



***DOMINATING SET* PADA HASIL OPERASI GRAF  
KHUSUS DAN APLIKASINYA**

**SKRIPSI**

Oleh

**Hendry Dwi Saputro**

**NIM 111810101025**

**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS JEMBER**

**2015**



***DOMINATING SET* PADA HASIL OPERASI GRAF  
KHUSUS DAN APLIKASINYA**

**SKRIPSI**

diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan Program Studi Matematika (S1) dan mencapai gelar Sarjana Sains

Oleh

**Hendry Dwi Saputro**

**NIM 111810101025**

**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS JEMBER**

**2015**

## HALAMAN PERSEMBAHAN

Dengan menyebut nama Allah SWT. yang maha pengasih lagi maha penyayang, serta sholawat atas Nabi Muhammad SAW., kupersembahkan sebuah kebahagiaan dalam perjalanan hidupku teriring rasa terima kasihku yang terdalam kepada:

1. Kedua orang tuaku: Ayahanda Joko Pitono dan Ibunda Suprihatin, serta Kakakku Wahyu Candra Eka Dinata, yang senantiasa mengalirkan kasih sayang, perhatian, dan doa yang tiada pernah putus yang selalu mengiringiku dalam meraih cita-cita;
2. Ibu Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si. dan Bapak Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D. selaku pembimbing skripsi yang tulus ikhlas membimbing dan selalu memberikan motivasi sehingga penulisan skripsi ini dapat terselesaikan;
3. Semua guru dan dosenku yang telah memberikan ilmu dan membimbingku dengan penuh kesabaran;
4. Sahabat-sahabat terbaikku dalam Keluarga Besar Matematika Angkatan 2011 (KRAMAT 11) yang senantiasa membantuku dan menorehkan sebuah pengalaman hidup yang tak terlupakan;
5. Teman-teman pejuang graf yang selalu berbagi suka duka dan memberikan dukungan serta motivasi;
6. Almamater tercinta Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

MOTTO

"Hai orang-orang yang beriman, jadikanlah sabar dan shalatmu sebagai penolongmu, sesungguhnya Allah beserta orang-orang yang sabar."

(QS. Al-Baqarah: 153) \*)

"Allah meninggikan orang-orang yang beriman diantara kamu dan orang-orang yang diberi ilmu pengetahuan beberapa derajat."

(QS. Al-Mujadilah: 11) \*\*)

"Keberhasilan saya diperoleh dari 99% keringat/kerja keras, 1% sisanya inspirasi/IQ."

(Thomas Alva Edison) \*\*\*)

- \*) Departemen Agama Republik Indonesia. 2004. *Al-Qur'an dan Terjemahannya*. Bandung. CV Penerbit J-ART.
- \*\*\*) Departemen Agama Republik Indonesia. 2004. *Al-Qur'an dan Terjemahannya*. Bandung. CV Penerbit J-ART.
- \*\*\*) Thomas Alva Edison, penemu bola lampu pijar.

**HALAMAN PERNYATAAN**

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Hendry Dwi Saputro

NIM : 111810101025

Menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang berjudul: *Dominating Set* pada Hasil Operasi Graf Khusus dan Aplikasinya adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali jika dalam pengutipan substansi disebutkan sumber rujukannya, dan belum diajukan pada instansi manapun, serta bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa adanya tekanan dan paksaan dari pihak manapun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, Mei 2015

Yang menyatakan,

Hendry Dwi Saputro

NIM. 111810101025

SKRIPSI

***DOMINATING SET* PADA HASIL OPERASI GRAF  
KHUSUS DAN APLIKASINYA**

Oleh

**Hendry Dwi Saputro**  
**NIM 111810101025**

Dosen Pembimbing 1 : Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si.  
Dosen Pembimbing 2 : Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D.

**PENGESAHAN**

Skripsi berjudul *Dominating Set* pada Hasil Operasi Graf Khusus dan Aplikasinya telah diuji dan disahkan oleh Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam pada:

Hari :

Tanggal :

Tempat : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember

Tim Penguji :

Dosen Pembimbing Utama,

Dosen Pembimbing Anggota,

Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si.

NIP. 19840801 200801 2 006

Dosen Penguji I,

Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D.

NIP. 19680802 199303 1 004

Dosen Penguji II,

Kosala Dwidja Purnomo, S.Si., M.Si.

NIP. 19690828 199802 1 001

M. Ziaul Arif, S.Si., M.Sc.

NIP. 19850111 200812 1 002

Mengesahkan,

Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Universitas Jember

Prof. Drs. Kusno, DEA., Ph.D.

NIP. 19610108 198602 1 001

## RINGKASAN

***Dominating Set*** pada Hasil Operasi Graf Khusus dan Aplikasinya; Hendry Dwi Saputro, 111810101025; 2015: 80 halaman; Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Jember.

Salah satu teori yang dikembangkan dalam teori graf adalah *dominating set*. *Dominating set* merupakan suatu konsep penentuan titik seminimal mungkin pada graf dengan ketentuan titik sebagai *dominating set* menjangkau titik yang ada di sekitarnya. Kardinalitas terkecil dari *dominating set* disebut *domination number* yang dinotasikan dengan  $\gamma(G)$ .

Saat ini *dominating set* tidak hanya diterapkan pada graf khusus saja, tetapi juga diterapkan pada hasil operasi graf. Operasi graf merupakan operasi terhadap dua buah graf atau lebih sehingga menghasilkan graf baru. Jenis-jenis operasi graf diantaranya operasi *joint*, *cartesian product*, *crown product*, *tensor product*, *composition*, *shackle*, dan *amalgamation*. Pada penelitian ini, peneliti akan mengembangkan teori *dominating set* pada hasil operasi graf khusus dan mengaplikasikan teori *dominating set* pada permainan catur, yaitu menentukan *dominating set* pada papan catur berukuran  $8 \times 8$ .

Dalam penelitian ini, peneliti menggunakan metode deduktif aksiomatik dalam menyelesaikan permasalahan. Metode deduktif aksiomatik merupakan metode penelitian yang menggunakan prinsip-prinsip pembuktian deduktif yang berlaku dalam logika matematika dengan menggunakan aksioma atau teorema yang telah ada untuk memecahkan suatu masalah. Tujuan dari penelitian ini adalah menentukan banyaknya titik (*order*) dan banyaknya sisi (*size*) pada hasil operasi graf khusus, yaitu  $P_n + F_m$ ,  $C_n + L_m$ ,  $C_n \odot \mathbb{L}_m$ ,  $P_n \odot F_m$ ,  $P_n[K_m]$ ,  $C_n[W_m]$ ,  $L_n[K_m]$ ,  $P_n[Bt_m]$ , *Shack* ( $P_2[K_m], v = x_{1,k}, r$ ), dan *Amal* ( $Bt_n, v = x_2, r$ ); menentukan *dominating set* dan *domination number* pada hasil operasi graf khusus, yaitu  $G_1 + G_2$ ,  $P_n + F_m$ ,  $C_n + L_m$ ,  $G_1 \odot G_2$ ,  $C_n \odot \mathbb{L}_m$ ,  $P_n \odot F_m$ ,  $G_1[G_2]$ ,  $P_n[K_m]$ ,  $C_n[W_m]$ ,  $L_n[K_m]$ ,  $P_n[Bt_m]$ , *Shack* ( $P_2[K_m], v = x_{1,k}, r$ ), *Amal*

$(G, v = x_i, r)$ , dan *Amal*  $(Bt_n, v = x_2, r)$ ; dan menentukan *dominating set* pada papan catur berukuran  $8 \times 8$ . Pada penelitian ini dihasilkan 5 teorema baru dan 9 akibat baru, antara lain:

1. **Teorema 4.1.1** *Misal  $G_1$  dan  $G_2$  adalah sebarang graf sederhana, maka domination number dari  $G_1 + G_2$  adalah sebagai berikut:*

$$\gamma(G_1 + G_2) = \begin{cases} 1, & \text{dimana } \Delta(G_1) = |V(G_1)| - 1 \text{ atau } \Delta(G_2) = |V(G_2)| - 1; \\ 2, & \text{dimana } \Delta(G_1) \neq |V(G_1)| - 1 \text{ dan } \Delta(G_2) \neq |V(G_2)| - 1; \end{cases}$$

2. **Akibat 4.1.1** *Misal  $G$  adalah graf hasil operasi joint dari graf lintasan  $P_n$  dan graf kipas  $F_m$ , untuk  $n \geq 2$  dan  $m \geq 3$ , maka  $\gamma(P_n + F_m) = 1$ ;*
3. **Akibat 4.1.2** *Misal  $G$  adalah graf hasil operasi joint dari graf cycle  $C_n$  dan graf ladder  $L_m$ , dimana  $n \geq 3$  dan  $m \geq 3$ , maka domination number dari  $C_n + L_m$  adalah sebagai berikut:*

$$\gamma(C_n + L_m) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } n = 3; \\ 2, & \text{untuk } n > 3; \end{cases}$$

4. **Teorema 4.1.2** *Misal  $G_1$  dan  $G_2$  adalah sebarang graf sederhana, maka domination number dari  $\gamma(G_1 \odot G_2) = |V(G_1)|$ ;*
5. **Akibat 4.1.3** *Misal  $G$  adalah graf hasil operasi crown product dari graf cycle  $C_n$  dan graf triangular ladder  $\mathbb{L}_m$ , dimana  $n \geq 3$  dan  $m \geq 3$ , maka  $\gamma(C_n \odot \mathbb{L}_m) = n$ ;*
6. **Akibat 4.1.4** *Misal  $G$  adalah graf hasil operasi crown product dari graf lintasan  $P_n$  dan graf kipas  $F_m$ , dimana  $n \geq 2$  dan  $m \geq 3$ , maka  $\gamma(P_n \odot F_m) = n$ ;*
7. **Teorema 4.1.3** *Misal  $G_1$  dan  $G_2$  adalah sebarang graf sederhana dengan  $\Delta(G_2) = |V(G_2)| - 1$ . Maka domination number dari  $\gamma(G_1[G_2]) = \gamma(G_1)$ ;*

8. **Akibat 4.1.5** Misal  $G$  adalah graf hasil operasi composition dari graf lintasan  $P_n$  dan graf lengkap  $K_m$ , dimana  $n \geq 2$  dan  $m \geq 3$ , maka  $\gamma (P_n[K_m]) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$ ;
9. **Akibat 4.1.6** Misal  $G$  adalah graf hasil operasi composition dari graf cycle  $C_n$  dan graf roda  $W_m$ , dimana  $n \geq 3$  dan  $m \geq 3$ , maka  $\gamma (C_n[W_m]) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$ ;
10. **Akibat 4.1.7** Misal  $G$  adalah graf hasil operasi composition dari graf ladder  $L_n$  dan graf lengkap  $K_m$ , dimana  $n \geq 3$  dan  $m \geq 3$ , maka domination number dari  $(L_n[K_m])$  adalah sebagai berikut:

$$\gamma (L_n[K_m]) = \begin{cases} \lceil \frac{n}{2} \rceil, & \text{dimana } n = \text{ganjil;} \\ \frac{n}{2} + 1, & \text{dimana } n = \text{genap;} \end{cases}$$

11. **Akibat 4.1.8** Misal  $G$  adalah graf hasil operasi composition dari graf lintasan  $P_n$  dan graf buku segitiga  $Bt_m$ , dimana  $n \geq 2$  dan  $m \geq 2$ , maka  $\gamma (P_n[Bt_m]) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$ ;
12. **Teorema 4.1.4** Misal  $G$  adalah graf hasil operasi shackle dari graf  $P_2[K_m]$ , dimana  $m \geq 7$  dan  $2 \leq r \leq 50$ , maka  $\gamma (Shack (P_2[K_m], v = x_{1,k}, r)) = \lceil \frac{r}{2} \rceil$ ;
13. **Teorema 4.1.5** Misal  $G$  adalah sebarang graf sederhana dengan  $\Delta (G) = |V(G)| - 1$ . Maka domination number dari  $\gamma (Amal (G, v = x_i, r)) = 1$ , dimana  $x_i \in V(G)$ ,  $\Delta (x_i) = |V(G)| - 1$ , dan  $r \geq 2$ ;
14. **Akibat 4.1.9** Misal  $G$  adalah graf hasil operasi amalgamation dari graf  $Bt_n$ , dimana  $n \geq 2$  dan  $r \geq 2$ , maka  $\gamma (Amal (Bt_n, v = x_2, r)) = 1$ .

## KATA PENGANTAR

Puji syukur ke hadirat Allah SWT. atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul *Dominating Set* pada Hasil Operasi Graf Khusus dan Aplikasinya. Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan pendidikan strata satu (S1) pada Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih atas bantuan dan bimbingan dalam penyusunan skripsi ini, terutama kepada yang terhormat:

1. Prof. Drs. Kusno, DEA., Ph.D., selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
2. Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si., selaku Dosen Pembimbing Utama, Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D., selaku Dosen Pembimbing Anggota, Kosala Dwidja Purnomo, S.Si., M.Si., selaku Dosen Penguji I, dan M. Ziaul Arif, S.Si., M.Sc., selaku Dosen Penguji II yang telah meluangkan waktu, pikiran, dan perhatian dalam penulisan skripsi ini;
3. Dosen dan Karyawan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
4. semua pihak yang telah membantu terselesaikannya skripsi ini yang tidak bisa penulis sebutkan satu persatu.

Semoga bantuan, bimbingan, dan motivasi dari beliau dicatat sebagai amal baik oleh Allah SWT dan mendapat balasan yang sesuai dari-Nya. Selain itu, penulis juga menerima segala kritik maupun saran dari semua pihak demi kesempurnaan skripsi ini. Akhirnya penulis berharap, semoga skripsi ini dapat bermanfaat.

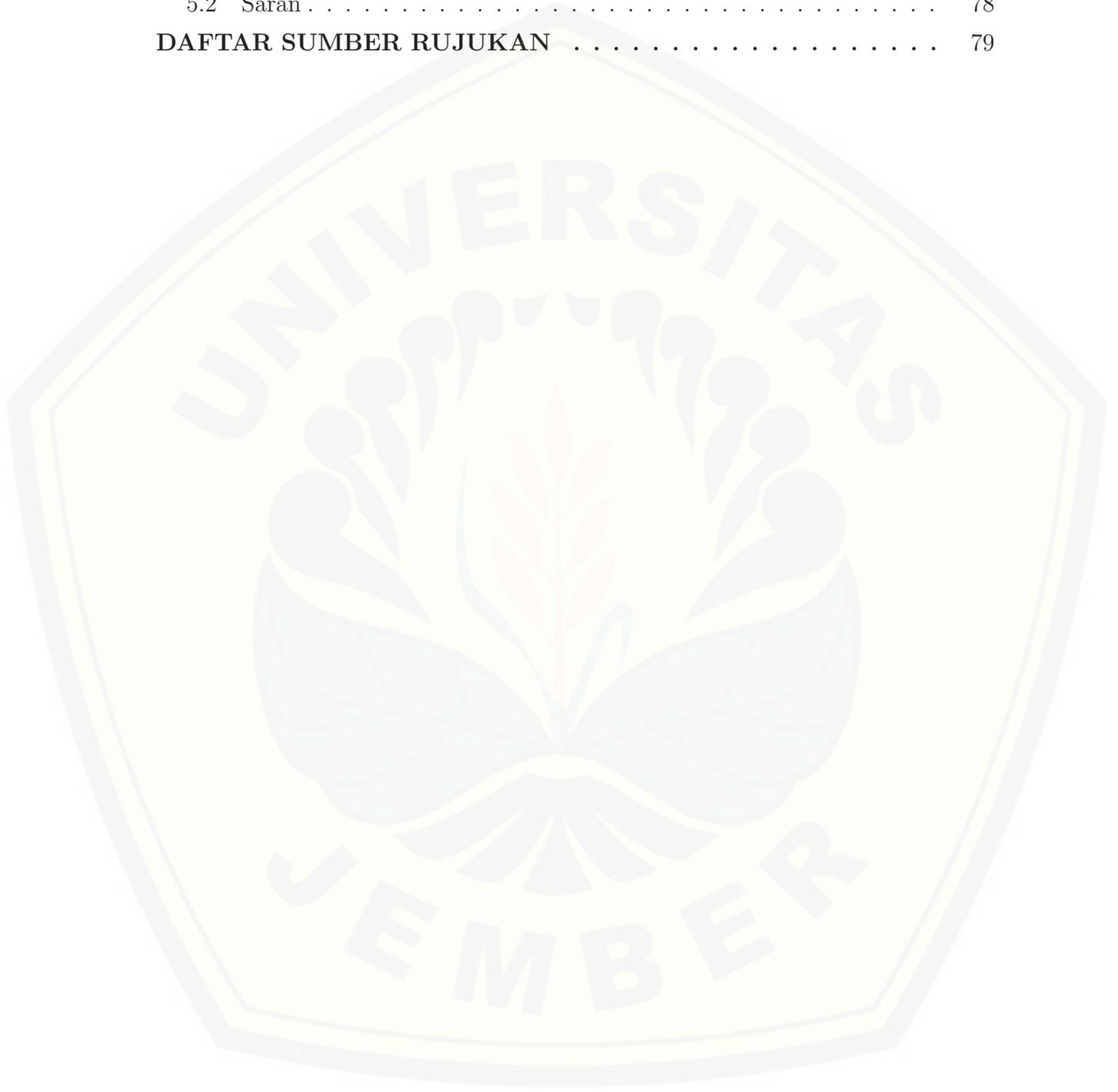
Jember, Mei 2015

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL . . . . .	i
HALAMAN PERSEMBAHAN . . . . .	ii
HALAMAN MOTTO . . . . .	iii
HALAMAN PERNYATAAN . . . . .	iv
HALAMAN PENGESAHAN . . . . .	vi
RINGKASAN . . . . .	vii
KATA PENGANTAR . . . . .	x
DAFTAR ISI . . . . .	xi
DAFTAR GAMBAR . . . . .	xiii
DAFTAR TABEL . . . . .	xv
DAFTAR LAMBANG . . . . .	xvi
<b>1 PENDAHULUAN . . . . .</b>	<b>1</b>
1.1 Latar Belakang Masalah . . . . .	1
1.2 Rumusan Masalah . . . . .	3
1.3 Batasan Masalah . . . . .	3
1.4 Tujuan Penelitian . . . . .	4
1.5 Manfaat Penelitian . . . . .	4
<b>2 TINJAUAN PUSTAKA . . . . .</b>	<b>5</b>
2.1 Terminologi Dasar Graf . . . . .	5
2.2 Graf Khusus dan Operasi Graf . . . . .	10
2.3 Fungsi Flooring dan Ceiling . . . . .	20
2.4 <i>Dominating Set</i> . . . . .	22
2.5 Aplikasi <i>Dominating Set</i> pada Permainan Catur . . . . .	23
<b>3 METODE PENELITIAN . . . . .</b>	<b>29</b>
3.1 Jenis Penelitian . . . . .	29
3.2 Data . . . . .	29
3.3 Rancangan Penelitian . . . . .	29
<b>4 HASIL DAN PEMBAHASAN . . . . .</b>	<b>31</b>
4.1 <i>Dominating Set</i> pada Hasil Operasi Graf Khusus . . . . .	31

4.2	<i>Dominating set</i> Kuda pada Papan Catur Berukuran $8 \times 8$ . . . . .	72
<b>5</b>	<b>KESIMPULAN DAN SARAN</b> . . . . .	<b>75</b>
5.1	Kesimpulan . . . . .	75
5.2	Saran . . . . .	78
	<b>DAFTAR SUMBER RUJUKAN</b> . . . . .	<b>79</b>



DAFTAR GAMBAR

2.1	Graf $G_1$ dan $G_2$ . . . . .	5
2.2	<i>Adjacency Matrix</i> dari Graf $G$ . . . . .	8
2.3	Dua Graf yang Isomorfis . . . . .	9
2.4	Graf Lintasan $P_3$ dan $P_4$ . . . . .	10
2.5	Graf <i>Cycle</i> $C_4$ dan $C_5$ . . . . .	11
2.6	Graf Lengkap $K_4$ dan $K_5$ . . . . .	11
2.7	Graf Roda $W_4$ dan $W_5$ . . . . .	12
2.8	Graf Kipas $F_4$ dan $F_6$ . . . . .	12
2.9	Graf Buku Segitiga $Bt_3$ dan $Bt_5$ . . . . .	13
2.10	Graf <i>Ladder</i> $L_3$ dan $L_4$ . . . . .	13
2.11	Graf <i>Triangular Ladder</i> $\mathbb{L}_3$ dan $\mathbb{L}_4$ . . . . .	14
2.12	Graf Hasil Operasi <i>Joint</i> dari $P_3$ dan $K_4$ . . . . .	15
2.13	Graf Hasil Operasi <i>Cartesian Product</i> dari $P_3$ dan $K_4$ . . . . .	16
2.14	Graf Hasil Operasi <i>Crown Product</i> dari $P_3$ dan $K_4$ . . . . .	17
2.15	Graf Hasil Operasi <i>Tensor Product</i> dari $P_3$ dan $K_4$ . . . . .	18
2.16	Graf Hasil Operasi <i>Composition</i> dari $P_3$ dan $K_4$ . . . . .	19
2.17	Graf Hasil Operasi <i>Shackle</i> dari $K_4$ . . . . .	20
2.18	Graf Hasil Operasi <i>Amalgamation</i> dari $K_4$ . . . . .	21
2.19	<i>Dominating Set</i> pada Graf $P_6$ dan $P_8$ . . . . .	23
2.20	<i>Dominating Set</i> pada Graf $C_5$ dan $C_8$ . . . . .	23
2.21	Langkah Kuda pada Papan Catur Berukuran $8 \times 8$ . . . . .	25
2.22	Representasi Langkah Kuda pada Papan Catur Berukuran $8 \times 8$ ke dalam Konstruksi Graf . . . . .	26
3.1	Rancangan Penelitian . . . . .	30
4.1	Graf Hasil Operasi <i>Joint</i> dari $P_4$ dan $F_6$ . . . . .	34
4.2	<i>Dominating Set</i> pada Graf $P_4 + F_6$ . . . . .	35
4.3	Graf Hasil Operasi <i>Joint</i> dari $C_4$ dan $L_3$ . . . . .	37
4.4	<i>Dominating Set</i> pada Graf $C_3 + L_3$ . . . . .	39

4.5	<i>Dominating Set</i> pada Graf $C_4 + L_3$ . . . . .	40
4.6	Graf Hasil Operasi <i>Crown Product</i> dari $C_4$ dan $L_3$ . . . . .	43
4.7	<i>Dominating Set</i> pada Graf $C_4 \odot L_3$ . . . . .	45
4.8	<i>Dominating Set</i> pada Graf $C_4 \odot L_3$ Tidak Dapat Menjangkau Semua Titik pada Graf $C_4 \odot L_3$ . . . . .	46
4.9	Graf Hasil Operasi <i>Crown Product</i> dari $C_4$ dan $L_3$ . . . . .	48
4.10	<i>Dominating Set</i> pada Graf $P_3 \odot F_6$ . . . . .	50
4.11	<i>Dominating Set</i> pada Graf $P_3 \odot F_6$ Tidak Dapat Menjangkau Semua Titik pada Graf $P_3 \odot F_6$ . . . . .	50
4.12	Graf Hasil Operasi <i>Composition</i> dari $P_5$ dan $K_4$ . . . . .	52
4.13	<i>Dominating Set</i> pada Graf $P_5[K_4]$ . . . . .	54
4.14	Graf Hasil Operasi <i>Composition</i> dari $C_4$ dan $W_3$ . . . . .	55
4.15	<i>Dominating Set</i> pada Graf $C_4[W_3]$ . . . . .	56
4.16	Graf Hasil Operasi <i>Composition</i> dari $L_4$ dan $K_3$ . . . . .	58
4.17	<i>Dominating Set</i> pada Graf $L_3[K_3]$ . . . . .	60
4.18	<i>Dominating Set</i> pada Graf $L_4[K_3]$ . . . . .	61
4.19	<i>Dominating Set</i> pada Graf $L_4[K_3]$ Tidak Dapat Menjangkau Semua Titik pada Graf $L_4[K_3]$ . . . . .	61
4.20	Graf Hasil Operasi <i>Composition</i> dari $P_4$ dan $Bt_3$ . . . . .	64
4.21	<i>Dominating Set</i> pada Graf $P_4[Bt_3]$ . . . . .	65
4.22	Graf Hasil Operasi <i>Shackle</i> dari $P_2[K_8]$ . . . . .	67
4.23	<i>Dominating Set</i> pada Graf <i>Shack</i> $(P_2[K_8], v = x_{1,k}, 2)$ . . . . .	69
4.24	Graf Hasil Operasi <i>Amalgamation</i> dari $Bt_5$ . . . . .	71
4.25	<i>Dominating Set</i> pada Graf $(Amal (Bt_5, v = x_2, 3))$ . . . . .	72
4.26	<i>Dominating Set</i> Kuda pada Papan Catur Berukuran $8 \times 8$ . . . . .	73
4.27	Representasi <i>Dominating Set</i> Kuda pada Papan Catur Berukuran $8 \times 8$ ke dalam Konstruksi Graf . . . . .	74

DAFTAR TABEL

2.1 Hasil Penelitian Terdahulu dari *Dominating Set* . . . . . 27



DAFTAR LAMBANG

$G$	=	Graf $G$
$V(G)$	=	Himpunan Titik pada Graf $G$
$E(G)$	=	Himpunan Sisi pada Graf $G$
$p =  V(G) $	=	Banyaknya Titik pada Graf $G$
$q =  E(G) $	=	Banyaknya Sisi pada Graf $G$
$\Delta(G)$	=	Derajat Terbesar pada Graf $G$
$\delta(G)$	=	Derajat Terkecil pada Graf $G$
$P_n$	=	Graf Lintasan dengan $n$ Titik
$C_n$	=	Graf <i>Cycle</i> dengan $n$ Titik
$K_n$	=	Graf Lengkap dengan $n$ Titik
$W_n$	=	Graf Roda dengan $n$ Titik
$F_n$	=	Graf Kipas dengan $n$ Titik
$Bt_n$	=	Graf Buku Segitiga dengan $n$ Titik
$L_n$	=	Graf <i>Ladder</i> dengan $n$ Titik
$\mathbb{L}_n$	=	Graf <i>Triangular Ladder</i> dengan $n$ Titik
$G_1 + G_2$	=	Operasi <i>Joint</i> dari Graf $G_1$ dan $G_2$
$G_1 \times G_2$	=	Operasi <i>Cartesian Product</i> dari Graf $G_1$ dan $G_2$
$G_1 \odot G_2$	=	Operasi <i>Crown Product</i> dari Graf $G_1$ dan $G_2$
$G_1 \otimes G_2$	=	Operasi <i>Tensor Product</i> dari Graf $G_1$ dan $G_2$
$G_1 [G_2]$	=	Operasi <i>Composition</i> dari Graf $G_1$ dan $G_2$
$Shack(G, r)$	=	Operasi <i>Shackle</i> dari Graf $G$
$Amal(G, v, r)$	=	Operasi <i>Amalgamation</i> Titik dari Graf $G$
$Amal(G, e, r)$	=	Operasi <i>Amalgamation</i> Sisi dari Graf $G$
$Amal(G, G_1, r)$	=	Operasi <i>Amalgamation</i> Subgraf dari Graf $G$
$\gamma(G)$	=	<i>Domination Number</i> Berjarak Satu pada Graf $G$
$D(G)$	=	<i>Dominating Set</i> pada Graf $G$

## BAB 1. PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang Masalah

Teori graf merupakan salah satu cabang ilmu matematika diskrit yang merepresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan antara objek-objek diskrit tersebut. Representasi visual dari graf tersebut adalah dengan menyatakan objek sebagai titik (*vertex*) dan hubungan antara objek sebagai sisi (*edge*). Teori graf lahir pada tahun 1736 melalui makalah tulisan Leonhard Euler seorang ahli matematika dari Swiss. Euler adalah orang pertama yang berhasil memecahkan masalah jembatan Konigsberg di sungai Pregal yang sangat terkenal di Eropa. Euler menyatakan bahwa teka-teki jembatan Konigsberg adalah mustahil. Euler membuktikan pernyataannya dengan memformulasikan masalah jembatan Konigsberg ke dalam teori graf. Masalah tersebut dikembangkan oleh Euler seperti berikut ini, ketika seseorang diminta untuk menyusun rute yang melintasi semua jembatan tetapi tidak perlu punya titik awal dan akhir yang sama. Hal tersebut dimungkinkan ada jika dan hanya jika representasi dari graf tersebut tidak punya titik yang berderajat ganjil dan tepat ada dua titik yang berderajat ganjil tetapi kedua titik tersebut akan menjadi titik awal dan titik akhir. Hal tersebut juga yang mustahil untuk graf dari representasi jembatan Konigsberg.

Salah satu teori yang dikembangkan dalam teori graf adalah *dominating set*. Sejarah *dominating set* berawal sekitar tahun 1850-an di kalangan penggemar catur di Eropa. Mereka mempunyai masalah tentang "dominasi ratu", yaitu berapa banyaknya ratu yang harus ditempatkan pada papan catur berukuran  $8 \times 8$  sehingga semua petak pada papan catur tersebut dapat diserang oleh sekurangnya salah satu dari himpunan ratu tersebut dengan satu langkah. Masalah "dominasi ratu" pada permainan catur yang menjadi tonggak sejarah lahirnya teori *dominating set* pada dasarnya dapat dimodelkan dengan teori graf. Menurut Rofiah dan Dafik (2014), petak pada papan catur direpresentasikan sebagai titik pada konstruksi graf dan dua titik dikatakan terhubung jika petak yang mewa-

kili titik tersebut dapat dicapai oleh ratu pada petak lain dengan satu langkah. Jumlah minimum ratu yang memungkinkan untuk menyerang semua petak pada papan catur berukuran  $8 \times 8$  dengan satu langkah adalah *domination number* ratu. Setelah dilakukan penelitian, akhirnya ditemukan *domination number* ratu pada papan catur berukuran  $8 \times 8$  adalah 5. Secara matematis, *dominating set* dipelajari sejak tahun 1960 yang kemudian berkembang pada berbagai aplikasi. *Dominating set* merupakan suatu konsep penentuan titik seminimal mungkin pada graf dengan ketentuan titik sebagai *dominating set* menjangkau titik yang ada di sekitarnya. Kardinalitas terkecil dari *dominating set* disebut *domination number* yang dinotasikan dengan  $\gamma(G)$ . *Dominating set* ada yang berjarak satu dan berjarak dua. Perbedaannya terletak pada titik yang dijangkau, dimana pada *dominating set* berjarak satu, titik yang menjadi *dominating set* menjangkau titik lain yang berjarak satu dari titik yang menjadi *dominating set* tersebut, sedangkan pada *dominating set* berjarak dua, titik yang menjadi *dominating set* menjangkau titik lain yang berjarak maksimal dua dari titik yang berfungsi sebagai *dominating set* tersebut. Saat ini *dominating set* tidak hanya diterapkan pada graf khusus saja, tetapi juga diterapkan pada hasil operasi graf. Operasi graf merupakan operasi terhadap dua buah graf atau lebih sehingga menghasilkan graf baru. Jenis-jenis operasi graf diantaranya operasi *joint*, *cartesian product*, *crown product*, *tensor product*, *composition*, *shackle*, dan *amalgamation*.

Agustin dan Dafik (2014) telah melakukan penelitian tentang *dominating set* pada graf jaring laba-laba  $Wb_n$ , parasut  $PC_n$ , helm  $H_{n,m}$ , dan regular  $A_{2n,m}$ . Kemudian Alfarisi *et al.* (2014) juga melakukan penelitian tentang *dominating set* pada graf rem cakram  $Db_{n,m}$ , prisma  $D_{m,n}$ , lampion  $\mathcal{L}_{n,m}$ , tingkat tangga prisma  $Dt_{n,m}$ , dan  $Amal(C_n, 1, m)$ . Penelitian mengenai *dominating set* pada graf tribun  $\mathcal{T}_n$ , rantai pentagon  $\mathcal{BC}_n$ , *Shack*  $(S_m, n)$ ,  $C_n \odot (P_4 + \overline{K}_1)$ ,  $C_n + P_n$ , lobster  $L_{i,j,k}$ , *triangular ladder*  $L_n$ ,  $P_2 \otimes C_n$ , dan  $P_n[C_3]$  telah dilakukan oleh Muharromah *et al.* (2014). Alfarisi (2014) dan Muharromah (2014) telah melakukan penelitian tentang aplikasi teori *dominating set* pada analisis morfologi jalan. Kemudian masih di tahun yang sama, Wardani (2014) juga melakukan penelitian tentang *dominating set* pada graf  $Fl_n$ ,  $\vartheta_{n,m}$ ,  $F_{n,k}$ ,  $B_{n,m}$ , dan  $CR_{n,m}$ , serta mengaplikasikan

teori *dominating set* pada analisis topologi jaringan *Wide Area Network* (WAN).

Berdasarkan penelitian sebelumnya, maka peneliti akan mengembangkan teori *dominating set* pada hasil operasi graf khusus, yaitu  $G_1 + G_2$ ,  $P_n + F_m$ ,  $C_n + L_m$ ,  $G_1 \odot G_2$ ,  $C_n \odot L_m$ ,  $P_n \odot F_m$ ,  $G_1[G_2]$ ,  $P_n[K_m]$ ,  $C_n[W_m]$ ,  $L_n[K_m]$ ,  $P_n[Bt_m]$ , *Shack* ( $P_2[K_m], v = x_{1,k}, r$ ), *Amal* ( $G, v = x_i, r$ ), dan *Amal* ( $Bt_n, v = x_2, r$ ). Selanjutnya, peneliti akan mengaplikasikan teori *dominating set* pada permainan catur, yaitu menentukan *dominating set* kuda pada papan catur berukuran  $8 \times 8$ .

### 1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka dapat dirumuskan masalah dalam penelitian ini sebagai berikut:

- Berapa banyaknya titik (*order*) dan banyaknya sisi (*size*) pada hasil operasi graf khusus, yaitu  $P_n + F_m$ ,  $C_n + L_m$ ,  $C_n \odot L_m$ ,  $P_n \odot F_m$ ,  $P_n[K_m]$ ,  $C_n[W_m]$ ,  $L_n[K_m]$ ,  $P_n[Bt_m]$ , *Shack* ( $P_2[K_m], v = x_{1,k}, r$ ), dan *Amal* ( $Bt_n, v = x_2, r$ )?
- Bagaimana *dominating set* dari hasil operasi graf khusus, yaitu  $G_1 + G_2$ ,  $P_n + F_m$ ,  $C_n + L_m$ ,  $G_1 \odot G_2$ ,  $C_n \odot L_m$ ,  $P_n \odot F_m$ ,  $G_1[G_2]$ ,  $P_n[K_m]$ ,  $C_n[W_m]$ ,  $L_n[K_m]$ ,  $P_n[Bt_m]$ , *Shack* ( $P_2[K_m], v = x_{1,k}, r$ ), *Amal* ( $G, v = x_i, r$ ), dan *Amal* ( $Bt_n, v = x_2, r$ )?
- Bagaimana *domination number* dari hasil operasi graf khusus, yaitu  $G_1 + G_2$ ,  $P_n + F_m$ ,  $C_n + L_m$ ,  $G_1 \odot G_2$ ,  $C_n \odot L_m$ ,  $P_n \odot F_m$ ,  $G_1[G_2]$ ,  $P_n[K_m]$ ,  $C_n[W_m]$ ,  $L_n[K_m]$ ,  $P_n[Bt_m]$ , *Shack* ( $P_2[K_m], v = x_{1,k}, r$ ), *Amal* ( $G, v = x_i, r$ ), dan *Amal* ( $Bt_n, v = x_2, r$ )?
- Bagaimana *dominating set* kuda pada papan catur berukuran  $8 \times 8$ ?

### 1.3 Batasan Masalah

Untuk menghindari meluasnya permasalahan yang akan dipecahkan, maka permasalahan dalam penelitian ini dibatasi sebagai berikut:

- Graf yang digunakan dalam penelitian ini adalah graf yang tidak berarah;
- Graf khusus yang digunakan dalam penelitian ini adalah graf lintasan, *cycle*, lengkap, roda, kipas, buku segitiga, *ladder*, dan *triangular ladder*;

- c. Operasi graf yang digunakan dalam penelitian ini adalah operasi *joint*, *crown product*, *composition*, *shackle*, dan *amalgamation*;
- d. *Dominating set* yang digunakan dalam penelitian ini adalah *dominating set* berjarak satu;
- e. Ukuran papan catur yang digunakan dalam penelitian ini adalah papan catur berukuran  $8 \times 8$ .

