^k y_{i+1}^k) &= \frac{24nm - 8im + 14m + k + 3}{4} \text{ untuk } i = 1 \pmod{3}, k = 3 \pmod{4} \\
 \beta_3(x_i^k y_{i+1}^k) &= \frac{24nm - 8im + 15m + k + 3}{4} \text{ untuk } i = 1 \pmod{3}, k = 4 \pmod{4} \\
 \beta_3(x_i^k x_{i+2}^k) &= \frac{24nm - 8im + 8m + k + 2}{4} \text{ untuk } i = 3 \pmod{3}, k = 2 \pmod{4} \\
 \beta_3(x_i^k x_{i+2}^k) &= \frac{24nm - 8im + 9m + k + 2}{4} \text{ untuk } i = 3 \pmod{3}, k = 3 \pmod{4} \\
 \beta_3(x_i^k y_i^k) &= \frac{24nm - 8im + 20m - 2k + 4}{4} \text{ untuk } i = 1 \pmod{3}, k = \text{genap} \\
 \beta_3(x_i^k x_{i+1}^k) &= \frac{24nm - 8im + 12m + k + 3}{4} \text{ untuk } i = 3 \pmod{3}, k = 1 \pmod{4} \\
 \beta_3(x_i^k x_{i+1}^k) &= \frac{24nm - 8im + 13m + k + 3}{4} \text{ untuk } i = 3 \pmod{3}, k = 2 \pmod{4} \\
 \beta_3(x_i^k y_{i+1}^k) &= \frac{24nm - 8im + 14m + k + 2}{4} \text{ untuk } i = 3 \pmod{3}, k = 4 \pmod{4} \\
 \beta_3(x_i^k y_{i+1}^k) &= \frac{24nm - 8im + 15m + k + 2}{4} \text{ untuk } i = 3 \pmod{3}, k = 1 \pmod{4} \\
 \beta_3(x_i^k x_{i+2}^k) &= \frac{24nm - 8im + 10m - 2k + 4}{4} \text{ untuk } i = 2 \pmod{3}, k = \text{ganjil} \\
 \beta_3(x_i^k y_i^k) &= \frac{24nm - 8im + 18m + k + 3}{4} \text{ untuk } i = 3 \pmod{3}, k = 3 \pmod{4} \\
 \beta_3(x_i^k y_i^k) &= \frac{24nm - 8im + 19m + k + 3}{4} \text{ untuk } i = 3 \pmod{3}, k = 4 \pmod{4} \\
 \beta_3(x_i^k x_{i+1}^k) &= \frac{24nm - 8im + 12m + k + 2}{4} \text{ untuk } i = 2 \pmod{3}, k = 2 \pmod{4} \\
 \beta_3(x_i^k x_{i+1}^k) &= \frac{24nm - 8im + 13m + k + 2}{4} \text{ untuk } i = 2 \pmod{3}, k = 3 \pmod{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \beta_3(x_i^k y_{i+1}^k) &= \frac{24nm - 8im + 16m - 2k + 4}{4} \text{ untuk } i = 2 \bmod 3, k = \text{genap} \\
 \beta_3(x_i^k x_{i+2}^k) &= \frac{24nm - 8im + 8m + k + 3}{4} \text{ untuk } i = 1 \bmod 3, k = 1 \bmod 4 \\
 \beta_3(x_i^k x_{i+2}^k) &= \frac{24nm - 8im + 9m + k + 3}{4} \text{ untuk } i = 1 \bmod 3, k = 2 \bmod 4 \\
 \beta_3(c^k x_2^k) &= \frac{24nm + 8m + k + 2}{4} \text{ untuk } k = 2 \bmod 4 \\
 \beta_3(c^k x_2^k) &= \frac{24nm + 9m + k + 2}{4} \text{ untuk } k = 3 \bmod 4 \\
 \beta_3(c^k x_1^k) &= \frac{24nm + 12m + k + 3}{4} \text{ untuk } k = 1 \bmod 4 \\
 \beta_3(c^k x_1^k) &= \frac{24nm + 13m + k + 3}{4} \text{ untuk } k = 2 \bmod 4 \\
 \beta_3(c^k y_1^k) &= \frac{24nm + 14m + k + 2}{4} \text{ untuk } k = 4 \bmod 4 \\
 \beta_3(c^k y_1^k) &= \frac{24nm + 15m + k + 2}{4} \text{ untuk } k = 1 \bmod 4 \\
 \beta_3(a^k x_1^k) &= \frac{24nm + 18m - 2k + 4}{4} \text{ untuk } k = \text{ganjil} \\
 \beta_3(b^k c^k) &= \frac{24nm + 18m + k + 3}{4} \text{ } k = 3 \bmod 4 \\
 \beta_3(b^k c^k) &= \frac{24nm + 19m + k + 3}{4} \text{ } k = 4 \bmod 4 \\
 \beta_3(e^k c^k) &= \frac{24nm + 20m + k + 2}{4} \text{ } k = 2 \bmod 4 \\
 \beta_3(e^k c^k) &= \frac{24nm + 21m + k + 2}{4} \text{ } k = 3 \bmod 4 \\
 \beta_3(e^k b^k) &= \frac{24nm + 24m - 2k + 4}{4} \text{ untuk } k = \text{genap}
 \end{aligned}$$

Fungsi sisi β_3 adalah fungsi bijektif karena $\beta_3 : V(mCb_n) \rightarrow \left\{ \frac{8nm+12m+4}{4}, \dots, \frac{24nm+24m}{4} \right\}$. Didefinisikan W_{β_3} adalah fungsi bobot total di $d=1$.

$$\begin{aligned}
 W_{\beta_3}(x_i^k y_i^k) &= \{w_{\beta_1}(x_i^k y_i^k) + \beta_2(x_i^k y_i^k)\}; \text{ untuk } i = 2 \bmod 3, k = 2 \bmod 4\} \\
 &= \left(\frac{9m+8im-k+3}{2} \right) + \left(\frac{16nm+12m-8im+k+2}{4} \right) \\
 &= \frac{18m+16im-2k+6+16nm+12m-8im+k+2}{4} \\
 &= \frac{16nm+8im+30m-k+8}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\beta_3}(x_i^k y_i^k) &= \{w_{\beta_1}(x_i^k y_i^k) + \beta_3(x_i^k y_i^k); \text{ untuk } i = 2 \bmod 3, k = 3 \bmod 4\} \\
 &= \left(\frac{8im+8m-k+3}{2}\right) + \left(\frac{16nm+13m-8im+k+2}{4}\right) \\
 &= \frac{16im+16m-2k+6+16nm+12m-8im+k+2}{4} \\
 &= \frac{16nm+8im+30m-k+8}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\beta_3}(x_i^k x_{i+1}^k) &= \{w_{\beta_1}(x_i^k x_{i+1}^k) + \beta_3(x_i^k x_{i+1}^k); \text{ untuk } i = 1 \bmod 3, k = \text{genap}\} \\
 &= \left(\frac{8im+13m+2k+1}{2}\right) + \left(\frac{8nm+8m-8im-k+2}{4}\right) \\
 &= \frac{16im+26m+4k+2+8nm+8m-8im+k-2}{4} \\
 &= \frac{8nm+12im+30m+3k+4}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\beta_3}(x_i^k y_{i+1}^k) &= \{w_{\beta_1}(x_i^k y_{i+1}^k) + \beta_3(x_i^k y_{i+1}^k); \text{ untuk } i = 1 \bmod 3, k = 1 \bmod 4\} \\
 &= \left(\frac{8im+13m-k+2}{2}\right) + \left(\frac{16nm+8m-8im+k+3}{4}\right) \\
 &= \frac{16im+26m-2k+4+16nm+8m-8im+k+3}{4} \\
 &= \frac{16nm+8im+34m-k+1}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\beta_3}(x_i^k y_{i+1}^k) &= \{w_{\beta_1}(x_i^k y_{i+1}^k) + \beta_3(x_i^k y_{i+1}^k); \text{ untuk } i = 1 \bmod 3, k = 2 \bmod 4\} \\
 &= \left(\frac{8im+12m-k+2}{2}\right) + \left(\frac{16nm+9m-8im+k+3}{4}\right) \\
 &= \frac{16im+24m-2k+4+16nm+9m-8im+k+3}{4} \\
 &= \frac{16nm+8im+33m-k+7}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\beta_3}(x_i^k x_{i+2}^k) &= \{w_{\beta_1}(x_i^k x_{i+2}^k) + \beta_3(x_i^k x_{i+2}^k); \text{ untuk } i = 3 \bmod 3, k = 4 \bmod 4\} \\
 &= \left(\frac{8im+19m-k+3}{2}\right) + \left(\frac{16nm+2m-8im+k+2}{4}\right) \\
 &= \frac{16im+38m-2k+6+16nm+2m-8im+k+2}{4} \\
 &= \frac{16nm+8im+40m-k+8}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\beta_3}(x_i^k x_{i+2}^k) &= \{w_{\beta_1}(x_i^k x_{i+2}^k) + \beta_3(x_i^k x_{i+2}^k); \text{ untuk } i = 3 \bmod 3, k = 1 \bmod 4\} \\
 &= \left(\frac{8im+18m-k+3}{2}\right) + \left(\frac{16nm+3m-8im+k+2}{4}\right) \\
 &= \frac{16im+36m-2k+6+16nm+3m-8im+k+2}{4} \\
 &= \frac{16nm+8im+39m-k+8}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\beta_3}(x_i^k y_i^k) &= \{w_{\beta_1}(x_i^k y_i^k) + \beta_3(x_i^k y_i^k); \text{ untuk } i = 1 \bmod 3, k = \text{ganjil}\} \\
 &= \left(\frac{8im+7m+2k+1}{2}\right) + \left(\frac{16nm+14m-8im-2k+4}{4}\right) \\
 &= \frac{16im+14m+4k+2+16nm+14m-8im-2k+4}{4} \\
 &= \frac{16nm+8im+28m+2k+6}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\beta_3}(x_i^k x_{i+1}^k) &= \{w_{\beta_1}(x_i^k x_{i+1}^k) + \beta_3(x_i^k x_{i+1}^k); \text{ untuk } i = 3 \text{ mod } 3, k = 3 \text{ mod } 4\} \\
 &= \left(\frac{8im+15m-k+2}{2}\right) + \left(\frac{16nm+6m-8im+k+3}{4}\right) \\
 &= \frac{16im+30m-2k+4+16nm+6m-8im+k+3}{4} \\
 &= \frac{16nm+8im+36m-k+7}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\beta_3}(x_i^k x_{i+1}^k) &= \{w_{\beta_1}(x_i^k x_{i+1}^k) + \beta_3(x_i^k x_{i+1}^k); \text{ untuk } i = 3 \text{ mod } 3, k = 4 \text{ mod } 4\} \\
 &= \left(\frac{8im+14m-k+2}{2}\right) + \left(\frac{16nm+7m-8im+k+3}{4}\right) \\
 &= \frac{16im+28m-2k+4+16nm+7m-8im+k+3}{4} \\
 &= \frac{16nm+8im+35m-k+7}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\beta_3}(x_i^k y_{i+1}^k) &= \{w_{\beta_1}(x_i^k y_{i+1}^k) + \beta_3(x_i^k y_{i+1}^k); \text{ untuk } i = 3 \text{ mod } 3, k = 2 \text{ mod } 4\} \\
 &= \left(\frac{8im+13m-k+3}{2}\right) + \left(\frac{16nm+8m-8im+k+2}{4}\right) \\
 &= \frac{16im+26m-2k+6+16nm+8m-8im+k+2}{4} \\
 &= \frac{16nm+8im+34m-k+8}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\beta_3}(x_i^k y_{i+1}^k) &= \{w_{\beta_1}(x_i^k y_{i+1}^k) + \beta_3(x_i^k y_{i+1}^k); \text{ untuk } i = 3 \text{ mod } 3, k = 3 \text{ mod } 4\} \\
 &= \left(\frac{8im+12m-k+3}{2}\right) + \left(\frac{16nm+9m-8im+k+2}{4}\right) \\
 &= \frac{16im+24m-2k+6+16nm+9m-8im+k+2}{4} \\
 &= \frac{16nm+8im+33m-k+8}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\beta_3}(x_i^k x_{i+2}^k) &= \{w_{\beta_1}(x_i^k x_{i+2}^k) + \beta_3(x_i^k x_{i+2}^k); \text{ untuk } i = 2 \text{ mod } 3, k = \text{genap}\} \\
 &= \left(\frac{8im+17m+2k+1}{2}\right) + \left(\frac{16nm+4m-8im-2k+4}{4}\right) \\
 &= \frac{16im+34m+4k+2+16nm+4m-8im-2k+4}{4} \\
 &= \frac{16nm+8im+38m+2k+6}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\beta_3}(x_i^k y_i^k) &= \{w_{\beta_1}(x_i^k y_i^k) + \beta_3(x_i^k y_i^k); \text{ untuk } i = 3 \text{ mod } 3, k = 1 \text{ mod } 4\} \\
 &= \left(\frac{8im+9m-k+2}{2}\right) + \left(\frac{16nm+12m-8im+k+3}{4}\right) \\
 &= \frac{16im+18m-2k+4+16nm+12m-8im+k+3}{4} \\
 &= \frac{16nm+8im+30m-k+7}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\beta_3}(x_i^k y_i^k) &= \{w_{\beta_1}(x_i^k y_i^k) + \beta_3(x_i^k y_i^k); \text{ untuk } i = 3 \text{ mod } 3, k = 2 \text{ mod } 4\} \\
 &= \left(\frac{8im+8m-k+2}{2}\right) + \left(\frac{16nm+13m-8im+k+3}{4}\right) \\
 &= \frac{16im+16m-2k+4+16nm+13m-8im+k+3}{4} \\
 &= \frac{16nm+8im+29m-k+7}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\beta_3}(x_i^k x_{i+1}^k) &= \{w_{\beta_1}(x_i^k x_{i+1}^k) + \beta_3(x_i^k x_{i+1}^k); \text{ untuk } i = 2 \bmod 3, k = 4 \bmod 4\} \\
 &= \left(\frac{8im+15m-k+3}{2}\right) + \left(\frac{16nm+6m-8im+k+2}{4}\right) \\
 &= \frac{16im+30m-2k+6+16nm+6m-8im+k+2}{4} \\
 &= \frac{16nm+8im+36m-k+8}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\beta_3}(x_i^k x_{i+1}^k) &= \{w_{\beta_1}(x_i^k x_{i+1}^k) + \beta_3(x_i^k x_{i+1}^k); \text{ untuk } i = 2 \bmod 3, k = 1 \bmod 4\} \\
 &= \left(\frac{8im+14m-k+3}{2}\right) + \left(\frac{16nm+7m-8im+k+2}{4}\right) \\
 &= \frac{16im+28m-2k+6+16nm+7m-8im+k+2}{4} \\
 &= \frac{16nm+8im+35m-k+8}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\beta_3}(x_i^k y_{i+1}^k) &= \{w_{\beta_1}(x_i^k y_{i+1}^k) + \beta_3(x_i^k y_{i+1}^k); \text{ untuk } i = 2 \bmod 3, k = \text{ganjil}\} \\
 &= \left(\frac{8im+11m+2k+1}{2}\right) + \left(\frac{16nm+10m-8im-2k+4}{4}\right) \\
 &= \frac{16im+22m+4k+2+16nm+10m-8im-2k+4}{4} \\
 &= \frac{16nm+8im+32m+2k+6}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\beta_3}(x_i^k x_{i+2}^k) &= \{w_{\beta_1}(x_i^k x_{i+2}^k) + \beta_3(x_i^k x_{i+2}^k); \text{ untuk } i = 1 \bmod 3, k = 3 \bmod 4\} \\
 &= \left(\frac{8im+19m-k+2}{2}\right) + \left(\frac{16nm+2m-8im+k+3}{4}\right) \\
 &= \frac{16im+38m-2k+4+16nm+2m-8im+k+3}{4} \\
 &= \frac{16nm+8im+40m-k+7}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\beta_3}(x_i^k x_{i+2}^k) &= \{w_{\beta_1}(x_i^k x_{i+2}^k) + \beta_3(x_i^k x_{i+2}^k); \text{ untuk } i = 1 \bmod 3, k = 4 \bmod 4\} \\
 &= \left(\frac{8im+18m-k+2}{2}\right) + \left(\frac{16nm+3m-8im+k+3}{4}\right) \\
 &= \frac{16im+36m-2k+4+16nm+3m-8im+k+3}{4} \\
 &= \frac{16nm+8im+39m-k+7}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\beta_3}(c^k x_2^k) &= \{w_{\beta_1}(c^k x_2^k) + \beta_3(c^k x_2^k); \text{ untuk } k = 4 \bmod 4\} \\
 &= \left(\frac{19m-k+3}{2}\right) + \left(\frac{16nm+2m+k+2}{4}\right) \\
 &= \frac{38m-2k+6+16nm+2m+k+2}{4} \\
 &= \frac{16nm+40m-k+8}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\beta_1}(c^k x_2^k) &= \{w_{\beta_1}(c^k x_2^k) + \beta_3(c^k x_2^k); \text{ untuk } k = 1 \bmod 4\} \\
 &= \left(\frac{18m-k+3}{2}\right) + \left(\frac{16nm+3m+k+2}{4}\right) \\
 &= \frac{36m-2k+6+16nm+3m+k+2}{4} \\
 &= \frac{16nm+39m-k+8}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\beta_3}(c^k x_1^k) &= \{w_{\beta_1}(c^k x_1^k) + \beta_3(c^k x_1^k); \text{ untuk } k = 3 \text{ mod } 4\} \\
 &= \left(\frac{15m-k+2}{2}\right) + \left(\frac{16nm+6m+k+3}{4}\right) \\
 &= \frac{30m-2k+4+16nm+6m+k+3}{4} \\
 &= \frac{16nm+36m-k+7}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\beta_3}(c^k x_1^k) &= \{w_{\beta_1}(c^k x_1^k) + \beta_3(c^k x_1^k); \text{ untuk } k = 4 \text{ mod } 4\} \\
 &= \left(\frac{14m-k+2}{2}\right) + \left(\frac{16nm+7m+k+3}{4}\right) \\
 &= \frac{28m-2k+4+16nm+7m+k+3}{4} \\
 &= \frac{16nm+35m-k+7}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\beta_3}(c^k y_1^k) &= \{w_{\beta_1}(c^k y_1^k) + \beta_3(c^k y_1^k); \text{ untuk } k = 2 \text{ mod } 4, \} \\
 &= \left(\frac{13m-k+3}{2}\right) + \left(\frac{16nm+8m+k+2}{4}\right) \\
 &= \frac{26m-2k+6+16nm+8m+k+2}{4} \\
 &= \frac{16nm+34m-k+8}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\beta_3}(c^k y_1^k) &= \{w_{\beta_3}(c^k y_1^k) + \beta_1(c^k y_1^k); \text{ untuk } k = 3 \text{ mod } 4\} \\
 &= \left(\frac{12m-k+3}{2}\right) + \left(\frac{16nm+9m+k+2}{4}\right) \\
 &= \frac{24m-2k+6+16nm+9m+k+2}{4} \\
 &= \frac{16nm+33m-k+8}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\beta_3}(e^k x_1^k) &= \{w_{\beta_1}(e^k x_1^k) + \beta_3(e^k x_1^k); \text{ untuk } k = \text{genap}\} \\
 &= \left(\frac{9m+2k+1}{2}\right) + \left(\frac{16nm+12m-2k+4}{4}\right) \\
 &= \frac{18m+4k+2+16nm+12m-2k+4}{4} \\
 &= \frac{16nm+30m+2k+6}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\beta_3}(b^k c^k) &= \{w_{\beta_1}(b^k c^k) + \beta_3(b^k c^k); \text{ untuk } k = 1 \text{ mod } 4\} \\
 &= \left(\frac{9m-k+2}{2}\right) + \left(\frac{16nm+12m+k+3}{4}\right) \\
 &= \frac{18m-2k+4+16nm+12m+k+3}{4} \\
 &= \frac{16nm+30m-k+7}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\beta_3}(b^k c^k) &= \{w_{\beta_1}(b^k c^k) + \beta_3(b^k c^k); \text{ untuk } k = 2 \text{ mod } 4\} \\
 &= \left(\frac{8m-k+2}{2}\right) + \left(\frac{16nm+13m+k+3}{4}\right) \\
 &= \frac{16m-2k+4+16nm+13m+k+3}{4} \\
 &= \frac{16nm+31m-k+7}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\beta_3}(e^k c^k) &= \{w_{\beta_1}(e^k c^k) + \beta_3(e^k c^k); \text{ untuk } k = 4 \text{ mod } 4\} \\
 &= \left(\frac{7m-k+3}{2}\right) + \left(\frac{16nm+14m+k+2}{4}\right) \\
 &= \frac{14m-2k+6+16nm+14m+k+2}{4} \\
 &= \frac{16nm+28m-k+8}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\beta_3}(e^k c^k) &= \{w_{\beta_1}(e^k c^k) + \beta_3(e^k c^k); \text{ untuk } k = 1 \text{ mod } 4\} \\
 &= \left(\frac{6m-k+3}{2}\right) + \left(\frac{16nm+15m+k+2}{4}\right) \\
 &= \frac{12m-2k+6+16nm+15m+k+2}{4} \\
 &= \frac{16nm+27m-k+8}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\beta_3}(e^k b^k) &= \{w_{\beta_1}(e^k b^k) + \beta_3(e^k b^k); \text{ untuk } k = \text{ganjil}\} \\
 &= \left(\frac{3m+2k+1}{2}\right) + \left(\frac{16nm+18m-2k+4}{4}\right) \\
 &= \frac{6m+4k+2+16nm+18m-2k+4}{4} \\