#### 1.4 Tujuan Penelitian

Sesuai dengan rumusan masalah dan latar belakang masalah, maka tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

- a. Menentukan banyaknya titik (*order*) dan banyaknya sisi (*size*) pada hasil operasi graf khusus, yaitu  $P_n + F_m$ ,  $C_n + L_m$ ,  $C_n \odot L_m$ ,  $P_n \odot F_m$ ,  $P_n[K_m]$ ,  $C_n[W_m]$ ,  $L_n[K_m]$ ,  $P_n[Bt_m]$ , *Shack* ( $P_2[K_m], v = x_{1,k}, r$ ), dan *Amal* ( $Bt_n, v = x_2, r$ );
- b. Menentukan *dominating set* dari hasil operasi graf khusus, yaitu  $G_1 + G_2$ ,  $P_n + F_m$ ,  $C_n + L_m$ ,  $G_1 \odot G_2$ ,  $C_n \odot L_m$ ,  $P_n \odot F_m$ ,  $G_1[G_2]$ ,  $P_n[K_m]$ ,  $C_n[W_m]$ ,  $L_n[K_m]$ ,  $P_n[Bt_m]$ , *Shack* ( $P_2[K_m], v = x_{1,k}, r$ ), *Amal* ( $G, v = x_i, r$ ), dan *Amal* ( $Bt_n, v = x_2, r$ );
- c. Menentukan *domination number* dari hasil operasi graf khusus, yaitu  $G_1 + G_2$ ,  $P_n + F_m$ ,  $C_n + L_m$ ,  $G_1 \odot G_2$ ,  $C_n \odot L_m$ ,  $P_n \odot F_m$ ,  $G_1[G_2]$ ,  $P_n[K_m]$ ,  $C_n[W_m]$ ,  $L_n[K_m]$ ,  $P_n[Bt_m]$ , *Shack* ( $P_2[K_m], v = x_{1,k}, r$ ), *Amal* ( $G, v = x_i, r$ ), dan *Amal* ( $Bt_n, v = x_2, r$ );
- d. Menentukan *dominating set* kuda pada papan catur berukuran  $8 \times 8$ .

#### 1.5 Manfaat Penelitian

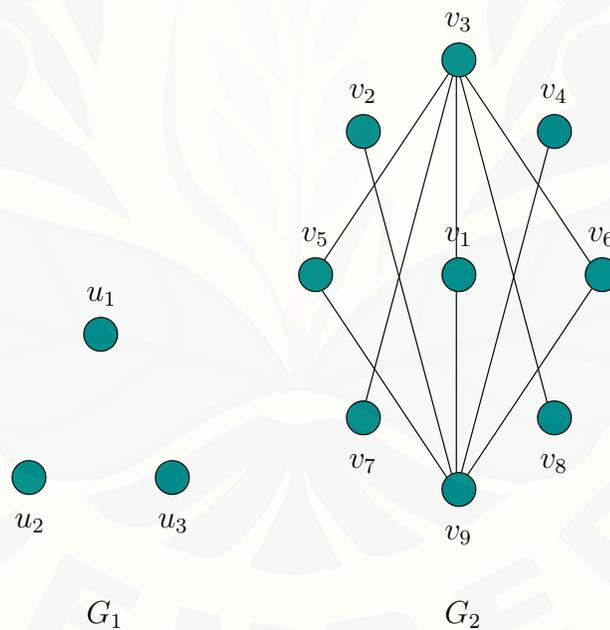
Manfaat yang diharapkan dari hasil penelitian ini adalah sebagai berikut:

- a. Menambah wawasan baru dalam bidang teori graf, khususnya mengenai teori *dominating set*;
- b. Hasil penelitian ini diharapkan dapat digunakan sebagai pengembangan ilmu dalam menentukan *domination number* untuk hasil operasi graf-graf yang lainnya.

## BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

### 2.1 Terminologi Dasar Graf

Sebuah graf  $G$  didefinisikan sebagai pasangan terurut himpunan  $(V(G), E(G))$  dimana  $V(G)$  adalah sebuah himpunan berhingga tak kosong yang elemennya dinamakan titik (*vertex*), sedangkan  $E(G)$  adalah sebuah himpunan sisi (*edge*) berbentuk garis lurus atau lengkung yang menghubungkan dua buah titik. Menurut Irwanto dan Dafik (2014), sebuah graf dimungkinkan tidak mempunyai sisi satu buah pun, tetapi harus terdapat minimal satu buah titik. Munir (2009) mengungkapkan bahwa sebuah graf yang tidak mempunyai sisi tetapi memiliki sebuah titik saja disebut graf *trivial*. Contoh graf dengan 3 titik dan 9 titik dapat dilihat pada Gambar 2.1.



Gambar 2.1 Graf  $G_1$  dan  $G_2$

Suatu graf dengan  $p$  buah titik dan  $q$  buah sisi ditulis dengan  $G(p, q)$ .

Menurut Iswadi (2011), banyaknya titik dari sebuah graf  $G$  disebut *order* dari  $G$  yang dinotasikan dengan  $p$  atau  $|V(G)|$ , sedangkan banyaknya sisi dari sebuah graf  $G$  disebut *size* dari  $G$  yang dinotasikan dengan  $q$  atau  $|E(G)|$ . Pada gambar 2.1,  $G_1$  adalah graf dengan  $|V(G_1)| = 3$  dan  $|E(G_1)| = 0$ , sedangkan  $G_2$  adalah graf dengan  $|V(G_2)| = 9$  dan  $|E(G_2)| = 10$ .  $G_1$  adalah graf yang mempunyai himpunan titik  $V(G_1) = \{u_1, u_2, u_3\}$  dan  $E(G_1) = \emptyset$ .  $G_2$  adalah graf yang mempunyai himpunan titik  $V(G_2) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9\}$  dan  $E(G_2) = \{v_1v_3, v_1v_9, v_2v_9, v_3v_5, v_3v_6, v_3v_7, v_3v_8, v_4v_9, v_5v_9, v_6v_9\}$ . Sebuah sisi dinamakan *loop* jika sisi tersebut berawal dan berakhir pada titik yang sama. Sebuah sisi dinamakan sisi ganda (*parallel*) jika dua atau lebih sisi yang mempunyai titik-titik ujung yang sama.

Dua buah titik pada suatu graf dikatakan bertetangga (*adjacent*) apabila terdapat sebuah sisi yang menghubungkan kedua titik tersebut. Misalkan  $v_1$  dan  $v_2$  titik pada graf  $G$ , titik  $v_1$  dikatakan *adjacent* dengan titik  $v_2$  jika ada sisi  $e_1$  yang menghubungkan titik  $v_1$  dan titik  $v_2$ , yaitu  $e_1 = v_1v_2$ . Sebuah titik pada suatu graf dikatakan bersisian (*incident*) dengan sebuah sisi pada graf tersebut apabila titik tersebut merupakan titik ujung dari sisi tersebut. Menurut Hartsfield dan Ringel (1990), sebuah titik  $v_1$  dikatakan *incident* dengan sebuah sisi  $e_1$  jika  $v_1$  merupakan titik ujung dari  $e_1$ , demikian juga  $e_1$  dikatakan *incident* dengan  $v_1$  jika  $v_1$  merupakan titik ujung dari  $e_1$ . Sebagai contoh, pada graf  $G_2$  Gambar 2.1,  $v_1$  *adjacent* dengan  $v_3$  dan  $v_9$ , namun  $v_1$  tidak *adjacent* dengan  $v_2, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8$ . Pada graf  $G_2$  Gambar 2.1,  $v_1$  dan  $v_3$  *incident* dengan  $v_1v_3$ .

Banyaknya sisi yang *incident* pada suatu titik dinamakan derajat (*degree*). Derajat dinotasikan dengan  $d_i$  (*index*  $i$  menunjukkan titik ke- $i$  pada graf). Sebuah titik yang mempunyai derajat 0 (nol) disebut titik terisolasi (*isolated vertex*), yang artinya titik tersebut tidak bertetangga dengan titik lain. Jika ada suatu graf yang setiap titiknya memiliki derajat yang sama, maka graf tersebut dinamakan graf regular. Derajat terkecil dari suatu graf  $G$  adalah banyaknya minimal sisi yang *incident* pada suatu titik  $v_i$  di graf  $G$  diantara titik-titik lainnya di graf  $G$  yang dinotasikan dengan  $\delta(G)$ . Derajat terbesar dari suatu graf  $G$  adalah banyaknya maksimal sisi yang *incident* pada suatu titik  $v_i$  di graf  $G$  diantara titik-titik lainnya

di graf  $G$  yang dinotasikan dengan  $\Delta(G)$ . Sebagai contoh, graf  $G_2$  pada Gambar 2.1 memiliki  $\delta(G) = 1$  dan  $\Delta(G) = 5$ .

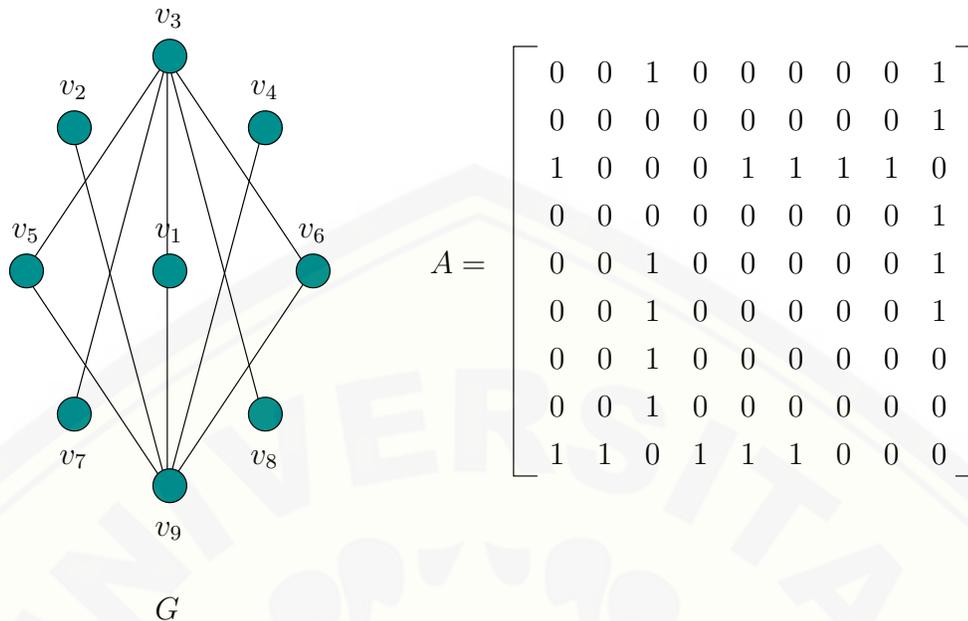
Suatu jalan pada graf  $G$  didefinisikan sebagai barisan titik dan sisi yang berhingga dan saling bergantian dengan ketentuan setiap sisi *incident* pada titik yang mengapitnya pada barisan tersebut, dimana titik dan sisinya boleh berulang serta diawali dan diakhiri oleh titik. Sebuah jalan yang berawal dan berakhir dengan titik yang sama dinamakan jalan tertutup. Panjang suatu jalan didefinisikan sebagai banyaknya sisi yang terdapat dalam jalan tersebut. Sebuah jalan dinamakan jejak (*trail*) apabila jalan tersebut tidak memiliki sisi yang berulang, tetapi titiknya boleh berulang. Menurut Hartsfield dan Ringel (1990), jika sebuah jejak memiliki titik-titik ujung yang sama, maka jejak tersebut disebut jejak tertutup (sirkuit). Jika sebuah jalan tidak memiliki titik dan sisi yang berulang, dengan kata lain setiap titik dan sisi yang dilaluinya berbeda, maka jalan tersebut disebut lintasan (*path*). Suatu lintasan dinamakan *cycle* apabila lintasan tersebut membentuk lintasan tertutup, dengan kata lain lintasan tersebut diawali dan diakhiri oleh titik yang sama. Panjang dari *cycle* terpendek disebut *girth*. Pada graf  $G_2$  Gambar 2.1,  $v_1 - v_3 - v_5 - v_9 - v_1 - v_3 - v_6$  merupakan jalan dengan panjang 6,  $v_1 - v_3 - v_5 - v_9 - v_1 - v_3 - v_6 - v_9 - v_1$  merupakan jalan tertutup dengan panjang 8,  $v_1 - v_3 - v_5 - v_9 - v_6 - v_3 - v_7$  merupakan jejak dengan panjang 6,  $v_1 - v_3 - v_5 - v_9 - v_6$  merupakan lintasan dengan panjang 4, dan  $v_3 - v_5 - v_9 - v_6 - v_3$  merupakan *cycle* dengan panjang 4.

Suatu graf dapat dinyatakan dengan menggunakan matriks. Matriks ketetanggaan (*adjacency matrix*) dinyatakan dengan  $A = [a_{ij}]$ ,  $i$  dan  $j$  adalah titik pada graf tersebut, dimana:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jika } v_i \text{ adjacent terhadap } v_j. \\ 0, & \text{lainnya.} \end{cases}$$

Gambar 2.2 menunjukkan *adjacency matrix* dari graf  $G$ .

Misalkan  $G = (V, E)$  adalah sebuah graf.  $G_1 = (V_1, E_1)$  adalah subgraf dari  $G$  jika  $V_1 \subseteq V$  dan  $E_1 \subseteq E$ , dengan kata lain  $G_1$  adalah subgraf dari  $G$  jika setiap titik pada  $G_1$  merupakan titik pada  $G$  dan setiap sisi pada  $G_1$  merupakan sisi

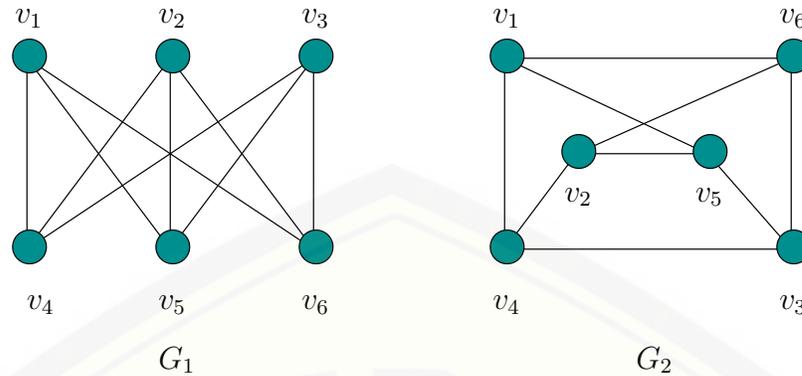
Gambar 2.2 Adjency Matrix dari Graf  $G$ 

pada  $G$ . Dua buah graf yang sama tetapi secara geometri berbeda disebut graf yang isomorfis. Dua buah graf dikatakan isomorfis jika terdapat korespondensi satu-satu antara himpunan titik pada kedua graf tersebut dan antara himpunan sisi pada kedua graf tersebut (Munir, 2009). Contoh dua graf yang isomorfis dapat dilihat pada Gambar 2.3.

Berdasarkan orientasi arah pada suatu graf, graf dibedakan atas dua jenis:

1. Graf tak berarah (*undirect graph*) adalah graf yang sisinya tidak mempunyai orientasi arah.
2. Graf berarah (*direct graph*) adalah graf yang setiap sisinya diberikan orientasi arah. Menurut Slammin (2009), graf berarah merupakan pasangan himpunan  $(V(G), E(G))$  dimana  $V(G)$  adalah himpunan berhingga tak kosong dari elemen berbeda yang disebut titik, dan  $E(G)$  adalah himpunan pasangan terurut  $(u, v)$  dari titik yang berbeda  $u, v \in V(G)$  yang disebut sisi berarah.

Berdasarkan ada tidaknya *loop* ataupun sisi ganda pada suatu graf, graf



Gambar 2.3 Dua Graf yang Isomorfis

dibedakan atas dua jenis:

1. Graf sederhana (*simple graph*) adalah graf yang tidak mengandung *loop* ataupun sisi ganda.
2. Graf berarah (*unsimple graph*) adalah graf yang mengandung *loop* ataupun sisi ganda.

Berdasarkan jumlah titik pada suatu graf, graf dibedakan atas dua jenis:

1. Graf berhingga (*limited graph*) adalah graf yang jumlah titiknya berhingga.
2. Graf tak berhingga (*unlimited graph*) adalah graf yang jumlah titiknya tidak berhingga.

Berdasarkan titik yang terhubung pada suatu graf, graf dibedakan atas dua jenis:

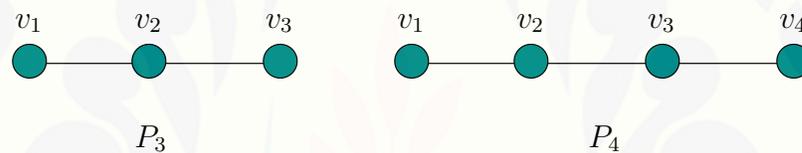
1. Graf terhubung (*connected graph*)  
Graf  $G$  dikatakan terhubung jika untuk setiap dua titik yang berbeda  $v_i$  dan  $v_j$  di  $G$  terdapat lintasan dari  $v_i$  ke  $v_j$ .
2. Graf tak terhubung (*disconnected graph*)  
Graf  $G$  dikatakan tak terhubung jika ada minimal dua titik yang berbeda  $v_i$  dan  $v_j$  di  $G$ , sehingga tidak terdapat lintasan dari  $v_i$  ke  $v_j$ .

## 2.2 Graf Khusus dan Operasi Graf

Graf khusus adalah graf yang mempunyai keunikan dan karakteristik bentuk khusus. Keunikannya adalah graf khusus tidak isomorfis dengan graf lainnya. Karakteristik bentuknya dapat diperluas sampai *order*  $n$  tetapi simetris. Graf khusus yang sudah populer dinamakan *well-known special graph*, sedangkan graf khusus yang belum populer tetapi dengan karakteristik graf khusus dinamakan *well-defined special graph*. Berikut ini beberapa contoh graf khusus.

### 1. Graf Lintasan

Graf lintasan adalah graf yang terdiri dari satu lintasan. Graf lintasan dengan  $n$  buah titik dilambangkan dengan  $P_n$  dimana  $n \geq 2$ . Jumlah sisi pada graf lintasan yang terdiri dari  $n$  buah titik adalah  $n - 1$  sisi. Contoh graf lintasan dapat dilihat pada Gambar 2.4.



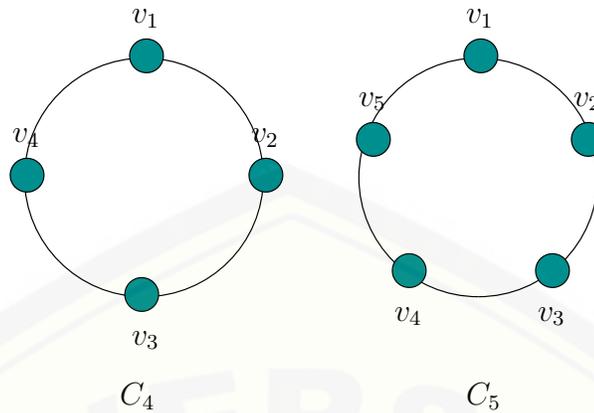
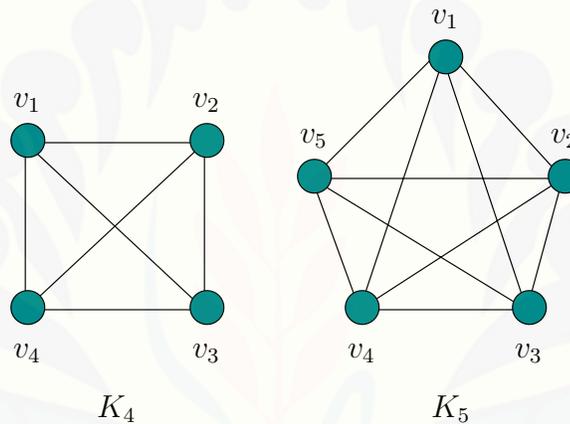
Gambar 2.4 Graf Lintasan  $P_3$  dan  $P_4$

### 2. Graf Cycle

Graf *cycle* adalah graf sederhana yang setiap titiknya berderajat dua. Graf *cycle* dengan  $n$  titik dilambangkan dengan  $C_n$  dimana  $n \geq 3$ . Contoh graf *cycle* dapat dilihat pada Gambar 2.5.

### 3. Graf Lengkap (*Complete Graph*)

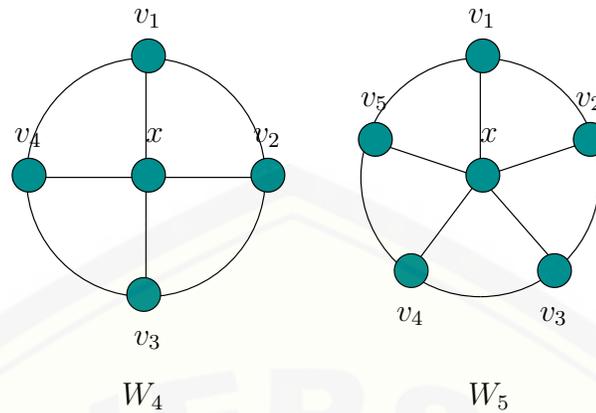
Graf lengkap adalah graf sederhana yang setiap titiknya mempunyai sisi ke semua titik lainnya. Graf lengkap dengan  $n$  buah titik dilambangkan dengan  $K_n$ . Jumlah sisi pada graf lengkap yang terdiri dari  $n$  buah titik adalah  $n(\frac{n-1}{2})$  sisi. Contoh graf lengkap dapat dilihat pada Gambar 2.6.

Gambar 2.5 Graf *Cycle*  $C_4$  dan  $C_5$ Gambar 2.6 Graf Lengkap  $K_4$  dan  $K_5$ 4. Graf Roda (*Wheel Graph*)

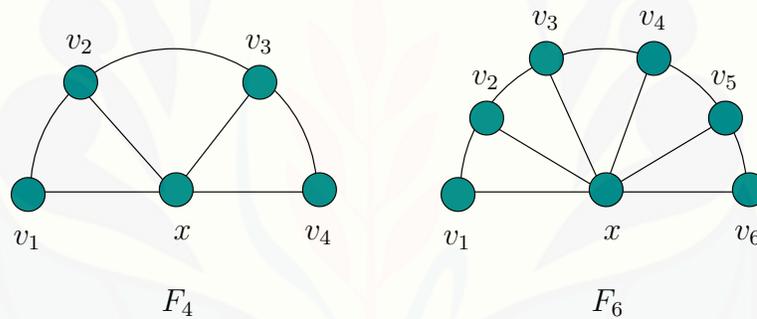
Graf Roda dinotasikan dengan  $W_n$  yaitu sebuah graf yang memuat *cycle* ber-*order*  $n$  dengan satu titik pusat yang bertetangga dengan semua titik di *cycle* tersebut. Graf roda  $W_n$  terdiri dari  $n + 1$  titik dan  $2n$  sisi. Contoh graf roda dapat dilihat pada Gambar 2.7.

5. Graf Kipas (*Fan Graph*)

Graf kipas dinotasikan dengan  $F_n$  dimana  $n \geq 3$ , yaitu graf yang didapat dengan menghubungkan semua titik dari graf lintasan  $P_n$  pada suatu titik

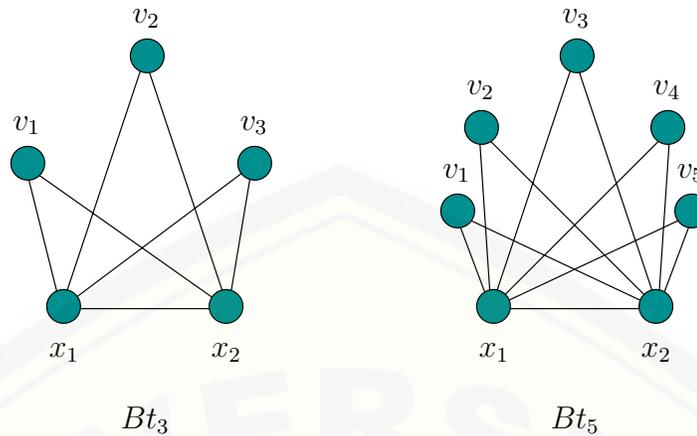
Gambar 2.7 Graf Roda  $W_4$  dan  $W_5$ 

yang disebut titik pusat. Graf kipas  $F_n$  terdiri dari  $n + 1$  titik dan  $2n - 1$  sisi. Contoh graf kipas dapat dilihat pada Gambar 2.8.

Gambar 2.8 Graf Kipas  $F_4$  dan  $F_6$ 

#### 6. Graf Buku Segitiga (*Triangular Book*)

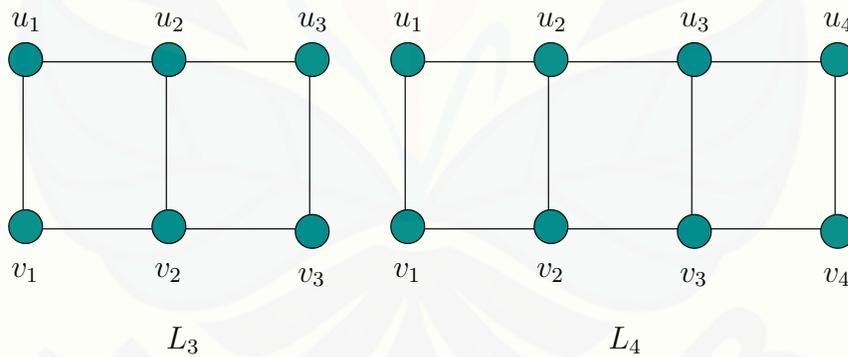
Menurut Dafik *et al.* (2013), graf buku segitiga merupakan dinotasikan dengan  $Bt_n$  yaitu graf yang terdiri dari sejumlah  $n$  buah segitiga ( $n \geq 2$ ) dengan setiap segitiga memiliki sebuah sisi yang dipakai bersama atau dengan kata lain setiap segitiga memiliki 2 titik yang sama. Contoh graf buku segitiga dapat dilihat pada Gambar 2.9.



Gambar 2.9 Graf Buku Segitiga  $Bt_3$  dan  $Bt_5$

7. Graf *Ladder*

Graf *ladder* yang dilambangkan dengan  $L_n$  adalah sebuah graf dengan himpunan titik  $V(L_n) = \{u_i, v_i; 1 \leq i \leq n\}$  dan  $E(L_n) = \{u_i u_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{u_i v_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{v_i v_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\}$ . Graf *ladder*  $L_n$  terdiri dari  $2n$  titik dan  $3n - 2$  sisi dengan  $n \geq 3$ . Contoh graf *ladder* dapat dilihat pada Gambar 2.10.

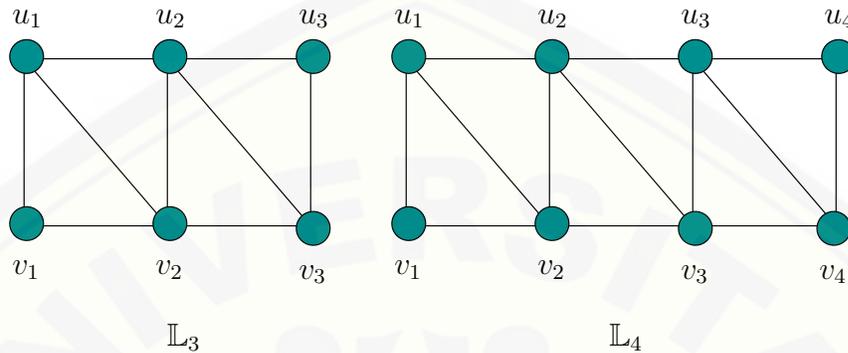


Gambar 2.10 Graf *Ladder*  $L_3$  dan  $L_4$

8. Graf *Triangular Ladder*

Graf *triangular ladder* dinotasikan dengan  $\mathbb{L}_n$  dimana  $n \geq 3$  yaitu graf yang

diperoleh dengan melengkapi graf *ladder* dengan menambahkan sisi  $u_i v_{i+1}$  dengan  $1 \leq i \leq n - 1$ . Graf *triangular ladder*  $\mathbb{L}_n$  terdiri dari  $2n$  titik dan  $4n - 3$  sisi dengan  $n \geq 3$ . Contoh graf *triangular ladder* dapat dilihat pada Gambar 2.11.



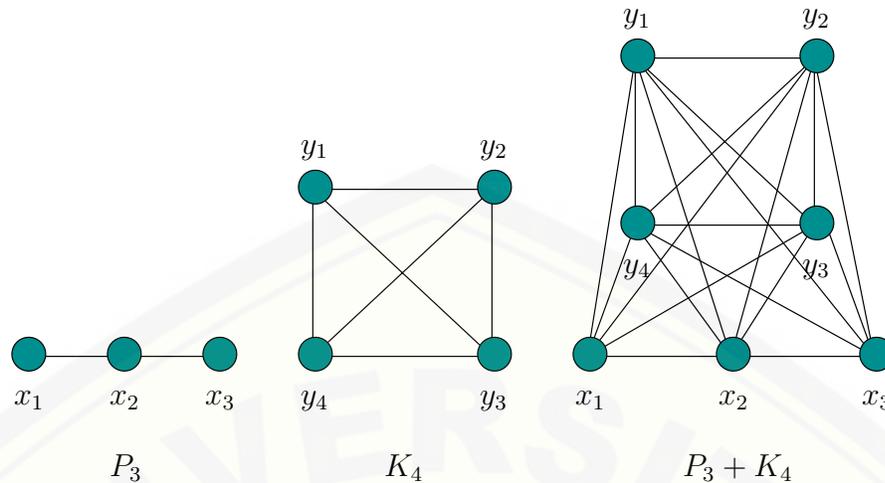
Gambar 2.11 Graf *Triangular Ladder*  $\mathbb{L}_3$  dan  $\mathbb{L}_4$

Operasi graf merupakan operasi terhadap dua buah graf atau lebih sehingga menghasilkan graf baru. Berikut ini beberapa macam operasi graf beserta contohnya.

**Definisi 2.2.1.** *Joint* dari graf  $G_1(V_1, E_1)$  dan  $G_2(V_2, E_2)$  dinotasikan dengan  $G_1 + G_2$ , yaitu graf dengan  $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$  dan  $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{uv \mid u \in V(G_1), v \in V(G_2)\}$  (Harsya et al., 2014). Contoh operasi *joint* dapat dilihat pada Gambar 2.12.

**Definisi 2.2.2.** *Cartesian product* dari graf  $G_1(V_1, E_1)$  dan  $G_2(V_2, E_2)$  dinotasikan dengan  $G = G_1 \times G_2$ , yaitu graf dengan himpunan titik  $V(G_1) \times V(G_2)$ , dua titik  $(u_1, u_2)$  dan  $(v_1, v_2)$  di  $G$  adjacent jika dan hanya jika salah satu dari dua hal berikut berlaku:  $(u_1 = v_1 \text{ dan } u_2v_2 \in E_2)$  atau  $(u_2 = v_2 \text{ dan } u_1v_1 \in E_1)$  (Harsya et al., 2014). Contoh operasi *cartesian product* dapat dilihat pada Gambar 2.13.

**Definisi 2.2.3.** *Crown product* dari dua graf  $G_1(V_1, E_1)$  dan  $G_2(V_2, E_2)$  dinotasikan dengan  $G_1 \odot G_2$ , yaitu graf yang diperoleh dengan mengambil sebuah duplikat dari graf  $G_1$  dan  $|V(G_1)|$  duplikat dari  $G_2$  ( $G_{2,1}, G_{2,2}, G_{2,3}, \dots, G_{2,|V(G_1)|}$ ),



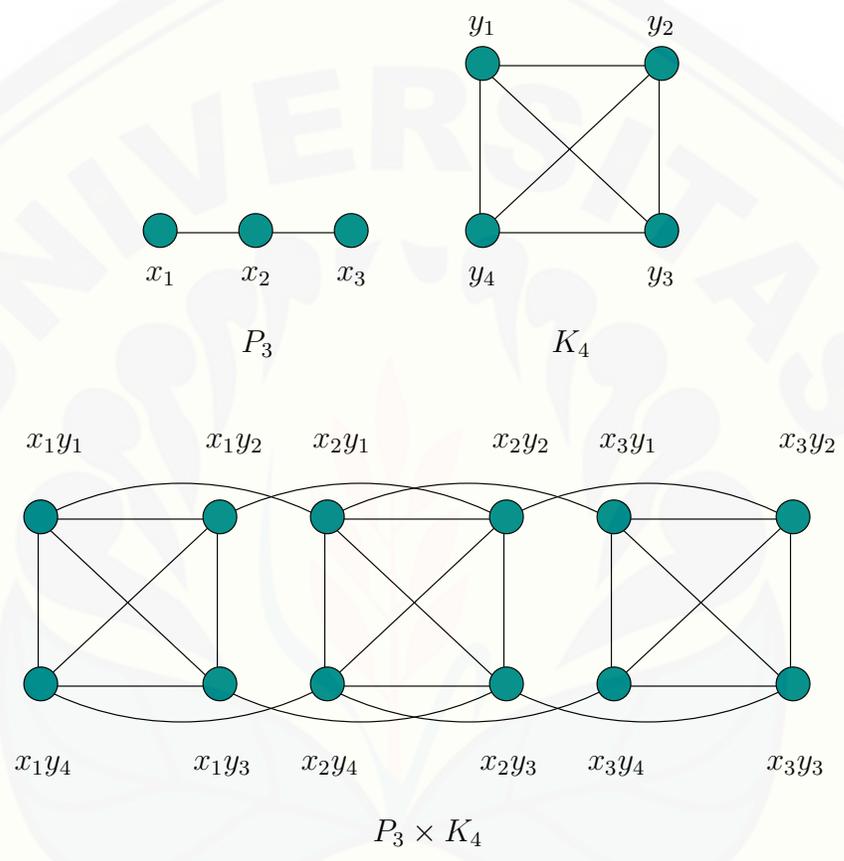
Gambar 2.12 Graf Hasil Operasi *Joint* dari  $P_3$  dan  $K_4$

kemudian menghubungkan titik ke- $i$  dari  $G_1$  ke setiap titik di  $G_{2,i}$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots, |V(G_1)|$  (Harsya et al., 2014). Contoh operasi *crown product* dapat dilihat pada Gambar 2.14.

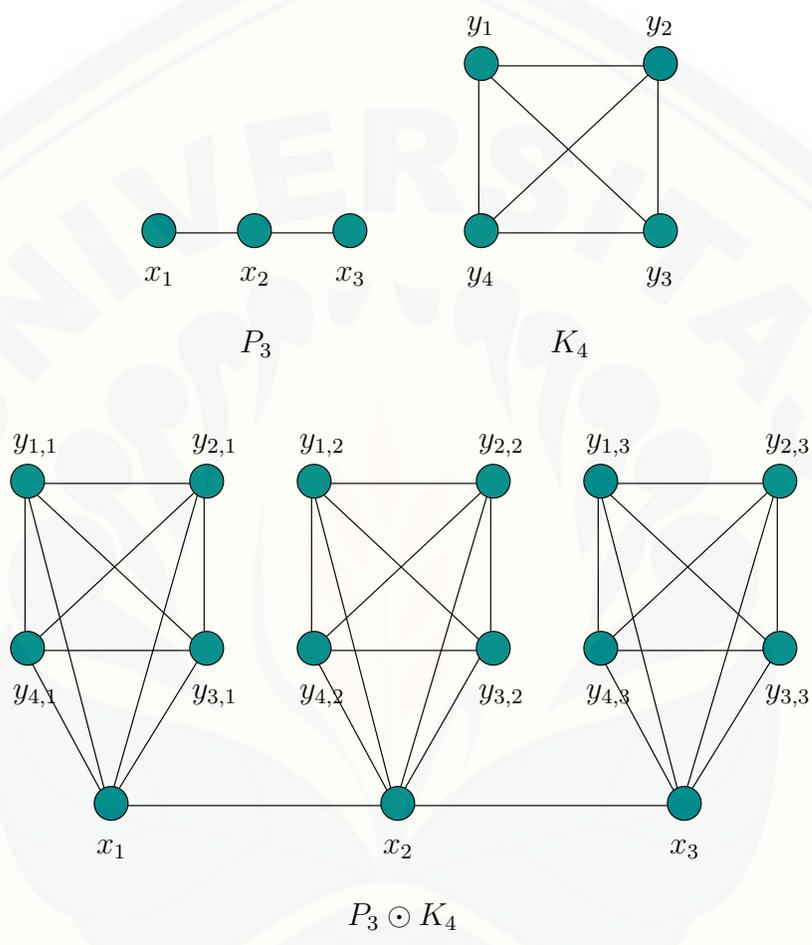
**Definisi 2.2.4.** *Tensor product* dari dua graf  $G_1(V_1, E_1)$  dan  $G_2(V_2, E_2)$  dinotasikan dengan  $G_1 \otimes G_2$ , mempunyai himpunan titik  $V(G_1) \times V(G_2)$  dan dua titik  $(u_1, u_2)$  dan  $(v_1, v_2)$  adjacent ketika  $(u_1, v_1) \in E(G_1), (u_2, v_2) \in E(G_2)$  (Harsya et al., 2014). Contoh operasi *tensor product* dapat dilihat pada Gambar 2.15.