 &= \frac{16nm+24m+2k+6}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\beta_3}(x_i^k y_i^k) &= \{w_{\beta_1}(x_i^k y_i^k) + \beta_3(x_i^k y_i^k); \text{ untuk } k = 4 \text{ mod } 4\} \\
 &= \left(\frac{9m+8im-k+3}{2}\right) + \left(\frac{24nm+18m-8im+k+2}{4}\right) \\
 &= \frac{18m+16im-2k+6+24nm+18m-8im+k+2}{4} \\
 &= \frac{24nm+8im+36m-k+8}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\beta_3}(x_i^k y_i^k) &= \{w_{\beta_1}(x_i^k y_i^k) + \beta_3(x_i^k y_i^k); \text{ untuk } k = 1 \text{ mod } 4\} \\
 &= \left(\frac{8m+8im-k+3}{2}\right) + \left(\frac{24nm+19m-8im+k+2}{4}\right) \\
 &= \frac{16m+16im-2k+6+24nm+19m-8im+k+2}{4} \\
 &= \frac{24nm+8im+35m-k+8}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\beta_3}(x_i^k x_{i+1}^k) &= \{w_{\beta_1}(x_i^k x_{i+1}^k) + \beta_3(x_i^k x_{i+1}^k); \text{ untuk } i = 1 \text{ mod } 3, k = \text{ganjil}\} \\
 &= \left(\frac{13m+8im+2k+1}{2}\right) + \left(\frac{24nm+14m-8im-2k+4}{4}\right) \\
 &= \frac{26m+16im+4k+2+24nm+14m-8im-2k+4}{4} \\
 &= \frac{24nm+8im+40m+2k+6}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\beta_3}(x_i^k y_{i+1}^k) &= \{w_{\beta_1}(x_i^k y_{i+1}^k) + \beta_3(x_i^k y_{i+1}^k); \text{ untuk } i = 1 \text{ mod } 3, k = 1 \text{ mod } 4\} \\
 &= \left(\frac{13m+8im-k+2}{2}\right) + \left(\frac{24nm+14m-8im+k+3}{4}\right) \\
 &= \frac{26m+16im-2k+4+24nm+14m-8im+k+3}{4} \\
 &= \frac{24nm+8im+40m-k+7}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\beta_3}(x_i^k y_{i+1}^k) &= \{w_{\beta_1}(x_i^k y_{i+1}^k) + \beta_3(x_i^k y_{i+1}^k); \text{ untuk } i = 1 \bmod 3, k = 4 \bmod 4\} \\
 &= \left(\frac{12m+8im-k+2}{2}\right) + \left(\frac{24nm+15m-8im+k+3}{4}\right) \\
 &= \frac{24m+16im-2k+4+24nm+15m-8im+k+3}{4} \\
 &= \frac{24nm+8im+39m-k+7}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\beta_3}(x_i^k x_{i+2}^k) &= \{w_{\beta_1}(x_i^k x_{i+2}^k) + \beta_3(x_i^k x_{i+2}^k); \text{ untuk } i = 3 \bmod 3, k = 2 \bmod 4\} \\
 &= \left(\frac{19m+8im-k+3}{2}\right) + \left(\frac{24nm+8m-8im+k+2}{4}\right) \\
 &= \frac{38m+16im-2k+6+24nm+8m-8im+k+2}{4} \\
 &= \frac{24nm+8im+46m-k+8}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\beta_3}(x_i^k x_{i+2}^k) &= \{w_{\beta_1}(x_i^k x_{i+2}^k) + \beta_3(x_i^k x_{i+2}^k); \text{ untuk } i = 3 \bmod 3, k = 3 \bmod 4\} \\
 &= \left(\frac{18m+8im-k+3}{2}\right) + \left(\frac{24nm+9m-8im+k+2}{4}\right) \\
 &= \frac{36m+16im-2k+6+24nm+9m-8im+k+2}{4} \\
 &= \frac{24nm+8im+45m-k+8}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\beta_3}(x_i^k x_i^k) &= \{w_{\beta_1}(x_i^k x_i^k) + \beta_3(x_i^k x_i^k); \text{ untuk } i = 1 \bmod 3, k = \text{genap}\} \\
 &= \left(\frac{7m+8im+2k+1}{2}\right) + \left(\frac{24nm+20m-8im-2k+4}{4}\right) \\
 &= \frac{14m+16im+4k+2+24nm+20m-8im-2k+4}{4} \\
 &= \frac{24nm+8im+34m+2k+6}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\beta_3}(x_i^k x_{i+1}^k) &= \{w_{\beta_1}(x_i^k x_{i+1}^k) + \beta_3(x_i^k x_{i+1}^k); \text{ untuk } i = 3 \bmod 3, k = 1 \bmod 4\} \\
 &= \left(\frac{15m+8im-k+2}{2}\right) + \left(\frac{24nm+12m-8im+k+3}{4}\right) \\
 &= \frac{30m+16im-2k+4+24nm+12m-8im+k+3}{4} \\
 &= \frac{24nm+8im+42m-k+7}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\beta_3}(x_i^k x_{i+1}^k) &= \{w_{\beta_1}(x_i^k x_{i+1}^k) + \beta_3(x_i^k x_{i+1}^k); \text{ untuk } i = 3 \bmod 3, k = 2 \bmod 4\} \\
 &= \left(\frac{14m+8im-k+2}{2}\right) + \left(\frac{24nm+13m-8im+k+3}{4}\right) \\
 &= \frac{28m+16im-2k+4+24nm+13m-8im+k+3}{4} \\
 &= \frac{24nm+8im+41m-k+7}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\beta_3}(x_i^k y_{i+1}^k) &= \{w_{\beta_1}(x_i^k y_{i+1}^k) + \beta_3(x_i^k y_{i+1}^k); \text{ untuk } i = 3 \bmod 3, k = 4 \bmod 4\} \\
 &= \left(\frac{13m+8im-k+3}{2}\right) + \left(\frac{24nm+14m-8im+k+2}{4}\right) \\
 &= \frac{26m+16im-2k+6+24nm+14m-8im+k+2}{4} \\
 &= \frac{24nm+8im+40m-k+8}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\beta_3}(x_i^k y_{i+1}^k) &= \{w_{\beta_1}(x_i^k y_{i+1}^k) + \beta_3(x_i^k y_{i+1}^k); \text{ untuk } i = 3 \bmod 3, k = 1 \bmod 4\} \\
 &= \left(\frac{12m+8im-k+3}{2}\right) + \left(\frac{24nm+15m-8im+k+2}{4}\right) \\
 &= \frac{24m+16im-2k+6+24nm+15m-8im+k+2}{4} \\
 &= \frac{24nm+8im+39m-k+8}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\beta_3}(x_i^k x_{i+2}^k) &= \{w_{\beta_1}(x_i^k x_{i+2}^k) + \beta_3(x_i^k x_{i+2}^k); \text{ untuk } i = 2 \bmod 3, k = \text{ganjil}\} \\
 &= \left(\frac{17m+8im+2k+1}{2}\right) + \left(\frac{24nm+10m-8im-2k+4}{4}\right) \\
 &= \frac{34m+16im+4k+2+24nm+10m-8im-2k+4}{4} \\
 &= \frac{24nm+8im+44m+2k+6}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\beta_3}(x_i^k y_i^k) &= \{w_{\beta_1}(x_i^k y_i^k) + \beta_3(x_i^k y_i^k); \text{ untuk } i = 3 \bmod 3, k = 3 \bmod 4\} \\
 &= \left(\frac{9m+8im-k+2}{2}\right) + \left(\frac{24nm+18m-8im+k+3}{4}\right) \\
 &= \frac{18m+16im-2k+4+24nm+18m-8im+k+3}{4} \\
 &= \frac{24nm+8im+36m-k+7}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\beta_3}(x_i^k y_i^k) &= \{w_{\beta_1}(x_i^k y_i^k) + \beta_3(x_i^k y_i^k); \text{ untuk } i = 3 \bmod 3, k = 4 \bmod 4\} \\
 &= \left(\frac{8m+8im-k+2}{2}\right) + \left(\frac{24nm+19m-8im+k+3}{4}\right) \\
 &= \frac{16m+16im-2k+4+24nm+19m-8im+k+3}{4} \\
 &= \frac{24nm+8im+35m-k+7}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\beta_3}(x_i^k x_{i+1}^k) &= \{w_{\beta_1}(x_i^k x_{i+1}^k) + \beta_3(x_i^k x_{i+1}^k); \text{ untuk } i = 2 \bmod 3, k = 2 \bmod 4\} \\
 &= \left(\frac{15m+8im-k+3}{2}\right) + \left(\frac{24nm+12m-8im+k+2}{4}\right) \\
 &= \frac{30m+16im-2k+6+24nm+12m-8im+k+2}{4} \\
 &= \frac{24nm+8im+42m-k+8}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\beta_3}(x_i^k x_{i+1}^k) &= \{w_{\beta_1}(x_i^k x_{i+1}^k) + \beta_3(x_i^k x_{i+1}^k); \text{ untuk } i = 2 \bmod 3, k = 3 \bmod 4\} \\
 &= \left(\frac{14m+8im-k+3}{2}\right) + \left(\frac{24nm+13m-8im+k+2}{4}\right) \\
 &= \frac{28m+16im-2k+6+24nm+13m-8im+k+2}{4} \\
 &= \frac{24nm+8im+41m-k+8}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\beta_3}(x_i^k y_{i+1}^k) &= \{w_{\beta_1}(x_i^k y_{i+1}^k) + \beta_3(x_i^k y_{i+1}^k); \text{ untuk } i = 2 \bmod 3, k = \text{genap}\} \\
 &= \left(\frac{11m+8im+2k+1}{2}\right) + \left(\frac{24nm+16m-8im-2k+4}{4}\right) \\
 &= \frac{22m+16im+4k+2+24nm+16m-8im-2k+4}{4} \\
 &= \frac{24nm+8im+38m+2k+6}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\beta_3}(x_i^k x_{i+2}^k) &= \{w_{\beta_1}(x_i^k x_{i+2}^k) + \beta_3(x_i^k x_{i+2}^k); \text{ untuk } i = 1 \bmod 3, k = 1 \bmod 4\} \\
 &= \left(\frac{19m+8im-k+2}{2}\right) + \left(\frac{24nm+8m-8im+k+3}{4}\right) \\
 &= \frac{38m+16im-2k+4+24nm+8m-8im+k+3}{4} \\
 &= \frac{24nm+8im+46m-k+7}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\beta_3}(x_i^k x_{i+2}^k) &= \{w_{\beta_1}(x_i^k x_{i+2}^k) + \beta_3(x_i^k x_{i+2}^k); \text{ untuk } i = 1 \bmod 3, k = 2 \bmod 4\} \\
 &= \left(\frac{18m+8im-k+2}{2}\right) + \left(\frac{24nm+9m-8im+k+3}{4}\right) \\
 &= \frac{38m+16im-k+2+24nm+9m-8im+k+3}{4} \\
 &= \frac{24nm+8im+47m-k+7}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\beta_3}(c^k x_2^k) &= \{w_{\beta_1}(c^k x_2^k) + \beta_3(c^k x_2^k); \text{ untuk } k = 2 \bmod 4\} \\
 &= \left(\frac{19m-k+3}{2}\right) + \left(\frac{24nm+8m+k+2}{4}\right) \\
 &= \frac{38m-2k+6+24nm+8m+k+2}{4} \\
 &= \frac{24nm+46m-k+8}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\beta_3}(c^k x_2^k) &= \{w_{\beta_1}(c^k x_2^k) + \beta_3(c^k x_2^k); \text{ untuk } k = 3 \bmod 4\} \\
 &= \left(\frac{18m-k+3}{2}\right) + \left(\frac{24nm+12m+k+3}{4}\right) \\
 &= \frac{36m-2k+6+24nm+12m+k+3}{4} \\
 &= \frac{24nm+48m-k+9}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\beta_3}(c^k x_1^k) &= \{w_{\beta_1}(c^k x_1^k) + \beta_3(c^k x_1^k); \text{ untuk } k = 1 \bmod 4\} \\
 &= \left(\frac{15m-k+2}{2}\right) + \left(\frac{24nm+13m+k+3}{4}\right) \\
 &= \frac{30m-2k+4+24nm+13m+k+3}{4} \\
 &= \frac{24nm+43m-k+7}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\beta_3}(c^k x_1^k) &= \{w_{\beta_1}(c^k x_1^k) + \beta_3(c^k x_1^k); \text{ untuk } k = 2 \bmod 4\} \\
 &= \left(\frac{14m-k+2}{2}\right) + \left(\frac{24nm+13m+k+3}{4}\right) \\
 &= \frac{28m-2k+4+24nm+13m+k+3}{4} \\
 &= \frac{24nm+41m-k+7}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\beta_3}(c^k y_1^k) &= \{w_{\beta_1}(c^k y_1^k) + \beta_3(c^k y_1^k); \text{ untuk } k = 4 \bmod 4\} \\
 &= \left(\frac{13m-k+3}{2}\right) + \left(\frac{24nm+14m+k+2}{4}\right) \\
 &= \frac{26m-2k+6+24nm+14m+k+2}{4} \\
 &= \frac{24nm+40m-k+8}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\beta_3}(c^k y_1^k) &= \{w_{\beta_1}(c^k y_1^k) + \beta_3(c^k y_1^k); \text{ untuk } k = 1 \bmod 4\} \\
 &= \left(\frac{12m-k+3}{2}\right) + \left(\frac{24nm+15m+k+2}{4}\right) \\
 &= \frac{24m-2k+6+24nm+15m+k+2}{4} \\
 &= \frac{24nm+39m-k+8}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\beta_3}(e^k x_1^k) &= \{w_{\beta_1}(e^k x_1^k) + \beta_3(e^k x_1^k); \text{ untuk } k = \text{ganjil}\} \\
 &= \left(\frac{9m+2k+1}{2}\right) + \left(\frac{24nm+18m-2k+4}{4}\right) \\
 &= \frac{18m+4k+2+24nm+18m-2k+4}{4} \\
 &= \frac{24nm+36m+2k+6}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\beta_3}(b^k c^k) &= \{w_{\beta_1}(b^k c^k) + \beta_3(b^k c^k); \text{ untuk } k = 3 \bmod 4\} \\
 &= \left(\frac{9m-k+2}{2}\right) + \left(\frac{24nm+18m+k+3}{4}\right) \\
 &= \frac{18m-2k+4+24nm+18m+k+3}{4} \\
 &= \frac{24nm+36m-k+7}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\beta_3}(b^k c^k) &= \{w_{\beta_1}(b^k c^k) + \beta_3(b^k c^k); \text{ untuk } k = 4 \bmod 4\} \\
 &= \left(\frac{8m-k+2}{2}\right) + \left(\frac{24nm+19m+k+3}{4}\right) \\
 &= \frac{16m-2k+4+24nm+19m+k+3}{4} \\
 &= \frac{24nm+35m-k+7}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\beta_1}(e^k c^k) &= \{w_{\beta_1}(e^k c^k) + \beta_3(e^k c^k); \text{ untuk } k = 2 \bmod 4\} \\
 &= \left(\frac{7m-k+3}{2}\right) + \left(\frac{24nm+20m+k+2}{4}\right) \\
 &= \frac{14m-2k+6+24nm+20m+k+2}{4} \\
 &= \frac{24nm+34m-k+8}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\beta_3}(e^k c^k) &= \{w_{\beta_1}(e^k c^k) + \beta_3(e^k c^k); \text{ untuk } k = 3 \bmod 4\} \\
 &= \left(\frac{6m-k+3}{2}\right) + \left(\frac{24nm+21m+k+2}{4}\right) \\
 &= \frac{12m-2k+6+24nm+21m+k+2}{4} \\
 &= \frac{24nm+33m-k+8}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\beta_3}(e^k b^k) &= \{w_{\beta_1}(e^k b^k) + \beta_3(e^k b^k); \text{ untuk } k = \text{genap}\} \\
 &= \left(\frac{3m+2k+1}{2}\right) + \left(\frac{24nm+24m-2k+4}{4}\right) \\
 &= \frac{6m+4k+2+24nm+24m-2k+4}{4} \\
 &= \frac{24nm+30m+2k+6}{4}
 \end{aligned}$$