**Definisi 2.2.5.** *Composition* dari graf  $G_1(V_1, E_1)$  dan  $G_2(V_2, E_2)$  dinotasikan dengan  $G = G_1[G_2]$ , yaitu graf dengan himpunan titik  $V(G_1) \times V(G_2)$  dan dua titik  $(u_1, u_2)$  dan  $(v_1, v_2)$  di  $G$  adjacent ketika  $(u_1 \text{ adj } v_1)$  atau  $(u_1 = v_1 \text{ dan } u_2 \text{ adj } v_2)$  (Harrary, 2007). Contoh operasi *composition* dapat dilihat pada Gambar 2.16.

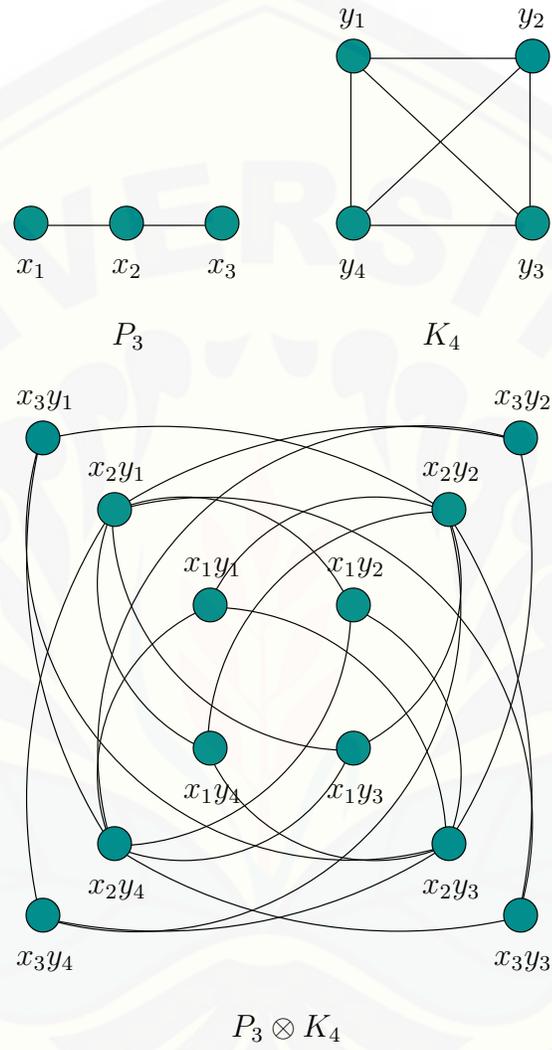
**Definisi 2.2.6.** *Shackle* dari suatu graf  $G$  dinotasikan dengan *Shack*  $(G, r)$  dimana  $G$  adalah graf terhubung non trivial,  $r$  menyatakan banyaknya graf  $G$  yang akan di-shackle, dan untuk setiap  $G_i$  dan  $G_{i+1}$ , dimana  $1 \leq i \leq r$  terdapat tepat satu titik yang sama yang disebut *vertex linkage*, dimana  $r - 1$  *vertex linkage* semua berbeda (Harsya et al., 2014). Contoh operasi *shackle* dapat dilihat pada Gambar 2.17.



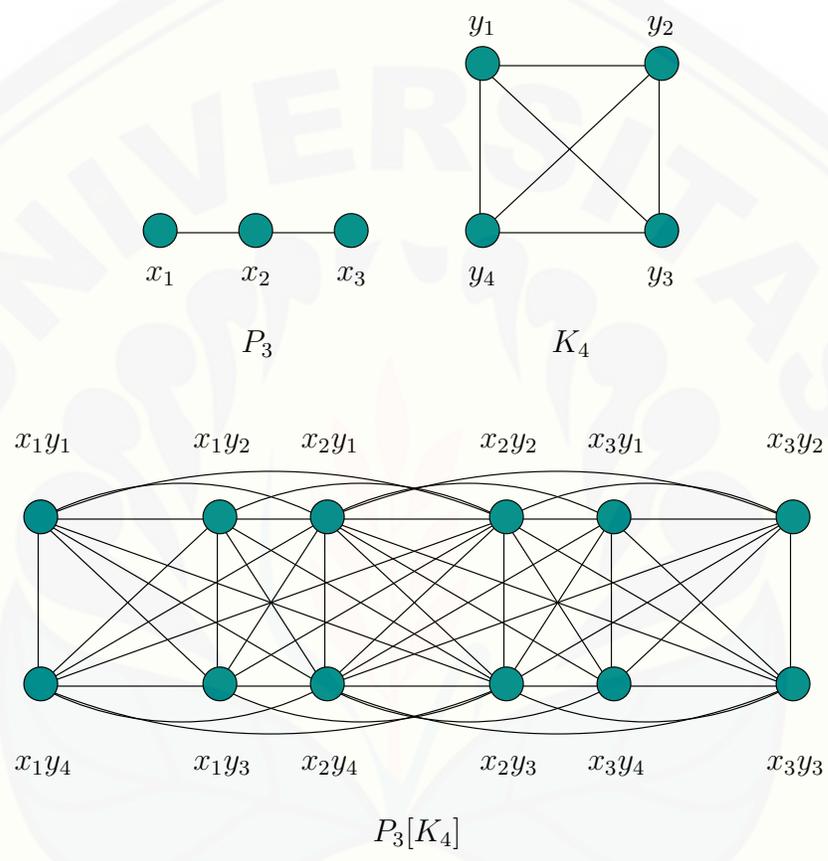
Gambar 2.13 Graf Hasil Operasi *Cartesian Product* dari  $P_3$  dan  $K_4$



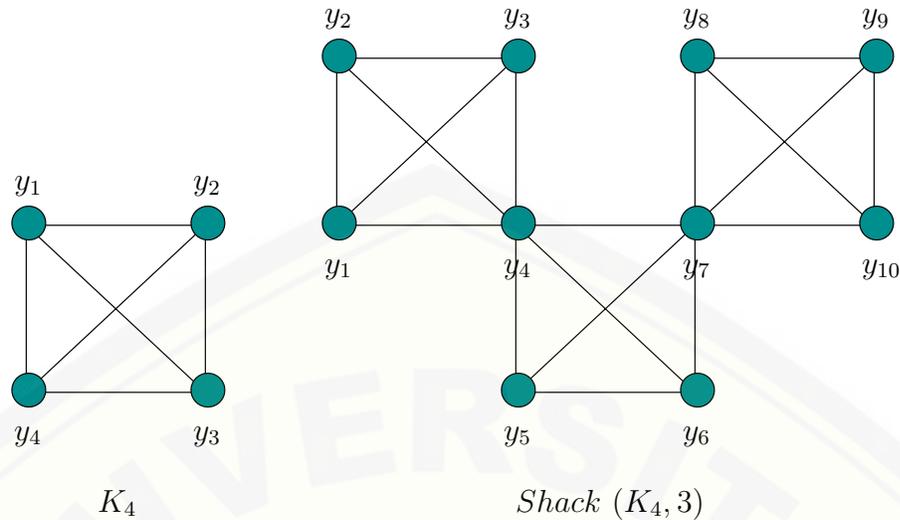
Gambar 2.14 Graf Hasil Operasi *Crown Product* dari  $P_3$  dan  $K_4$



Gambar 2.15 Graf Hasil Operasi *Tensor Product* dari  $P_3$  dan  $K_4$



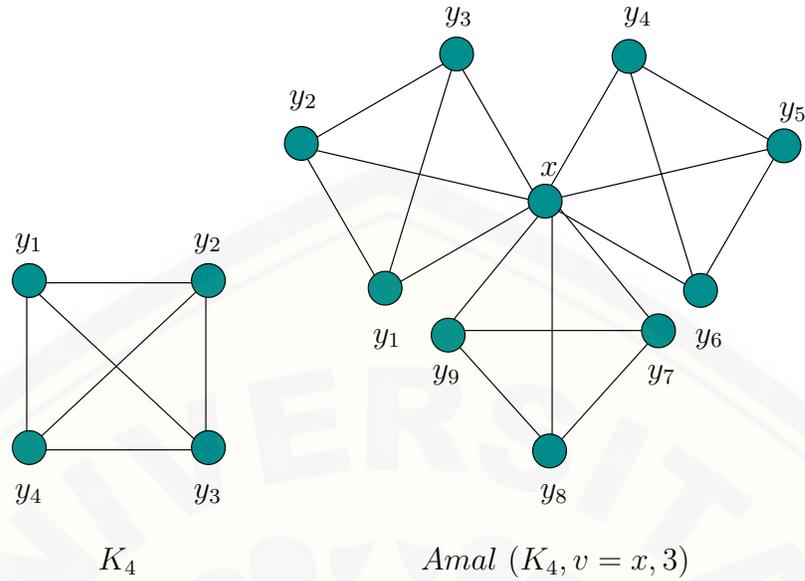
Gambar 2.16 Graf Hasil Operasi *Composition* dari  $P_3$  dan  $K_4$

Gambar 2.17 Graf Hasil Operasi *Shackle* dari  $K_4$ 

**Definisi 2.2.7.** *Amalgamation titik* dinotasikan dengan  $Amal (G, v, r)$  dimana  $G$  adalah suatu keluarga graf berhingga, setiap  $G$  mempunyai suatu titik  $v$  yang disebut titik terminal, dan  $r$  menyatakan banyaknya graf  $G$  yang akan di-amalgamation. Jika terminalnya adalah suatu sisi, maka amalgamation tersebut dinamakan amalgamation sisi yang dinotasikan dengan  $Amal (G, e, r)$ . Jika terminalnya adalah suatu subgraf terhubung nontrivial, maka amalgamation tersebut dinamakan amalgamation subgraf yang dinotasikan dengan  $Amal (G, G_1, r)$ , dimana  $G_1$  merupakan subgraf terhubung non trivial dari  $G$  (Ardiyansah dan Darmaji, 2013). Contoh operasi *amalgamation* dapat dilihat pada Gambar 2.18.

### 2.3 Fungsi Flooring dan Ceiling

Fungsi flooring  $f : R \rightarrow Z$ , dimana  $f(x)$  adalah bilangan bulat terbesar yang kurang dari atau sama dengan  $x$ , dinotasikan dengan  $f(x) = \lfloor x \rfloor$ . Sedangkan fungsi ceiling  $f : R \rightarrow Z$ , dimana  $f(x)$  adalah bilangan bulat terkecil yang lebih dari atau sama dengan  $x$ , dinotasikan dengan  $f(x) = \lceil x \rceil$ . Fungsi flooring dan ceiling ini digunakan untuk menentukan hasil dari *domination number* karena sebagian besar *domination number* dari suatu graf nilainya berupa fungsi flooring dan ceiling. Berikut ini merupakan sifat-sifat dari fungsi flooring dan ceiling:



Gambar 2.18 Graf Hasil Operasi *Amalgamation* dari  $K_4$

1. 
$$[x] = n \begin{cases} \text{bila } n = x < n + 1 \text{ dimana } x \in Z. \\ \text{bila } n < x < n + 1 \text{ dimana } x \in R - Z. \end{cases}$$
2. 
$$[x] = n \begin{cases} \text{bila } n - 1 < x = n \text{ dimana } x \in Z. \\ \text{bila } n - 1 < x < n \text{ dimana } x \in R - Z. \end{cases}$$
3. 
$$[x] = n \begin{cases} \text{bila } x - 1 < n = x \text{ dimana } x \in Z. \\ \text{bila } x - 1 < n < x \text{ dimana } x \in R - Z. \end{cases}$$
4. 
$$[x] = n \begin{cases} \text{bila } x = n < x + 1 \text{ dimana } x \in Z. \\ \text{bila } x < n < x + 1 \text{ dimana } x \in R - Z. \end{cases}$$
5.  $x - 1 < [x] \leq x \leq [x] < x + 1$ , dimana  $x \in R$ .
6.  $[-x] = -[x]$ , dimana  $x \in R$ .
7.  $[-x] = -[x]$ , dimana  $x \in R$ .

8.  $\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$ , dimana  $x \in R$ .
9.  $\lceil x + n \rceil = \lceil x \rceil + n$ , dimana  $x \in R$ .

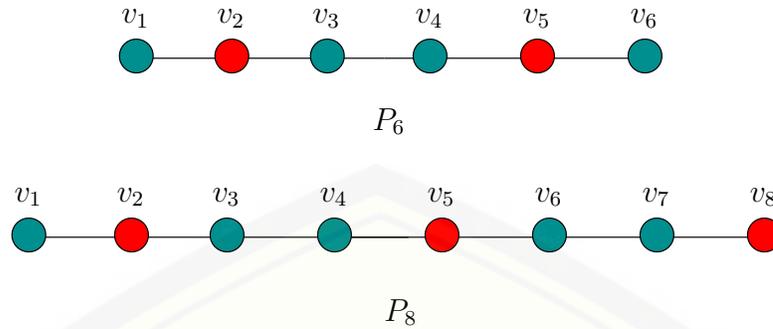
#### 2.4 Dominating Set

Menurut Haynes dan Henning dalam Agustin dan Dafik (2014), himpunan  $D$  dari titik graf sederhana  $G$  dinamakan *dominating set* jika setiap titik  $u \in V(G) - D$  *adjacent* ke beberapa titik  $v \in D$ . Kardinalitas terkecil dari *dominating set* disebut *domination number* yang dinotasikan dengan  $\gamma(G)$ . *Dominating set*  $D$  dengan  $|D| = \gamma(G)$  dinamakan *minimum dominating set*. Menurut Haynes dan Henning (2002), batas atas dari *domination number* adalah banyaknya titik di graf. Ketika paling sedikit satu titik yang dibutuhkan untuk himpunan dominasi di graf, maka  $1 \leq \gamma(G) \leq n$  untuk setiap graf ber-*order*  $n$ . Nilai dari *domination number* selalu  $\gamma(G) \leq |V(G)|$ .

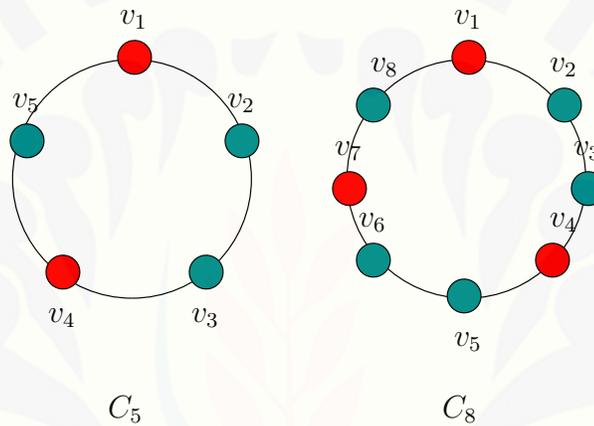
**Teorema 2.4.1.** Untuk sebarang graf  $G$ , maka  $\lceil \frac{p}{1+\Delta(G)} \rceil \leq \gamma(G) \leq p - \Delta(G)$ .

**Bukti:** Misalkan  $S$  adalah sebuah *dominating set* dari  $G$ . Untuk batas bawahnya, setiap titik dapat sebagai *dominating set* dan mempunyai  $\Delta(G)$  ke titik yang lain. Berakibat,  $\gamma(G) \geq \lceil \frac{p}{1+\Delta(G)} \rceil$ . Untuk batas atasnya, misalkan  $v$  adalah titik dengan derajat maksimum ( $\Delta(G)$ ) dan  $N[v]$  merupakan titik yang *adjacent* dengan  $v$ . Maka  $v$  sebagai *dominating set* dari  $N[v]$  dan titik-titik di  $V - N[v]$  merupakan *dominating set* mereka sendiri. Berakibat,  $V - N[v]$  merupakan *dominating set* dengan kardinalitas  $p - \Delta(G)$ , sehingga  $\gamma(G) \leq p - \Delta(G)$ . Maka  $\lceil \frac{p}{1+\Delta(G)} \rceil \leq \gamma(G) \leq p - \Delta(G)$  (Haynes *et al.*, 1998).

Berikut adalah contoh *dominating set* pada graf lintasan dan *cycle* yang dapat dilihat pada Gambar 2.19 dan Gambar 2.20, dimana titik yang berwarna merah merupakan *dominating set*-nya. *Domination number* pada graf lintasan dan *cycle* adalah  $\lceil \frac{n}{3} \rceil$ , dimana  $n$  adalah banyaknya titik pada graf lintasan dan graf *cycle*.



Gambar 2.19 *Dominating Set* pada Graf  $P_6$  dan  $P_8$



Gambar 2.20 *Dominating Set* pada Graf  $C_5$  dan  $C_8$

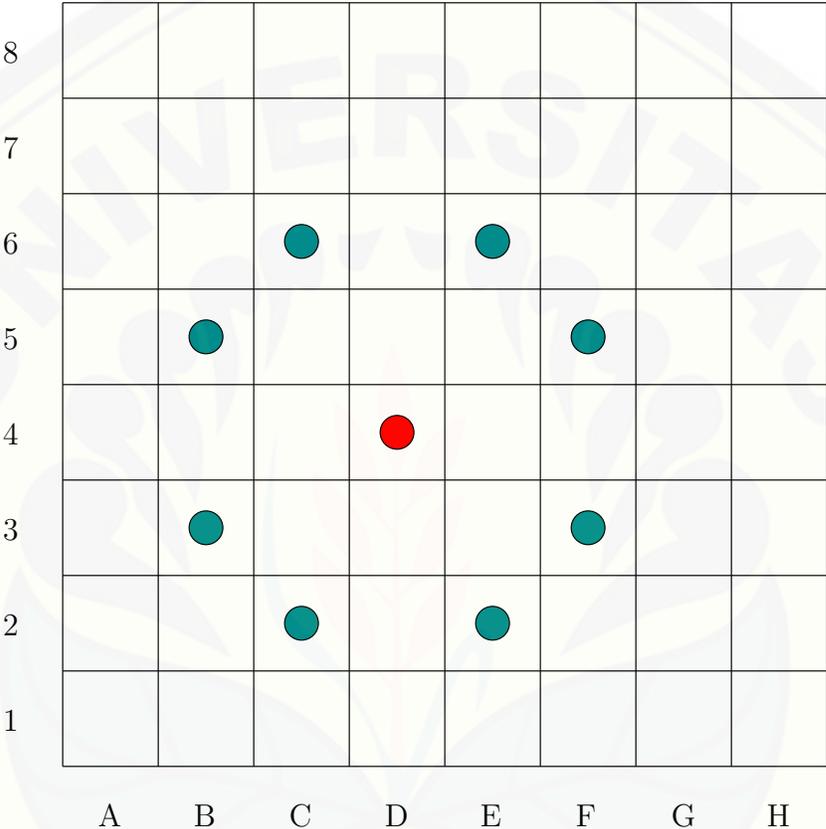
Beberapa hasil penelitian terdahulu dari *dominating set* dapat dilihat pada Tabel 2.1

### 2.5 Aplikasi *Dominating Set* pada Permainan Catur

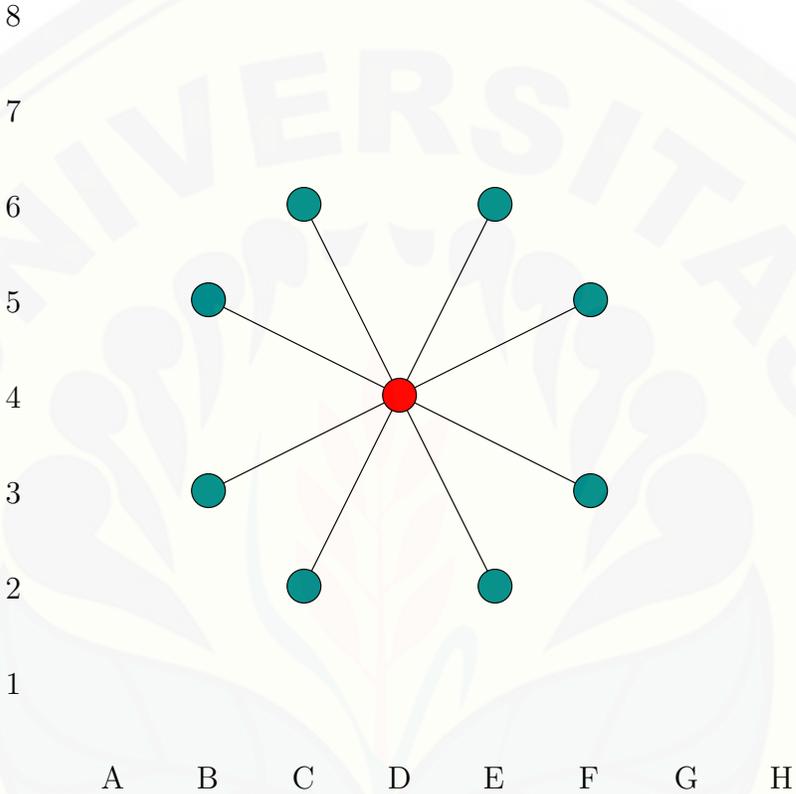
Catur merupakan permainan strategi yang dimainkan oleh dua orang pada papan catur yang berisi 64 petak dan 32 biji catur. Tujuan dari permainan catur adalah mematikan langkah raja lawan. Biji catur dapat diumpamakan sebagai pasukan tentara. 32 biji catur terdiri dari 16 biji catur pemain pertama dan 16 biji catur pemain kedua. 16 biji catur tersebut terdiri dari 1 raja, 1 ratu, 2 benteng, 2 gajah, 2 kuda, dan 8 bidak. setiap biji catur mempunyai gerakan melangkah

dan menyerang yang berbeda-beda. Raja dapat melangkah dan menyerang satu petak ke segala arah. Benteng dapat melangkah dan menyerang sepanjang petak horizontal maupun vertikal, tetapi tidak boleh melompati biji catur yang lain. Gajah dapat melangkah dan menyerang sepanjang petak secara diagonal, tetapi tidak boleh melompati biji catur yang lain. Ratu mempunyai gerakan melangkah dan menyerang kombinasi dari benteng dan gajah. Kuda mempunyai gerakan melangkah dan menyerang mirip huruf "L", yaitu memanjang dua petak dan melebar satu petak atau memanjang satu petak dan melebar dua petak. Kuda adalah satu-satunya biji catur yang dapat melompati biji catur yang lain. Bidak hanya dapat melangkah satu petak ke depan dan tidak boleh mundur, khusus untuk bidak yang belum pernah jalan boleh melangkah dua petak ke depan. Bidak mempunyai cara menyerang yang berbeda dengan cara jalannya, yaitu hanya bisa menyerang sepanjang satu petak secara diagonal.

Dari 6 jenis biji catur, kuda merupakan bidak catur yang sangat menarik karena selain mempunyai gerakan melangkah dan menyerang mirip huruf "L", kuda merupakan satu-satunya biji catur yang dapat melompati biji catur yang lain. Pada penelitian ini, peneliti akan menentukan *dominating set* kuda pada papan catur berukuran  $8 \times 8$ , yaitu berapa banyaknya kuda yang harus ditempatkan pada papan catur berukuran  $8 \times 8$  sehingga semua petak pada papan catur tersebut dapat diserang oleh sekurang-kurangnya salah satu dari himpunan kuda tersebut dengan satu langkah. Gambar 2.21 mengilustrasikan langkah kuda pada papan catur berukuran  $8 \times 8$ . Titik yang berwarna merah merupakan posisi dari kuda, sedangkan titik yang berwarna biru merupakan petak yang dapat dicapai oleh kuda dengan satu langkah. Kuda pada posisi  $D4$  hanya dapat melangkah ke petak  $B3, B5, C2, C6, E2, E6, F3, F5$ . Selanjutnya representasi langkah kuda pada posisi  $D4$  ke dalam konstruksi graf dapat dilihat pada Gambar 2.22. Posisi kuda pada papan catur berukuran  $8 \times 8$  supaya semua petak pada papan catur tersebut dapat diserang oleh sekurang-kurangnya salah satu dari himpunan kuda tersebut dengan satu langkah adalah *dominating set* kuda. Jumlah minimum kuda yang memungkinkan untuk menyerang semua petak pada papan catur berukuran  $8 \times 8$  dengan satu langkah adalah *domination number* kuda.



Gambar 2.21 Langkah Kuda pada Papan Catur Berukuran 8 × 8



Gambar 2.22 Representasi Langkah Kuda pada Papan Catur Berukuran  $8 \times 8$  ke dalam Konstruksi Graf

Tabel 2.1 Hasil Penelitian Terdahulu dari *Dominating Set*

<i>Graf</i>	$\gamma(G)$	Keterangan
Graf Jaring Laba-Laba ( $Wb_n$ )	$\gamma(Wb_n) = 2$ , untuk $n = 3, 4$ dan $n = 2k$ . $\gamma(Wb_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil + 1$ , untuk <i>nlainnya</i> .	Agustin dan Dafik
Graf Parasut ( $PC_n$ )	$\gamma(PC_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil + 1$ .	Agustin dan Dafik
Graf Helm ( $H_{n,m}$ )	$\gamma(H_{n,m}) = n$ , untuk $m \geq 1$ .	Agustin dan Dafik
Graf Regular ( $A_{2n,m}$ )	$\gamma(A_n) = \lceil \frac{2n}{m+1} \rceil$ , untuk $3 \leq m \leq 2n$ .	Agustin dan Dafik
Graf Rem Cakram ( $Db_{m,n}$ )	$\gamma(Db_{n,m}) = \lceil \frac{3nm-2n}{5} \rceil$ , jika $n \geq 3$ dan $m \geq 2$ . $\gamma_2(Db_{n,2}) = \frac{3nm-2n}{5}$ , jika $n$ kelipatan 5.	Alfarisi <i>et al.</i>
Graf Lampion ( $\mathcal{L}_{n,m}$ )	$\gamma(\mathcal{L}_{n,m}) = n + 1$ , jika $n \geq 2$ dan $m \geq 1$ .	Alfarisi <i>et al.</i>
Graf Prisma ( $D_{n,m}$ )	$\gamma(D_{n,m}) = \lceil \frac{nm}{4} \rceil$ , jika $n \geq 3$ dan $m \geq 2$ .	Alfarisi <i>et al.</i>
Graf Tingkat Tangga Prisma ( $Dt_{n,m}$ )	$\gamma(Dt_{n,m}) = n$ , jika $m = 1$ dan $n \geq 3$ . $\gamma(Dt_{n,m}) = n \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ , jika $m = 1$ dan $n \geq 3$ .	Alfarisi <i>et al.</i>
Graf Lampion ( $\mathcal{L}_{n,m}$ )	$\gamma_2(\mathcal{L}_{n,m}) = \lfloor \frac{2nm+n+1}{4m+3} \rfloor$ , jika $n \geq 2$ dan $m \geq 1$ .	Alfarisi <i>et al.</i>
Graf Rem Cakram ( $Db_{m,n}$ )	$\gamma_2(Db_{n,2}) = 2$ , jika $n = 3$ . $\gamma_2(Db_{n,2}) = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ , jika $4 \leq n \leq 6$ dan $n \geq 10$ . $\gamma_2(Db_{n,2}) = \lceil \frac{n}{3} \rceil + 1$ , jika $7 \leq n \leq 9$ .	Alfarisi <i>et al.</i> Alfarisi <i>et al.</i> Alfarisi <i>et al.</i>
Graf Amalgamasi Cycle Amal ( $C_n, 1, m$ )	$\gamma_2(C_n, 1, m) = m \lceil \frac{n}{5} \rceil + 1$ , jika $n \geq 3$ dan $m \geq 3$ .	Alfarisi <i>et al.</i>

Graf	$\gamma(G)$	Keterangan
Graf Tribun ( $\mathfrak{T}_n$ )	$\gamma(\mathfrak{T}_n) = n + 1$ , untuk $n \geq 2$ .	Muharromah <i>et al.</i>
Graf Rantai Pentagon ( $\mathfrak{BC}_n$ )	$\gamma(\mathfrak{BC}_n) = n + 1$ , untuk $n \geq 2$ .	Muharromah <i>et al.</i>
Graf Shack ( $S_m, n$ )	$\gamma(S_m, n) = n$ , untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 3$ .	Muharromah <i>et al.</i>
Graf $C_n \odot (P_4 + \overline{K_1})$	$\gamma(C_n \odot (P_4 + \overline{K_1})n) = n$ , untuk $n \geq 3$ .	Muharromah <i>et al.</i>
Graf Join $C_n + P_n$	$\gamma(C_n + P_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$ , untuk $n \geq 3$ .	Muharromah <i>et al.</i>
Graf Lobster ( $L_{i,j,k}$ )	$\gamma(L_{i,j,k}) = 2n$ , untuk $n \geq 2$ .	Muharromah <i>et al.</i>
Graf Triangular Ladder ( $L_n$ )	$\gamma(L_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ , untuk $n = 3$ dan $n = 2k$ , dimana $k \geq 2$ . $\gamma(L_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ , untuk $n = 2k + 1$ , dimana $k \geq 2$ .	Muharromah <i>et al.</i>
Graf $P_2 \otimes C_n$	$\gamma(P_2 \otimes C_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$ , untuk $n \geq 3$ .	Muharromah <i>et al.</i>
Graf $P_n[C_3]$	$\gamma P_n[C_3] = \lceil \frac{n+1}{3} \rceil$ , untuk $n \geq 4$ .	Muharromah <i>et al.</i>
Graf $Fl_n$	$\gamma(Fl_n) = 1$ , untuk $n \geq 2$ .	Wardani <i>et al.</i>
Graf $\vartheta_{n,m}$	$\gamma(\vartheta_{n,m}) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$ , untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 1$ .	Wardani <i>et al.</i>
Graf $F_{n,k}$	$\gamma(F_{n,k}) = n$ , untuk $n \geq 1$ .	Wardani <i>et al.</i>
Graf $B_{n,m}$	$\gamma(B_{n,m}) = n + 1$ , untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 3$ .	Wardani <i>et al.</i>
Graf $CR_{n,m}$	$\gamma(CR_{n,m}) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$ , untuk $n \geq 3$ .	Wardani <i>et al.</i>

## BAB 3. METODE PENELITIAN

### 3.1 Jenis Penelitian

Penelitian ini dikategorikan ke dalam penelitian eksploratif dan penelitian terapan (*applied research*).

1. Penelitian eksploratif adalah jenis penelitian yang bertujuan menggali hal-hal yang ingin diketahui oleh peneliti dan hasil penelitian dapat digunakan sebagai dasar penelitian selanjutnya.
2. Penelitian terapan (*applied research*) merupakan penyelidikan yang hati-hati, sistematis, dan terus-menerus terhadap suatu masalah dengan tujuan untuk digunakan dengan segera untuk keperluan tertentu.

### 3.2 Data

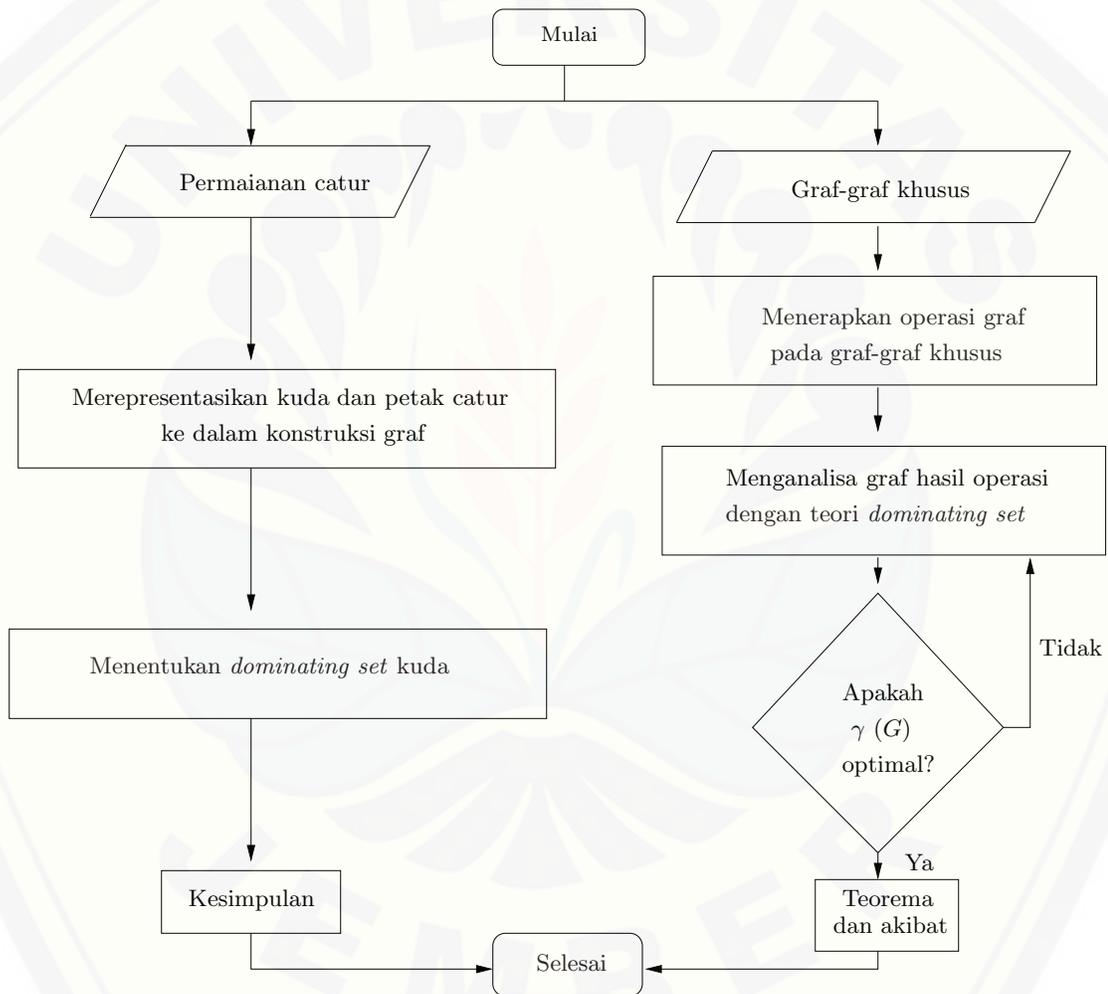
Data dalam penelitian ini adalah data berupa papan catur berukuran  $8 \times 8$  dan biji catur berupa kuda, serta data sekunder yang didapat dari penelitian sebelumnya. Data sekunder yang digunakan berupa graf-graf khusus yang akan dioperasikan. Graf-graf khusus yang digunakan adalah graf lintasan, *cycle*, lengkap, roda, kipas, buku segitiga, *ladder*, dan *triangular ladder*.

### 3.3 Rancangan Penelitian

Penelitian ini menggunakan metode deduktif aksiomatik dalam menyelesaikan permasalahan. Metode deduktif aksiomatik merupakan metode penelitian yang menggunakan prinsip-prinsip pembuktian deduktif yang berlaku dalam logika matematika dengan menggunakan aksioma atau teorema yang telah ada untuk memecahkan suatu masalah. Rancangan penelitian untuk *dominating set* pada graf hasil operasi dan aplikasinya digambarkan dalam bagan yang diilustrasikan oleh Gambar 3.1. Uraian dari rancangan penelitian ini sebagai berikut:

1. Menentukan objek penelitian berupa permainan catur;

2. Merepresentasikan bidak catur berupa kuda dan petak pada papan catur berukuran  $8 \times 8$  ke dalam konstruksi graf;
3. Menentukan *dominating set* kuda pada papan catur berukuran  $8 \times 8$ ;
4. Menganalisa hasil operasi graf khusus dengan teori *dominating set*, sehingga dihasilkan teorema dan akibat tentang *domination number* ( $\gamma(G)$ ) dari hasil operasi graf khusus yang selanjutnya akan dilihat keoptimalannya dengan menggunakan batas atas dan batas bawah dari *domination number* ( $\lceil \frac{p}{1+\Delta(G)} \rceil \leq \gamma(G) \leq p - \Delta(G)$ ).