Didapat himpunan bobot total $\left\{\frac{16nm+24m+2k+6}{4}, \dots, \frac{24nm+8im+36m-k+8}{4}\right\}$. Dapat diketahui bahwa bobot total terkecil pertama terletak pada fungsi $W_{\beta_3}(e^k b^k) =$

$\frac{16nm+24m+2k+6}{4}$ untuk $k = 1$, bobot total terkecil kedua terletak pada $W_{\beta_3}(e^k b^k)$
 $= \frac{16nm+24m+2k+6}{4}$ untuk $k = 3$ dan bobot total terbesar terletak pada $W_{\beta_3} =$
 $\frac{24nm+8im+36m-k+8}{4}$ untuk $i = n$ dan $k = 4$.

Ada sebuah teorema yang dapat dijadikan sebagai pembuktian alternatif. Teorema tersebut diturunkan oleh Martin Baca.

Bukti. Ada pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic, maka diperoleh rumusan:

$$\gamma(r), r \in V(G_k) = \begin{cases} m[\alpha(e) - 1] + k, 1 \leq k \leq m \\ m[\alpha(b) - 1] + k, 1 \leq k \leq m \\ m[\alpha(c) - 1] + k, 1 \leq k \leq m \\ m[\alpha(y_i) - 1] + k, 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m \\ m[\alpha(x_i) - 1] + k, 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m \end{cases}$$

$$\delta(d), d \in E(G_k) = \begin{cases} m\beta(eb) + 1 - k, 1 \leq k \leq m \\ m\beta(ec) + 1 - k, 1 \leq k \leq m \\ m\beta(bc) + 1 - k, 1 \leq k \leq m \\ m\beta(ex_1) + 1 - k, 1 \leq k \leq m \\ m\beta(cy_1) + 1 - k, 1 \leq k \leq m \\ m\beta(cx_1) + 1 - k, 1 \leq k \leq m \\ m\beta(x_i y_i) + 1 - k, 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m \\ m\beta(cx_2) + 1 - k, 1 \leq k \leq m \\ m\beta(x_i y_{i+1}) + 1 - k, 1 \leq i \leq n - 1, 1 \leq k \leq m \\ m\beta(x_i x_{i+1}) + 1 - k, 1 \leq i \leq n - 1, 1 \leq k \leq m \\ m\beta(x_i x_{i+2}) + 1 - k, 1 \leq i \leq n - 2, 1 \leq k \leq m \end{cases}$$

Jika himpunan $\{f_s(u) + f_s(v) + f_s(uv); uv \in E(G_s)\} = \{a, a + 1, \dots, a + q - 1\}$ merupakan himpunan bobot total dari gabungan saling lepas graf sisir (mCb_n) maka berdasarkan rumus di atas diperoleh rumusan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 f_m(u) + f_m(v) + f_m(uv) &= m[f_m(u) - 1] + m + m[f_m(v) - 1] + m + m \cdot f_m(uv) \\
 &\quad + 1 - m \\
 &= m[f_m(u) + f_m(v)f_m(uv) - 2] + 1 + m \\
 &= m[a - 2] + 1 + m
 \end{aligned}$$

Sehingga, bobot terkecil:

$$\begin{aligned}
 m[a - 2] + 1 + 5 &= m[4n + 8 - 2] + 1 + 1 \\
 &= 4nm + 6m + 2
 \end{aligned}$$

dan bobot terbesarnya adalah:

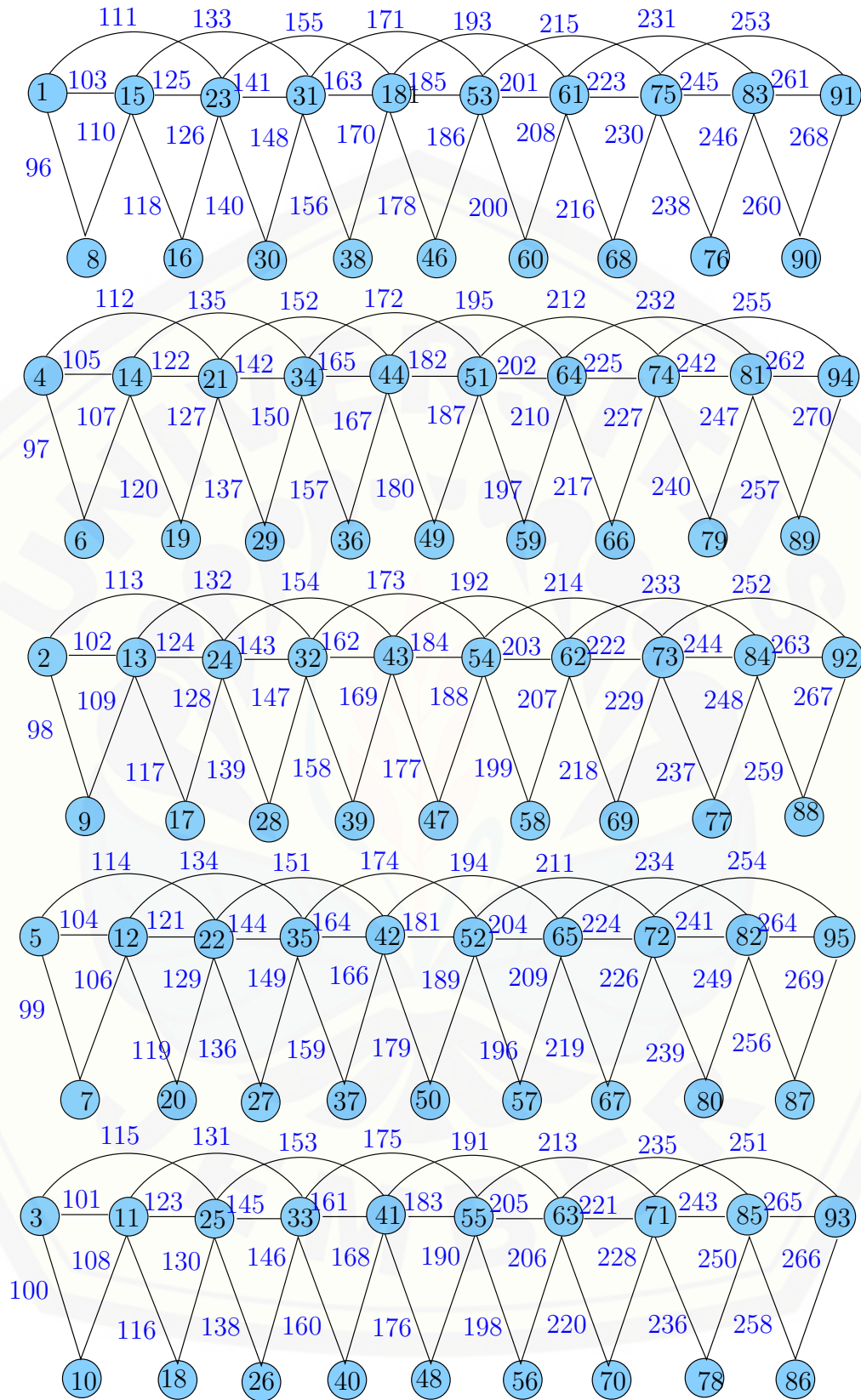
$$\begin{aligned}
 m[a + q - 2] + 1 &= m[(4n + 8) + (4n + 3) - 2] + 1 \\
 &= m[4n + 8 + 4n + 3 - 2] + 1 \\
 &= m[8n + 9] + 1 \\
 &= 8nm + 9m + 1
 \end{aligned}$$

Dari uraian tersebut terbukti bahwa gabungan saling lepas graf sisir mCb_n mempunyai pelabelan total super $(\frac{16nm+24m+8}{4}, 1)$ -sisi antimagic untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 3$ serta m ganjil. \square

Untuk teorema diatas, nilai m hanya berlaku untuk m ganjil dan ≥ 3 . Langkah terakhir untuk menentukan pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic pada gabungan saling lepas graf sisir adalah mencari pelabelan totalnya ketika $d = 2$. Dimulai dengan melabeli sisi dari bobot terbesar kemudian mencari fungsinya. Dilanjutkan menghitung bobot total beserta fungsinya. Dihasilkan sebuah teorema sebagai berikut.

Teorema 4.1.6. *Ada pelabelan total super $(\frac{4nm+9m+5}{2}, 2)$ -sisi antimagic pada gabungan saling lepas graf sisir Cb_n jika $n \geq 3$, $m \geq 3$ dan m ganjil.*

Bukti. Menggunakan label titik pada lemma 4.1.2 untuk melabeli titik pada



Gambar 4.10 SEATL dari $5Cb_8$ untuk $d = 2$

gabungan saling lepas graf sisir mCb_n . Akibatnya fungsi titik β_1 =fungsi titik β_4 . Fungsi sisi dari β_4 adalah:

$$\begin{aligned}
 \beta_4(e^k b^k) &= 2nm + 3m + k; \text{ untuk } k = \text{sebarang} \\
 \beta_4(e^k c^k) &= \begin{cases} \frac{4nm+9m+1}{2}, & \text{untuk } 1 \leq k \leq m, k \text{ ganjil} \\ \frac{4nm+10m-k+2}{2} & \text{untuk } 1 \leq k \leq m, k \text{ genap} \end{cases} \\
 \beta_4(b^k c^k) &= \begin{cases} \frac{4nm+11m-k+1}{2}, & \text{untuk } 1 \leq k \leq m, k \text{ genap} \\ \frac{4nm+12m-k+1}{2}, & \text{untuk } 1 \leq k \leq m, k \text{ ganjil} \end{cases} \\
 \beta_4(e^k x_1^k) &= 2nm + 6m + k; \text{ untuk } k = \text{sebarang} \\
 \beta_4(c^k y_1^k) &= \begin{cases} \frac{4nm+15m-k+2}{2}, & \text{untuk } 1 \leq k \leq m, k \text{ ganjil} \\ \frac{4nm+16m-k+2}{2}, & \text{untuk } 1 \leq k \leq m, k \text{ genap} \end{cases} \\
 \beta_4(c^k x_1^k) &= \begin{cases} \frac{4nm+17m-k+1}{2}, & \text{untuk } 1 \leq k \leq m, k \text{ genap} \\ \frac{4nm+18m-k+1}{2}, & \text{untuk } 1 \leq k \leq m, k \text{ ganjil} \end{cases} \\
 \beta_4(x_i^k y_i^k) &= 4nm + 4im + 5m + k, \text{ untuk } i = 1 \text{ mod } 3, \\
 \beta_4(c^k x_2^k) &= \begin{cases} \frac{4nm+21m-k+2}{2}, & \text{untuk } 1 \leq k \leq m, k \text{ ganjil} \\ \frac{4nm+22m-k+2}{2}, & \text{untuk } 1 \leq k \leq m, k \text{ genap} \end{cases} \\
 \beta_4(x_i^k y_{i+1}^k) &= \begin{cases} \frac{4nm+8im+15m-k+1}{2}, & \text{untuk } i = 1 \text{ mod } 3, 1 \leq k \leq m, k \text{ genap} \\ \frac{4nm+8i+m16m-k+1}{2}, & \text{untuk } i = 1 \text{ mod } 3, 1 \leq k \leq m, k \text{ ganjil} \end{cases} \\
 \beta_4(x_i^k x_{i+1}^k) &= 4nm + 4im + 5m + k, \text{ untuk } i = 1 \text{ mod } 3, \\
 \beta_4(x_i^k y_i^k) &= \begin{cases} \frac{4nm+8im+11m-k+2}{2}, & \text{untuk } i = 2 \text{ mod } 3, 1 \leq k \leq m, k \text{ ganjil} \\ \frac{4nm+8im+12m-k+2}{2}, & \text{untuk } i = 2 \text{ mod } 3, 1 \leq k \leq m, k \text{ genap} \end{cases} \\
 \beta_4(x_i^k x_{i+2}^k) &= \begin{cases} \frac{4nm+8im+21m-k+1}{2}, & \text{untuk } i = 1 \text{ mod } 3, 1 \leq k \leq m, k \text{ genap} \\ \frac{4nm+8im+22m-k+1}{2}, & \text{untuk } i = 1 \text{ mod } 3, 1 \leq k \leq m, k \text{ ganjil} \end{cases} \\
 \beta_4(x_i^k y_{i+1}^k) &= 2nm + 4im + 7m + k, \text{ untuk } i = 2 \text{ mod } 3, \\
 \beta_4(x_i^k x_{i+1}^k) &= \begin{cases} \frac{4nm+8im+17m-k+2}{2}, & \text{untuk } i = 2 \text{ mod } 3, 1 \leq k \leq m, k \text{ ganjil} \\ \frac{4nm+8im+18m-k+2}{2}, & \text{untuk } i = 2 \text{ mod } 3, 1 \leq k \leq m, k \text{ genap} \end{cases} \\
 \beta_4(x_i^k y_i^k) &= \begin{cases} \frac{4nm+8im+11m-k+1}{2}, & \text{untuk } i = 3 \text{ mod } 3, 1 \leq k \leq m, k \text{ genap} \\ \frac{4nm+8im+12m-k+1}{2}, & \text{untuk } i = 3 \text{ mod } 3, 1 \leq k \leq m, k \text{ ganjil} \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta_4(x_i^k x_{i+2}^k) &= 2nm + 4im + 10m + k, \text{ untuk } i = 2 \bmod 3, \\ \beta_4(x_i^k y_{i+1}^k) &= \begin{cases} \frac{4nm+8im+15m-k+2}{2}, & \text{untuk } i = 3 \bmod 3, 1 \leq k \leq m, k \text{ ganjil} \\ \frac{4nm+8im+16m-k+2}{2}, & \text{untuk } i = 3 \bmod 3, 1 \leq k \leq m, k \text{ genap} \end{cases} \\ \beta_4(x_i^k x_{i+1}^k) &= \begin{cases} \frac{4nm+8im+17m-k+1}{2}, & \text{untuk } i = 3 \bmod 3, 1 \leq k \leq m, k \text{ genap} \\ \frac{4nm+8im+18m-k+1}{2}, & \text{untuk } i = 3 \bmod 3, 1 \leq k \leq m, k \text{ ganjil} \end{cases} \\ \beta_4(x_i^k x_{i+2}^k) &= \begin{cases} \frac{4nm+8im+21m-k+2}{2}, & \text{untuk } i = 3 \bmod 3, 1 \leq k \leq m, k \text{ ganjil} \\ \frac{4nm+8im+22m-k+2}{2}, & \text{untuk } i = 3 \bmod 3, 1 \leq k \leq m, k \text{ genap} \end{cases}\end{aligned}$$