Gambar 3.1 Rancangan Penelitian

## BAB 4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Bagian ini merupakan jawaban dari rumusan masalah yang telah dirumuskan sebelumnya. Terdapat 4 rumusan masalah yang akan dijawab yaitu berapa banyaknya titik (*order*) dan banyaknya sisi (*size*) pada hasil operasi graf khusus, bagaimana *dominating set* pada hasil operasi graf khusus, bagaimana *domination number* pada hasil operasi graf khusus, dan bagaimana *dominating set* kuda pada papan catur berukuran  $8 \times 8$ .

Hasil penelitian ini berupa observasi, teorema, dan akibat baru terkait *dominating set* berjarak satu pada hasil operasi sebarang graf sederhana dan hasil operasi graf khusus yang disimbolkan dengan  $\diamond$ , serta *dominating set* kuda pada papan catur berukuran  $8 \times 8$ . Terdapat 10 observasi, 5 teorema, dan 9 akibat baru yang ditemukan secara eksperimental dalam penelitian ini.

### 4.1 *Dominating Set* pada Hasil Operasi Graf Khusus

Pada bagian ini akan disajikan hasil penelitian terkait *dominating set* berjarak satu pada hasil operasi graf khusus. Bagian awal dari penelitian ini adalah melakukan observasi pada hasil operasi graf khusus. Observasi merupakan pengamatan yang sistematis pada objek penelitian. Observasi pada penelitian ini bertujuan untuk mendefinisikan himpunan titik, himpunan sisi, banyaknya titik (*order*), dan banyaknya sisi (*size*) dari hasil operasi graf khusus. Setelah observasi, dilanjutkan dengan bukti observasi dan contoh gambar sebagai visualisasi kebenaran pembuktian observasi. Kemudian disajikan teorema dan akibat yang dilanjutkan dengan bukti teorema dan akibat serta contoh gambar sebagai visualisasi kebenaran pembuktian teorema dan akibat. Dari penelitian ini dihasilkan 10 observasi baru yaitu graf  $P_n + F_m$ ,  $C_n + L_m$ ,  $C_n \odot \mathbb{L}_m$ ,  $P_n \odot F_m$ ,  $P_n[K_m]$ ,  $C_n[W_m]$ ,  $L_n[K_m]$ ,  $P_n[Bt_m]$ , *Shack* ( $P_2[K_m], v = x_{1,k}, r$ ), dan *Amal* ( $Bt_n, v = x_2, r$ ); 14 *dominating set* pada hasil operasi graf khusus yaitu  $G_1 + G_2$ ,  $P_n + F_m$ ,  $C_n + L_m$ ,  $G_1 \odot G_2$ ,  $C_n \odot \mathbb{L}_m$ ,  $P_n \odot F_m$ ,  $G_1[G_2]$ ,  $P_n[K_m]$ ,  $C_n[W_m]$ ,  $L_n[K_m]$ ,  $P_n[Bt_m]$ , *Shack*

$(P_2[K_m], v = x_{1,k}, r)$ ,  $Amal (G, v = x_i, r)$ , dan  $Amal (Bt_n, v = x_2, r)$ ; 5 teorema baru yaitu *domination number* pada graf  $G_1 + G_2$ ,  $G_1 \odot G_2$ ,  $G_1[G_2]$ , *Shack*  $(P_2[K_m], v = x_{1,k}, r)$ , dan  $Amal (G, v = x_i, r)$ ; dan 9 akibat baru yaitu *domination number* pada graf  $P_n + F_m$ ,  $C_n + L_m$ ,  $C_n \odot L_m$ ,  $P_n \odot F_m$ ,  $P_n[K_m]$ ,  $C_n[W_m]$ ,  $L_n[K_m]$ ,  $P_n[Bt_m]$ , dan  $Amal (Bt_n, v = x_2, r)$ . Berikut hasil observasi, teorema, dan akibat beserta pembuktiannya.

Teorema yang pertama adalah *domination number* pada hasil operasi *joint* dari sebarang dua graf sederhana. Teoremnya adalah sebagai berikut:

◇ **Teorema 4.1.1.** *Misal  $G_1$  dan  $G_2$  adalah sebarang graf sederhana, maka domination number dari  $G_1 + G_2$  adalah sebagai berikut:*

$$\gamma(G_1 + G_2) = \begin{cases} 1, & \text{dimana } \Delta(G_1) = |V(G_1)| - 1 \text{ atau } \Delta(G_2) = |V(G_2)| - 1. \\ 2, & \text{dimana } \Delta(G_1) \neq |V(G_1)| - 1 \text{ dan } \Delta(G_2) \neq |V(G_2)| - 1. \end{cases}$$

**Bukti.** Definisi 2.2.1 menjelaskan bahwa graf  $G_1 + G_2$  memiliki himpunan titik  $V(G_1 + G_2) = V(G_1) \cup V(G_2)$  dan himpunan sisi  $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{uv \mid u \in V(G_1), v \in V(G_2)\}$ . Misal  $|V(G_1)| = m$  dan  $|V(G_2)| = n$ , maka  $|V(G_1 + G_2)| = m + n$ . Misal salah satu dari  $G_1$  dan  $G_2$  derajat terbesarnya adalah banyaknya titik pada graf tersebut dikurangi satu, yaitu  $\Delta(G_1) = m - 1$  dan  $\Delta(G_2) \neq n - 1$ . Maka terdapat titik pada  $G_1$  misal  $x_i$ , dimana  $x_i$  *adjacent* dengan semua elemen  $V(G_1) \setminus x_i$ . Sehingga  $\Delta(G_1 + G_2) = m + n - 1$ . Pilih titik yang menjadi *dominating set* satu titik pada  $G_1$ , yaitu  $D = \{x_i; \text{dimana } \Delta(x_i) = |V(G_1)| - 1\}$ , maka dapat dilihat bahwa  $D$  *adjacent* dengan semua elemen  $V \setminus D$ .  $|D| = 1$  sehingga  $\gamma(G_1 + G_2) = 1$ . Berdasarkan Teorema 2.4.1 dinyatakan bahwa  $\lceil \frac{p}{1 + \Delta(G_1 + G_2)} \rceil \leq \gamma(G_1 + G_2) \leq p - \Delta(G_1 + G_2)$ , substitusikan nilai  $p$  dan  $\Delta(G_1 + G_2)$  menjadi  $\lceil \frac{m+n}{m+n} \rceil \leq \gamma(G_1 + G_2) \leq (m+n) - (m+n-1)$ , sehingga diperoleh batas bawah dan batas atas *domination number* yaitu  $1 \leq \gamma(G_1 + G_2) \leq 1$ . Maka  $\gamma(G_1 + G_2)$  berada pada batas bawah *domination number*. Misal  $\Delta(G_1) \neq m - 1$  dan  $\Delta(G_2) \neq n - 1$ . Ambil satu titik pada  $G_1$  misal  $x_i$  dan satu titik pada  $G_2$  misal  $y_j$ , sedemikian sehingga  $x_i$  *adjacent* dengan semua elemen  $V(G_2)$  dan  $y_j$  *adjacent* dengan semua elemen  $V(G_1)$ , sehingga  $\Delta(G_1 + G_2) = k$ , dimana  $\max\{m, n\} \leq k \leq m + n - 2$ . Pilih titik yang menjadi *dominating set*

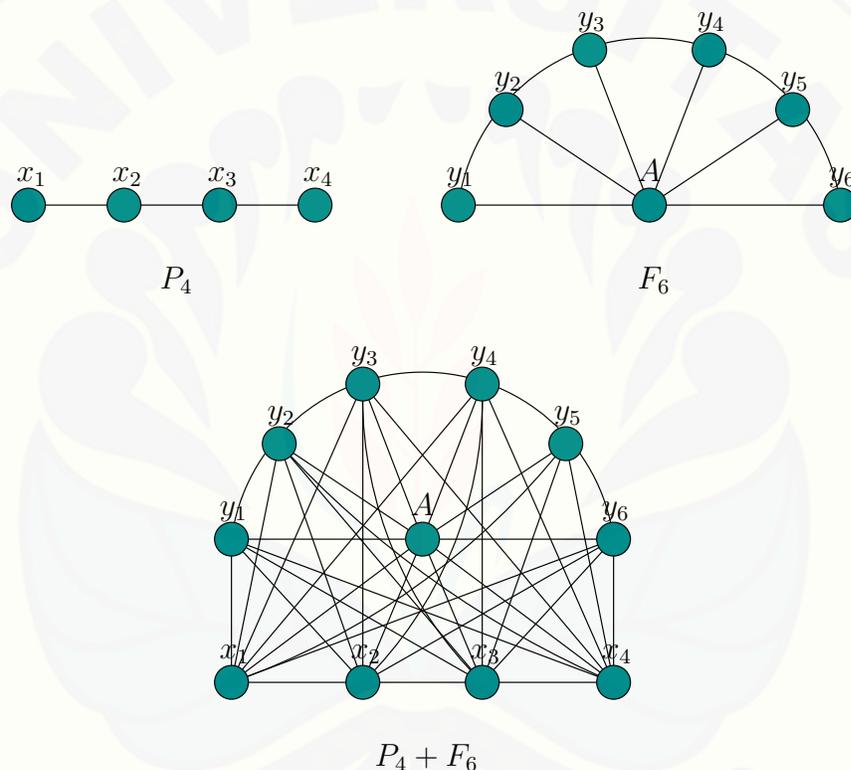
satu titik pada  $G_1$  dan satu titik pada  $G_2$ , yaitu  $D = \{x_i, y_j; x_i \in V(G_1); y_j \in V(G_2)\}$ , maka dapat dilihat bahwa  $D$  adjacent dengan semua elemen  $V \setminus D$ .  $|D| = 2$  sehingga  $\gamma(G_1 + G_2) = 2$ . Berdasarkan Teorema 2.4.1 dinyatakan bahwa  $\lceil \frac{p}{1+\Delta(G_1+G_2)} \rceil \leq \gamma(G_1 + G_2) \leq p - \Delta(G_1 + G_2)$ , substitusikan nilai  $p$  dan  $\Delta(G_1 + G_2)$  menjadi  $\lceil \frac{m+n}{k+1} \rceil \leq \gamma(G_1 + G_2) \leq m + n - k$ . Untuk  $k = \max\{m, n\}$  dimana  $m > 1$  dan  $n > 1$ , ambil  $m > n$  sehingga  $k = m$ , maka  $\lceil \frac{m+n}{k+1} \rceil \leq \gamma(G_1 + G_2) \leq m + n - k$  menjadi  $\lceil \frac{m+n}{m+1} \rceil \leq \gamma(G_1 + G_2) \leq n$ .  $\frac{m+n}{m+1} = 1 + \frac{n-1}{m+1}$ . Ambil  $m$  dan  $n$  terkecil yaitu  $m = 3$  dan  $n = 2$  maka  $\frac{n-1}{m+1} = \frac{1}{4}$ . Sehingga untuk  $m > n$  maka  $0 < \frac{n-1}{m+1} < 1$ . Sehingga  $\lceil 1 + \frac{n-1}{m+1} \rceil = 2$ . Hal ini mengakibatkan  $\lceil \frac{m+n}{m+1} \rceil = 2$ . Kemudian ambil  $n > m$  sehingga  $k = n$ , maka  $\lceil \frac{m+n}{k+1} \rceil \leq \gamma(G_1 + G_2) \leq m + n - k$  menjadi  $\lceil \frac{m+n}{n+1} \rceil \leq \gamma(G_1 + G_2) \leq m$ .  $\frac{m+n}{n+1} = 1 + \frac{m-1}{n+1}$ . Ambil  $m$  dan  $n$  terkecil yaitu  $m = 2$  dan  $n = 3$  maka  $\frac{m-1}{n+1} = \frac{1}{4}$ . Sehingga untuk  $n > m$  maka  $0 < \frac{m-1}{n+1} < 1$ . Sehingga  $\lceil 1 + \frac{m-1}{n+1} \rceil = 2$ . Hal ini mengakibatkan  $\lceil \frac{m+n}{n+1} \rceil = 2$ . Untuk  $k = m+n-2$ , maka  $\lceil \frac{m+n}{k+1} \rceil \leq \gamma(G_1 + G_2) \leq m + n - k$  menjadi  $\lceil \frac{m+n}{m+n-1} \rceil \leq \gamma(G_1 + G_2) \leq 2$ .  $\frac{m+n}{m+n-1} = 1 + \frac{1}{m+n-1}$ . Untuk  $m > 1$  dan  $n > 1$ , ambil  $m$  dan  $n$  terkecil yaitu  $m = 2$  dan  $n = 2$  maka  $\frac{1}{m+n-1} = \frac{1}{3}$ . Sehingga untuk  $m > 1$  dan  $n > 1$  maka  $0 < \frac{1}{m+n-1} \leq \frac{1}{3}$ . Sehingga  $\lceil 1 + \frac{1}{m+n-1} \rceil = 2$ . Hal ini mengakibatkan  $\lceil \frac{m+n}{m+n-1} \rceil = 2$ . Sehingga diperoleh batas bawah dan batas atas domination number yaitu  $2 \leq \gamma(G_1 + G_2) \leq m + n - k$ . Maka  $\gamma(G_1 + G_2)$  berada pada batas bawah domination number.  $\square$

Selanjutnya akan disajikan akibat yang pertama dari Teorema 4.1.1, dimana graf yang digunakan pada akibat ini adalah graf  $P_n + F_m$ . Sebelum disajikan akibat, terlebih dahulu disajikan observasi dari graf  $P_n + F_m$ . Observasinya adalah sebagai berikut:

$\diamond$  **Observasi 4.1.1.** Misal diketahui graf lintasan  $P_n$  dengan  $V(P_n) = \{x_i; 1 \leq i \leq n\}$  dan  $E(P_n) = \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\}$  dan graf kipas  $F_m$  dengan  $V(F_m) = \{A, y_j; 1 \leq j \leq m\}$  dan  $E(F_m) = \{A y_j; 1 \leq j \leq m\} \cup \{y_j y_{j+1}; 1 \leq j \leq m-1\}$ . Operasi joint dari  $P_n$  dan  $F_m$  yang dinotasikan dengan  $P_n + F_m$ , untuk  $n \geq 2$  dan  $m \geq 3$ , maka himpunan titik dan sisinya dapat disajikan dalam  $V(P_n + F_m) = \{A, x_i, y_j; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$ ,  $E(P_n + F_m) = \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{A y_j; 1 \leq j \leq m\} \cup \{y_j y_{j+1}; 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{A x_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_i y_j; 1 \leq i \leq$

$n \ 1 \leq j \leq m\}$ ,  $|V(P_n + F_m)| = m + n + 1$ , dan  $|E(P_n + F_m)| = mn + 2m + 2n - 2$ .

**Bukti.** Definisi 2.2.1 menjelaskan bahwa  $P_n + F_m$  memiliki  $V(P_n + F_m) = V(P_n) \cup V(F_m)$  dan  $E(P_n + F_m) = E(P_n) \cup E(F_m) \cup \{uv \mid u \in V(P_n), v \in V(F_m)\}$ . Maka graf  $P_n + F_m$  dapat diilustrasikan dengan Gambar 4.1. Dengan demikian didapatkan  $V(P_n + F_m) = \{A, x_i, y_j; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$ ,  $E(P_n + F_m) = \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{A y_j; 1 \leq j \leq m\} \cup \{y_j y_{j+1}; 1 \leq j \leq m - 1\} \cup \{A x_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_i y_j; 1 \leq i \leq n \ 1 \leq j \leq m\}$ ,  $|V(P_n + F_m)| = m + n + 1$ , dan  $|E(P_n + F_m)| = mn + 2m + 2n - 2$ .  $\square$



Gambar 4.1 Graf Hasil Operasi *Joint* dari  $P_4$  dan  $F_6$

Gambar 4.1 mengilustrasikan bahwa untuk menggambar graf  $P_n + F_m$  diawali dengan menggambar graf kipas  $F_m$ , kemudian menggambarkan graf lintasan  $P_n$  yang berada di bawah graf kipas  $F_m$ . Setelah itu, setiap titik pada graf kipas  $F_m$  dihubungkan ke semua titik pada graf lintasan  $P_n$ . Graf  $P_n + F_m$  dapat di-

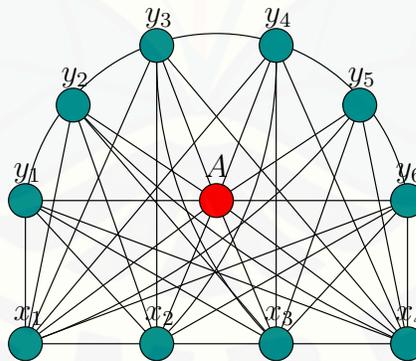
*expand* dengan menambahkan banyaknya titik dan sisi pada kedua graf tersebut, sedangkan hubungan *adjacency*-nya dilakukan melalui cara yang sama.

Dari Observasi 4.1.1 ditentukan *domination number* pada graf  $P_n + F_m$  yang disajikan dalam akibat. Berikut adalah akibat yang pertama dari Teorema 4.1.1.

◇ **Akibat 4.1.1.** *Misal  $G$  adalah graf hasil operasi joint dari graf lintasan  $P_n$  dan graf kipas  $F_m$ , untuk  $n \geq 2$  dan  $m \geq 3$ , maka  $\gamma (P_n + F_m) = 1$ .*

**Bukti.** Graf  $P_n + F_m$  adalah graf dengan  $V(P_n + F_m) = \{A, x_i, y_j; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$ ,  $E(P_n + F_m) = \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{A y_j; 1 \leq j \leq m\} \cup \{y_j y_{j+1}; 1 \leq j \leq m - 1\} \cup \{A x_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_i y_j; 1 \leq i \leq n \ 1 \leq j \leq m\}$ ,  $|V(P_n + F_m)| = m + n + 1$ ,  $|E(P_n + F_m)| = mn + 2m + 2n - 2$ , dan  $\Delta (P_n + F_m) = m + n$ . Pilih titik yang menjadi *dominating set*  $D = \{A\}$ , maka dapat dilihat bahwa  $D$  *adjacent* dengan semua elemen  $V \setminus D$ .  $|D| = 1$  sehingga  $\gamma (P_n + F_m) = 1$ . Berdasarkan Teorema 2.4.1 dinyatakan bahwa  $\lceil \frac{p}{1+\Delta(P_n+F_m)} \rceil \leq \gamma (P_n + F_m) \leq p - \Delta (P_n + F_m)$ , substitusikan nilai  $p$  dan  $\Delta (P_n + F_m)$  menjadi  $\lceil \frac{m+n+1}{m+n+1} \rceil \leq \gamma (P_n + F_m) \leq (m + n + 1) - (m + n)$ , sehingga diperoleh batas bawah dan batas atas *domination number* yaitu  $1 \leq \gamma (P_n + F_m) \leq 1$ . Maka  $\gamma (P_n + F_m)$  berada pada batas bawah *domination number*. □

Contoh *dominating set* pada graf  $P_4 + F_6$  dapat dilihat pada Gambar 4.2, dimana titik yang berwarna merah merupakan *dominating set*-nya.



Gambar 4.2 *Dominating Set* pada Graf  $P_4 + F_6$

Selanjutnya akan disajikan akibat yang kedua dari Teorema 4.1.1, dimana

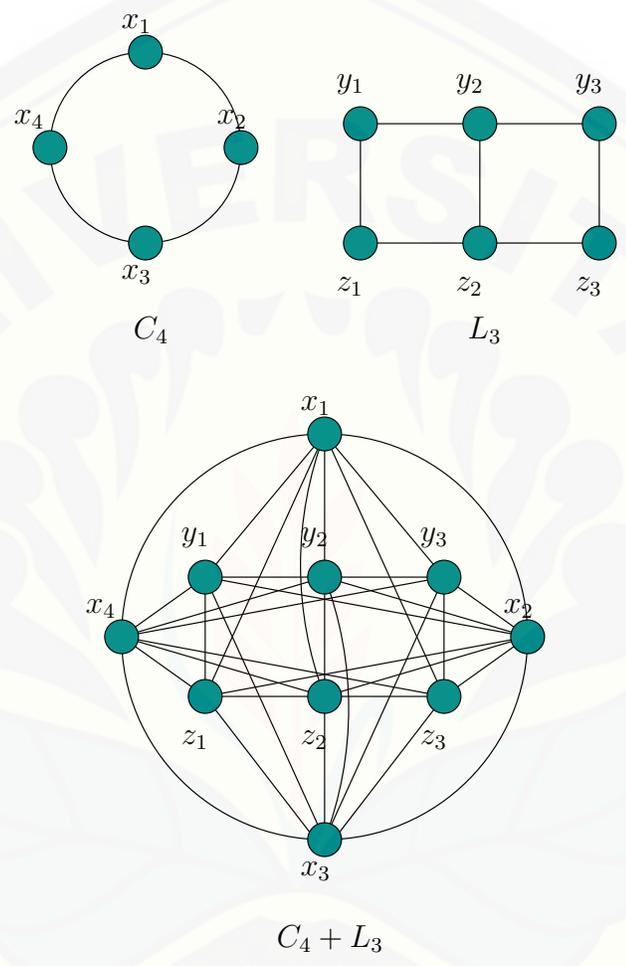
graf yang digunakan pada akibat ini adalah graf  $C_n + L_m$ . Sebelum disajikan akibat, terlebih dahulu disajikan observasi dari graf  $C_n + L_m$ . Observasinya adalah sebagai berikut:

◇ **Observasi 4.1.2.** Misal diketahui graf cycle  $C_n$  dengan  $V(C_n) = \{x_i; 1 \leq i \leq n\}$  dan  $E(C_n) = \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_n x_1\}$  dan graf ladder  $L_m$  dengan  $V(L_m) = \{y_j, z_j; 1 \leq j \leq m\}$  dan  $E(L_m) = \{y_j y_{j+1}; 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{y_j z_j; 1 \leq j \leq m\} \cup \{z_j z_{j+1}; 1 \leq j \leq m-1\}$ . Operasi joint dari  $C_n$  dan  $L_m$  yang dinotasikan dengan  $C_n + L_m$ , untuk  $n \geq 3$  dan  $m \geq 3$ , maka himpunan titik dan sisinya dapat disajikan dalam  $V(C_n + L_m) = \{x_i, y_j, z_j; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$ ,  $E(C_n + L_m) = \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_n x_1\} \cup \{y_j y_{j+1}; 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{y_j z_j; 1 \leq j \leq m\} \cup \{z_j z_{j+1}; 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{x_i y_j; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_i z_j; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$ ,  $|V(C_n + L_m)| = 2m + n$ , dan  $|E(C_n + L_m)| = 2mn + 3m + n - 2$ .

**Bukti.** Definisi 2.2.1 menjelaskan bahwa  $C_n + L_m$  memiliki  $V(C_n + L_m) = V(C_n) \cup V(L_m)$  dan  $E(C_n + L_m) = E(C_n) \cup E(L_m) \cup \{uv \mid u \in V(C_n), v \in V(L_m)\}$ . Maka graf  $C_n + L_m$  dapat diilustrasikan dengan Gambar 4.3. Dengan demikian didapatkan  $V(C_n + L_m) = \{x_i, y_j, z_j; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$ ,  $E(C_n + L_m) = \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_n x_1\} \cup \{y_j y_{j+1}; 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{y_j z_j; 1 \leq j \leq m\} \cup \{z_j z_{j+1}; 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{x_i y_j; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_i z_j; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$ ,  $|V(C_n + L_m)| = 2m + n$ , dan  $|E(C_n + L_m)| = 2mn + 3m + n - 2$ . □

Gambar 4.3 mengilustrasikan bahwa untuk menggambar graf  $C_n + L_m$  diawali dengan menggambar graf cycle  $C_n$ , kemudian menggambarkan graf ladder  $L_m$  yang berada di dalam graf cycle  $C_n$ . Setelah itu, setiap titik pada graf ladder  $L_m$  dihubungkan ke semua titik pada graf cycle  $C_n$ . Graf  $C_n + L_m$  dapat di-expand dengan menambahkan banyaknya titik dan sisi pada kedua graf tersebut, sedangkan hubungan adjacency-nya dilakukan melalui cara yang sama.

Dari Observasi 4.1.2 ditentukan domination number pada graf  $C_n + L_m$  yang disajikan dalam akibat. Berikut adalah akibat yang kedua dari Teorema 4.1.1.



Gambar 4.3 Graf Hasil Operasi *Joint* dari  $C_4$  dan  $L_3$

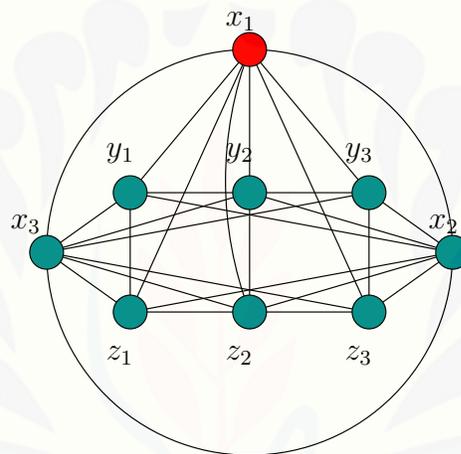
◇ **Akibat 4.1.2.** Misal  $G$  adalah graf hasil operasi joint dari graf cycle  $C_n$  dan graf ladder  $L_m$ , dimana  $n \geq 3$  dan  $m \geq 3$ , maka domination number dari  $C_n + L_m$  adalah sebagai berikut:

$$\gamma(C_n + L_m) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } n = 3. \\ 2, & \text{untuk } n > 3. \end{cases}$$

**Bukti.** Graf  $C_n + L_m$  adalah graf dengan  $V(C_n + L_m) = \{x_i, y_j, z_j; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$ ,  $E(C_n + L_m) = \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{x_n x_1\} \cup \{y_j y_{j+1}; 1 \leq j \leq m - 1\} \cup \{y_j z_j; 1 \leq j \leq m\} \cup \{z_j z_{j+1}; 1 \leq j \leq m - 1\} \cup \{x_i y_j; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_i z_j; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$ ,  $|V(C_n + L_m)| = 2m + n$ ,  $|E(C_n + L_m)| = 2mn + 3m + n - 2$ , dan terdapat 2 kemungkinan  $\Delta(C_n + L_m)$ , yaitu  $\Delta(C_n + L_m) = 2m + 2$  untuk  $3 \leq n \leq 2m - 1$  dan  $\Delta(C_n + L_m) = n + 3$  untuk  $n \geq 2m - 1$ . Untuk  $n = 3$  maka  $\Delta(C_n + L_m) = 2m + 2$ , pilih titik yang menjadi *dominating set* satu titik pada  $C_n$ , yaitu  $D = \{x_i\}$ , maka dapat dilihat bahwa  $D$  *adjacent* dengan semua elemen  $V \setminus D$ .  $|D| = 1$  sehingga  $\gamma(C_n + L_m) = 1$ . Berdasarkan Teorema 2.4.1 dinyatakan bahwa  $\lceil \frac{p}{1 + \Delta(C_n + L_m)} \rceil \leq \gamma(C_n + L_m) \leq p - \Delta(C_n + L_m)$ , substitusikan nilai  $p$ ,  $n$ , dan  $\Delta(C_n + L_m)$  menjadi  $\lceil \frac{2m+3}{2m+3} \rceil \leq \gamma(C_n + L_m) \leq (2m + 3) - (2m + 2)$ , sehingga diperoleh batas bawah dan batas atas *domination number* yaitu  $1 \leq \gamma(C_n + L_m) \leq 1$ . Maka  $\gamma(C_n + L_m)$  berada pada batas bawah *domination number*. Untuk  $3 < n \leq 2m - 1$  maka  $\Delta(C_n + L_m) = 2m + 2$  dan untuk  $n \geq 2m - 1$  maka  $\Delta(C_n + L_m) = n + 3$ . Pilih titik yang menjadi *dominating set* satu titik pada  $C_n$  dan satu titik pada  $L_m$ , yaitu  $D = \{x_i, y_j; x_i \in C_n; y_j \in L_m\}$  atau  $D = \{x_i, z_j; x_i \in C_n; z_j \in L_m\}$ , maka dapat dilihat bahwa  $D$  *adjacent* dengan semua elemen  $V \setminus D$ .  $|D| = 2$  sehingga  $\gamma(C_n + L_m) = 2$ . Berdasarkan Teorema 2.4.1 dinyatakan bahwa  $\lceil \frac{p}{1 + \Delta(C_n + L_m)} \rceil \leq \gamma(C_n + L_m) \leq p - \Delta(C_n + L_m)$ , substitusikan nilai  $p$  dan  $\Delta(C_n + L_m)$ . Untuk  $3 < n \leq 2m - 1$  maka  $\Delta(C_n + L_m) = 2m + 2$  sehingga  $\lceil \frac{p}{1 + \Delta(C_n + L_m)} \rceil \leq \gamma(C_n + L_m) \leq p - \Delta(C_n + L_m)$  menjadi  $\lceil \frac{2m+n}{2m+3} \rceil \leq \gamma(C_n + L_m) \leq n - 2$ . Untuk  $3 < n \leq 2m - 1$ , ambil  $n = 4$  dan  $n = 2m - 1$ . Untuk  $n = 4$  maka  $\frac{2m+n}{2m+3} = \frac{2m+4}{2m+3}$ . Untuk  $m \geq 3$  diperoleh  $1 < \frac{2m+4}{2m+3} < 2$ , sehingga  $\lceil \frac{2m+4}{2m+3} \rceil = 2$ . Untuk  $n = 2m - 1$  maka  $\frac{2m+n}{2m+3} = \frac{4m-1}{2m+3}$ ,  $\frac{4m-1}{2m+3} = 2 - \frac{7}{2m+3}$ . Untuk  $m \geq 3$  diperoleh  $0 < \frac{7}{2m+3} < 1$ ,

sehingga  $\lceil 2 - \frac{7}{2m+3} \rceil = 2$ . Sehingga untuk  $3 < n \leq 2m - 1$  diperoleh  $\lceil \frac{2m+n}{2m+3} \rceil = 2$ . Untuk  $n \geq 2m - 1$  maka  $\Delta (C_n + L_m) = n + 3$  sehingga  $\lceil \frac{p}{1+\Delta(C_n+L_m)} \rceil \leq \gamma (C_n + L_m) \leq p - \Delta (C_n + L_m)$  menjadi  $\lceil \frac{2m+n}{n+4} \rceil \leq \gamma (C_n + L_m) \leq 2m - 3$ . Untuk  $n \geq 2m - 1$ , ambil  $n = 2m - 1$ . Maka  $\lceil \frac{2m+n}{n+4} \rceil = \lceil \frac{4m-1}{2m+3} \rceil$ .  $\frac{4m-1}{2m+3} = 2 - \frac{7}{2m+3}$ . Untuk sebarang  $m \geq 3$  diperoleh  $0 < \frac{7}{2m+3} < 1$ , sehingga  $\lceil 2 - \frac{7}{2m+3} \rceil = 2$ . Sehingga untuk  $n \geq 2m - 1$  diperoleh  $\lceil \frac{2m+n}{n+4} \rceil = 2$ . Maka  $\gamma (C_n + L_m)$  berada pada batas bawah *domination number*.  $\square$

Contoh *dominating set* pada graf  $C_3 + L_3$  dan  $C_4 + L_3$  dapat dilihat pada Gambar 4.4 dan Gambar 4.5, dimana titik yang berwarna merah merupakan *dominating set*-nya.

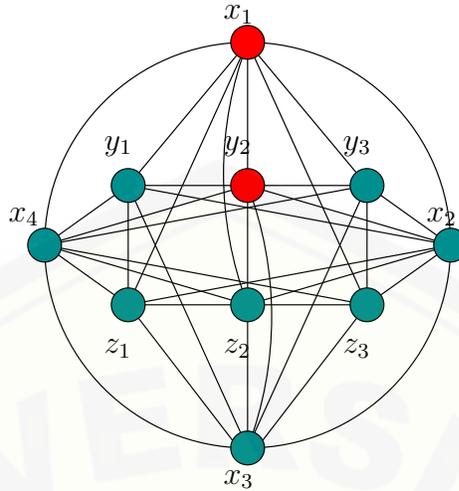


Gambar 4.4 *Dominating Set* pada Graf  $C_3 + L_3$

Teorema yang kedua adalah *domination number* pada hasil operasi *crown product* dari sebarang dua graf sederhana. Teoremanya adalah sebagai berikut:

◇ **Teorema 4.1.2.** Misal  $G_1$  dan  $G_2$  adalah sebarang graf sederhana, maka *domination number* dari  $\gamma (G_1 \odot G_2) = |V(G_1)|$ .

**Bukti.** Definisi 2.2.3 menjelaskan bahwa  $G_1 \odot G_2$ , yaitu graf yang diperoleh dengan mengambil sebuah duplikat dari graf  $G_1$  dan  $|V(G_1)|$  duplikat dari  $G_2$  ( $G_{2,1}, G_{2,2}, G_{2,3}, \dots, G_{2,|V(G_1)|}$ ), kemudian menghubungkan titik ke- $i$  dari  $G_1$  ke setiap titik di  $G_{2,i}$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots, |V(G_1)|$ . Misal  $|V(G_1)| = m$  maka  $\Delta (G_1) = k$



Gambar 4.5 *Dominating Set* pada Graf  $C_4 + L_3$

dimana  $k < m$  dan misal  $|V(G_2)| = n$ , sehingga  $|V(G_1 \odot G_2)| = m(n + 1)$  dan  $\Delta(G_1 \odot G_2) = n + k$ . Pilih titik yang menjadi *dominating set*  $D = \{x_i; 1 \leq i \leq |V(G_1)|; x_i \in V(G_1)\}$ , maka dapat dilihat bahwa  $D$  *adjacent* dengan semua elemen  $V \setminus D$ , karena setiap titik ke- $i$  pada  $G_1$  menjangkau setiap titik pada duplikat ke- $i$  dari  $G_2$ .  $|D| = |V(G_1)| = m$  sehingga  $\gamma(G_1 \odot G_2) = |V(G_1)| = m$ . Berdasarkan Teorema 2.4.1 dinyatakan bahwa  $\lceil \frac{p}{1 + \Delta(G_1 \odot G_2)} \rceil \leq \gamma(G_1 \odot G_2) \leq p - \Delta(G_1 \odot G_2)$ , substitusikan nilai  $p$  dan  $\Delta(G_1 \odot G_2)$  menjadi  $\lceil \frac{m(n+1)}{n+k+1} \rceil \leq \gamma(G_1 \odot G_2) \leq m(n+1) - (n+k)$ , sehingga diperoleh batas bawah dan batas atas *domination number* yaitu  $\lceil \frac{m(n+1)}{n+k+1} \rceil \leq \gamma(G_1 \odot G_2) \leq mn + m - n - k$ , dimana  $k < m$ . Harus ditunjukkan bahwa  $m$  berada pada selang *domination number*. Pertama akan ditunjukkan  $\lceil \frac{m(n+1)}{n+k+1} \rceil \leq m$ . Ambil  $m$  terkecil yaitu  $m = 1$ , karena  $k < m$  sehingga  $k = 0$  dan ambil  $k = m - 1$ . Untuk  $m = 1$  dan  $k = 0$  maka  $\frac{m(n+1)}{n+k+1} = \frac{n+1}{n+1} = 1$ , sehingga  $\lceil \frac{m(n+1)}{n+k+1} \rceil = m$ . Untuk  $k = m - 1$  maka  $\frac{m(n+1)}{n+k+1} = \frac{mn+m}{m+n} = m + \frac{m-m^2}{m+n}$ . Untuk  $m \geq 2$  dan  $n \geq 1$  maka  $m - m^2 \leq -2$  dan  $m - m^2 < m + n$ , sehingga diperoleh  $\frac{m-m^2}{m+n} < 0$  maka  $m + \frac{m-m^2}{m+n} < m$ , sehingga  $\lceil \frac{m(n+1)}{n+k+1} \rceil \leq m$ . Kemudian akan ditunjukkan  $m \leq mn + m - n - k$ . Ambil  $m$  terkecil yaitu  $m = 1$ , karena  $k < m$  sehingga  $k = 0$  dan ambil  $k = m - 1$ . Untuk  $m = 1$  dan  $k = 0$  maka  $mn + m - n - k = 1$ , sehingga  $mn + m - n - k = m$ . Untuk  $k = m - 1$  maka

$mn + m - n - k = mn - n + 1 = m(n - \frac{n}{m} + \frac{1}{m})$ . Untuk  $m \geq 2$  dan  $n \geq 1$  diperoleh  $\frac{1}{2} \leq n - \frac{n}{m} < n$  dan  $\frac{1}{m} \leq \frac{1}{2}$ , sehingga  $1 \leq n - \frac{n}{m} + \frac{1}{m} < n$ . Hal ini mengakibatkan  $m(n - \frac{n}{m} + \frac{1}{m}) \geq m$ , sehingga  $m \leq mn + m - n - k$ . Sehingga  $m$  berada pada selang *domination number*. Selanjutnya harus ditunjukkan bahwa tidak ada suatu bilangan  $l < m$  dimana  $l \in A$ , sehingga  $\gamma(G_1 \odot G_2) = l$ . Karena setiap titik pada duplikat  $G_2$  berjarak lebih dari satu dengan titik pada duplikat  $G_2$  yang lain, maka minimal harus ada satu titik yang menjadi *dominating set* untuk dapat menjangkau titik pada setiap duplikat dari  $G_2$ . Supaya semua titik pada semua duplikat  $G_2$  dapat dijangkau, maka diperlukan minimal titik sebanyak jumlah duplikat dari  $G_2$  yang menjadi *dominating set*-nya. Dengan demikian diperoleh  $\gamma(G_1 \odot G_2) = |V(G_1)| = m$ . Sehingga  $m$  adalah bilangan terkecil yang berada pada selang *domination number*.  $\square$

Selanjutnya akan disajikan akibat yang pertama dari Teorema 4.1.2, dimana graf yang digunakan pada akibat ini adalah graf  $C_n \odot \mathbb{L}_m$ . Sebelum disajikan akibat, terlebih dahulu disajikan observasi dari graf  $C_n \odot \mathbb{L}_m$ . Observasinya adalah sebagai berikut:

$\diamond$  **Observasi 4.1.3.** Misal diketahui graf cycle  $C_n$  dengan  $V(C_n) = \{x_i; 1 \leq i \leq n\}$  dan  $E(C_n) = \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_n x_1\}$  dan graf triangular ladder  $\mathbb{L}_m$  dengan  $V(\mathbb{L}_m) = \{y_j, z_j; 1 \leq j \leq m\}$  dan  $E(\mathbb{L}_m) = \{y_j y_{j+1}; 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{y_j z_j; 1 \leq j \leq m\} \cup \{y_j z_{j+1}; 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{z_j z_{j+1}; 1 \leq j \leq m-1\}$ . Operasi crown product dari  $C_n$  dan  $\mathbb{L}_m$  yang dinotasikan dengan  $C_n \odot \mathbb{L}_m$ , untuk  $n \geq 3$  dan  $m \geq 3$ , maka himpunan titik dan sisinya dapat disajikan dalam  $V(C_n \odot \mathbb{L}_m) = \{x_i, y_j x_i, z_j x_i; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$ ,  $E(C_n \odot \mathbb{L}_m) = \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_n x_1\} \cup \{y_j x_i y_{j+1} x_i; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{y_j x_i z_j x_i; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\} \cup \{y_j x_i z_{j+1} x_i; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{z_j x_i z_{j+1} x_i; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{x_i y_j x_i; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_i z_j x_i; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$ ,  $|V(C_n \odot \mathbb{L}_m)| = n(2m + 1)$ , dan  $|E(C_n \odot \mathbb{L}_m)| = 6mn - 2n$ .