Rumus diatas dapat direduksi menjadi:

$$\begin{aligned}\beta_4(e^k c^k) &= \frac{8nm+(18+1+(-1)^k)-(1+(-1)^k)k+(2+1+(-1)^k)}{4}; \text{ untuk } 1 \leq k \leq m \\ \beta_4(b^k c^k) &= \frac{8nm+(24+1+(-1)^k)m-2k+4}{4}; \text{ untuk } 1 \leq k \leq m \\ \beta_4(c^k y_1^k) &= \frac{8nm+(30+1+(-1)^k)m-2k+4}{4}; \text{ untuk } 1 \leq k \leq m \\ \beta_4(c^k x_1^k) &= \frac{8nm+(36-1+(-1)^k)m-2k+2}{4}; \text{ untuk } 1 \leq k \leq m \\ \beta_4(c^k x_2^k) &= \frac{8nm+(42+1+(-1)^k)m-2k+4}{4}; \text{ untuk } 1 \leq k \leq m \\ \beta_4(x_i^k y_{i+1}^k) &= \frac{8nm+16im+(32-1+(-1)^k)m-2k+2}{4}; \text{ untuk } i = 3 \bmod 3, 1 \leq k \leq m \\ \beta_4(x_i^k y_i^k) &= \frac{8nm+16im+(22+1+(-1)^k)m-2k+4}{4}; \text{ untuk } i = 2 \bmod 3, 1 \leq k \leq m \\ \beta_4(x_i^k x_{i+2}^k) &= \frac{8nm+16im+(44-1+(-1)^k)m-2k+2}{4}; \text{ untuk } i = 1 \bmod 3, 1 \leq k \leq m \\ \beta_4(x_i^k x_{i+1}^k) &= \frac{8nm+16im+(34+1+(-1)^k)m-2k+4}{4}; \text{ untuk } i = 2 \bmod 3, 1 \leq k \leq m \\ \beta_4(x_i^k y_i^k) &= \frac{8nm+16im+(24-1+(-1)^k)m-2k+2}{4}; \text{ untuk } i = 3 \bmod 3, 1 \leq k \leq m \\ \beta_4(x_i^k y_{i+1}^k) &= \frac{8nm+16im+(30+1+(-1)^k)m-2k+4}{4}; \text{ untuk } i = 3 \bmod 3, 1 \leq k \leq m \\ \beta_4(x_i^k x_{i+1}^k) &= \frac{8nm+16im+(36-1+(-1)^k)m-2k+2}{4}; \text{ untuk } i = 3 \bmod 3, 1 \leq k \leq m \\ \beta_4(x_i^k x_{i+2}^k) &= \frac{8nm+16im+(42+1+(-1)^k)m-2k+4}{4}; \text{ untuk } i = 3 \bmod 3, 1 \leq k \leq m\end{aligned}$$

Berdasarkan fungsi diatas fungsi sisi β_4 adalah fungsi yang bijektif karena $\beta_4 : V(mCb_n) \rightarrow \{2nm + 3m + 1, \dots, 6nm + 6m\}$. Didefinisikan W_{β_4} adalah fungsi bobot total untuk $d = 2$.

$$\begin{aligned}
 W_{\beta_4}(e^k b^k) &= \{w_{\beta_1}(e^k b^k) + \beta_4(e^k b^k); \text{ untuk } 1 \leq k \leq m\} \\
 &= \left(\frac{3m+2k+1}{2}\right) + (2nm + 3m + k) \\
 &= \frac{3m+1+2k+4nm+6m+2k}{2} \\
 &= \frac{4nm+9m+4k+1}{2} \\
 W_{\beta_4}(e^k c^k) &= \{w_{\beta_1}(e^k c^k) + \beta_4(e^k c^k); \text{ untuk } 1 \leq k \leq m, k \text{ ganjil}\} \\
 &= \left(\frac{6m-k+3}{2}\right) + \left(\frac{4nm+9m-k+2}{2}\right) \\
 &= \frac{4nm+15m-2k+5}{2} \\
 W_{\beta_4}(e^k c^k) &= \{w_{\beta_1}(e^k c^k) + \beta_4(e^k c^k); \text{ untuk } 1 \leq k \leq m, k \text{ genap}\} \\
 &= \left(\frac{7m-k+3}{2}\right) + \left(\frac{4nm+10m-k+2}{2}\right) \\
 &= \frac{4nm+17m-2k+5}{2} \\
 W_{\beta_4}(b^k c^k) &= \{w_{\beta_1}(b^k c^k) + \beta_4(b^k c^k); \text{ untuk } 1 \leq k \leq m, k \text{ genap}\} \\
 &= \left(\frac{8m-k+2}{2}\right) + \left(\frac{4nm+11m-k+1}{2}\right) \\
 &= \frac{4nm+19m-2k+3}{2} \\
 W_{\beta_4}(b^k c^k) &= \{w_{\beta_1}(b^k c^k) + \beta_4(b^k c^k); \text{ untuk } 1 \leq k \leq m, k \text{ ganjil}\} \\
 &= \left(\frac{9m-k+2}{2}\right) + \left(\frac{4nm+12m-k+1}{2}\right) \\
 &= \frac{4nm+21m-2k+3}{2} \\
 W_{\beta_4}(e^k x_1^k) &= \{w_{\beta_1}(e^k x_1^k) + \beta_4(e^k x_1^k); \text{ untuk } 1 \leq k \leq m, \} \\
 &= \left(\frac{9m+2k+1}{2}\right) + \left(\frac{4nm+12m+2k}{2}\right) \\
 &= \frac{4nm+21m+4k+1}{2} \\
 W_{\beta_4}(c^k y_1^k) &= \{w_{\beta_1}(c^k y_1^k) + \beta_4(c^k y_1^k); \text{ untuk } 1 \leq k \leq m, k \text{ ganjil}\} \\
 &= \left(\frac{12m-k+3}{2}\right) + \left(\frac{4nm+15m-k+2}{2}\right) \\
 &= \frac{4nm+27m-2k+5}{2} \\
 W_{\beta_4}(c^k y_1^k) &= \{w_{\beta_1}(c^k y_1^k) + \beta_4(c^k y_1^k); \text{ untuk } 1 \leq k \leq m, k \text{ genap}\} \\
 &= \left(\frac{13m-k+3}{2}\right) + \left(\frac{4nm+16m-k+2}{2}\right) \\
 &= \frac{4nm+29m-2k+5}{2} \\
 W_{\beta_4}(c^k x_1^k) &= \{w_{\beta_1}(c^k x_1^k) + \beta_4(c^k x_1^k); \text{ untuk } 1 \leq k \leq m, k \text{ genap}\} \\
 &= \left(\frac{14m-k+2}{2}\right) + \left(\frac{4nm+17m-k+1}{2}\right) \\
 &= \frac{4nm+31m-2k+3}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\beta_4}(c^k x_1^k) &= \{w_{\beta_1}(c^k x_1^k) + \beta_4(c^k x_1^k); \text{ untuk } 1 \leq k \leq m, k \text{ ganjil}\} \\
 &= \left(\frac{15m-k+2}{2}\right) + \left(\frac{4nm+18m-k+1}{2}\right) \\
 &= \frac{4nm+33m-2k+3}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\beta_4}(x_i^k y_i^k) &= \{w_{\beta_1}(x_i^k y_i^k) + \beta_4(x_i^k y_i^k); \text{ untuk } i = 1 \text{ mod } 3, 1 \leq k \leq m\} \\
 &= \left(\frac{8im+7m+2k+1}{2}\right) + \left(\frac{4nm+8im+10m+2k}{2}\right) \\
 &= \frac{4nm+16im+17m+4k+1}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\beta_4}(c^k x_2^k) &= \{w_{\beta_1}(c^k x_2^k) + \beta_4(c^k x_2^k); \text{ untuk } 1 \leq k \leq m, k \text{ ganjil}\} \\
 &= \left(\frac{18m-k+3}{2}\right) + \left(\frac{4nm+21m-k+2}{2}\right) \\
 &= \frac{4nm+39m-2k+5}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\beta_4}(c^k x_2^k) &= \{w_{\beta_1}(c^k x_2^k) + \beta_4(c^k x_2^k); \text{ untuk } 1 \leq k \leq m, k \text{ genap}\} \\
 &= \left(\frac{19m-k+3}{2}\right) + \left(\frac{4nm+22m-k+2}{2}\right) \\
 &= \frac{8nm+41m-2k+5}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\beta_4}(x_i^k y_{i+1}^k) &= \{w_{\beta_1}(x_i^k y_{i+1}^k) + \beta_4(x_i^k y_{i+1}^k); \text{ untuk } i = 1 \text{ mod } 3, \\
 &\quad 1 \leq k \leq m, k \text{ genap}\} \\
 &= \left(\frac{8im+12m-k+2}{2}\right) + \left(\frac{4nm-8im+15m-k+1}{2}\right) \\
 &= \frac{4nm+27m-2k+3}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\beta_4}(x_i^k y_{i+1}^k) &= \{w_{\beta_1}(x_i^k y_{i+1}^k) + \beta_4(x_i^k y_{i+1}^k); \text{ untuk } i = 1 \text{ mod } 3, \\
 &\quad 1 \leq k \leq m, k \text{ ganjil}\} \\
 &= \left(\frac{8im+13m-k+2}{2}\right) + \left(\frac{12nm+8im+2m+k+1}{2}\right) \\
 &= \frac{12nm+16im+15m+3}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\beta_4}(x_i^k x_{i+1}^k) &= \{w_{\beta_1}(x_i^k x_{i+1}^k) + \beta_4(x_i^k x_{i+1}^k); \text{ untuk } i = 1 \text{ mod } 3, 1 \leq k \leq m\} \\
 &= \left(\frac{8im+13m+2k+1}{2}\right) + \left(\frac{4nm+8im+16m+2k}{2}\right) \\
 &= \frac{4nm+16im+29m+4k+1}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\beta_4}(x_i^k y_i^k) &= \{w_{\beta_1}(x_i^k y_i^k) + \beta_4(x_i^k y_i^k); \text{ untuk } i = 2 \text{ mod } 3, 1 \leq k \leq m, k \text{ ganjil}\} \\
 &= \left(\frac{8im+8m-k+3}{2}\right) + \left(\frac{4nm+8im+11m-k+2}{2}\right) \\
 &= \frac{4nm+16im+19m-2k+5}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\beta_4}(x_i^k y_i^k) &= \{w_{\beta_1}(x_i^k y_i^k) + \beta_4(x_i^k y_i^k); \text{ untuk } i = 2 \text{ mod } 3, 1 \leq k \leq m, k \text{ genap}\} \\
 &= \left(\frac{8im+9m-k+3}{2}\right) + \left(\frac{4nm+8im+12m-k+2}{2}\right) \\
 &= \frac{4nm+16im+21m-2k+5}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\beta_4}(x_i^k x_{i+2}^k) &= \{w_{\beta_1}(x_i^k x_{i+2}^k) + \beta_4(x_i^k x_{i+2}^k); \text{ untuk } i = 1 \bmod 3, \\
 &\quad 1 \leq k \leq m, k \text{ genap}\} \\
 &= \left(\frac{8im+18m-k+2}{2}\right) + \left(\frac{4nm+8im+21m-k+1}{2}\right) \\
 &= \frac{4nm+16im+39m-2k+3}{2} \\
 W_{\beta_4}(x_i^k x_{i+2}^k) &= \{w_{\beta_1}(x_i^k x_{i+2}^k) + \beta_4(x_i^k x_{i+2}^k); \text{ untuk } i = 1 \bmod 3, \\
 &\quad 1 \leq k \leq m, k \text{ ganjil}\} \\
 &= \left(\frac{8im+19m-k+2}{2}\right) + \left(\frac{4nm+8im+22m-k+1}{2}\right) \\
 &= \frac{4nm+16im+41m-2k+3}{2} \\
 W_{\beta_4}(x_i^k y_{i+1}^k) &= \{w_{\beta_1}(x_i^k y_{i+1}^k) + \beta_4(x_i^k y_{i+1}^k); \text{ untuk } i = 2 \bmod 3, 1 \leq k \leq m\} \\
 &= \left(\frac{8im+11m+2k+1}{2}\right) + \left(\frac{4nm+8im+14m+2k}{2}\right) \\
 &= \frac{4nm+16im+25m+4k+1}{2} \\
 W_{\beta_4}(x_i^k x_{i+1}^k) &= \{w_{\beta_1}(x_i^k x_{i+1}^k) + \beta_4(x_i^k x_{i+1}^k); \text{ untuk } i = 2 \bmod 3, \\
 &\quad 1 \leq k \leq m, k \text{ ganjil}\} \\
 &= \left(\frac{8im+14m-k+3}{2}\right) + \left(\frac{4nm+8im+17m-k+2}{2}\right) \\
 &= \frac{4nm+16im+31m-2k+5}{2} \\
 W_{\beta_4}(x_i^k x_{i+1}^k) &= \{w_{\beta_1}(x_i^k x_{i+1}^k) + \beta_4(x_i^k x_{i+1}^k); \text{ untuk } i = 2 \bmod 3, \\
 &\quad 1 \leq k \leq m, k \text{ genap}\} \\
 &= \left(\frac{8im+15m-k+3}{2}\right) + \left(\frac{4nm+8im+18m-k+2}{2}\right) \\
 &= \frac{4nm+16im+33m-2k+5}{2} \\
 W_{\beta_4}(x_i^k y_i^k) &= \{w_{\beta_1}(x_i^k y_i^k) + \beta_4(x_i^k y_i^k); \text{ untuk } i = 3 \bmod 3, 1 \leq k \leq m, k \text{ genap}\} \\
 &= \left(\frac{8im+8m-k+2}{2}\right) + \left(\frac{4nm+8im+11m-k+1}{2}\right) \\
 &= \frac{4nm+16im+19m-2k+3}{2} \\
 W_{\beta_4}(x_i^k y_i^k) &= \{w_{\beta_1}(x_i^k y_i^k) + \beta_4(x_i^k y_i^k); \text{ untuk } i = 3 \bmod 3, 1 \leq k \leq m, k \text{ ganjil}\} \\
 &= \left(\frac{8im+9m-k+2}{2}\right) + \left(\frac{4nm+8im+12m-k+1}{2}\right) \\
 &= \frac{4nm+16im+21m-2k+3}{2} \\
 W_{\beta_4}(x_i^k x_{i+2}^k) &= \{w_{\beta_1}(x_i^k x_{i+2}^k) + \beta_4(x_i^k x_{i+2}^k); \text{ untuk } i = 2 \bmod 3, 1 \leq k \leq m\} \\
 &= \left(\frac{8im+17m+2k+1}{2}\right) + \left(\frac{4nm+8im+20m+2k}{2}\right) \\
 &= \frac{4nm+16im+37m+4k+1}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{\beta_4}(x_i^k y_{i+1}^k) &= \{w_{\beta_1}(x_i^k y_{i+1}^k) + \beta_4(x_i^k y_{i+1}^k); \text{ untuk } i = 3 \text{ mod } 3, \\ &\quad 1 \leq k \leq m, k \text{ ganjil}\} \\ &= \left(\frac{8im+12m-k+3}{2}\right) + \left(\frac{4nm+8im+15m-k+2}{2}\right) \\ &= \frac{4nm+16im+27m-2k+5}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{\beta_4}(x_i^k y_{i+1}^k) &= \{w_{\beta_1}(x_i^k y_{i+1}^k) + \beta_4(x_i^k y_{i+1}^k); \text{ untuk } i = 3 \text{ mod } 3, \\ &\quad 1 \leq k \leq m, k \text{ genap}\} \\ &= \left(\frac{8im+13m-k+3}{2}\right) + \left(\frac{4nm+8im+16m-k+2}{2}\right) \\ &= \frac{4nm+16im+29m-2k+5}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{\beta_4}(x_i^k x_{i+1}^k) &= \{w_{\beta_1}(x_i^k x_{i+1}^k) + \beta_4(x_i^k x_{i+1}^k); \text{ untuk } i = 3 \text{ mod } 3, \\ &\quad 1 \leq k \leq m, k \text{ genap}\} \\ &= \left(\frac{8im+14m-k+2}{2}\right) + \left(\frac{4nm+8im+17m-k+1}{2}\right) \\ &= \frac{4nm+16im+31m-2k+3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{\beta_4}(x_i^k x_{i+1}^k) &= \{w_{\beta_1}(x_i^k x_{i+1}^k) + \beta_4(x_i^k x_{i+1}^k); \text{ untuk } i = 3 \text{ mod } 3, \\ &\quad 1 \leq k \leq m, k \text{ ganjil}\} \\ &= \left(\frac{8im+15m-k+2}{2}\right) + \left(\frac{4nm+8im+18m-k+1}{2}\right) \\ &= \frac{4nm+16im+33m-2k+3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{\beta_4}(x_i^k x_{i+2}^k) &= \{w_{\beta_1}(x_i^k x_{i+2}^k) + \beta_4(x_i^k x_{i+2}^k); \text{ untuk } i = 3 \text{ mod } 3, \\ &\quad 1 \leq k \leq m, k \text{ ganjil}\} \\ &= \left(\frac{8im+18m-k+3}{2}\right) + \left(\frac{4nm+8im+21m-k+2}{2}\right) \\ &= \frac{4nm+16im+39m-2k+5}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{\beta_4}(x_i^k x_{i+2}^k) &= \{w_{\beta_1}(x_i^k x_{i+2}^k) + \beta_4(x_i^k x_{i+2}^k); \text{ untuk } i = 3 \text{ mod } 3, \\ &\quad 1 \leq k \leq m, k \text{ genap}\} \\ &= \left(\frac{8im+19m-k+3}{2}\right) + \left(\frac{4nm+8im+22m-k+2}{2}\right) \\ &= \frac{12nm+16im+41m-2k+5}{2} \end{aligned}$$

Rumus diatas dapat direduksi menjadi:

$$\begin{aligned} W_{\beta_4}(e^k c^k) &= \frac{8nm+(30+2(1+(-1)^k))m-4k+10}{4}; \text{ untuk } 1 \leq k \leq m \\ W_{\beta_4}(b^k c^k) &= \frac{8nm+(42-2(1+(-1)^k))m-4k+6}{4}; \text{ untuk } 1 \leq k \leq m \\ W_{\beta_4}(c^k y_1^k) &= \frac{8nm+(54+2(1+(-1)^k))m-4k+10}{4}; \text{ untuk } 1 \leq k \leq m \\ W_{\beta_4}(c^k x_1^k) &= \frac{8nm+(66-2(1+(-1)^k))m-4k+6}{4}; \text{ untuk } 1 \leq k \leq m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\beta_4}(c^k x_2^k) &= \frac{8nm+(78+2(1+(-1)^k))m-4k+10}{4}; \text{ untuk } 1 \leq k \leq m \\
 W_{\beta_4}(x_i^k y_i^k) &= \frac{8nm+32im+(38+2(1+(-1)^k))m-4k+10}{4}; \text{ untuk } i = 2 \text{ mod } 3, \\
 & \quad 1 \leq k \leq m \\
 W_{\beta_4}(x_i^k x_{i+1}^k) &= \frac{8nm+32im+(62+2(1+(-1)^k))m-4k+10}{4}; \text{ untuk } i = 2 \text{ mod } 3, \\
 & \quad 1 \leq k \leq m \\
 W_{\beta_4}(x_i^k y_{i+1}^k) &= \frac{8nm+32im+(54+2(1+(-1)^k))m-4k+10}{4}; \text{ untuk } i = 3 \text{ mod } 3, \\
 & \quad 1 \leq k \leq m \\
 W_{\beta_4}(x_i^k x_{i+1}^k) &= \frac{8nm+32im+(66-2(1+(-1)^k))m-4k+6}{4}; \text{ untuk } i = 3 \text{ mod } 3, \\
 & \quad 1 \leq k \leq m \\
 W_{\beta_4}(x_i^k x_{i+2}^k) &= \frac{8nm+32im+(78+2(1+(-1)^k))m-4k+10}{4}; \text{ untuk } i = 1 \text{ mod } 3, \\
 & \quad 1 \leq k \leq m
 \end{aligned}$$

Himpunan bobot total yaitu $\{\frac{4nm+9m+4k+1}{2}, \dots, \frac{12nm+16im+41m-2k+5}{2}\}$. Bobot total terkecil terletak pada fungsi $W_{\beta_4}(e^k b^k) = \frac{4nm+9m+4k+1}{2}$ untuk $k = 1$, dan bobot total terbesar terletak pada fungsi $W_{\beta_4}(x_i^k y_i^k) = \frac{21nm+16im+21m-2k+5}{2}$ untuk $i = n$ dan $k = 2$. Untuk membuktikannya kita gunakan rumus U_n dengan memasukkan nilai $a = \frac{4nm+9m+4k+1}{2}$ dan beda $d=2$. Berdasarkan penjelasan tersebut, terbukti bahwa gabungan saling lepas pada graf sisir mCb_n mempunyai pelabelan total super $(\frac{4nm+9m+5}{2}, 2)$ -sisi antimagic untuk $n \geq 3$, $m \geq 3$ dan m ganjil. \square

4.2 Pembahasan

Penelitian ini bertujuan untuk menentukan batas atas dari graf sisir tunggal (Cb_n) dan pada gabungan saling lepas mCb_n . Serta menentukan pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic pada graf sisir tunggal (Cb_n) maupun pada gabungan saling lepas (mCb_n). Dari hasil penelitian pada tiga nilai d yang berbeda, diperoleh dua lemma dan enam teorema baru tentang pelabelan total super pada graf sisir tunggal Cb_n dan gabungan saling lepas mCb_n .

Penelitian ini dimulai dengan menentukan batas atas dari graf sisir baik untuk tunggal dan gabungan. Dalam penentuan batas atas kita memerlukan nilai p dan q . Setelah didapatkan nilai p dan q , gunakan lemma 1 untuk menentukan batas atas. Tujuan dari penentuan batas atas pada graf sisir adalah untuk mengetahui berapa nilai d yang mungkin ditemukan pada graf ini. Pada graf sisir tunggal

maupun gabungan didapatkan batas atas d yaitu ≤ 2 . Karena pada pelabelan total super himpunan yang digunakan adalah himpunan bilangan bulat positif maka elemen dari d adalah $\{0,1,2\}$.

Setelah mendapatkan nilai d , dilanjutkan dengan mencari pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic pada nilai d yang berbeda tersebut. Kemudian mencari fungsi dari pelabelan total tersebut. Ada tiga kondisi dalam mencari pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic yaitu ketika $d = 0$, $d = 1$ dan $d = 2$. Ketiga kondisi tersebut berlaku untuk graf sisir tunggal maupun graf sisir gabungan. Proses pencarian fungsi dari pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic untuk graf sisir tunggal dan gabungan adalah sama.