**Bukti.** Definisi 2.2.3 menjelaskan bahwa  $G_1 \odot G_2$ , yaitu graf yang diperoleh dengan mengambil sebuah duplikat dari graf  $G_1$  dan  $|V(G_1)|$  duplikat dari  $G_2$  ( $G_{2,1}, G_{2,2}, G_{2,3}, \dots, G_{2,|V(G_1)|}$ ), kemudian menghubungkan titik ke- $i$  dari  $G_1$  ke

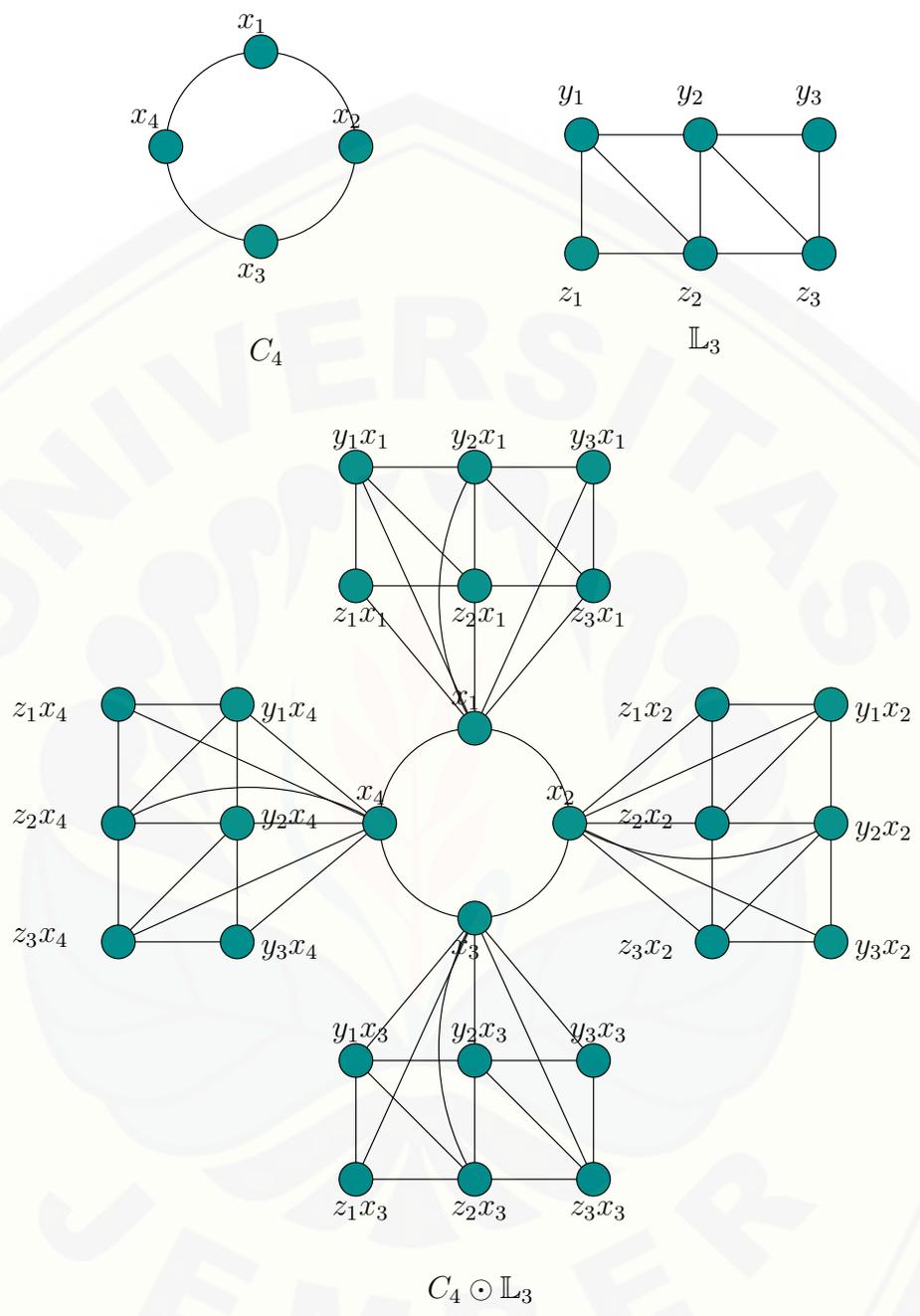
setiap titik di  $G_{2,i}$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots, |V(G_1)|$ . Maka graf  $C_n \odot \mathbb{L}_m$  dapat diilustrasikan dengan Gambar 4.6. Dengan demikian didapatkan  $V(C_n \odot \mathbb{L}_m) = \{x_i, y_j x_i, z_j x_i; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$ ,  $E(C_n \odot \mathbb{L}_m) = \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_n x_1\} \cup \{y_j x_i y_{j+1} x_i; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{y_j x_i z_j x_i; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\} \cup \{y_j x_i z_{j+1} x_i; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{z_j x_i z_{j+1} x_i; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{x_i y_j x_i; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_i z_j x_i; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$ ,  $|V(C_n \odot \mathbb{L}_m)| = n(2m+1)$ , dan  $|E(C_n \odot \mathbb{L}_m)| = 6mn - 2n$ .  $\square$

Gambar 4.6 mengilustrasikan bahwa untuk menggambar graf  $C_n \odot \mathbb{L}_m$  diawali dengan menggambar graf *cycle*  $C_n$ , kemudian menggambar graf *triangular ladder*  $\mathbb{L}_m$  sebanyak titik pada graf *cycle*  $C_n$ . Kemudian setiap titik ke- $i$  pada graf *cycle*  $C_n$  dihubungkan ke setiap titik pada duplikat ke- $i$  dari graf *triangular ladder*  $\mathbb{L}_m$ . Graf  $C_n \odot \mathbb{L}_m$  dapat di-*expand* dengan menambahkan banyaknya titik dan sisi pada kedua graf tersebut, sedangkan hubungan *adjacency*-nya dilakukan melalui cara yang sama.

Dari Observasi 4.1.3 ditentukan *domination number* pada graf  $C_n \odot \mathbb{L}_m$  yang disajikan dalam akibat. Berikut adalah akibat yang pertama dari Teorema 4.1.2.

$\diamond$  **Akibat 4.1.3.** Misal  $G$  adalah graf hasil operasi *crown product* dari graf *cycle*  $C_n$  dan graf *triangular ladder*  $\mathbb{L}_m$ , dimana  $n \geq 3$  dan  $m \geq 3$ , maka  $\gamma(C_n \odot \mathbb{L}_m) = n$ .

**Bukti.** Graf  $C_n \odot \mathbb{L}_m$  adalah graf dengan  $V(C_n \odot \mathbb{L}_m) = \{x_i, y_j x_i, z_j x_i; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$ ,  $E(C_n \odot \mathbb{L}_m) = \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_n x_1\} \cup \{y_j x_i y_{j+1} x_i; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{y_j x_i z_j x_i; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\} \cup \{y_j x_i z_{j+1} x_i; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{z_j x_i z_{j+1} x_i; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{x_i y_j x_i; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_i z_j x_i; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$ ,  $|V(C_n \odot \mathbb{L}_m)| = n(2m+1)$ ,  $|E(C_n \odot \mathbb{L}_m)| = 6mn - 2n$ , dan  $\Delta(C_n \odot \mathbb{L}_m) = 2m+2$ . Pilih titik yang menjadi *dominating set*  $D = \{x_i; 1 \leq i \leq n\}$ , maka dapat dilihat bahwa  $D$  *adjacent* dengan semua elemen  $V \setminus D$ .  $|D| = n$  sehingga  $\gamma(C_n \odot \mathbb{L}_m) = n$ . Berdasarkan Teorema 2.4.1 dinyatakan bahwa  $\lceil \frac{p}{1+\Delta(C_n \odot \mathbb{L}_m)} \rceil \leq \gamma(C_n \odot \mathbb{L}_m) \leq p - \Delta(C_n \odot \mathbb{L}_m)$ , substitusikan nilai  $p$  dan  $\Delta(C_n \odot \mathbb{L}_m)$  menjadi  $\lceil \frac{n(2m+1)}{2m+3} \rceil \leq \gamma(C_n \odot \mathbb{L}_m) \leq n(2m+1) - (2m+2)$ , sehingga diperoleh batas bawah dan batas atas



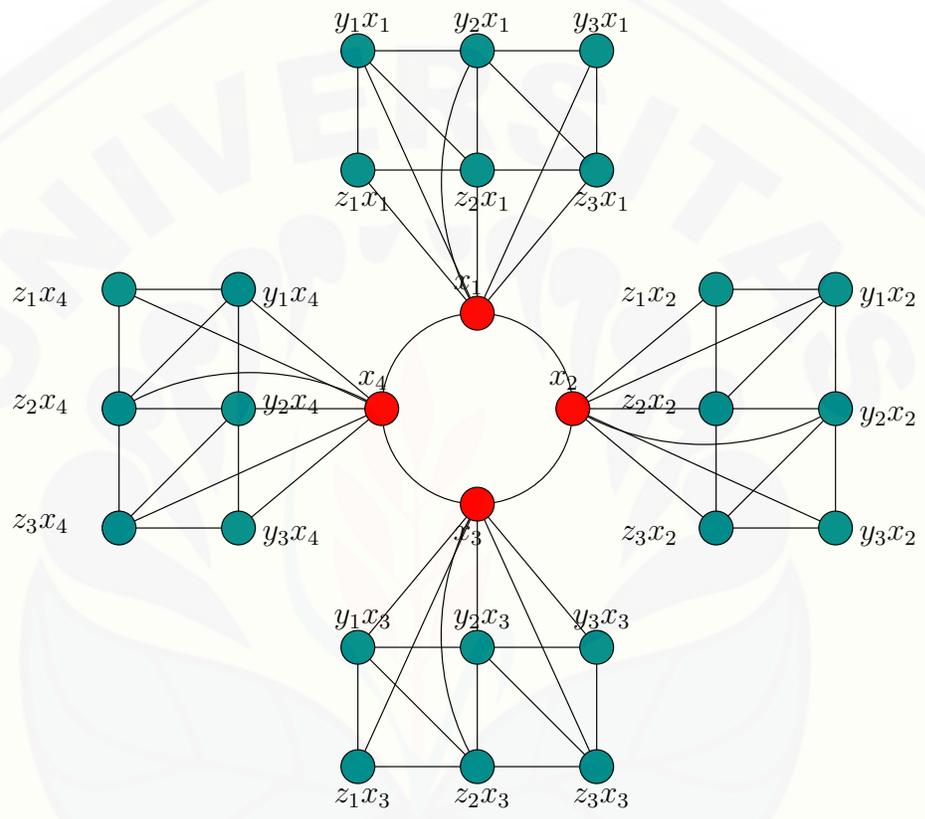
Gambar 4.6 Graf Hasil Operasi *Crown Product* dari  $C_4$  dan  $\mathbb{L}_3$

*domination number* yaitu  $\lceil \frac{n(2m+1)}{2m+3} \rceil \leq \gamma (C_n \odot \mathbb{L}_m) \leq 2mn - 2m + n - 2$ . Harus ditunjukkan bahwa  $n$  berada pada selang *domination number*. Pertama akan ditunjukkan  $\lceil \frac{n(2m+1)}{2m+3} \rceil \leq n$ . Ambil  $m = 3$  maka  $\frac{2m+1}{2m+3} = \frac{7}{9}$ , sehingga untuk  $m \geq 3$  diperoleh  $\frac{7}{9} \leq \frac{2m+1}{2m+3} < 1$ . Untuk sebarang  $n \geq 3$  diperoleh  $\frac{7}{9}n \leq \frac{n(2m+1)}{2m+3} < n$ , sehingga  $\lceil \frac{n(2m+1)}{2m+3} \rceil \leq n$ . Kemudian akan ditunjukkan  $n \leq 2mn - 2m + n - 2$ .  $2mn - 2m + n - 2 = n(2m - \frac{2m}{n} + 1 - \frac{2}{n})$ . Untuk sebarang  $m \geq 3$  dan  $n \geq 3$  diperoleh  $4 \leq 2m - \frac{2m}{n} < 2m$  dan  $\frac{1}{3} \leq 1 - \frac{2}{n} < 1$ , sehingga  $2m - \frac{2m}{n} + 1 - \frac{2}{n} > 4$ . Hal ini mengakibatkan  $n(2m - \frac{2m}{n} + 1 - \frac{2}{n}) > n$ . Sehingga diperoleh  $n < 2mn - 2m + n - 2$ . Maka  $\gamma (C_n \odot \mathbb{L}_m)$  berada pada selang *domination number*. Selanjutnya harus ditunjukkan bahwa tidak ada suatu bilangan  $l < n$  dimana  $l \in A$ , sehingga  $\gamma (C_n \odot \mathbb{L}_m) = l$ . Karena setiap titik pada duplikat  $\mathbb{L}_m$  berjarak lebih dari satu dengan titik pada duplikat  $\mathbb{L}_m$  yang lain, maka minimal harus ada satu titik yang menjadi *dominating set* untuk dapat menjangkau titik pada setiap duplikat dari  $\mathbb{L}_m$ . Supaya semua titik pada semua duplikat  $\mathbb{L}_m$  dapat dijangkau, maka diperlukan minimal titik sebanyak jumlah duplikat  $\mathbb{L}_m$  yang menjadi *dominating set*-nya. Dengan demikian diperoleh  $\gamma (C_n \odot \mathbb{L}_m) = |V(C_n)| = n$ . Sehingga  $n$  adalah bilangan terkecil yang berada pada selang *domination number*.  $\square$

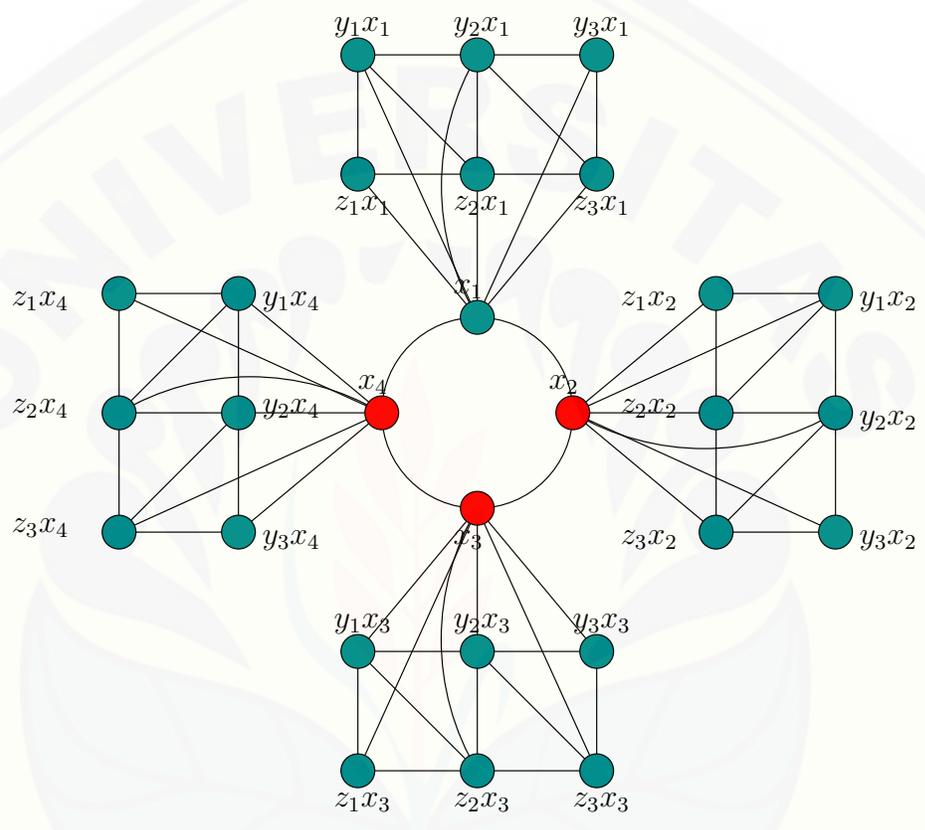
Contoh *dominating set* pada graf  $C_4 \odot \mathbb{L}_3$  dapat dilihat pada Gambar 4.7. Gambar 4.8 menunjukkan bahwa apabila menggunakan  $\gamma (C_4 \odot \mathbb{L}_3) < 4$ , maka terdapat titik pada graf  $C_4 \odot \mathbb{L}_3$  yang tidak dapat dijangkau oleh titik yang menjadi *dominating set*-nya. Titik yang berwarna merah pada gambar-gambar tersebut merupakan *dominating set*-nya.

Selanjutnya akan disajikan akibat yang kedua dari Teorema 4.1.2, dimana graf yang digunakan pada akibat ini adalah graf  $P_n \odot F_m$ . Sebelum disajikan akibat, terlebih dahulu disajikan observasi dari graf  $P_n \odot F_m$ . Observasinya adalah sebagai berikut:

$\diamond$  **Observasi 4.1.4.** Misal diketahui graf lintasan  $P_n$  dengan  $V(P_n) = \{x_i; 1 \leq i \leq n\}$  dan  $E(P_n) = \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n - 1\}$  dan graf kipas  $F_m$  dengan  $V(F_m) = \{A, y_j; 1 \leq j \leq m\}$  dan  $E(F_m) = \{A y_j; 1 \leq j \leq m\} \cup \{y_j y_{j+1}; 1 \leq j \leq m - 1\}$ . Operasi crown product dari  $P_n$  dan  $F_m$  yang dinotasikan dengan  $P_n \odot F_m$ , untuk  $n \geq 2$  dan  $m \geq 3$ , maka himpunan titik dan sisinya dapat disajikan dalam



Gambar 4.7 *Dominating Set* pada Graf  $C_4 \odot L_3$



Gambar 4.8 *Dominating Set* pada Graf  $C_4 \odot L_3$  Tidak Dapat Menjangkau Semua Titik pada Graf  $C_4 \odot L_3$

$V(P_n \odot F_m) = \{x_i, Ax_i, y_j x_i; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$ ,  $E(P_n \odot F_m) = \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{Ax_i y_j x_i; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\} \cup \{y_j x_i y_{j+1} x_i; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{x_i Ax_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_i y_j x_i; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$ ,  $|V(P_n \odot F_m)| = n(m+2)$ , dan  $|E(P_n \odot F_m)| = 3mn + n - 1$ .

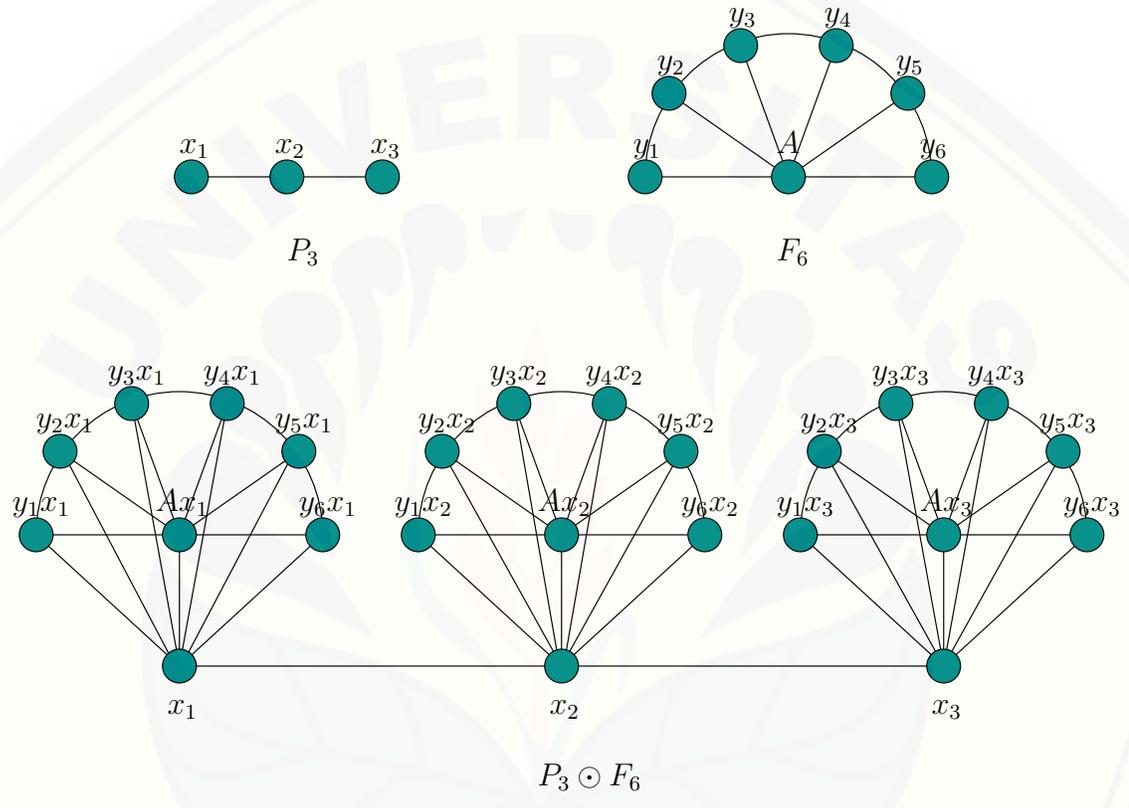
**Bukti.** Definisi 2.2.3 menjelaskan bahwa  $G_1 \odot G_2$ , yaitu graf yang diperoleh dengan mengambil sebuah duplikat dari graf  $G_1$  dan  $|V(G_1)|$  duplikat dari  $G_2$  ( $G_{2,1}, G_{2,2}, G_{2,3}, \dots, G_{2,|V(G_1)|}$ ), kemudian menghubungkan titik ke- $i$  dari  $G_1$  ke setiap titik di  $G_{2,i}$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots, |V(G_1)|$ . Maka graf  $P_n \odot F_m$  dapat diilustrasikan dengan Gambar 4.9. Dengan demikian didapatkan  $V(P_n \odot F_m) = \{x_i, Ax_i, y_j x_i; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$ ,  $E(P_n \odot F_m) = \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{Ax_i y_j x_i; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\} \cup \{y_j x_i y_{j+1} x_i; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{x_i Ax_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_i y_j x_i; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$ ,  $|V(P_n \odot F_m)| = n(m+2)$ , dan  $|E(P_n \odot F_m)| = 3mn + n - 1$ .  $\square$

Gambar 4.9 mengilustrasikan bahwa untuk menggambar graf  $P_n \odot F_m$  diawali dengan menggambar graf lintasan  $P_n$ , kemudian menggambar graf kipas  $F_m$  sebanyak titik pada graf lintasan  $P_n$ . Kemudian setiap titik ke- $i$  pada graf lintasan  $P_n$  dihubungkan ke setiap titik pada duplikat ke- $i$  dari graf kipas  $F_m$ . Graf  $P_n \odot F_m$  dapat di-*expand* dengan menambahkan banyaknya titik dan sisi pada kedua graf tersebut, sedangkan hubungan *adjacency*-nya dilakukan melalui cara yang sama.

Dari Observasi 4.1.4 ditentukan *domination number* pada graf  $P_n \odot F_m$  yang disajikan dalam akibat. Berikut adalah akibat yang kedua dari Teorema 4.1.2.

$\diamond$  **Akibat 4.1.4.** Misal  $G$  adalah graf hasil operasi crown product dari graf lintasan  $P_n$  dan graf kipas  $F_m$ , dimana  $n \geq 2$  dan  $m \geq 3$ , maka  $\gamma(P_n \odot F_m) = n$ .

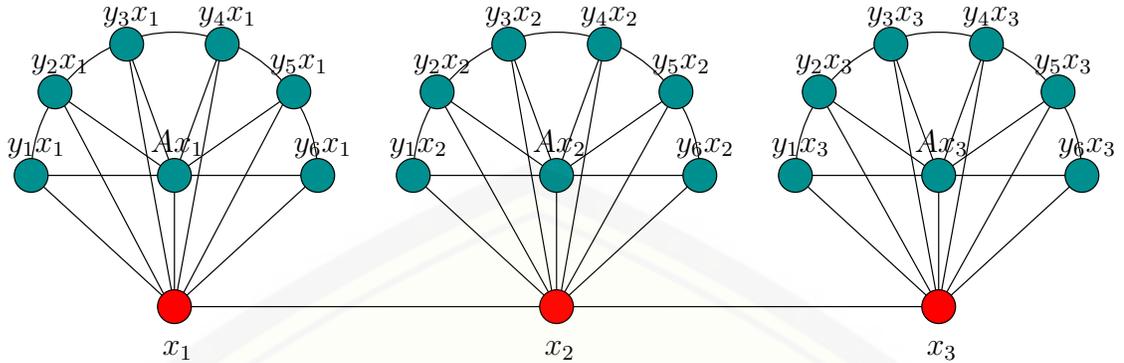
**Bukti.** Graf  $P_n \odot F_m$  adalah graf dengan  $V(P_n \odot F_m) = \{x_i, Ax_i, y_j x_i; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$ ,  $E(P_n \odot F_m) = \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{Ax_i y_j x_i; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\} \cup \{y_j x_i y_{j+1} x_i; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{x_i Ax_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_i y_j x_i; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$ ,  $|V(P_n \odot F_m)| = n(m+2)$ ,  $|E(P_n \odot F_m)| = 3mn + n - 1$ , dan terdapat dua kemungkinan  $\Delta(P_n \odot F_m)$ , yaitu  $\Delta(P_n \odot F_m) = m + 2$  untuk  $n = 2$  dan  $\Delta(P_n \odot F_m) = m + 3$  untuk  $n \geq 3$ . Pilih titik yang menjadi



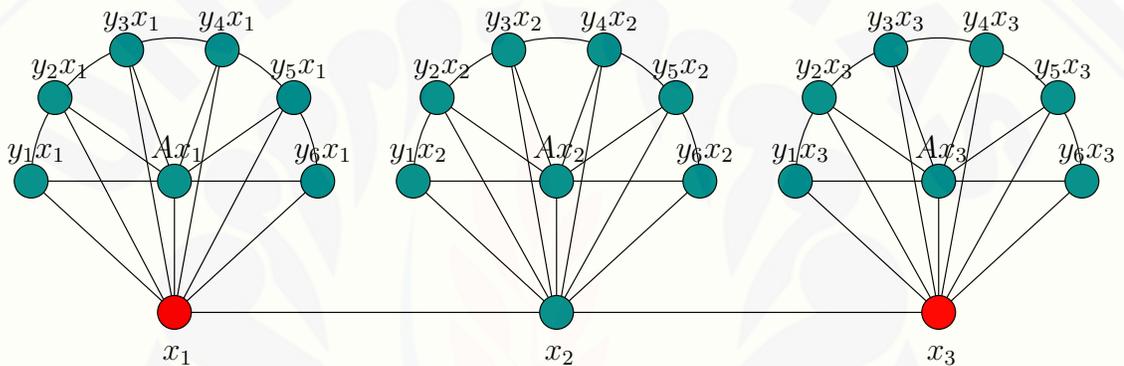
Gambar 4.9 Graf Hasil Operasi *Crown Product* dari  $C_4$  dan  $\mathbb{L}_3$

*dominating set*  $D = \{x_i; 1 \leq i \leq n\}$ , maka dapat dilihat bahwa  $D$  *adjacent* dengan semua elemen  $V \setminus D$ .  $|D| = n$  sehingga  $\gamma(P_n \odot F_m) = n$ . Berdasarkan Teorema 2.4.1 dinyatakan bahwa  $\lceil \frac{p}{1+\Delta(P_n \odot F_m)} \rceil \leq \gamma(P_n \odot F_m) \leq p - \Delta(P_n \odot F_m)$ , substitusikan nilai  $p$  dan  $\Delta(P_n \odot F_m)$ . Untuk  $n = 2$  maka  $\Delta(P_n \odot F_m) = m + 2$  sehingga  $\lceil \frac{p}{1+\Delta(P_n \odot F_m)} \rceil \leq \gamma(P_n \odot F_m) \leq p - \Delta(P_n \odot F_m)$  menjadi  $\lceil \frac{2m+4}{m+3} \rceil \leq \gamma(P_n \odot F_m) \leq m - 2$ .  $\frac{2m+4}{m+3} = 2 - \frac{2}{m+3}$ . Untuk  $m \geq 3$  diperoleh  $0 < \frac{2}{m+3} \leq \frac{1}{3}$  maka  $1 < 2 - \frac{2}{m+3} < 2$ . Sehingga  $\frac{2m+4}{m+3} = 2 = n$ . Untuk  $n \geq 3$  maka  $\Delta(P_n \odot F_m) = m + 3$  sehingga  $\lceil \frac{p}{1+\Delta(P_n \odot F_m)} \rceil \leq \gamma(P_n \odot F_m) \leq p - \Delta(P_n \odot F_m)$  menjadi  $\lceil \frac{n(m+2)}{m+4} \rceil \leq \gamma(P_n \odot F_m) \leq mn - m + 2n - 3$ .  $\frac{n(m+2)}{m+4} = \frac{mn+2n}{m+4} = n - \frac{2n}{m+4}$ . Harus ditunjukkan bahwa  $n$  berada pada selang *domination number*. Pertama akan ditunjukkan  $\lceil \frac{n(m+2)}{m+4} \rceil \leq n$ . Ambil  $m = 3$  maka  $\frac{m+2}{m+4} = \frac{5}{7}$ , sehingga untuk  $m \geq 3$  diperoleh  $\frac{5}{7} \leq \frac{m+2}{m+4} < 1$ . Untuk sebarang  $n \geq 3$  diperoleh  $\frac{5}{7}n \leq \frac{n(m+2)}{m+4} < n$ , sehingga  $\lceil \frac{n(m+2)}{m+4} \rceil \leq n$ . Kemudian akan ditunjukkan  $n \leq mn - m + 2n - 3$ .  $mn - m + 2n - 3 = n(m - \frac{m}{n} + 2 - \frac{3}{n})$ . Untuk sebarang  $m \geq 3$  dan  $n \geq 3$  diperoleh  $2 \leq m - \frac{m}{n} < m$  dan  $1 \leq 2 - \frac{3}{n} < 2$ , sehingga  $m - \frac{m}{n} + 2 - \frac{3}{n} \geq 3$ . Hal ini mengakibatkan  $n(m - \frac{m}{n} + 2 - \frac{3}{n}) > n$ . Sehingga diperoleh  $n < mn - m + 2n - 3$ . Maka  $\gamma(P_n \odot F_m)$  berada pada selang *domination number*. Selanjutnya harus ditunjukkan bahwa tidak ada suatu bilangan  $l < n$  dimana  $l \in A$ , sehingga  $\gamma(P_n \odot F_m) = l$ . Karena setiap titik pada duplikat  $F_m$  berjarak lebih dari satu dengan titik pada duplikat  $F_m$  yang lain, maka minimal harus ada satu titik yang menjadi *dominating set* untuk dapat menjangkau titik pada setiap duplikat dari  $F_m$ . Supaya semua titik pada semua duplikat  $F_m$  dapat dijangkau, maka diperlukan minimal titik sebanyak jumlah duplikat  $F_m$  yang menjadi *dominating set*-nya. Dengan demikian diperoleh  $\gamma(P_n \odot F_m) = |V(P_n)| = n$ . Sehingga  $n$  adalah bilangan terkecil yang berada pada selang *domination number*.  $\square$

Contoh *dominating set* pada graf  $P_3 \odot F_6$  dapat dilihat pada Gambar 4.10. Gambar 4.11 menunjukkan bahwa apabila menggunakan  $\gamma(P_3 \odot F_6) < 3$ , maka terdapat titik pada graf  $P_3 \odot F_6$  yang tidak dapat dijangkau oleh titik yang menjadi *dominating set*-nya. Titik yang berwarna merah pada gambar-gambar tersebut merupakan *dominating set*-nya.



Gambar 4.10 *Dominating Set* pada Graf  $P_3 \odot F_6$



Gambar 4.11 *Dominating Set* pada Graf  $P_3 \odot F_6$  Tidak Dapat Menjangkau Semua Titik pada Graf  $P_3 \odot F_6$

Teorema yang ketiga adalah *domination number* pada hasil operasi *composition* dari sebarang dua graf sederhana. Teoremanya adalah sebagai berikut:

◇ **Teorema 4.1.3.** Misal  $G_1$  dan  $G_2$  adalah sebarang graf sederhana dengan  $\Delta(G_2) = |V(G_2)| - 1$ . Maka *domination number* dari  $\gamma(G_1[G_2]) = \gamma(G_1)$ .