Untuk kondisi pertama yaitu ketika $d=0$. Labeli setiap titik pada graf sisir baik untuk tunggal dan gabungan sampai membentuk pola. Kemudian mencari fungsi dari setiap titik tersebut. Dilanjutkan menghitung bobot sisi dari $EAVL$ yang didefinisikan dengan w . Bobot sisi didapat dengan menghitung dua label titik yang mengapit sebuah sisi. Lalu mencari fungsi dari setiap bobot sisi yang didapat. Setelah itu melabeli setiap sisi, dimulai dari sisi yang nilai w -nya terbesar sampai nilai w terkecil. Label sisi dimulai dari $p+1$ sampai $p+q$, dari setiap sisi dicari fungsinya. Terakhir menentukan fungsi dari bobot total yang didefinisikan dengan W . Fungsi W didapatkan dengan menjumlahkan fungsi bobot sisi (w) dan fungsi sisi yang bersesuaian. Fungsi-fungsi yang didapat harus berlaku secara umum. Untuk mengetahui apakah fungsi tersebut berlaku secara umum atau tidak dicek pada nilai n dan m yang berbeda. Pada graf sisir tunggal, misalkan kita menggunakan $n=6$ untuk mencari fungsi-fungsinya, maka kita mengeceknya pada nilai n selain $n=6$. Dimana n adalah banyaknya *expand* dari graf sisir. Pada penelitian ini untuk graf sisir tunggal fungsi yang didapat berlaku untuk $n \geq 3$. Sedangkan pada gabungan graf sisir dicek pada n dan m yang berbeda dimana m merupakan banyaknya salinan dari graf sisir. Misalkan, untuk mencari fungsi-fungsinya kita menggunakan $n=6$ dan $m=5$ maka kita mengeceknya di n selain $n=6$ dan $n \geq 3$. Karena pelabelan total pada penelitian ini hanya ditemukan pada $m=3,5,7,9,11$ maka untuk mengeceknya kita coba di $m=3,7,9,11$. Hasil dari penelitian ini fungsi-fungsi yang didapat berlaku untuk n dan $m \geq 3$ serta hanya

untuk m ganjil, untuk m genap peneliti belum menggunakan.

Pada kondisi kedua ketika $d=1$, untuk penentuan label titik, fungsi titik, bobot sisi dan fungsinya hasilnya sama seperti pada kondisi $d=0$ baik untuk tunggal dan gabungan. Perbedaannya terletak pada penempatan label sisi. Label sisi tetap dimulai dari $p+1$, dan sampai $p+q$. Ada beberapa cara untuk melabeli sisinya, salah satunya adalah label sisi terkecil diletakkan pada bobot sisi terbesar pertama, kemudian label sisi terkecil kedua diletakkan pada bobot sisi terbesar ketiga. Dilanjutkan untuk label sisi selanjutnya sampai kita melabeli sisi yang jumlah bobot sisinya terkecil. Setelah melabeli sisi yang bobot sisinya terkecil, kita lanjutkan untuk melabeli sisi yang bobot sisinya terbesar kedua, lalu bobot sisi terbesar keempat dan terakhir melabeli sisi yang bobot sisinya terkecil kedua. Jadi label sisi terbesar terletak pada bobot sisi terkecil kedua. Setelah selesai melabeli sisi, mencari fungsi dari label sisi yang telah ditemukan. Mencari bobot total, caranya sama seperti di $d = 0$. Dikarenakan ada beberapa cara untuk melabeli sisinya, maka untuk kondisi $d=1$ digunakan bukti alternatif. Untuk pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic pada graf sisir tunggal, bukti alternatifnya menggunakan lemma 2. Sedangkan untuk pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic pada gabungan graf sisir, bukti alternatifnya menggunakan 2.2.1 dengan syarat jumlah sisinya harus ganjil. Fungsi yang dihasilkan pada $d = 1$, untuk tunggal berlaku untuk $n \geq 3$. Dan untuk gabungannya fungsi yang dihasilkan berlaku untuk n dan $m \geq 3$ serta hanya untuk m ganjil. Untuk m genap peneliti belum dapat menemukan. Untuk proses pengecekan fungsi, metodenya sama dengan di $d=0$.

Proses untuk mencari pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic pada graf sisir tunggal dan gabungan di $d = 2$ hampir sama dengan di $d = 0$ dan $d = 1$. Pelabelan titik, fungsi titik, bobot sisi, dan fungsi bobot sisi yang dimiliki oleh $d = 2$ sama dengan di $d = 0$ dan $d = 1$. Pelabelan sisinya dimulai dari $p + 1$ sampai $p+q$, perbedaannya terletak pada penempatan label sisi. Label sisi pertama diletakkan pada bobot sisi terkecil pertama, label sisi kedua diletakkan pada bobot sisi terkecil kedua, diurutkan sampai bobot sisi terbesar. Setelah mendapatkan label sisi, dilanjutkan mencari fungsi sisi dari setiap sisi. Langkah terakhir mencari

bobot total beserta fungsinya $d = 2$. Fungsi yang dihasilkan untuk tunggal juga bersyarat $n \geq 3$ dan untuk gabungan bersyarat n dan $m \geq 3$ serta m ganjil. Untuk m genap, peneliti juga belum menemukan di $d = 2$.

Dari hasil yang didapat diketahui bahwa, pada tiga nilai d yang berbeda menghasilkan nilai awal (a) yang berbeda. Tetapi untuk pelabelan titik, fungsi titik, bobot sisi dan fungsi bobot sisi untuk ketiga kondisi tersebut sama. Sedangkan untuk label sisinya terdapat perbedaan, sehingga untuk fungsi sisi, bobot total serta fungsi bobot total juga berbeda. Graf sisir Cb_n , untuk nilai $d = 0$, $d = 1$ dan $d = 2$ berlaku syarat yang sama yaitu $n \geq 3$. Dan untuk gabungan saling lepas graf sisir mCb_n , untuk nilai $d = 0$, $d = 1$ dan $d = 2$ berlaku syarat $n \geq 3$ dan $m \geq 3$ untuk m ganjil.

Masalah terbuka 4.2.1. *Pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic pada gabungan graf sisir mCb_n , $n \geq 3$ dan m genap untuk $d = 0$, $d = 1$ dan $d = 2$.*

BAB 5. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan pada penelitian ini dapat ditarik kesimpulan bahwa.

- Pada graf sisir tunggal dan gabungan saling lepas memiliki batas atas (d) yang sama yaitu $d \in \{0, 1, 2\}$.
- Graf sisir tunggal Cb_n memiliki pelabelan titik $(3, 1)$ -sisi antimagic pada graf sisir Cb_n jika $n \geq 3$. Graf sisir tunggal Cb_n memiliki pelabelan total super $(6n - 9, 0)$, $(4n + 8, 1)$, $(2n + 7, 2)$ -sisi antimagic untuk $n \geq 3$.
- Graf sisir gabungan mCb_n memiliki pelabelan titik $(\frac{3m+2k+1}{2}, 1)$ -sisi antimagic untuk n dan $m \geq 3$ serta m ganjil. Graf sisir gabungan saling lepas mCb_n memiliki pelabelan total super $(\frac{12nm+15m+3}{2}, 0)$, $(\frac{16nm+24m+8}{2}, 1)$, $(\frac{4nm+9m+5}{2}, 2)$ -sisi antimagic untuk n dan $m \geq 3$ serta m ganjil.

5.2 Saran

Berdasarkan hasil penelitian mengenai pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic serta mengacu pada *open problem* dari hasil penelitian yang telah ditemukan, maka peneliti memberikan saran kepada pembaca agar dapat melakukan penelitian pada pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic pada graf sisir gabungan saling lepas untuk m genap.

DAFTAR PUSTAKA

- Aprilia, K. R., Agustin, I. H., and Dafik (2014a). Pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic pada gabungan saling lepas graf semi parasut msp_{2n-1} . In *Prosiding Seminar Nasional Universitas Ahmad Dahlan*.
- Aprilia, K. R., Agustin, I. H., and Dafik (2014b). Pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic pada graf semi parasut sp_{2n-1} . In *Prosiding Seminar Matematika dan Pendidikan Matematika, Universitas Jember*, volume 1.
- Arianti, I. Y., Dafik, and Slamun (2014a). Pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic pada gabungan graf rem cakram. In *Prosiding Seminar Nasional Universitas Ahmad Dahlan*.
- Arianti, I. Y., Dafik, and Slamun (2014b). Super (a, d) -edge-antimagic total labeling of connected disc brake graph. In *Prosiding Seminar Matematika dan Pendidikan Matematika, Universitas Jember*, volume 1.
- Bača, M., Dafik, Miller, M., and Ryan, J. (2009). Antimagic Labeling of Disjoint Union of s -Crowns. *Utilitas Mathematica*, 79:193–205.
- Dafik (2007). Structural properties and labeling of graphs. *School of Information Technology and Mathematical Sciences University of Ballarat, Australia*, Ph.D Thesis, November:1–140.
- Dafik, Fajriatin, A., and Miladiyah, K. (2012). Super Antimagicness of a Well-defined Graph. *Saintifika*, Vol. 14, No. 1:106–118.
- Dafik, Miller, M., Ryan, J., and Bača, M. (2008). Antimagic labeling of union of stars. *The Australasian Journal of Combinatorics*, 42:35–44.
- Dafik, Slamun, Fuad, M., and Rahmad, R. R. (2013). Super Antimagicness of Triangular Book and Diamond Ladder Graphs. *Proceeding of IndoMS International Conference of Mathematics and Applications (IICMA)*, UGM Yogyakarta:1–11.

- Hartsfield, N. and Ringel, G. (1990). *Pearls in Graph Theory*. Academic Press, Boston - San Diego - New York - London.
- Nurvitaningrum, A. I., Dafik, and Setiawani, S. (2014a). Pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic pada gabungan graf buah naga. In *Prosiding Seminar Nasional Universitas Ahmad Dahlan*.
- Nurvitaningrum, A. I., Dafik, and Setiawani, S. (2014b). Pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic pada graf buah naga. In *Prosiding Seminar Matematika dan Pendidikan Matematika, Universitas Jember*, volume 1.
- Sugeng, K., Miller, M., and Bača, M. (2006). Super edge-antimagic total labelings. *Utilitas Math.*, 71:131–141.
- Yunika, S. M., Agustin, I. H., and Dafik (2014a). Pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic pada gabungan saling lepas graf daun mlg_n . In *Prosiding Seminar Nasional Universitas Ahmad Dahlan*.
- Yunika, S. M., Agustin, I. H., and Dafik (2014b). Pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic pada graf daun lg_n . In *Prosiding Seminar Matematika dan Pendidikan Matematika, Universitas Jember*, volume 1.