**Bukti.** Definisi 2.2.5 menjelaskan bahwa  $G = G_1[G_2]$  memiliki himpunan titik  $V(G_1) \times V(G_2)$  dan dua titik  $(u_1, u_2)$  dan  $(v_1, v_2)$  di  $G$  *adjacent* ketika  $(u_1 \text{ adj } v_1)$  atau  $(u_1 = v_1 \text{ dan } u_2 \text{ adj } v_2)$ . Misal  $|V(G_1)| = m$  dan  $|V(G_2)| = n$  maka  $|V(G_1[G_2])| = mn$ . Misal  $\Delta(G_1) = k$ , dimana  $k \leq m - 1$  maka  $\lceil \frac{m}{k+1} \rceil \leq \gamma(G_1) \leq m - k$  dan misal  $\Delta(G_2) = n - 1$  maka  $\Delta(G_1[G_2]) = n(k + 1) - 1$ . Pilih

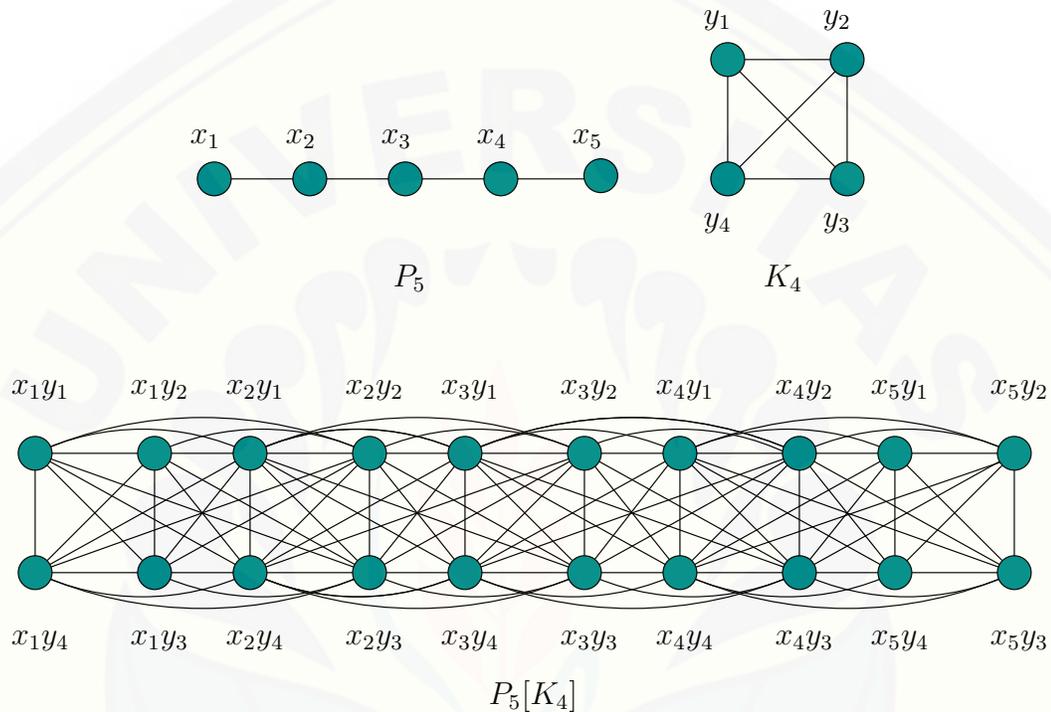
titik yang menjadi *dominating set*  $D = \{x_i y_j; 1 \leq i \leq |V(G_1)|; x_i \in V(G_1); x_i$  adalah *dominating set* di  $G_1; y_j$  adalah sebarang satu titik di  $G_2$ ; dimana  $\Delta(y_j) = |V(G_2)| - 1\}$ , maka dapat dilihat bahwa  $D$  *adjacent* dengan semua elemen  $V \setminus D$ .  $|D| = \gamma(G_1)$  sehingga  $\gamma(G_1[G_2]) = \gamma(G_1)$ . Berdasarkan Teorema 2.4.1 dinyatakan bahwa  $\lceil \frac{p}{1+\Delta(G_1[G_2])} \rceil \leq \gamma(G_1[G_2]) \leq p - \Delta(G_1[G_2])$ , substitusikan nilai  $p$  dan  $\Delta(G_1[G_2])$  menjadi  $\lceil \frac{mn}{n(k+1)} \rceil \leq \gamma(G_1[G_2]) \leq mn - (n(k+1) - 1)$ , sehingga diperoleh batas bawah dan batas atas *domination number* yaitu  $\lceil \frac{m}{k+1} \rceil \leq \gamma(G_1[G_2]) \leq mn - nk - n + 1$ . Untuk  $\gamma(G_1) = \lceil \frac{m}{k+1} \rceil$ , maka  $\gamma(G_1[G_2])$  berada pada batas bawah *domination number*. Untuk  $\lceil \frac{m}{k+1} \rceil < \gamma(G_1) \leq m - k$  akan ditunjukkan  $m - k \leq mn - nk - n + 1$ .  $mn - nk - n + 1 = m - k(n - \frac{n}{m-k} + \frac{1}{m-k})$ . Untuk  $m > 1$ ,  $n \geq 1$ , dan  $k < m - 1$ , ambil  $m$  dan  $n$  terkecil yaitu  $m = 2$  dan  $n = 1$  sehingga  $n - \frac{n}{m-k} = 1 - \frac{1}{1} = 0$  dan  $\frac{1}{m-k} = 1$ . Sehingga untuk  $m > 1$ ,  $n \geq 1$ , dan  $k < m - 1$  diperoleh  $n - \frac{n}{m-k} \geq 0$  dan  $0 < \frac{1}{m-k} \leq 1$ , sehingga  $n - \frac{n}{m-k} + \frac{1}{m-k} \geq 1$ . Hal ini mengakibatkan  $m - k(n - \frac{n}{m-k} + \frac{1}{m-k}) \geq m - k$ . Sehingga diperoleh  $m - k \leq mn - nk - n + 1$ . Maka  $\gamma(G_1[G_2])$  berada pada selang *domination number* untuk  $\lceil \frac{m}{k+1} \rceil < \gamma(G_1) \leq m - k$ .  $\square$

Selanjutnya akan disajikan akibat yang pertama dari Teorema 4.1.3, dimana graf yang digunakan pada akibat ini adalah graf  $P_n[K_m]$ . Sebelum disajikan akibat, terlebih dahulu disajikan observasi dari graf  $P_n[K_m]$ . Observasinya adalah sebagai berikut:

$\diamond$  **Observasi 4.1.5.** Misal diketahui graf lintasan  $P_n$  dengan  $V(P_n) = \{x_i; 1 \leq i \leq n\}$  dan  $E(P_n) = \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n - 1\}$  dan graf lengkap  $K_m$  dengan  $V(K_m) = \{y_j; 1 \leq j \leq m\}$  dan  $E(K_m) = \{y_j y_k; 1 \leq j \leq m; 1 \leq k \leq m; j \neq k\}$ . Operasi composition dari  $P_n$  dan  $K_m$  yang dinotasikan dengan  $P_n[K_m]$ , untuk  $n \geq 2$  dan  $m \geq 3$ , maka himpunan titik dan sisinya dapat disajikan dalam  $V(P_n[K_m]) = \{x_i y_j; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$ ,  $E(P_n[K_m]) = \{x_i y_j x_i y_k; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m; j \neq k\} \cup \{x_i y_j x_{i+1} y_k; 1 \leq i \leq n - 1; 1 \leq j \leq m; 1 \leq k \leq m\}$ ,  $|V(P_n[K_m])| = mn$ , dan  $|E(P_n[K_m])| = \frac{mn(m-1)}{2} + m^2(n-1)$ .

**Bukti.** Definisi 2.2.5 menjelaskan bahwa  $G = G_1[G_2]$  memiliki himpunan titik  $V(G_1) \times V(G_2)$  dan dua titik  $(u_1, u_2)$  dan  $(v_1, v_2)$  di  $G$  *adjacent* ketika  $(u_1$  *adj*

$v_1$ ) atau ( $u_1 = v_1$  dan  $u_2 \text{ adj } v_2$ ). Maka graf  $P_n[K_m]$  dapat diilustrasikan dengan Gambar 4.12. Dengan demikian didapatkan  $V(P_n[K_m]) = \{x_i y_j; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$ ,  $E(P_n[K_m]) = \{x_i y_j \ x_i y_k; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m; j \neq k\} \cup \{x_i y_j \ x_{i+1} y_k; 1 \leq i \leq n - 1; 1 \leq j \leq m; 1 \leq k \leq m\}$ ,  $|V(P_n[K_m])| = mn$ , dan  $|E(P_n[K_m])| = \frac{mn(m-1)}{2} + m^2(n - 1)$ .  $\square$



Gambar 4.12 Graf Hasil Operasi *Composition* dari  $P_5$  dan  $K_4$

Operasi *composition* merupakan kombinasi dari operasi *cartesian product* dan *tensor product*. Gambar 4.12 mengilustrasikan bahwa untuk menggambar graf  $P_n[K_m]$  diawali dengan menggambar titik-titik graf lengkap  $K_m$ , kemudian diduplikasi sebanyak titik pada graf lintasan  $P_n$ . Setelah titik-titik pada graf lintasan  $P_n$  dan graf lengkap  $K_m$  dikalikan seperti operasi *cartesian product* atau *tensor product*, kemudian titik-titiknya dihubungkan sesuai dengan graf lintasan  $P_n$  dan graf lengkap  $K_m$  seperti operasi *cartesian product* dan hasil perkalian titik-titik tersebut yang *adjacent* dihubungkan seperti operasi *tensor product*. Graf

$P_n[K_m]$  dapat di-*expand* dengan menambahkan banyaknya titik dan sisi pada kedua graf tersebut, sedangkan hubungan *adjacency*-nya dilakukan melalui cara yang sama.

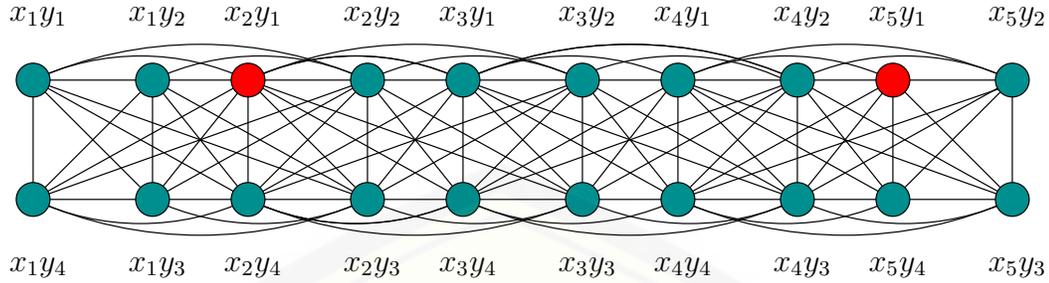
Dari Observasi 4.1.5 ditentukan *domination number* pada graf  $P_n[K_m]$  yang disajikan dalam akibat. Berikut adalah akibat yang pertama dari Teorema 4.1.3.

◇ **Akibat 4.1.5.** Misal  $G$  adalah graf hasil operasi *composition* dari graf lintasan  $P_n$  dan graf lengkap  $K_m$ , dimana  $n \geq 2$  dan  $m \geq 3$ , maka  $\gamma(P_n[K_m]) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$ .

**Bukti.** Graf  $P_n[K_m]$  adalah graf dengan  $V(P_n[K_m]) = \{x_i y_j; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$ ,  $E(P_n[K_m]) = \{x_i y_j x_i y_k; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m; j \neq k\} \cup \{x_i y_j x_{i+1} y_k; 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq j \leq m; 1 \leq k \leq m\}$ ,  $|V(P_n[K_m])| = mn$ ,  $|E(P_n[K_m])| = \frac{mn(m-1)}{2} + m^2(n-1)$ , dan terdapat dua kemungkinan  $\Delta(P_n[K_m])$ , yaitu  $\Delta(P_n[K_m]) = 2m-1$  untuk  $n = 2$  dan  $\Delta(P_n[K_m]) = 3m-1$  untuk  $n \geq 3$ . Pilih titik yang menjadi *dominating set*  $D = \{x_{i-1} y_j; 1 \leq i \leq n; i = \text{kelipatan } 3; y_j \text{ adalah sebarang satu titik di } K_m\} \cup \{x_n y_j; n = 3k+1; \text{dimana } k \in A; y_j \text{ adalah sebarang satu titik di } K_m\}$ , maka dapat dilihat bahwa  $D$  *adjacent* dengan semua elemen  $V \setminus D$ .  $|D| = \lceil \frac{n}{3} \rceil$  sehingga  $\gamma(P_n[K_m]) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$ . Berdasarkan Teorema 2.4.1 dinyatakan bahwa  $\lceil \frac{p}{1+\Delta(P_n[K_m])} \rceil \leq \gamma(P_n[K_m]) \leq p - \Delta(P_n[K_m])$ , substitusikan nilai  $p$  dan  $\Delta(P_n[K_m])$ . Untuk  $n = 2$  maka  $\Delta(P_n[K_m]) = 2m-1$  sehingga  $\lceil \frac{p}{1+\Delta(P_n[K_m])} \rceil \leq \gamma(P_n[K_m]) \leq p - \Delta(P_n[K_m])$  menjadi  $\lceil \frac{2m}{2m} \rceil \leq \gamma(P_n[K_m]) \leq 2m - (2m-1)$ , sehingga diperoleh batas bawah dan batas atas *domination number* yaitu  $1 \leq \gamma(P_n[K_m]) \leq 1$ . Maka  $\gamma(P_n[K_m])$  berada pada batas bawah *domination number*. Untuk  $n \geq 3$  maka  $\Delta(P_n[K_m]) = 3m-1$  sehingga  $\lceil \frac{p}{1+\Delta(P_n[K_m])} \rceil \leq \gamma(P_n[K_m]) \leq p - \Delta(P_n[K_m])$  menjadi  $\lceil \frac{mn}{3m} \rceil \leq \gamma(P_n[K_m]) \leq mn - (3m-1)$ , sehingga diperoleh batas bawah dan batas atas *domination number* yaitu  $\lceil \frac{n}{3} \rceil \leq \gamma(P_n[K_m]) \leq mn - 3m + 1$ . Maka  $\gamma(P_n[K_m])$  berada pada batas bawah *domination number*. □

Contoh *dominating set* pada graf  $P_5[K_4]$  dapat dilihat pada Gambar 4.13, dimana titik yang berwarna merah merupakan *dominating set*-nya.

Selanjutnya akan disajikan akibat yang kedua dari Teorema 4.1.3, dimana graf yang digunakan pada akibat ini adalah graf  $C_n[W_m]$ . Sebelum disajikan akibat, terlebih dahulu disajikan observasi dari graf  $C_n[W_m]$ . Observasinya adalah sebagai berikut:

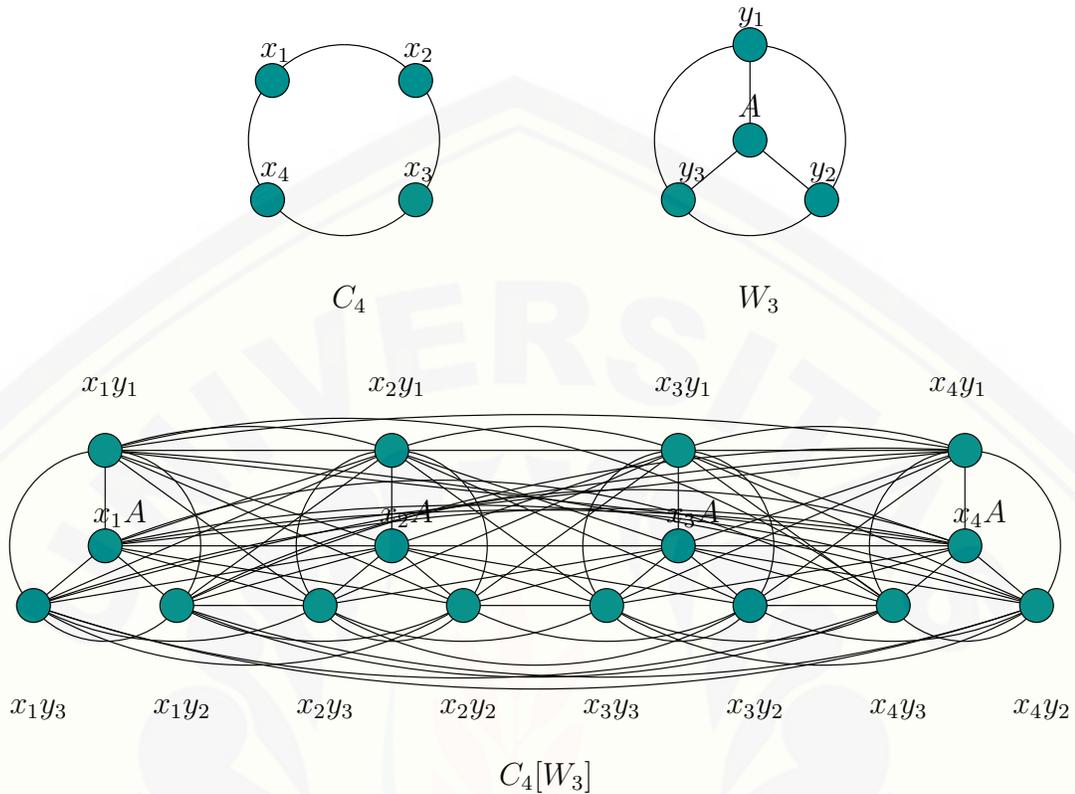


Gambar 4.13 *Dominating Set* pada Graf  $P_5[K_4]$

◇ **Observasi 4.1.6.** Misal diketahui graf cycle  $C_n$  dengan  $V(C_n) = \{x_i; 1 \leq i \leq n\}$  dan  $E(C_n) = \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{x_n x_1\}$  dan graf roda  $W_m$  dengan  $V(W_m) = \{A, y_j; 1 \leq j \leq m\}$  dan  $E(W_m) = \{y_j y_{j+1}; 1 \leq j \leq m - 1\} \cup \{y_m y_1\} \cup \{A y_j; 1 \leq j \leq m\}$ . Operasi composition dari  $C_n$  dan  $W_m$  yang dinotasikan dengan  $C_n[W_m]$ , untuk  $n \geq 3$  dan  $m \geq 3$ , maka himpunan titik dan sisinya dapat disajikan dalam  $V(C_n[W_m]) = \{x_i A, x_i y_j; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$ ,  $E(C_n[W_m]) = \{x_i y_j x_i y_{j+1}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m - 1\} \cup \{x_i y_m x_i y_1; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_i A x_i y_j; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_i y_j x_{i+1} y_k; 1 \leq i \leq n - 1; 1 \leq j \leq m; 1 \leq k \leq m\} \cup \{x_n y_j x_1 y_k; 1 \leq j \leq m; 1 \leq k \leq m\} \cup \{x_i A x_{i+1} A; 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{x_n A x_1 A\} \cup \{x_i A x_{i+1} y_j; 1 \leq i \leq n - 1; 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_n A x_1 y_j; 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_i A x_{i-1} y_j; 2 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_1 A x_n y_j; 1 \leq j \leq m\}$ ,  $|V(C_n[W_m])| = n(m+1)$ , dan  $|E(C_n[W_m])| = m^2 n + 4mn + n$ .

**Bukti.** Definisi 2.2.5 menjelaskan bahwa  $G = G_1[G_2]$  memiliki himpunan titik  $V(G_1) \times V(G_2)$  dan dua titik  $(u_1, u_2)$  dan  $(v_1, v_2)$  di  $G$  adjacent ketika  $(u_1 adj v_1)$  atau  $(u_1 = v_1$  dan  $u_2 adj v_2)$ . Maka graf  $C_n[W_m]$  dapat diilustrasikan dengan Gambar 4.14. Dengan demikian didapatkan  $V(C_n[W_m]) = \{x_i A, x_i y_j; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$ ,  $E(C_n[W_m]) = \{x_i y_j x_i y_{j+1}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m - 1\} \cup \{x_i y_m x_i y_1; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_i A x_i y_j; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_i y_j x_{i+1} y_k; 1 \leq i \leq n - 1; 1 \leq j \leq m; 1 \leq k \leq m\} \cup \{x_n y_j x_1 y_k; 1 \leq j \leq m; 1 \leq k \leq m\} \cup \{x_i A x_{i+1} A; 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{x_n A x_1 A\} \cup \{x_i A x_{i+1} y_j; 1 \leq i \leq n - 1; 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_n A x_1 y_j; 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_i A x_{i-1} y_j; 2 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_1 A x_n y_j; 1 \leq j \leq m\}$ ,  $|V(C_n[W_m])| = n(m+1)$ , dan  $|E(C_n[W_m])| = m^2 n + 4mn + n$ .

□



Gambar 4.14 Graf Hasil Operasi *Composition* dari  $C_4$  dan  $W_3$

Operasi *composition* merupakan kombinasi dari operasi *cartesian product* dan *tensor product*. Gambar 4.14 mengilustrasikan bahwa untuk menggambar graf  $C_n[W_m]$  diawali dengan menggambar titik-titik graf roda  $W_m$ , kemudian diduplikasi sebanyak titik pada graf *cycle*  $C_n$ . Setelah titik-titik pada graf *cycle*  $C_n$  dan graf roda  $W_m$  dikalikan seperti operasi *cartesian product* atau *tensor product*, kemudian titik-titiknya dihubungkan sesuai dengan graf *cycle*  $C_n$  dan roda  $W_m$  seperti operasi *cartesian product* dan hasil perkalian titik-titik tersebut yang *adjacent* dihubungkan seperti operasi *tensor product*. Graf  $C_n[W_m]$  dapat di-*expand* dengan menambahkan banyaknya titik dan sisi pada kedua graf tersebut, sedangkan hubungan *adjacency*-nya dilakukan melalui cara yang sama.

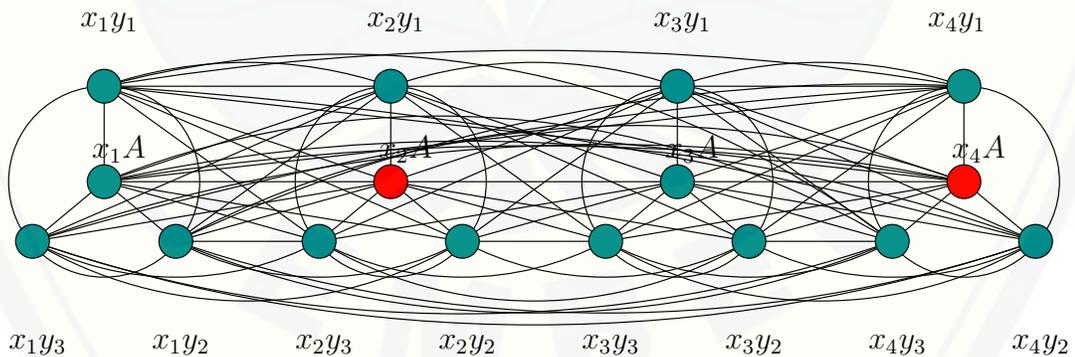
Dari Observasi 4.1.6 ditentukan *domination number* pada graf  $C_n[W_m]$  yang

disajikan dalam akibat. Berikut adalah akibat yang kedua dari Teorema 4.1.3.

◇ **Akibat 4.1.6.** Misal  $G$  adalah graf hasil operasi composition dari graf cycle  $C_n$  dan graf roda  $W_m$ , dimana  $n \geq 3$  dan  $m \geq 3$ , maka  $\gamma(C_n[W_m]) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$ .

**Bukti.** Graf  $C_n[W_m]$  adalah graf dengan  $V(C_n[W_m]) = \{x_iA, x_iy_j; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$ ,  $E(C_n[W_m]) = \{x_iy_j, x_iy_{j+1}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{x_iy_m, x_iy_1; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_iA, x_iy_j; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_iy_j, x_{i+1}y_k; 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq j \leq m; 1 \leq k \leq m\} \cup \{x_ny_j, x_1y_k; 1 \leq j \leq m; 1 \leq k \leq m\} \cup \{x_iA, x_{i+1}A; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_nA, x_1A\} \cup \{x_iA, x_{i+1}y_j; 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_nA, x_1y_j; 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_iA, x_{i-1}y_j; 2 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_1A, x_ny_j; 1 \leq j \leq m\}$ ,  $|V(C_n[W_m])| = n(m+1)$ ,  $|E(C_n[W_m])| = m^2n + 4mn + n$ , dan  $\Delta(C_n[W_m]) = 3(m+1) - 1$ . Pilih titik yang menjadi *dominating set*  $D = \{x_{i-1}A; 1 \leq i \leq n; i = \text{kelipatan } 3\} \cup \{x_nA; n = 3k + 1; \text{dimana } k \in A\}$ , maka dapat dilihat bahwa  $D$  *adjacent* dengan semua elemen  $V \setminus D$ .  $|D| = \lceil \frac{n}{3} \rceil$  sehingga  $\gamma(C_n[W_m]) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$ . Berdasarkan Teorema 2.4.1 dinyatakan bahwa  $\lceil \frac{p}{1+\Delta(C_n[W_m])} \rceil \leq \gamma(C_n[W_m]) \leq p - \Delta(C_n[W_m])$ , substitusikan nilai  $p$  dan  $\Delta(C_n[W_m])$  menjadi  $\lceil \frac{n(m+1)}{3(m+1)} \rceil \leq \gamma(C_n[W_m]) \leq mn - (3(m+1) - 1)$ , sehingga diperoleh batas bawah dan batas atas *domination number* yaitu  $\lceil \frac{n}{3} \rceil \leq \gamma(C_n[W_m]) \leq mn - 3m + n - 2$ . Maka  $\gamma(C_n[W_m])$  berada pada batas bawah *domination number*. □

Contoh *dominating set* pada graf  $C_4[W_3]$  dapat dilihat pada Gambar 4.15, dimana titik yang berwarna merah merupakan *dominating set*-nya.



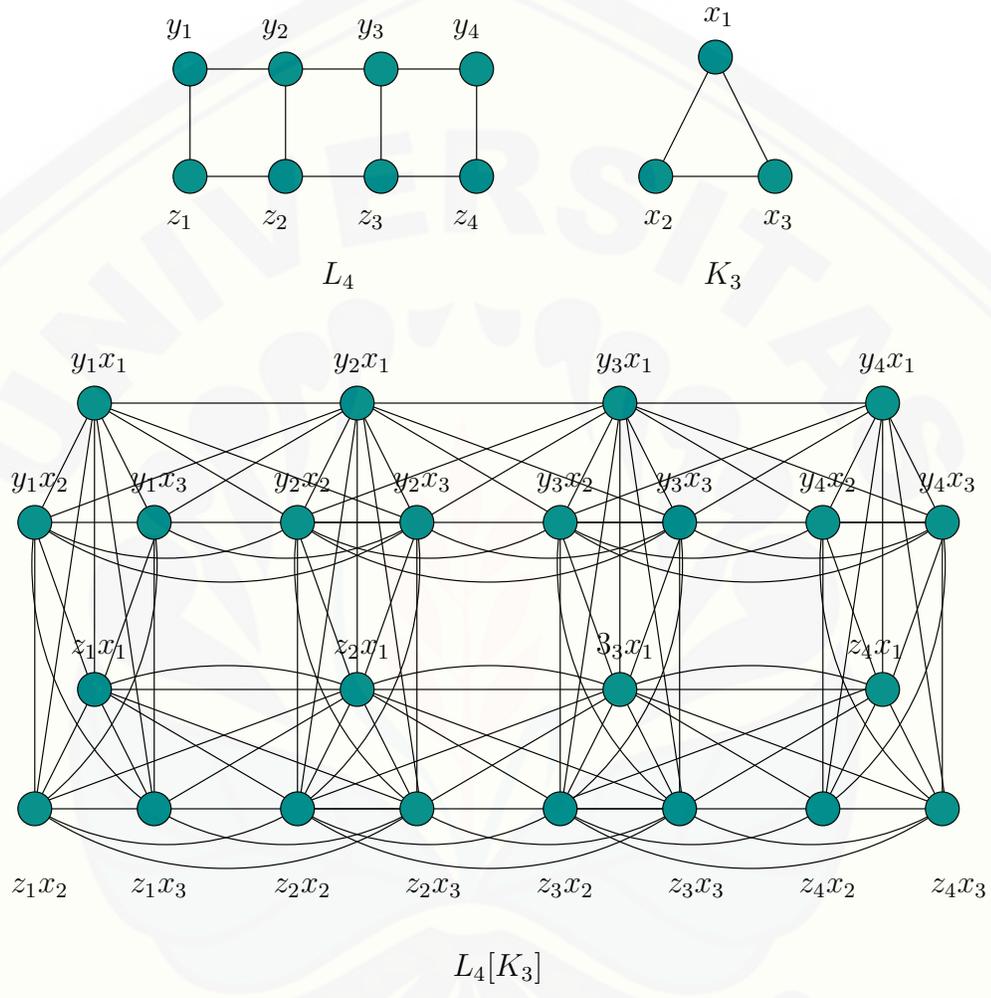
Gambar 4.15 *Dominating Set* pada Graf  $C_4[W_3]$

Selanjutnya akan disajikan akibat yang ketiga dari Teorema 4.1.3, dimana graf yang digunakan pada akibat ini adalah graf  $L_n[K_m]$ . Sebelum disajikan akibat, terlebih dahulu disajikan observasi dari graf  $L_n[K_m]$ . Observasinya adalah sebagai berikut:

◇ **Observasi 4.1.7.** Misal diketahui graf ladder  $L_n$  dengan  $V(L_n) = \{y_i, z_i; 1 \leq i \leq n\}$  dan  $E(L_n) = \{y_i y_{i+1}; 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{y_i z_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{z_i z_{i+1}; 1 \leq i \leq n - 1\}$  dan graf lengkap  $K_m$  dengan  $V(K_m) = \{x_j; 1 \leq j \leq m\}$  dan  $E(K_m) = \{x_j x_k; 1 \leq j \leq m; 1 \leq k \leq m; j \neq k\}$ . Operasi composition dari  $L_n$  dan  $K_m$  yang dinotasikan dengan  $L_n[K_m]$ , untuk  $n \geq 3$  dan  $m \geq 3$ , maka himpunan titik dan sisinya dapat disajikan dalam  $V(L_n[K_m]) = \{y_i x_j, z_i x_j; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$ ,  $E(L_n[K_m]) = \{y_i x_j y_i x_k; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m; 1 \leq k \leq m; j \neq k\} \cup \{z_i x_j z_i x_k; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m; 1 \leq k \leq m; j \neq k\} \cup \{y_i x_j y_{i+1} x_k; 1 \leq i \leq n - 1; 1 \leq j \leq m; 1 \leq k \leq m\} \cup \{y_i x_j z_i x_k; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m; 1 \leq k \leq m\} \cup \{z_i x_j z_{i+1} x_k; 1 \leq i \leq n - 1; 1 \leq j \leq m; 1 \leq k \leq m\}$ ,  $|V(L_n[K_m])| = 2mn$ , dan  $|E(L_n[K_m])| = 4m^2n - 2m^2 - mn$ .

**Bukti.** Definisi 2.2.5 menjelaskan bahwa  $G = G_1[G_2]$  memiliki himpunan titik  $V(G_1) \times V(G_2)$  dan dua titik  $(u_1, u_2)$  dan  $(v_1, v_2)$  di  $G$  adjacent ketika  $(u_1 \text{ adj } v_1)$  atau  $(u_1 = v_1 \text{ dan } u_2 \text{ adj } v_2)$ . Maka graf  $L_n[K_m]$  dapat diilustrasikan dengan Gambar 4.16. Dengan demikian didapatkan  $V(L_n[K_m]) = \{y_i x_j, z_i x_j; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$ ,  $E(L_n[K_m]) = \{y_i x_j y_i x_k; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m; 1 \leq k \leq m; j \neq k\} \cup \{z_i x_j z_i x_k; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m; 1 \leq k \leq m; j \neq k\} \cup \{y_i x_j y_{i+1} x_k; 1 \leq i \leq n - 1; 1 \leq j \leq m; 1 \leq k \leq m\} \cup \{y_i x_j z_i x_k; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m; 1 \leq k \leq m\} \cup \{z_i x_j z_{i+1} x_k; 1 \leq i \leq n - 1; 1 \leq j \leq m; 1 \leq k \leq m\}$ ,  $|V(L_n[K_m])| = 2mn$ , dan  $|E(L_n[K_m])| = 4m^2n - 2m^2 - mn$ . □

Operasi *composition* merupakan kombinasi dari operasi *cartesian product* dan *tensor product*. Gambar 4.16 mengilustrasikan bahwa untuk menggambar graf  $L_n[K_m]$  diawali dengan menggambar titik-titik graf lengkap  $K_m$ , kemudian diduplikasi sebanyak titik pada graf ladder  $L_n$ . Setelah titik-titik pada graf ladder  $L_n$  dan graf lengkap  $K_m$  dikalikan seperti operasi *cartesian product* atau *tensor product*, kemudian titik-titiknya dihubungkan sesuai dengan graf ladder  $L_n$



Gambar 4.16 Graf Hasil Operasi *Composition* dari  $L_4$  dan  $K_3$

dan lengkap  $K_m$  seperti operasi *cartesian product* dan hasil perkalian titik-titik tersebut yang *adjacent* dihubungkan seperti operasi *tensor product*. Graf  $L_n[K_m]$  dapat di-*expand* dengan menambahkan banyaknya titik dan sisi pada kedua graf tersebut, sedangkan hubungan *adjacency*-nya dilakukan melalui cara yang sama.

Dari Observasi 4.1.7 ditentukan *domination number* pada graf  $L_n[K_m]$  yang disajikan dalam akibat. Berikut adalah akibat yang ketiga dari Teorema 4.1.3.

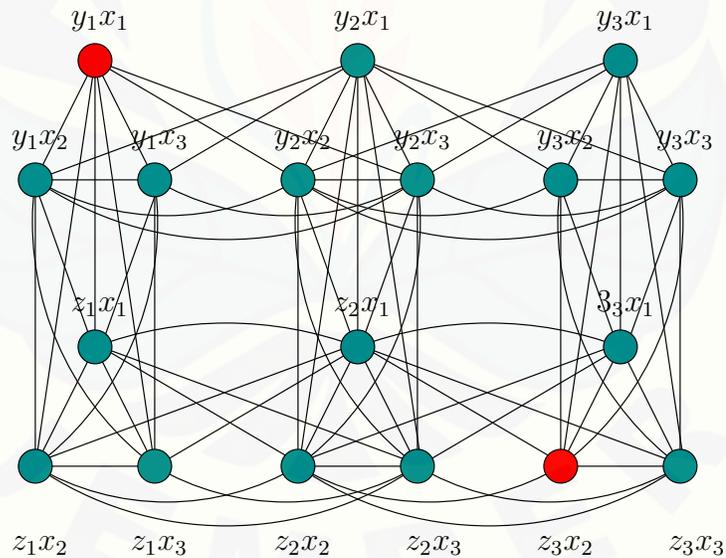
◇ **Akibat 4.1.7.** *Misal  $G$  adalah graf hasil operasi composition dari graf ladder  $L_n$  dan graf lengkap  $K_m$ , dimana  $n \geq 3$  dan  $m \geq 3$ , maka domination number dari  $(L_n[K_m])$  adalah sebagai berikut:*

$$\gamma(L_n[K_m]) = \begin{cases} \lceil \frac{n}{2} \rceil, & \text{dimana } n = \text{ganjil.} \\ \frac{n}{2} + 1, & \text{dimana } n = \text{genap.} \end{cases}$$

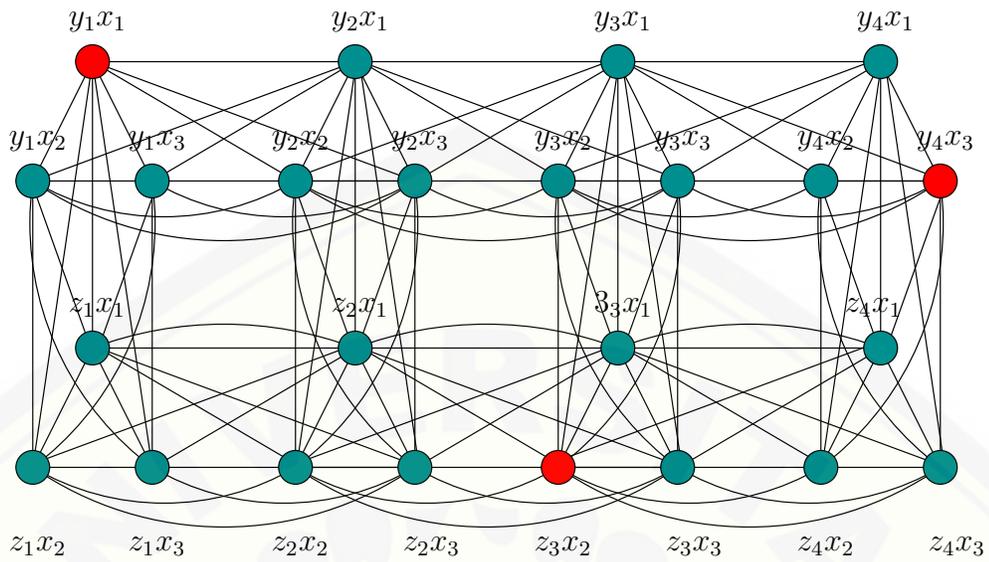
**Bukti.** Graf  $L_n[K_m]$  adalah graf dengan  $V(L_n[K_m]) = \{y_i x_j, z_i x_j; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$ ,  $E(L_n[K_m]) = \{y_i x_j y_i x_k; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m; 1 \leq k \leq m; j \neq k\} \cup \{z_i x_j z_i x_k; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m; 1 \leq k \leq m; j \neq k\} \cup \{y_i x_j y_{i+1} x_k; 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq j \leq m; 1 \leq k \leq m\} \cup \{y_i x_j z_i x_k; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m; 1 \leq k \leq m\} \cup \{z_i x_j z_{i+1} x_k; 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq j \leq m; 1 \leq k \leq m\}$ ,  $|V(L_n[K_m])| = 2mn$ ,  $|E(L_n[K_m])| = 4m^2n - 2m^2 - mn$ , dan  $\Delta(L_n[K_m]) = 4m - 1$ . Pilih titik yang menjadi *dominating set*  $D = \{y_{4i-3} x_j; 1 \leq i \leq \lceil \frac{n}{4} \rceil; y_j \text{ adalah sebarang satu titik di } K_m\} \cup \{\{z_{4i-1} x_j; 1 \leq i \leq \lceil \frac{n}{4} \rceil; y_j \text{ adalah sebarang satu titik di } K_m; n = 4k \text{ atau } n = 4k - 1; \text{ dimana } k \in A\} \text{ atau } \{z_{4i-1} x_j; 1 \leq i < \lceil \frac{n}{4} \rceil; y_j \text{ adalah sebarang satu titik di } K_m; n = 4k - 2 \text{ atau } n = 4k - 3; \text{ dimana } k \in A\}\} \cup \{y_n x_j, y_j \text{ adalah sebarang satu titik di } K_m; n = 4k; \text{ dimana } k \in A\} \cup \{z_n x_j, y_j \text{ adalah sebarang satu titik di } K_m; n = 4k - 2; \text{ dimana } k \in A\}$ , maka dapat dilihat bahwa  $D$  *adjacent* dengan semua elemen  $V \setminus D$ .  $|D| = \lceil \frac{n}{2} \rceil$  untuk  $n$  ganjil dan  $|D| = \frac{n}{2} + 1$  untuk  $n$  genap, sehingga  $\gamma(L_n[K_m]) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$  untuk  $n$  ganjil dan  $\gamma(L_n[K_m]) = \frac{n}{2} + 1$  untuk  $n$  genap. Berdasarkan Teorema 2.4.1 dinyatakan bahwa  $\lceil \frac{p}{1 + \Delta(L_n[K_m])} \rceil \leq \gamma(L_n[K_m]) \leq p - \Delta(L_n[K_m])$ , substitusikan nilai  $p$  dan  $\Delta(L_n[K_m])$  menjadi  $\lceil \frac{2mn}{4m} \rceil \leq \gamma(L_n[K_m]) \leq 2mn - (4m - 1)$ , sehingga diperoleh batas bawah dan batas atas *domination number* yaitu  $\lceil \frac{n}{2} \rceil \leq \gamma(L_n[K_m]) \leq 2mn - 4m + 1$ .  $\gamma(L_n[K_m])$  berada pada batas bawah *domination number* untuk  $n$  ganjil dan  $\gamma$

$(L_n[K_m])$  berada pada batas bawah *domination number* ditambah satu untuk  $n$  genap. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa  $\frac{n}{2} + 1 \leq 2mn - 4m + 1$ .  $2mn - 4m + 1 = \frac{n}{2}(4m - \frac{8m}{n} + \frac{2}{n})$ . Untuk sebarang  $m \geq 3$  dan  $n \geq 4$  dimana  $n$  genap diperoleh  $6 \leq 4m - \frac{8m}{n} < 4m$  dan  $\frac{2}{n} \leq \frac{1}{2}$ , sehingga  $4m - \frac{8m}{n} + \frac{2}{n} > 6$ . Hal ini mengakibatkan  $\frac{n}{2}(4m - \frac{8m}{n} + \frac{2}{n}) > \frac{n}{2} + 1$ . Sehingga diperoleh  $\frac{n}{2} + 1 < 2mn - 4m + 1$ . Maka  $\frac{n}{2} + 1$  selalu berada pada selang *domination number*. Maka  $\gamma(L_n[K_m])$  berada pada batas bawah *domination number* untuk  $n$  ganjil dan  $\gamma(L_n[K_m])$  berada pada batas bawah *domination number* ditambah satu untuk  $n$  genap.  $\square$

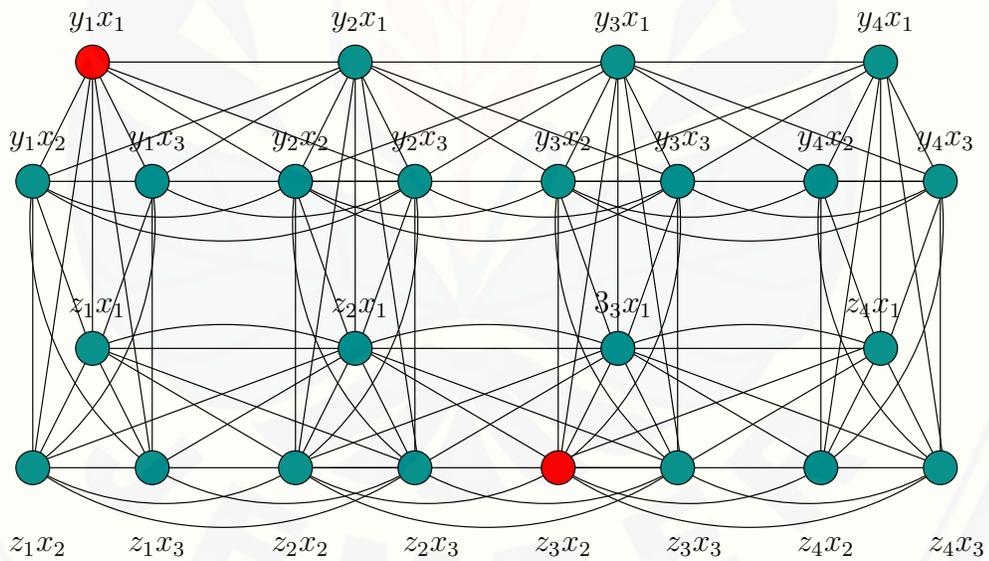
Contoh *dominating set* pada graf  $L_n[K_m]$  untuk  $n$  ganjil dapat dilihat pada Gambar 4.17, dimana graf yang digunakan adalah  $L_3[K_3]$ . Sedangkan contoh *dominating set* pada graf  $L_n[K_m]$  untuk  $n$  genap dapat dilihat pada Gambar 4.18, dimana graf yang digunakan adalah  $L_4[K_3]$ . Gambar 4.19 menunjukkan bahwa apabila menggunakan  $\gamma(L_n[K_m]) < \frac{n}{2} + 1$  untuk  $n$  genap, maka terdapat titik pada graf  $L_n[K_m]$  yang tidak bisa dijangkau oleh titik yang menjadi *dominating set*-nya. Titik yang berwarna merah pada gambar-gambar tersebut merupakan *dominating set*-nya.



Gambar 4.17 *Dominating Set* pada Graf  $L_3[K_3]$



Gambar 4.18 *Dominating Set* pada Graf  $L_4[K_3]$



Gambar 4.19 *Dominating Set* pada Graf  $L_4[K_3]$  Tidak Dapat Menjangkau Semua Titik pada Graf  $L_4[K_3]$

Selanjutnya akan disajikan akibat yang keempat dari Teorema 4.1.3, dimana graf yang digunakan pada akibat ini adalah graf  $P_n[Bt_m]$ . Sebelum disajikan akibat, terlebih dahulu disajikan observasi dari graf  $P_n[Bt_m]$ . Observasinya adalah sebagai berikut:

◇ **Observasi 4.1.8.** *Misal diketahui graf lintasan  $P_n$  dengan  $V(P_n) = \{x_i; 1 \leq i \leq n\}$  dan  $E(P_n) = \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\}$  dan graf buku segitiga  $Bt_m$  dengan  $V(Bt_m) = \{y_j, z_k; 1 \leq j \leq 2; 1 \leq k \leq m\}$  dan  $E(Bt_m) = \{y_j y_{j+1}; j = 1\} \cup \{y_j z_k; 1 \leq j \leq 2; 1 \leq k \leq m\}$ . Operasi *composition* dari  $P_n$  dan  $Bt_m$  yang dinotasikan dengan  $P_n[Bt_m]$ , untuk  $n \geq 2$  dan  $m \geq 2$ , maka himpunan titik dan sisinya dapat disajikan dalam  $V(P_n[Bt_m]) = \{x_i y_j, x_i z_k; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq 2; 1 \leq k \leq m\}$ ,  $E(P_n[Bt_m]) = \{x_i y_j x_i y_{j+1}; 1 \leq i \leq n; j = 1\} \cup \{x_i y_j x_i z_k; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq 2; 1 \leq k \leq m\} \cup \{x_i y_j x_{i+1} y_l; 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq j \leq 2; 1 \leq l \leq 2\} \cup \{x_i y_j x_{i+1} z_k; 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq j \leq 2; 1 \leq k \leq m\} \cup \{x_i y_j x_{i-1} z_k; 2 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq 2; 1 \leq k \leq m\} \cup \{x_i z_k x_{i+1} z_l; 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq k \leq m; 1 \leq l \leq m\}$ ,  $|V(P_n[Bt_m])| = n(m+2)$ , dan  $|E(P_n[Bt_m])| = m^2 n - m^2 + 6mn - 4m + 5n - 4$ .*

**Bukti.** Definisi 2.2.5 menjelaskan bahwa  $G = G_1[G_2]$  memiliki himpunan titik  $V(G_1) \times V(G_2)$  dan dua titik  $(u_1, u_2)$  dan  $(v_1, v_2)$  di  $G$  *adjacent* ketika  $(u_1 \text{ adj } v_1)$  atau  $(u_1 = v_1 \text{ dan } u_2 \text{ adj } v_2)$ . Maka graf  $P_n[Bt_m]$  dapat diilustrasikan dengan Gambar 4.20. Dengan demikian didapatkan  $V(P_n[Bt_m]) = \{x_i y_j, x_i z_k; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq 2; 1 \leq k \leq m\}$ ,  $E(P_n[Bt_m]) = \{x_i y_j x_i y_{j+1}; 1 \leq i \leq n; j = 1\} \cup \{x_i y_j x_i z_k; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq 2; 1 \leq k \leq m\} \cup \{x_i y_j x_{i+1} y_l; 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq j \leq 2; 1 \leq l \leq 2\} \cup \{x_i y_j x_{i+1} z_k; 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq j \leq 2; 1 \leq k \leq m\} \cup \{x_i y_j x_{i-1} z_k; 2 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq 2; 1 \leq k \leq m\} \cup \{x_i z_k x_{i+1} z_l; 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq k \leq m; 1 \leq l \leq m\}$ ,  $|V(P_n[Bt_m])| = n(m+2)$ , dan  $|E(P_n[Bt_m])| = m^2 n - m^2 + 6mn - 4m + 5n - 4$ . □

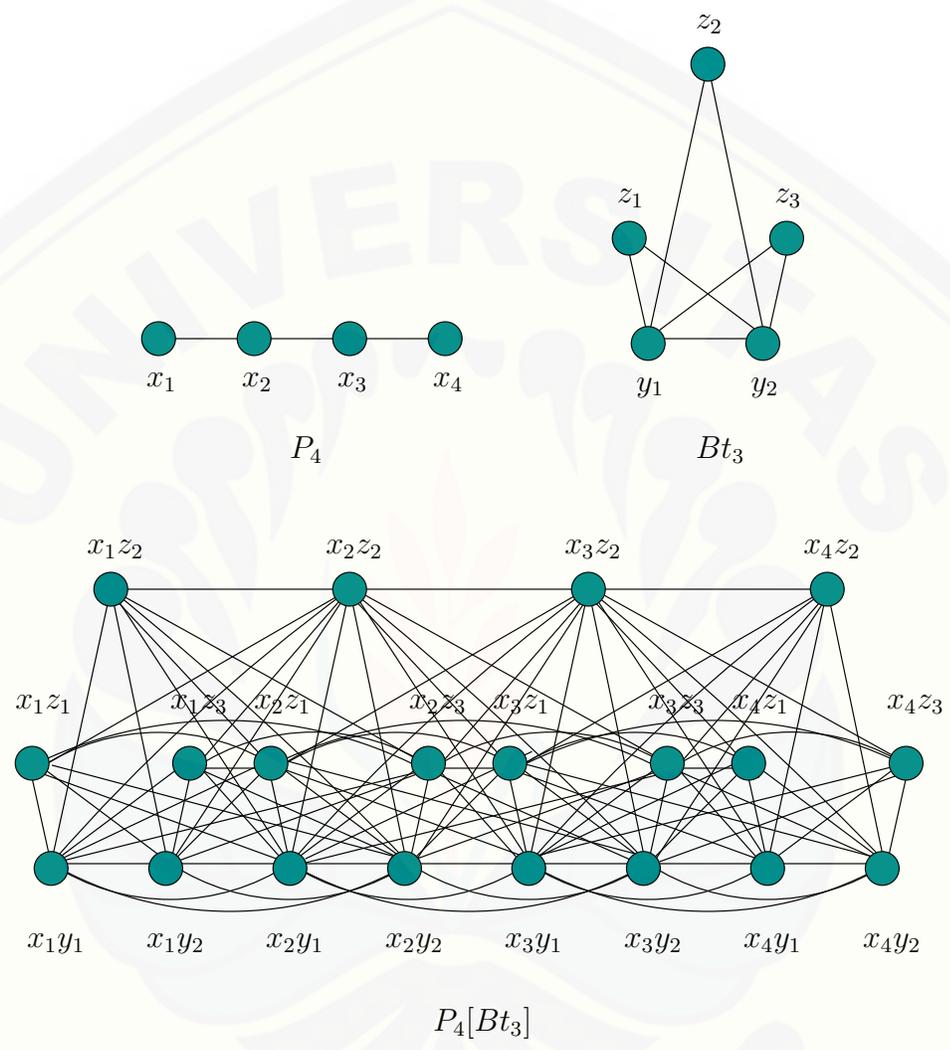
Operasi *composition* merupakan kombinasi dari operasi *cartesian product* dan *tensor product*. Gambar 4.20 mengilustrasikan bahwa untuk menggambar graf  $P_n[Bt_m]$  diawali dengan menggambar titik-titik graf buku segitiga  $Bt_m$ , kemudian diduplikasi sebanyak titik pada graf lintasan  $P_n$ . Setelah titik-titik pada graf lintasan  $P_n$  dan graf buku segitiga  $Bt_m$  dikalikan seperti operasi *cartesian product* atau *tensor product*, kemudian titik-titiknya dihubungkan sesuai dengan

graf lintasan  $P_n$  dan buku segitiga  $Bt_m$  seperti operasi *cartesian product* dan hasil perkalian titik-titik tersebut yang *adjacent* dihubungkan seperti operasi *tensor product*. Graf  $P_n[Bt_m]$  dapat di-*expand* dengan menambahkan banyaknya titik dan sisi pada kedua graf tersebut, sedangkan hubungan *adjacency*-nya dilakukan melalui cara yang sama.

Dari Observasi 4.1.8 ditentukan *domination number* pada graf  $P_n[Bt_m]$  yang disajikan dalam akibat. Berikut adalah akibat yang keempat dari Teorema 4.1.3.

◇ **Akibat 4.1.8.** Misal  $G$  adalah graf hasil operasi *composition* dari graf lintasan  $P_n$  dan graf buku segitiga  $Bt_m$ , dimana  $n \geq 2$  dan  $m \geq 2$ , maka  $\gamma (P_n[Bt_m]) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$ .

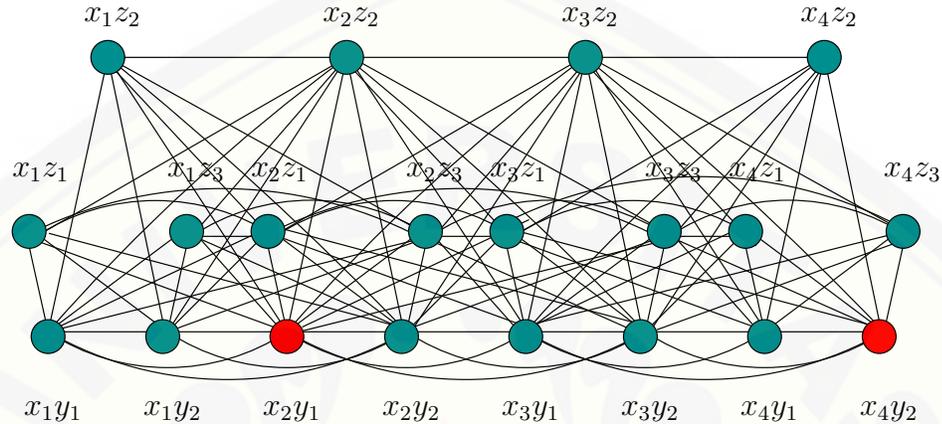
**Bukti.** Graf  $P_n[Bt_m]$  adalah graf dengan  $V(P_n[Bt_m]) = \{x_i y_j, x_i z_k; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq 2; 1 \leq k \leq m\}$ ,  $E(P_n[Bt_m]) = \{x_i y_j x_i y_{j+1}; 1 \leq i \leq n; j = 1\} \cup \{x_i y_j x_i z_k; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq 2; 1 \leq k \leq m\} \cup \{x_i y_j x_{i+1} y_j; 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq j \leq 2; 1 \leq l \leq 2\} \cup \{x_i y_j x_{i+1} z_k; 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq j \leq 2; 1 \leq k \leq m\} \cup \{x_i y_j x_{i-1} z_k; 2 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq 2; 1 \leq k \leq m\} \cup \{x_i z_k x_{i+1} z_l; 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq k \leq m; 1 \leq l \leq m\}$ ,  $|V(P_n[Bt_m])| = n(m+2)$ ,  $|E(P_n[Bt_m])| = m^2 n - m^2 + 6mn - 4m + 5n - 4$ , dan terdapat dua kemungkinan  $\Delta (P_n[Bt_m])$ , yaitu  $\Delta (P_n[Bt_m]) = 2m+3$  untuk  $n = 2$  dan  $\Delta (P_n[Bt_m]) = 3m+5$  untuk  $n \geq 3$ . Pilih titik yang menjadi *dominating set*  $D = \{x_{i-1} y_j; 1 \leq i \leq n; i = \text{kelipatan } 3; y_j \text{ adalah sebarang satu titik di } Bt_m; \text{ dimana } \Delta (y_j) = |V(Bt_m)| - 1\} \cup \{x_n y_j; y_j \text{ adalah sebarang satu titik di } Bt_m; \text{ dimana } \Delta (y_j) = |V(Bt_m)| - 1\}; n = 3k + 1; \text{ dimana } k \in A\}$ , maka dapat dilihat bahwa  $D$  *adjacent* dengan semua elemen  $V \setminus D$ .  $|D| = \lceil \frac{n}{3} \rceil$  sehingga  $\gamma (P_n[Bt_m]) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$ . Berdasarkan Teorema 2.4.1 dinyatakan bahwa  $\lceil \frac{p}{1+\Delta(P_n[Bt_m])} \rceil \leq \gamma (P_n[Bt_m]) \leq p - \Delta (P_n[Bt_m])$ , substitusikan nilai  $p$  dan  $\Delta (P_n[Bt_m])$ . Untuk  $n = 2$  maka  $\Delta (P_n[Bt_m]) = 2m+3$  sehingga  $\lceil \frac{p}{1+\Delta(P_n[Bt_m])} \rceil \leq \gamma (P_n[Bt_m]) \leq p - \Delta (P_n[Bt_m])$  menjadi  $\lceil \frac{2m+4}{2m+4} \rceil \leq \gamma (P_n[Bt_m]) \leq (2m+4) - (2m+3)$ , sehingga diperoleh batas bawah dan batas atas *domination number* yaitu  $1 \leq \gamma (P_n[Bt_m]) \leq 1$ . Maka  $\gamma (P_n[Bt_m])$  berada pada batas bawah *domination number*. Untuk  $n \geq 3$  maka  $\Delta (P_n[Bt_m]) = 3m+5$  sehingga  $\lceil \frac{p}{1+\Delta(P_n[Bt_m])} \rceil \leq \gamma (P_n[Bt_m]) \leq p - \Delta (P_n[Bt_m])$  menjadi  $\lceil \frac{n(m+2)}{3m+6} \rceil \leq \gamma (P_n[Bt_m]) \leq n(m+2) - (3m+5)$ , sehingga diperoleh batas bawah dan batas atas *domination number* yaitu  $\lceil \frac{n}{3} \rceil \leq \gamma (P_n[Bt_m]) \leq$



Gambar 4.20 Graf Hasil Operasi *Composition* dari  $P_4$  dan  $Bt_3$

$mn - 3m + 2n - 5$ . Maka  $\gamma (P_n[Bt_m])$  berada pada batas bawah *domination number*.  $\square$

Contoh *dominating set* pada graf  $P_4[Bt_3]$  dapat dilihat pada Gambar 4.21, dimana titik yang berwarna merah merupakan *dominating set*-nya.



Gambar 4.21 *Dominating Set* pada Graf  $P_4[Bt_3]$

Teorema yang keempat adalah *domination number* pada hasil operasi *shackle* dari graf  $P_2[K_m]$ . Sebelum disajikan teorema, terlebih dahulu disajikan observasi dari graf *Shack*  $(P_2[K_m], v = x_{1,k}, r)$ . Observasinya adalah sebagai berikut:

$\diamond$  **Observasi 4.1.9.** Misal diketahui graf  $P_2[K_m]$  hasil dari Observasi 4.1.5 dengan  $V(P_2[K_m]) = \{x_{1,k}, x_{i,1}y_j; 1 \leq i \leq 2; 1 \leq j \leq m - 1; 1 \leq k \leq 2\}$  dan  $E(P_n[K_m]) = \{x_{1,k} x_{i,1}y_j; 1 \leq i \leq 2; 1 \leq j \leq m - 1; 1 \leq k \leq 2\} \cup \{x_{1,1} x_{1,2}\} \cup \{x_{i,1}y_j x_{i,1}y_l; 1 \leq i \leq 2; 1 \leq j \leq m - 1; 1 \leq l \leq m - 1; j \neq l\} \cup \{x_{1,1}y_j x_{2,1}y_l; 1 \leq j \leq m - 1; 1 \leq l \leq m - 1\}$ . Operasi *shackle* dari  $P_2[K_m]$  yang dinotasikan dengan *Shack*  $(P_2[K_m], v = x_{1,k}, r)$ , untuk  $m \geq 3$  dan  $r \geq 2$ , maka himpunan titik dan sisinya dapat disajikan dalam  $V(\text{Shack}(P_2[K_m], v = x_{1,k}, r)) = \{x_{1,k}, x_{i,1}y_j; 1 \leq i \leq 2; 1 \leq j \leq m - 1; 1 \leq k \leq r + 1; 1 \leq l \leq r\}$ ,  $E(\text{Shack}(P_2[K_m], v = x_{1,k}, r)) = \{x_{1,k} x_{1,k}y_j; 1 \leq j \leq m - 1; 1 \leq k \leq r\} \cup \{x_{1,k} x_{2,k-1}y_j; 1 \leq j \leq m - 1; 2 \leq k \leq r + 1\} \cup \{x_{i,k}y_j x_{i,k}y_l; 1 \leq i \leq 2; 1 \leq j \leq m - 1; 1 \leq l \leq m - 1; j \neq l; 1 \leq k \leq r\} \cup \{x_{1,k} x_{1,k+1}; 1 \leq k \leq r\} \cup \{x_{1,k} x_{2,k}y_j; 1 \leq j \leq m - 1; 1 \leq k \leq r\} \cup \{x_{1,k} x_{1,k-1}y_j; 1 \leq j \leq m - 1; 2 \leq k \leq r + 1\} \cup \{x_{1,k}y_j x_{2,k}y_l; 1 \leq j \leq m - 1; 1 \leq l \leq r\}$ .

$l \leq m - 1; 1 \leq k \leq r\}$ ,  $|V(\text{Shack}(P_2[K_m], v = x_{1,k}, r))| = r(2m - 1) + 1$ , dan  $|E(\text{Shack}(P_2[K_m], v = x_{1,k}, r))| = 2m^2r - mr$ .

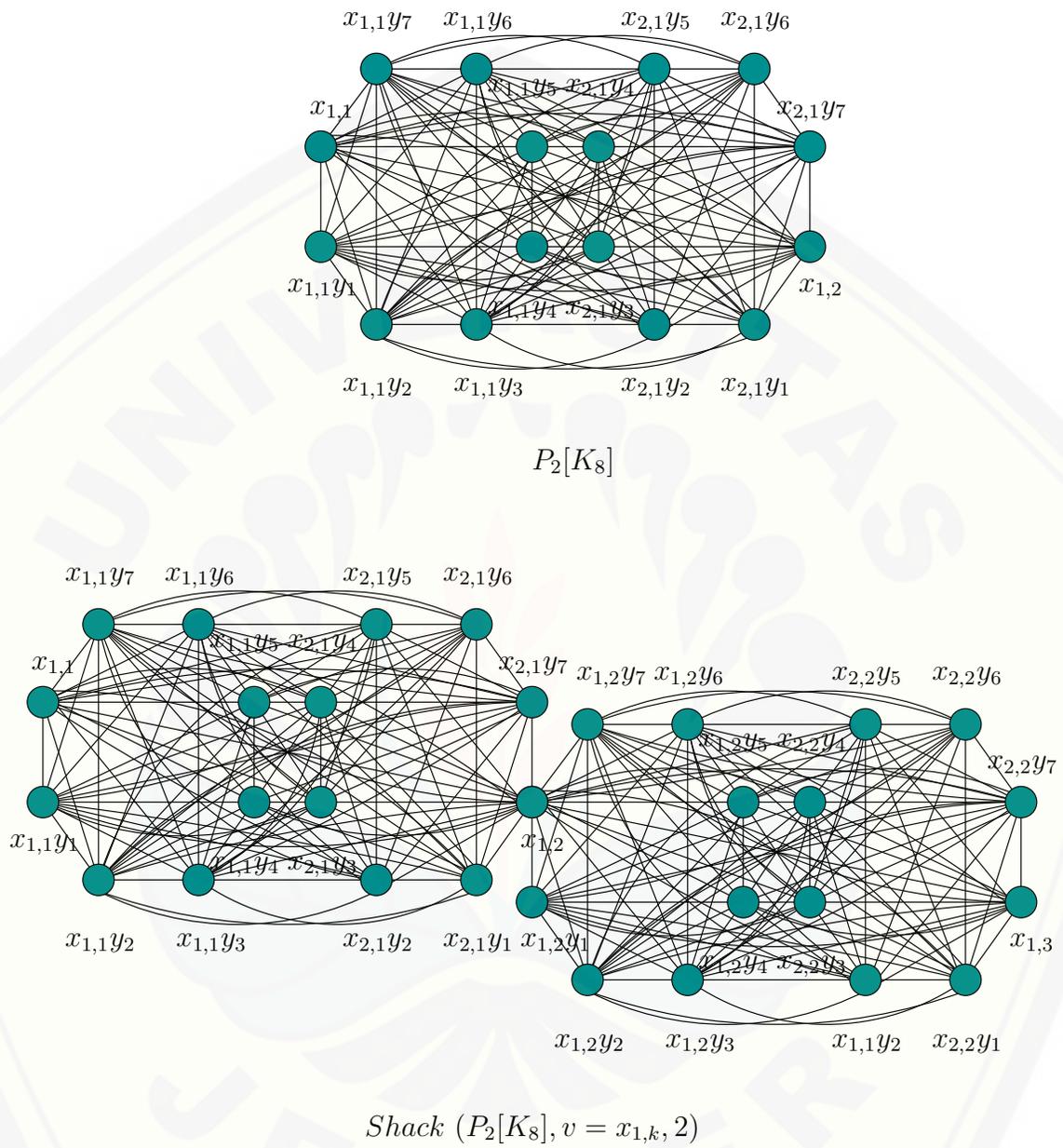
**Bukti.** Definisi 2.2.6 menjelaskan bahwa *shackle* dari suatu graf  $G$  dinotasikan dengan  $\text{Shack}(G, r)$  dimana  $G$  adalah graf terhubung *non trivial*,  $r$  menyatakan banyaknya graf  $G$  yang akan di-*shackle*, dan untuk setiap  $G_i$  dan  $G_{i+1}$  dimana  $1 \leq i \leq r - 1$  terdapat tepat satu titik yang sama yang disebut *vertex linkage* dimana  $r - 1$  *vertex linkage* semua berbeda. Maka graf  $\text{Shack}(P_2[K_m], v = x_{1,k}, r)$  dapat diilustrasikan dengan Gambar 4.22. Dengan demikian didapatkan  $V(\text{Shack}(P_2[K_m], v = x_{1,k}, r)) = \{x_{1,k}, x_{i,l}y_j; 1 \leq i \leq 2; 1 \leq j \leq m - 1; 1 \leq k \leq r + 1; 1 \leq l \leq r\}$ ,  $E(\text{Shack}(P_2[K_m], v = x_{1,k}, r)) = \{x_{1,k} x_{1,k}y_j; 1 \leq j \leq m - 1; 1 \leq k \leq r\} \cup \{x_{1,k} x_{2,k-1}y_j; 1 \leq j \leq m - 1; 2 \leq k \leq r + 1\} \cup \{x_{i,k}y_j x_{i,k}y_l; 1 \leq i \leq 2; 1 \leq j \leq m - 1; 1 \leq l \leq m - 1; j \neq l; 1 \leq k \leq r\} \cup \{x_{1,k} x_{1,k+1}; 1 \leq k \leq r\} \cup \{x_{1,k} x_{2,k}y_j; 1 \leq j \leq m - 1; 1 \leq k \leq r\} \cup \{x_{1,k} x_{1,k-1}y_j; 1 \leq j \leq m - 1; 2 \leq k \leq r + 1\} \cup \{x_{1,k}y_j x_{2,k}y_l; 1 \leq j \leq m - 1; 1 \leq l \leq m - 1; 1 \leq k \leq r\}$ ,  $|V(\text{Shack}(P_2[K_m], v = x_{1,k}, r))| = r(2m - 1) + 1$ , dan  $|E(\text{Shack}(P_2[K_m], v = x_{1,k}, r))| = 2m^2r - mr$ .  $\square$

Gambar 4.22 mengilustrasikan bahwa untuk menggambar graf  $\text{Shack}(P_2[K_m], v = x_{1,k}, r)$  diawali dengan menggambar graf  $P_2[K_m]$  yang diduplikasi sebanyak  $r$  yang merupakan jumlah *shackle*-nya, kemudian disusun secara paralel. Setiap 2 duplikat graf  $P_2[K_m]$  terdapat satu *vertex linkage* dan semua *vertex linkage*-nya berbeda, sehingga terdapat  $r - 1$  *vertex linkage* dari  $\text{Shack}(P_2[K_m], v = x_{1,k}, r)$ .

Dari Observasi 4.1.9 ditentukan *domination number* pada graf  $\text{Shack}(P_2[K_m], v = x_{1,k}, r)$  yang disajikan dalam teorema berikut.

$\diamond$  **Teorema 4.1.4.** Misal  $G$  adalah graf hasil operasi *shackle* dari graf  $P_2[K_m]$ , dimana  $m \geq 7$  dan  $2 \leq r \leq 50$ , maka  $\gamma(\text{Shack}(P_2[K_m], v = x_{1,k}, r)) = \lceil \frac{r}{2} \rceil$ .

**Bukti.** Graf  $\text{Shack}(P_2[K_m], v = x_{1,k}, r)$  adalah graf dengan  $V(\text{Shack}(P_2[K_m], v = x_{1,k}, r)) = \{x_{1,k}, x_{i,l}y_j; 1 \leq i \leq 2; 1 \leq j \leq m - 1; 1 \leq k \leq r + 1; 1 \leq l \leq r\}$ ,  $E(\text{Shack}(P_2[K_m], v = x_{1,k}, r)) = \{x_{1,k} x_{1,k}y_j; 1 \leq j \leq m - 1; 1 \leq k \leq r\} \cup \{x_{1,k} x_{2,k-1}y_j; 1 \leq j \leq m - 1; 2 \leq k \leq r + 1\} \cup \{x_{i,k}y_j x_{i,k}y_l; 1 \leq i \leq 2; 1 \leq j \leq m - 1; 1 \leq l \leq m - 1; j \neq l; 1 \leq k \leq r\} \cup \{x_{1,k} x_{1,k+1}; 1 \leq k \leq r\} \cup \{x_{1,k} x_{2,k}y_j; 1 \leq j \leq m - 1; 1 \leq k \leq r\} \cup \{x_{1,k} x_{1,k-1}y_j; 1 \leq j \leq m - 1; 2 \leq k \leq r + 1\}$



Gambar 4.22 Graf Hasil Operasi Shackle dari  $P_2[K_8]$

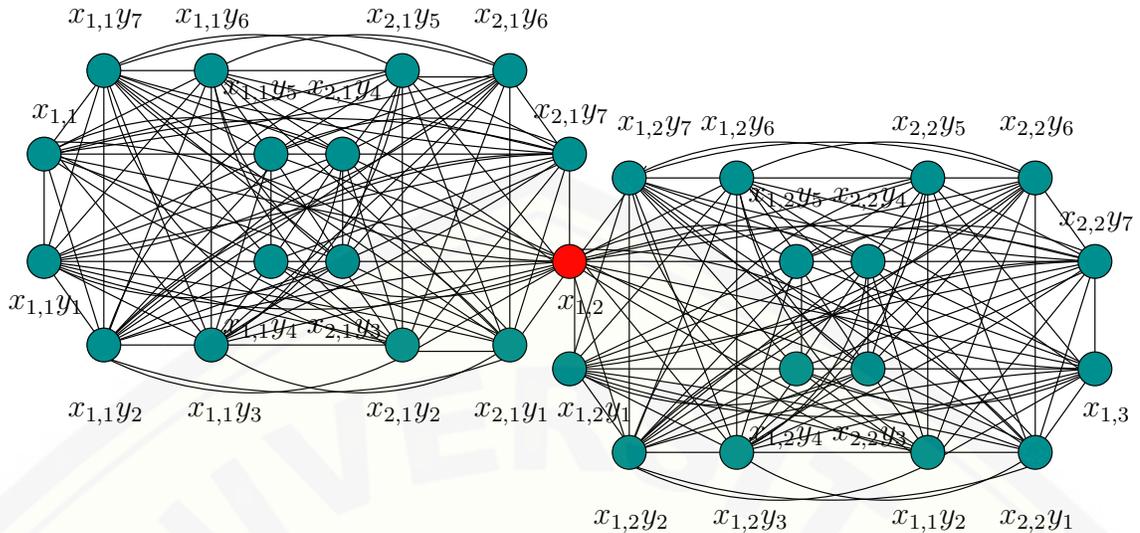
$\cup \{x_{1,k}y_j \ x_{2,k}y_l; 1 \leq j \leq m-1; 1 \leq l \leq m-1; 1 \leq k \leq r\}$ ,  $|V(Shack (P_2[K_m], v = x_{1,k}, r))| = r(2m-1) + 1$ ,  $|E(Shack (P_2[K_m], v = x_{1,k}, r))| = 2m^2r - mr$ , dan  $\Delta (Shack (P_2[K_m], v = x_{1,k}, r)) = 2(2m-1)$ . Pilih titik yang menjadi *dominating set*  $D = \{x_{1,k}; 1 \leq k \leq r+1; i = \text{bilangan genap}\}$ , maka dapat dilihat bahwa  $D$  *adjacent* dengan semua elemen  $V \setminus D$ .  $|D| = \lceil \frac{r}{2} \rceil$  sehingga  $\gamma (Shack (P_2[K_m], v = x_{1,k}, r)) = \lceil \frac{r}{2} \rceil$ . Berdasarkan Teorema 2.4.1 dinyatakan bahwa  $\lceil \frac{p}{1 + \Delta(Shack(P_2[K_m], v = x_{1,k}, r))} \rceil \leq \gamma (Shack (P_2[K_m], v = x_{1,k}, r)) \leq p - \Delta(Shack (P_2[K_m], v = x_{1,k}, r))$ , substitusikan nilai  $p$  dan  $\Delta (Shack (P_2[K_m], v = x_{1,k}, r))$  menjadi  $\lceil \frac{r(2m-1)+1}{1+2(2m-1)} \rceil \leq \gamma (Shack (P_2[K_m], v = x_{1,k}, r)) \leq (r(2m-1) + 1) - 2(2m-1)$ , sehingga diperoleh batas bawah dan batas atas *domination number* yaitu  $\lceil \frac{r(2m-1)+1}{2(2m-1)+1} \rceil \leq \gamma (Shack (P_2[K_m], v = x_{1,k}, r)) \leq 2mr - 4m - r + 3$ . Harus ditunjukkan untuk  $m \geq 7$  dan  $2 \leq r \leq 50$ , maka  $\lceil \frac{r(2m-1)+1}{2(2m-1)+1} \rceil = \lceil \frac{r}{2} \rceil$ .  $\lceil \frac{r(2m-1)+1}{2(2m-1)+1} \rceil = \lceil \frac{2mr-r+1}{4m-1} \rceil$ . Untuk  $r = 2$  maka  $\lceil \frac{2mr-r+1}{4m-1} \rceil = \lceil \frac{4m-1}{4m-1} \rceil = 1 = \lceil \frac{2}{2} \rceil = \lceil \frac{r}{2} \rceil$ . Untuk  $r = 50$  maka  $\lceil \frac{2mr-r+1}{4m-1} \rceil = \lceil \frac{100m-49}{4m-1} \rceil = \lceil \frac{25(4m-\frac{49}{25})}{4m-1} \rceil$ . Untuk  $m \geq 7$  diperoleh  $\frac{4m-\frac{49}{25}}{4m-1} \geq 0.964$ , maka  $\lceil \frac{25(4m-\frac{49}{25})}{4m-1} \rceil = 25 = \lceil \frac{50}{2} \rceil = \lceil \frac{r}{2} \rceil$ . Sehingga untuk  $m \geq 7$  dan  $2 \leq r \leq 50$ , maka  $\lceil \frac{r(2m-1)+1}{2(2m-1)+1} \rceil = \lceil \frac{r}{2} \rceil$ . Maka  $\gamma (Shack (P_2[K_m], v = x_{1,k}, r))$  berada pada batas bawah *domination number*.  $\square$

Contoh *dominating set* pada graf  $Shack (P_2[K_8], v = x_{1,k}, 2)$  dapat dilihat pada Gambar 4.23, dimana titik yang berwarna merah merupakan *dominating set*-nya.

Teorema yang kelima adalah *domination number* pada hasil operasi *amalgamation* dari sebarang graf sederhana. Teoremnya adalah sebagai berikut:

$\diamond$  **Teorema 4.1.5.** *Misal  $G$  adalah sebarang graf sederhana dengan  $\Delta (G) = |V(G)| - 1$ . Maka *domination number* dari  $\gamma (Amal (G, v = x_i, r)) = 1$ , dimana  $x_i \in V(G)$ ,  $\Delta (x_i) = |V(G)| - 1$ , dan  $r \geq 2$ .*

**Bukti.** Definisi 2.2.7 menjelaskan bahwa *amalgamation* titik dari suatu graf  $G$  dinotasikan dengan  $Amal (G, v, r)$  dimana  $G$  adalah suatu keluarga graf berhingga, setiap  $G$  mempunyai suatu titik  $v$  yang disebut titik terminal, dan  $r$  menyatakan banyaknya graf  $G$  yang akan di-*amalgamation*. Misal  $G$  adalah sebarang graf sederhana dengan  $|V(G)| = m$  dan  $\Delta (G) = m - 1$ , maka  $|V(Amal (G, v =$



Gambar 4.23 *Dominating Set* pada Graf *Shack* ( $P_2[K_8], v = x_{1,k}, 2$ )

$x_i, r)) = r(m - 1) + 1$  dimana  $x_i$  adalah titik terminal berderajat  $m - 1$ , sehingga  $\Delta (Amal (G, v = x_i, r) = r(m - 1)$ . Pilih titik yang menjadi *dominating set*  $D = \{x_i; \Delta (x_i) = |V(G)| - 1\}$ , maka dapat dilihat bahwa  $D$  *adjacent* dengan semua elemen  $V \setminus D$ .  $|D| = 1$  sehingga  $\gamma (Amal (G, v = x_i, r)) = 1$ . Berdasarkan Teorema 2.4.1 dinyatakan bahwa  $\lceil \frac{p}{1 + \Delta (Amal (G, v = x_i, r))} \rceil \leq \gamma (Amal (G, v = x_i, r)) \leq p - \Delta (Amal (G, v = x_i, r))$ , substitusikan nilai  $p$  dan  $\Delta (Amal (G, v = x_i, r))$  menjadi  $\lceil \frac{r(m-1)+1}{r(m-1)+1} \rceil \leq \gamma (Amal (G, v = x_i, r)) \leq (r(m - 1) + 1) - r(m - 1)$ , sehingga diperoleh batas bawah dan batas atas *domination number* yaitu  $1 \leq \gamma (Amal (G, v = x_i, r)) \leq 1$ . Maka  $\gamma (Amal (G, v = x_i, r))$  berada pada batas bawah *domination number*.  $\square$

Selanjutnya akan disajikan akibat dari Teorema 4.1.5, dimana graf yang digunakan pada akibat ini adalah graf  $Amal (Bt_n, v = x_i, r)$ . Sebelum disajikan akibat, terlebih dahulu disajikan observasi dari graf  $Amal (Bt_n, v = x_i, r)$ . Observasinya adalah sebagai berikut:

$\diamond$  **Observasi 4.1.10.** Misal diketahui graf buku segitiga  $Bt_n$  dengan  $V(Bt_n) = \{x_i y_j; 1 \leq i \leq 2; 1 \leq j \leq n\}$  dan  $E(Bt_n) = \{x_i x_{i+1}; i = 1\} \cup \{x_i y_j; 1 \leq i \leq 2; 1 \leq j \leq n\}$ . Operasi amalgamation dari  $Bt_n$  yang dinotasikan dengan  $Amal$

$(Bt_n, v = x_2, r)$ , untuk  $n \geq 2$  dan  $r \geq 2$ , maka himpunan titik dan sisinya dapat disajikan dalam  $V(\text{Amal}(Bt_n, v = x_2, r)) = \{x_{1,k}, x_2; y_{j,k}; 1 \leq j \leq n; 1 \leq k \leq r\}$ ,  $E(\text{Amal}(Bt_n, v = x_2, r)) = \{x_{i,k} x_2; 1 \leq k \leq r\} \cup \{x_{1,k} y_{j,k}; 1 \leq j \leq n; 1 \leq k \leq r\} \cup \{x_2 y_{j,k}; 1 \leq j \leq n; 1 \leq k \leq r\}$ ,  $|V(\text{Amal}(Bt_n, v = x_2, r))| = r(n+1) + 1$ , dan  $|E(\text{Amal}(Bt_n, v = x_2, r))| = r(2n+1)$ .

**Bukti.** Definisi 2.2.7 menjelaskan bahwa *amalgamation* titik dari suatu graf  $G$  dinotasikan dengan  $\text{Amal}(G, v, r)$  dimana  $G$  adalah suatu keluarga graf berhingga, setiap  $G$  mempunyai suatu titik  $v$  yang disebut titik terminal, dan  $r$  menyatakan banyaknya graf  $G$  yang akan di-*amalgamation*. Maka graf  $\text{Amal}(Bt_n, v = x_i, r)$  dapat diilustrasikan dengan Gambar 4.24. Dengan demikian didapatkan  $V(\text{Amal}(Bt_n, v = x_2, r)) = \{x_{1,k}, x_2; y_{j,k}; 1 \leq j \leq n; 1 \leq k \leq r\}$ ,  $E(\text{Amal}(Bt_n, v = x_2, r)) = \{x_{i,k} x_2; 1 \leq k \leq r\} \cup \{x_{1,k} y_{j,k}; 1 \leq j \leq n; 1 \leq k \leq r\} \cup \{x_2 y_{j,k}; 1 \leq j \leq n; 1 \leq k \leq r\}$ ,  $|V(\text{Amal}(Bt_n, v = x_2, r))| = r(n+1) + 1$ , dan  $|E(\text{Amal}(Bt_n, v = x_2, r))| = r(2n+1)$ .  $\square$

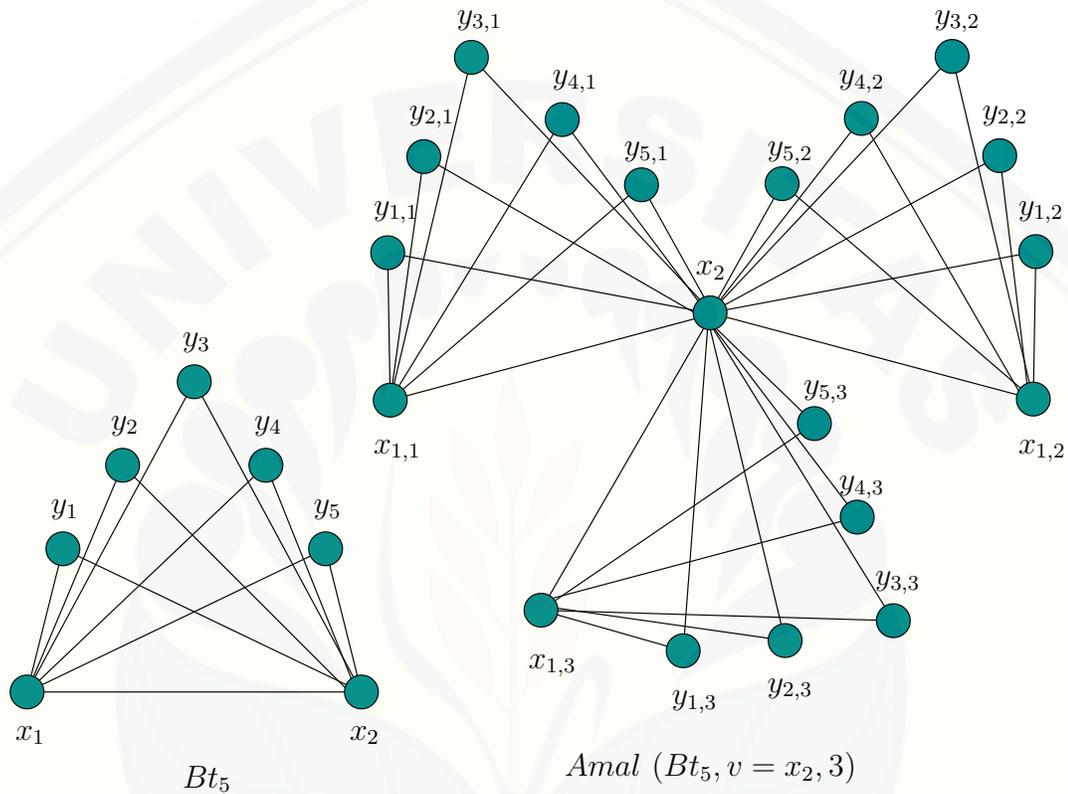
Gambar 4.24 mengilustrasikan bahwa untuk menggambar graf  $\text{Amal}(Bt_n, v = x_2, r)$  diawali dengan menggambar graf buku segitiga  $Bt_n$  yang diduplikasi sebanyak  $r$  yang merupakan jumlah *amalgamation*-nya. Selanjutnya semua duplikasi dilekatkan pada satu titik yang menjadi titik terminalnya yaitu  $x_2$ .

Dari Observasi 4.1.10 ditentukan *domination number* pada graf  $\text{Amal}(Bt_n, v = x_2, r)$  yang disajikan dalam akibat. Berikut adalah akibat dari Teorema 4.1.5.

$\diamond$  **Akibat 4.1.9.** Misal  $G$  adalah graf hasil operasi *amalgamation* dari graf  $Bt_n$ , dimana  $n \geq 2$  dan  $r \geq 2$ , maka  $\gamma(\text{Amal}(Bt_n, v = x_2, r)) = 1$ .

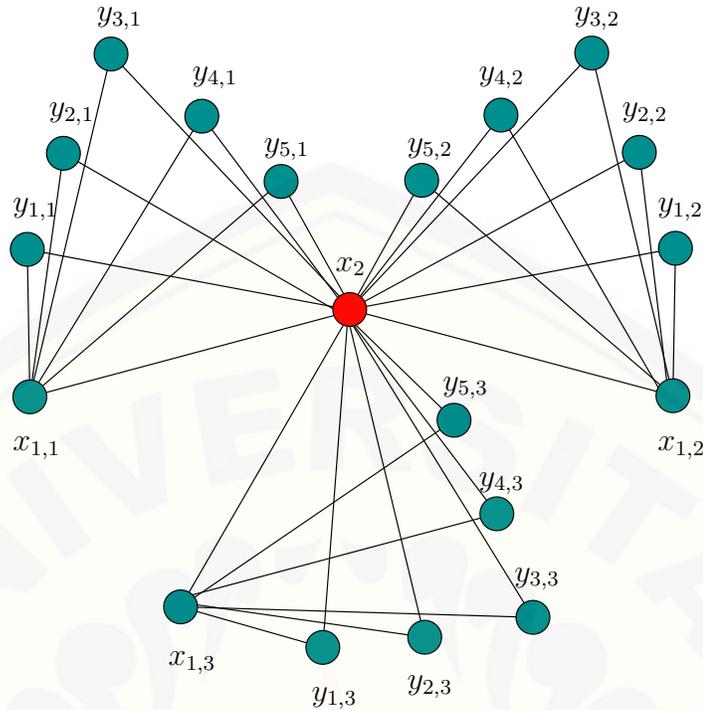
**Bukti.** Graf  $\text{Amal}(Bt_n, v = x_2, r)$  adalah graf dengan  $V(\text{Amal}(Bt_n, v = x_2, r)) = \{x_{1,k}, x_2; y_{j,k}; 1 \leq j \leq n; 1 \leq k \leq r\}$ ,  $E(\text{Amal}(Bt_n, v = x_2, r)) = \{x_{i,k} x_2; 1 \leq k \leq r\} \cup \{x_{1,k} y_{j,k}; 1 \leq j \leq n; 1 \leq k \leq r\} \cup \{x_2 y_{j,k}; 1 \leq j \leq n; 1 \leq k \leq r\}$ ,  $|V(\text{Amal}(Bt_n, v = x_2, r))| = r(n+1) + 1$ ,  $|E(\text{Amal}(Bt_n, v = x_2, r))| = r(2n+1)$ , dan  $\Delta(\text{Amal}(Bt_n, v = x_2, r)) = r(n+1)$ . Pilih titik yang menjadi *dominating set*  $D = \{x_2\}$ , maka dapat dilihat bahwa  $D$  *adjacent* dengan semua elemen  $V \setminus D$ .  $|D| = 1$  sehingga  $\gamma(\text{Amal}(Bt_n, v = x_2, r)) = 1$ . Berdasarkan Teorema 2.4.1 dinyatakan bahwa  $\lceil \frac{p}{1 + \Delta(\text{Amal}(Bt_n, v = x_2, r))} \rceil \leq \gamma(\text{Amal}(Bt_n, v = x_2, r)) \leq p - \Delta$

$(Amal (Bt_n, v = x_2, r))$ , substitusikan nilai  $p$  dan  $\Delta (Amal (Bt_n, v = x_2, r))$  menjadi  $\lceil \frac{r(n+1)+1}{r(n+1)+1} \rceil \leq \gamma (Amal (Bt_n, v = x_2, r)) \leq (r(n+1) + 1) - r(n+1)$ , sehingga diperoleh batas bawah dan batas atas *domination number* yaitu  $1 \leq \gamma (Amal (Bt_n, v = x_2, r)) \leq 1$ . Maka  $\gamma (Amal (Bt_n, v = x_2, r))$  berada pada batas bawah *domination number*.  $\square$



Gambar 4.24 Graf Hasil Operasi Amalgamation dari  $Bt_5$

Contoh *dominating set* pada graf  $(Amal (Bt_5, v = x_2, 3))$  dapat dilihat pada Gambar 4.25, dimana titik yang berwarna merah merupakan *dominating set*-nya.



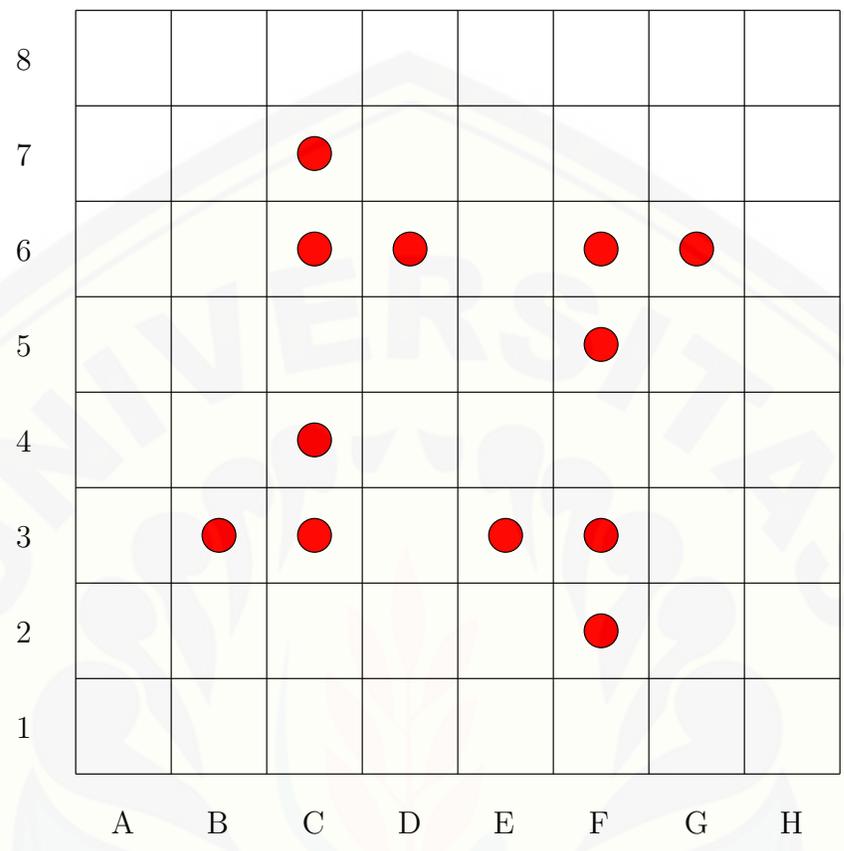
Gambar 4.25 *Dominating Set* pada Graf ( $Amal (Bt_5, v = x_2, 3)$ )

#### 4.2 *Dominating set* Kuda pada Papan Catur Berukuran $8 \times 8$

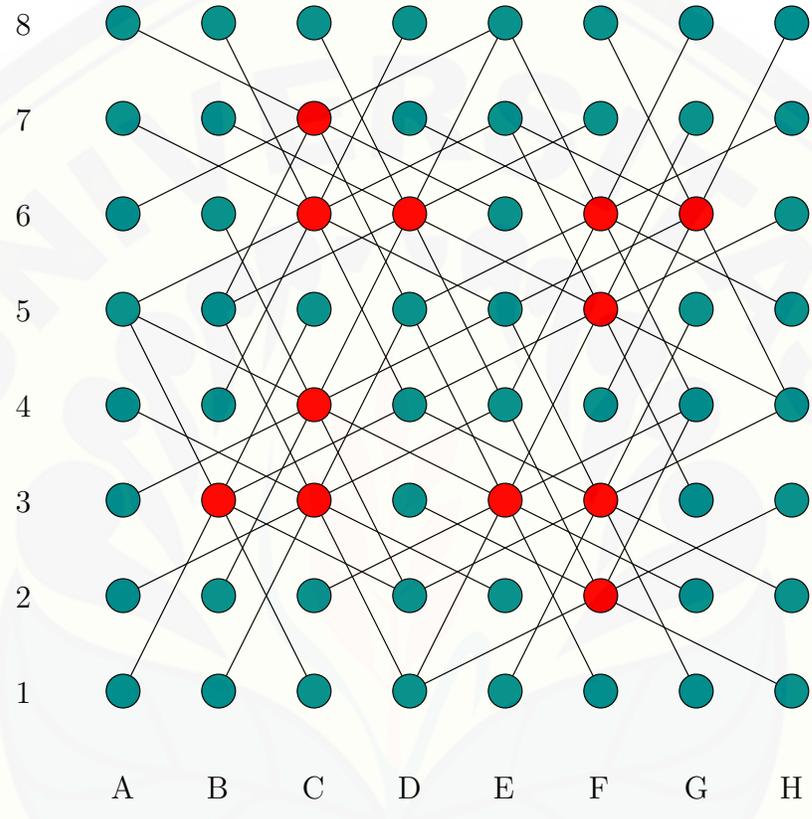
Pada bagian ini akan dibahas mengenai *dominating set* kuda pada papan catur berukuran  $8 \times 8$ . Sebelum menentukan *dominating set* kuda pada papan catur berukuran  $8 \times 8$  terlebih dahulu petak pada papan catur berukuran  $8 \times 8$  dan gerakan melangkah serta menyerang kuda direpresentasikan ke dalam konstruksi graf. Petak pada papan catur direpresentasikan sebagai titik pada konstruksi graf. Dua titik dikatakan terhubung jika petak yang mewakili titik tersebut dapat dicapai oleh kuda pada petak lain dengan satu langkah.

Dalam penelitian ini, peneliti hanya mampu menemukan *domination number* kuda yaitu 12. *Dominating set* kuda papan catur berukuran  $8 \times 8$  ditunjukkan oleh Gambar 4.26, dimana titik yang berwarna merah merupakan posisi dari kuda. Selanjutnya, representasi dari *dominating set* kuda ke dalam konstruksi graf dapat dilihat pada Gambar 4.27, dimana titik yang berwarna merah merupakan *domi-*

nating set-nya. Dominating set kuda yaitu  $D = \{B3, C3, C4, C6, C7, D6, E3, F2, F3, F5, F6, G6\}$ .



Gambar 4.26 Dominating Set Kuda pada Papan Catur Berukuran  $8 \times 8$



Gambar 4.27 Representasi *Dominating Set* Kuda pada Papan Catur Berukuran  $8 \times 8$  ke dalam Konstruksi Graf

## BAB 5. KESIMPULAN DAN SARAN

### 5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dari pembahasan pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa:

a. Banyaknya titik (*order*) dan banyaknya sisi (*size*) pada hasil operasi graf khusus dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1.  $|V(P_n + F_m)| = m + n + 1$  dan  $|E(P_n + F_m)| = mn + 2m + 2n - 2$ .
2.  $|V(C_n + L_m)| = 2m + n$  dan  $|E(C_n + L_m)| = 2mn + 3m + n - 2$ .
3.  $|V(C_n \odot \mathbb{L}_m)| = n(2m + 1)$  dan  $|E(C_n \odot \mathbb{L}_m)| = 6mn - 2n$ .
4.  $|V(P_n \odot F_m)| = n(m + 2)$  dan  $|E(P_n \odot F_m)| = 3mn + n - 1$ .
5.  $|V(P_n[K_m])| = mn$  dan  $|E(P_n[K_m])| = \frac{mn(m-1)}{2} + m^2(n - 1)$ .
6.  $|V(C_n[W_m])| = n(m + 1)$  dan  $|E(C_n[W_m])| = m^2n + 4mn + n$ .
7.  $|V(L_n[K_m])| = 2mn$  dan  $|E(L_n[K_m])| = 4m^2n - 2m^2 - mn$ .
8.  $|V(P_n[Bt_m])| = n(m + 2)$  dan  $|E(P_n[Bt_m])| = 2mn + n + (n - 1)(m^2 + 4m + 4)$ .
9.  $|V(Shack (P_2[K_m], v = x_{1,k}, r))| = r(2m-1)+1$  dan  $|E(Shack (P_2[K_m], v = x_{1,k}, r))| = 2m^2r - mr$ .
10.  $|V(Amal (Bt_n, v = x_2, r))| = r(n + 1) + 1$  dan  $|E(Amal (Bt_n, v = x_2, r))| = r(2n + 1)$ .

b. *Dominating set* pada hasil operasi graf khusus dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Untuk  $\Delta (G_1) = |V(G_1)| - 1$  dan  $\Delta (G_2) \neq |V(G_2)| - 1$ , maka *dominating set* dari  $G_1 + G_2$  adalah satu titik pada  $G_1$ , yaitu  $D (G_1 + G_2) = \{x_i; x_i \in V(G_1)\}$ . Untuk  $\Delta (G_1) \neq |V(G_1)| - 1$  dan  $\Delta (G_2) =$

$|V(G_2)| - 1$ , maka *dominating set* dari  $G_1 + G_2$  adalah satu titik pada  $G_2$ , yaitu  $D(G_1 + G_2) = \{y_j; y_j \in V(G_2)\}$ . Untuk  $\Delta(G_1) \neq |V(G_1)| - 1$  dan  $\Delta(G_2) \neq |V(G_2)| - 1$ , maka *dominating set* dari  $G_1 + G_2$  adalah satu titik pada  $G_1$  dan satu titik pada  $G_2$ , yaitu  $D(G_1 + G_2) = \{x_i, y_j; x_i \in V(G_1); y_j \in V(G_2)\}$ .

2.  $D(P_n + F_m) = \{A\}$ .
3. Untuk  $n = 3$ , maka *dominating set* dari  $C_n + L_m$  adalah satu titik pada  $C_n$ , yaitu  $D = \{x_i; x_i \in C_n\}$ . Untuk  $n > 3$ , maka *dominating set* dari  $C_n + L_m$  adalah satu titik pada  $C_n$  dan satu titik pada  $L_m$ , yaitu  $D = \{x_i, y_j; x_i \in C_n; y_j \in L_m\}$  atau  $D = \{x_i, z_j; x_i \in C_n; z_j \in L_m\}$ .
4.  $D(G_1 \odot G_2) = \{x_i; 1 \leq i \leq |V(G_1)|; x_i \in V(G_1)\}$ .
5.  $D(C_n \odot \mathbb{L}_m) = \{x_i; 1 \leq i \leq n\}$ .
6.  $D(P_n \odot F_m) = \{x_i; 1 \leq i \leq n\}$ .
7.  $D(G_1[G_2]) = \{x_i y_j; 1 \leq i \leq |V(G_1)|; x_i \in V(G_1); x_i$  adalah *dominating set* di  $G_1; y_j$  adalah sebarang satu titik di  $G_2$ ; dimana  $\Delta(y_j) = |V(G_2)| - 1\}$ .
8.  $D(P_n[K_m]) = \{x_{i-1} y_j; 1 \leq i \leq n; i = \text{kelipatan } 3; y_j$  adalah sebarang satu titik di  $K_m\} \cup \{x_n y_j; n = 3k+1; \text{dimana } k \in A; y_j$  adalah sebarang satu titik di  $K_m\}$ .
9.  $D(C_n[W_m]) = \{x_{i-1} A; 1 \leq i \leq n; i = \text{kelipatan } 3\} \cup \{x_n A; n = 3k + 1; \text{dimana } k \in A\}$ .
10.  $D(L_n[K_m]) = \{y_{4i-3} x_j; 1 \leq i \leq \lceil \frac{n}{4} \rceil; y_j$  adalah sebarang satu titik di  $K_m\} \cup \{\{z_{4i-1} x_j; 1 \leq i \leq \lceil \frac{n}{4} \rceil; y_j$  adalah sebarang satu titik di  $K_m; n = 4k$  atau  $n = 4k - 1; \text{dimana } k \in A\} \cup \{z_{4i-1} x_j; 1 \leq i < \lceil \frac{n}{4} \rceil; y_j$  adalah sebarang satu titik di  $K_m; n = 4k - 2$  atau  $n = 4k - 3; \text{dimana } k \in A\}\} \cup \{y_n x_j, y_j$  adalah sebarang satu titik di  $K_m; n = 4k; \text{dimana } k \in A\} \cup \{z_n x_j, y_j$  adalah sebarang satu titik di  $K_m; n = 4k - 2; \text{dimana } k \in A\}$ .
11.  $D(P_n[Bt_m]) = \{x_{i-1} y_j; 1 \leq i \leq n; i = \text{kelipatan } 3; y_j$  adalah sebarang satu titik di  $Bt_m; \text{dimana } \Delta(y_j) = |V(Bt_m)| - 1\} \cup \{x_n y_j; y_j$  adalah

sebarang satu titik di  $Bt_m$ ; dimana  $\Delta(y_j) = |V(Bt_m)| - 1$ ;  $n = 3k + 1$ ; dimana  $k \in A$ ).

12.  $D(Shack(P_2[K_m], v = x_{1,k}, r)) = \{x_{1,k}; 1 \leq k \leq r + 1; i = \text{bilangan genap}\}$ .
13.  $D(Amal(G, v = x_i, r)) = \{x_i; \Delta(x_i) = |V(G)| - 1\}$ .
14.  $D(Amal(Bt_n, v = x_2, r)) = \{x_2\}$ .

c. *Domination number* pada hasil operasi graf khusus dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1.

$$\gamma(G_1 + G_2) = \begin{cases} 1, & \text{dimana } \Delta(G_1) = |V(G_1)| - 1 \text{ atau} \\ & \Delta(G_2) = |V(G_2)| - 1. \\ 2, & \text{dimana } \Delta(G_1) \neq |V(G_1)| - 1 \text{ dan} \\ & \Delta(G_2) \neq |V(G_2)| - 1. \end{cases}$$

2.  $\gamma(P_n + F_m) = 1$ , dimana  $n \geq 2$  dan  $m \geq 3$ .

3.

$$\gamma(C_n + L_m) = \begin{cases} 1, & \text{dimana } n = 3 \text{ dan } m \geq 3. \\ 2, & \text{dimana } n > 3 \text{ dan } m \geq 3. \end{cases}$$

4.  $\gamma(G_1 \odot G_2) = |V(G_1)|$ .

5.  $\gamma(C_n \odot L_m) = n$ , dimana  $n \geq 3$  dan  $m \geq 3$ .

6.  $\gamma(P_n \odot F_m) = n$ , dimana  $n \geq 2$  dan  $m \geq 3$ .

7.  $\gamma(G_1[G_2]) = \gamma(G_1)$ , dimana  $\Delta(G_2) = |V(G_2)| - 1$ .

8.  $\gamma(P_n[K_m]) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$ , dimana  $n \geq 2$  dan  $m \geq 3$ .

9.  $\gamma(C_n[W_m]) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$ , dimana  $n \geq 3$  dan  $m \geq 3$ .

10.

$$\gamma(L_n[K_m]) = \begin{cases} \lceil \frac{n}{2} \rceil, & \text{dimana } n \geq 3, m \geq 3, \text{ dan } n = \text{ganjil.} \\ \frac{n}{2} + 1, & \text{dimana } n > 3, m \geq 3, \text{ dan } n = \text{genap.} \end{cases}$$

11.  $\gamma (P_n[Bt_m]) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$ , dimana  $n \geq 2$  dan  $m \geq 2$ .
  12.  $\gamma (Shack (P_2[K_m], v = x_{1,k}, r)) = \lceil \frac{r}{2} \rceil$ , dimana  $m \geq 7$  dan  $2 \leq r \leq 50$ .
  13.  $\gamma (Amal (G, v = x_i, r)) = 1$ , dimana  $x_i \in V(G)$ ,  $\Delta (x_i) = |V(G)| - 1$ , dan  $r \geq 2$ .
  14.  $\gamma (Amal (Bt_n, v = x_2, r)) = 1$ , dimana  $n \geq 2$  dan  $r \geq 2$ .
- d. Dalam penelitian ini, peneliti hanya mampu menemukan *domination number* kuda yaitu 12 dengan *dominating set* kuda yaitu  $D = \{B3, C3, C4, C6, C7, D6, E3, F2, F3, F5, F6, G6\}$ .

## 5.2 Saran

Berdasarkan hasil penelitian mengenai *dominating set* pada hasil operasi graf khusus dan aplikasinya, maka peneliti memberikan saran kepada pembaca supaya dapat mencari *domination number* pada hasil operasi sebarang graf khusus yang berada pada batas bawah *domination number*, yaitu graf  $G_1 \times G_2$ ,  $G_1 \otimes G_2$ ,  $L_n[K_m]$  dimana  $n$  genap,  $G_1[G_2]$  dimana  $\Delta G_2 \neq |V(G_2)| - 1$ ,  $Shack (P_2[K_m], v = x_{1,k}, r)$  dimana  $r > 50$ , dan  $Amal (G, v = x_i, r)$  dimana  $\Delta (G) \neq |V(G)| - 1$ . Selanjutnya, peneliti juga memberikan saran kepada pembaca supaya dapat mencari *domination number* kuda pada papan catur berukuran  $8 \times 8$  yang berada pada batas bawah *domination number* dan menentukan banyaknya kombinasi dari *dominating set* kuda tersebut dengan menggunakan *software* matematika.

## DAFTAR SUMBER RUJUKAN

- Agustin, I. H. and Dafik (2014). On the domination number of some families of special graphs. *Prosiding Seminar Matematika dan Pendidikan Matematika Universitas Jember*, 1 (1).
- Alfarisi, R. (2014). *Penerapan Teknik Konstruksi Graf, Rainbow Connection, dan Dominating Set dalam Analisis Morfologi Jalan*. Tidak dipublikasikan (Skripsi). Jember: Universitas Jember.
- Alfarisi, R., Dafik, and Fatahillah, A. (2014). Analisa himpunan dominasi pada graf-graf khusus. *Prosiding Seminar Matematika dan Pendidikan Matematika Universitas Jember*, 1 (1).
- Ardiyansah, R. and Darmaji (2013). Bilangan kromatik graf hasil amalgamasi dua buah graf. *Jurnal Sains dan Seni Pomits*, 2 (1).
- Dafik, Slamini, Eka, F., and Sya'diyah, L. (2013). Super antimagicness of triangular book and diamond ladder graphs. *Proceedings of IICMA*.
- Harrary, F. (2007). *Graph Theory*. Addison: Wesley.
- Harsya, A. Y., Agustin, I. H., and Dafik (2014). Pewarnaan titik pada operasi graf lintasan, graf sikel dan graf bintang. *Prosiding Seminar Matematika dan Pendidikan Matematika Universitas Jember*, 1 (1).
- Hartsfield, N. and Ringel, G. (1990). *Pearls in Graph Theory*. Boston - San Diego - New York - London: Academic Press.
- Haynes, T. W., Hedetniemi, S. T., and Slater, P. J. (1998). *Fundamentals of Domination in Graphs*. New York: Marcel Dekker.
- Haynes, T. W. and Henning, M. A. (2002). Total domination good vertices in graphs. *Australasian Journal of Combinatorics*, pages 305–315.

- Irwanto, J. and Dafik (2014). Pewarnaan titik pada graf spesial dan operasinya. *Prosiding Seminar Matematika dan Pendidikan Matematika Universitas Jember*, 1 (1).
- Iswadi, H. (2011). Batas atas bilangan dominasi lokasi metrik dari graf hasil operasi korona. *Prosiding Seminar Nasional Teknologi Informasi dan Multimedia Universitas Surabaya*, pages C40–C50.
- Muharromah, A. (2014). *Analisis Morfologi Jalan Kota dengan Penerapan Teori Graf Dominating Set*. Tidak dipublikasikan (Skripsi). Jember: Universitas Jember.
- Muharromah, A., Agustin, I. H., and Dafik (2014). Bilangan dominasi pada graf hasil operasi. *Prosiding Seminar Matematika dan Pendidikan Matematika Universitas Jember*, 1 (1).
- Munir, R. (2009). *Matematika Diskrit Edisi 3*. Bandung: Informatika Bandung.
- Rofiah, M. and Dafik (2014). Kajian himpunan dominasi pada graf khusus dan operasinya. *Prosiding Seminar Matematika dan Pendidikan Matematika Universitas Jember*, 1 (1).
- Slamin (2009). *Desain Jaringan: Pendekatan Teori Graf*. Jember: Universitas Jember.
- Wardani, D. A. R. (2014). *Analisis Topologi Jaringan Wide Area Network (WAN) dengan Penerapan Teori Graf Dominating Set*. Tidak dipublikasikan (Skripsi). Jember: Universitas Jember.